אינפי 1

תוכן העניינים

אינפי 1

פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

תוכן העניינים

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0 \, , \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x.

ג. לכל מספר טבעי n, המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x, $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:
$A = \{x \mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.

5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x \mid 10<x<20,\ x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x \mid x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x \mid x=2m,\ m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$ ב. $2\in A$ ג. $\{2\}\in A$

ד. $\{2\}\subseteq A$ ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ ו. $\phi\in A$

ז. $\phi\subseteq A$ ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ ט. $\{2,4\}\subseteq A$

י. $\{2,4\}\in A$ יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ יב. $\{2,5\}\subseteq A$

יג. $\{2,5\}\in A$ יד. $\{1,4\}\in A$

7) מצא שתי קבוצות, A ו- B, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$, $E=\{7,8\}$

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

9) הוכח: $A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$.

10) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$.

רשום את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

11) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=[1,4)$, $B=(-2,1)$, $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\le x\le 4\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2^x=0\}$

רשום את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

12) נתונות 3 קבוצות:

$A=\{4,5,6,7,8\}$, $B=\{5,6,7,8,9\}$, $C=\{4,5,6,10\}$

א. חשב את $(A-B)-C$.

ב. חשב את $A-(B-C)$.

13) נתון: $U=\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$, $A=\{12,15,18\}$, $B=\{13,15,17\}$.

הדגם את כלל דה מורגן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

14) הוכח את כלל דה מורגן הראשון $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

15) מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות:

א. $A=[1,\infty)$

ב. $B=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

ג. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+4>0\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|<2\ \vee\ x>4\}$

16) הצג באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

א. $A\cap B$
ב. $A\cup B$
ג. A^c
ד. $A\cap B^c$
ה. $A^c\cap B$
ו. $A\cup B^c$
ז. $A^c\cup B$
ח. $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$
ט. $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

17) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי $A\setminus B=A\cap B^C$.
הראה זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.

ב. נסמן: $X=C\setminus(A\cap B),\ Y=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$.
הוכח כי $X=Y$.

ג. נסמן: $X=A\setminus(B\cup C),\ Y=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
הוכח כי $X=Y$.

18) תהיינה X,Y,Z קבוצות כלשהן.
טענה א': $X\cap Y\cap Z=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus Z)\cup(Z\setminus X)$.
טענה ב': $((X\cap Y)\cup Z)^C=(X^C\cup Y^C)\cap Z^C$.
טענה ג': $X\setminus(Y\setminus Z)=(X\setminus Y)\setminus Z$.
איזו טענה נכונה לכל בחירה של X,Y,Z?

19) הוכח כי אם הנקודה x_1 שייכת לסביבת ε של הנקודה x_0,
אז קיימת סביבת δ של x_1 שמוכלת בסביבת ε של הנקודה x_0.

20) הוכח שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

21) הוכח כי אם x_0 לא שייכת לקטע הסגור $[a,b]$, אז קיימת סביבה של הנקודה x_0 אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע $[a,b]$.

22) הוכח כי אם $|x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon$, אז $|xy-x_0y_0|<\varepsilon(|x_0|+|y_0|+\varepsilon)$.

תשובות סופיות

1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל x קיים y, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל n טבעי המספר n^3-n מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2\ ,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.

ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.

יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$ $A=\{1,2\}$

8) א. $A,\ C$ ב. $E,\ D$ ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) שאלת הוכחה.

10) 1) $A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$, 2) $A\cap B=\{4,6,8\}$, 3) $(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$

4) $(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$, 5) $(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$

11) 1) $A\cup B=(-2,4)$, 2) $A\cap B=\phi$, 3) $(A\cup B)\cap C=(0,4)$,

4) $(B\cup C)\cap(B\cup D)=(-2,1)$, 5) $(B\cap C)\cup(B\cap D)=[0,1)$

12) א. ϕ ב. $\{4,5,6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א. $A^C=(-\infty,1)$ ב. $B^C=[1,4]$ ג. $C^C=[1,4]$

ד. $D^C=(-\infty,1]\cup[3,4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענה ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

המספרים האי-רציונליים

שאלות

1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכח שהמספר זוגי.
ב. הוכח כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכח שהמספר מתחלק ב-3.
ב. הוכח כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכח שהמספר זוגי.
ב. הוכח כי $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

4) הוכח כי $\sqrt{n}$ הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- n טבעי שאינו ריבוע של מספר).

5) הוכח או הפרך:
א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.
ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.

6) א. הוכח כי $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ב. הוכח כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ג. הוכח כי $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

7) א. יהי p מספר ראשוני ויהיו a,k מספרים טבעיים.
הוכח כי: $p|a^k \Leftarrow p|a$.
ב. הוכח: אם $n \neq N^k$, אז $\sqrt[k]{n}$ הוא מספר אי-רציונלי $(n,k,N \in \mathbb{N})$.

הערת סימון: אם מספר a מתחלק במספר b מסמנים $b|a$,
ואומרים גם "b מחלק את a".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

שאלות

1) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{n-1}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדוק האם הקבוצה חסומה.

ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

2) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{1}{n^4+2n+1}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדוק האם הקבוצה חסומה.

ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

3) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{n^4+n^2+3}{2n^4+2n^2+8}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדוק האם הקבוצה חסומה.

ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

4) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{[cn]}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\ ,\ 0<c\in\mathbb{R}\right\}$.

א. הוכח שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצא את $\sup A$.

ב. הוכח שהקבוצה חסומה מלמטה ומצא את $\inf A$.

5) נתונה הקבוצה $A=\left\{n^5-n+4 \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדוק האם הקבוצה חסומה.

ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה במידה והם קיימים.

6) נתונה הקבוצה $A=\left\{11-4^n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדוק האם הקבוצה חסומה.

ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

7) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{4n-1}{5n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדוק האם הקבוצה חסומה.

ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

8) מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

א. $A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$

ב. $B=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid |x-1|\le 1\right\}$

ג. $C=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2-4}{(x-2)^2}\le 0\right\}$

ד. $D=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=1+\frac{n+1}{n+4}\sin\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

9) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים S.
הוכח שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.

ב. הוכח שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

10) הוכח את הטענות הבאות:

א. אם α הוא הסופרמום של הקבוצה A, אז לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$, קיים איבר $x\in A$, כך ש- $\alpha-\varepsilon<x\le\alpha$.

ב. אם β הוא האינפימום של הקבוצה A, אז לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$, קיים איבר $x\in A$, כך ש- $\beta\le x<\beta+\varepsilon$.

11) הוכח את הטענות הבאות:

א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.
(משפט הצפיפות של הממשיים)

ב. עבור קטעים מהטיפוס: $(a,b),[a,b),(-\infty,b)$, לא קיים מקסימום.

ג. עבור קטעים מהטיפוס: $[a,\infty),(a,\infty),(-\infty,\infty)$, לא קיים מקסימום.

ד. עבור קטעים מהטיפוס: $(a,b),[a,b),(-\infty,b)$, הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.

ה. אם S היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- S יש חסם עליון, ומתקיים $\max S=\sup S$.

12) תהי A תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$, ויהי $x\in\mathbb{R}$.
נגדיר את המרחק בין x ל- A על ידי: $d\left(x,A\right)=\inf\left\{\left|x-a\right| \mid a\in A\right\}$.
אם $\alpha\in\mathbb{R}$ הוא החסם העליון של A, הראה כי $d\left(\alpha,A\right)=0$.

13) הוכח שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.

14) הוכח שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.

15) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- K קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.
נתבונן בקבוצה $-K=\left\{-x \mid x\in K\right\}$.
הוכח שהקבוצה $-K$ חסומה מלמעלה.

ב. הוכח שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

16) תהי T קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
תהי S קבוצה חלקית לא ריקה של T.
הוכח כי:

א. ל- T יש חסם עליון $\sup T$.

ב. ל- S יש חסם עליון $\sup S$.

ג. $\sup S\le\sup T$.

ד. אם S ו- T בעלות מקסימום, אז $\max S\le\max T$.

17) יהיו A ו-B שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.
א. נניח כי לכל $x \in A$ קיים $y \in B$, כך ש-$x < y$.
הוכח כי $\sup A \le \sup B$.
האם יהיה נכון לומר ש-$\sup A < \sup B$?
ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל $y \in B$ קיים $x \in A$, כך ש-$y < x$.
הוכח כי $\sup A = \sup B$.

18) נניח ש-A ו-B הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,
כך ש-$\sup A = \inf B$.
הוכח שלכל מספר $\delta > 0$, קיים מספר x ב-A, ומספר y ב-B, כך ש-$x + \delta > y$.

19) נניח ש-A ו-B הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,
כך ש-$\sup A \le \inf B$.
נניח שלכל מספר $\delta > 0$ קיים מספר x ב-A, ומספר y ב-B, כך ש-$x + \delta > y$.
הוכח כי $\sup A = \inf B$.

20) נניח ש-A קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום,
ונניח כי $x < \sup A$.
הוכח שיש לפחות שני איברים בקבוצה A, שנמצאים בין x ל-$\sup A$.

21) תהי S קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
הוכח כי אם $c \ge 0$, אז ל-$c \cdot S$ יש חסם עליון, ומתקיים $\sup(c \cdot S) = c \cdot \sup S$.

22) יהיו S ו-T קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
הוכח כי הקבוצה $S + T$ היא בעלת חסם עליון ומתקיים:
$\sup(S + T) = \sup S + \sup T$.

23) יהיו S ו-T קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
א. הוכח כי הקבוצה $S \cup T$ היא בעלת חסם עליון.
ב. הוכח כי $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$.

24) תהיינה U,T,S קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
נניח כי לכל $s \in S$ ולכל $t \in T$ קיים $u \in U$, המקיים את התנאי: $u \ge s + t$.
הוכח כי $\sup U \ge \sup T + \sup S$.

25) הוכח את הטענות הבאות:

א. אם S ו- T הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים,
כך שכל איבר של S אינו גדול משום איבר של T,
אז קיימים $\sup S, \inf T$, ומתקיים: $\sup S \le \inf T$.

ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה S מתקיים: $\inf S \le \sup S$.
האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

26) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נסח והוכח את משפט ארכימדס.

ב. נסח והוכח את תכונת ארכימדס.

ג. הוכח שלכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n, כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

ד. הוכח שלכל שני מספרים ממשיים α, β, המקיימים $\alpha < \beta$, קיים מספר טבעי n, כך ש- $\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$ וגם $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$.

27) תהי A תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A.
נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$, כך ש- $a_n > \alpha - \frac{1}{n}$.
הוכח כי α הוא הסופרמום של A.

28) הוכח שלכל מספר ממשי c **קיים** מספר שלם **יחיד** $m \in \mathbb{Z}$, כך ש- $m \le c < m+1$.
למספר m קוראים הערך השלם של c, ומסמנים $m = [c]$.

29) יהיו a ו- b שני מספרים ממשיים המקיימים $|a-b| < \frac{1}{n}$, לכל מספר טבעי n.
הוכח כי $a = b$.

30) ענה על הסעיפים הבאים:

א. לכל n טבעי נגדיר $I_n = [n, \infty)$.
הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

ב. לכל n טבעי נגדיר $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$.
הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \ne \phi$.

31) ענה על הסעיפים הבאים:

א. לכל n טבעי נגדיר $I_n=[a_n,b_n]$.
נניח כי $I_{n+1}\subset I_n$ לכל n.
הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n\neq\phi$.

ב. לכל n טבעי נגדיר $I_n=\left(0,\frac{1}{n}\right)$.
הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n=\phi$.

ג. בסעיף ב' התקיים כי $I_{n+1}\subset I_n$ לכל n, וכן $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n=\phi$.
האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

32) לכל n טבעי נגדיר $I_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$.
הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n=\{0\}$.

תשובות סופיות

1) א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A=\inf A=0,\ \sup A=1$

2) א. הקבוצה חסומה. ב. $\max A=\sup A=\frac{1}{4},\ \inf A=0$

3) א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A=\inf A=\frac{5}{12},\ \sup A=\frac{1}{2}$

4) א. הקבוצה חסומה. ב. $\sup A=c,\ \inf A=[c]$

5) א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב. $\min A=4$

6) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.
ב. $\max A=7$

7) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי $\frac{4}{5}$, וחסומה מלמטה על ידי $\frac{3}{5}$;
לכן, הקבוצה חסומה. ב. $\sup A=\frac{4}{5},\ \min A=\frac{3}{5}$

8) א. $\max A=\frac{5}{4},\quad \inf A=-1$ ב. $\min B=0,\ \max B=2$
ג. $\min C=-2,\quad \sup C=2$ ד. $\inf D=0,\quad \sup D=2$

שאלות **9-32** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

קבוצה צפופה

שאלות

1) הוכח שקבוצת הממשיים צפופה בקבוצת הממשיים.

2) הוכח שקבוצת הרציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.

3) הוכח שקבוצת האי-רציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.

4) הוכח שהקבוצה $A=\left\{\sqrt{10}q \mid q\in\mathbb{Q}\right\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.

5) הוכח שהקבוצה $A=\left\{\sqrt{m}-\sqrt{n} \mid m,n\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.

6) יש המגדירים קבוצה צפופה בממשיים כך:
תת-קבוצה S של $\mathbb{R}$ היא צפופה (ב- $\mathbb{R}$),
אם לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $s\in S$, כך ש- $|s-x|<\varepsilon$.
הוכח שאם S תת-קבוצה של $\mathbb{R}$ מקיימת את התכונה,
שלכל $a,b\in R$ קיים $s\in S$, כך ש- $a<s<b$, אז S צפופה ב- $\mathbb{R}$.

7) הוכח שהקבוצה $A=\left\{q\sqrt{10} \mid 0<q\in\mathbb{Q}\right\}$ צפופה ב- $[0,1]$.

8) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע $(1,\infty)$.
הוכח שהקבוצה $B=\left\{\frac{a}{n} \mid a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה בקטע $(0,1)$.

9) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע $[0,1]$.
הוכח שהקבוצה $B=\left\{na \mid a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה בקטע $[0,\infty)$.

10) הוכח, שקבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים, שלא מופיעה בהם הספרה 4,
אינה צפופה בקטע $I=[0,1]$.

11) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע $(1,\infty)$ וצפופה בו.

הוכח שהקבוצה $C=\left\{\frac{a}{n^2(a+1)}:a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה צפופה בקטע $[0,1]$.

12) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע $[0,1]$.

הוכח שהקבוצה $C=\left\{\frac{a+1}{n^2}\mid a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה צפופה בקטע $[0,1]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

הערך השלם

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות :

א. $[x+4]=10$

ב. $[x+4]=-10$

ג. $[x+4]^2=100$

ד. $[2x^2+1]=9$

ה. $[x^2+x-1]=-2$

ו. $[x^2-\ln x+e^x-x^5]=0.5$

2) פתור את המשוואה $[x+4]=2x+1$.

3) פתור את המשוואה $[16x^2+7]=8x+6$.

4) פתור את המשוואה $[x^2+x+4]=2x+6$.

5) פתור את המשוואות הבאות :

א. $[|x-4|+x]=4x+4$

ב. $[|x+1|-|x-1|]=x$

6) פתור את המשוואה $[4+[x+1]]=10$.

7) הוכיחו כי לכל x ממשי ו- m שלם מתקיים $[x+m]=[x]+m$.

8) פתור את אי-השוויונים הבאים :

א. $[x+4]<10$

ב. $[x+4]>-10$

ג. $[x+4]^2<100$

ד. $[x+4]\le 10$

9) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $[x]^2-5[x]+6\le 0$

ב. $[x-1][x-2]+[x+10]>3[x+2]+[2.44]$

10) הוכיחו, כי לכל x ו- y ממשיים, מתקיים:

א. $[x]+[y]\le[x+y]\le[x]+[y]+1$

ב. $x<y \ \Rightarrow\ [x]\le[y]$

תשובות סופיות

1) א. $6\le x<7$ ב. $-14\le x<-13$ ג. $[6,7)\cup[14,-13)$

ד. $\left(-\sqrt{4.5},-2\right]\cup\left[2,\sqrt{4.5}\right)$ ה. $-1<x<0$ ו. ϕ

2) $x=2.5,\ 3$

3) $x=\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8}$

4) $x=-1,\ 2$

5) א. $x=0$ ב. $x=2,\ 0,\ -2$

6) $5\le x<6$

7) שאלת הוכחה.

8) א. $x<6$ ב. $x>-14$ ג. $-14<x<6$ ד. $x<7$

9) א. $2\le x<4$ ב. $x<1 \ \text{ or } \ x>4$

10) שאלת הוכחה.

סימן הסכימה

שאלות

1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ ב. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$

ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$ ה. $\sum_{t=1}^{8} tx^t$ ו. $\sum_{k=4}^{10} na_{k+1}$

ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ ח. $\sum_{k=-1}^{3} \left(k^2+1\right)$ ט. $\sum_{\ell=1}^{3} \left(\ell^2 - x_{2\ell} - 4\right)$

2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$

ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

ד. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8$

ה. $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\ldots+43\cdot 44$

ו. $3\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 4+12\cdot 5+15\cdot 6+18\cdot 7+21\cdot 8$

ז. $5^2+7^2+\ldots+27^2$

ח. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots.+\frac{1}{10\cdot 11}$

ט. $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\frac{18}{243}$

י. $4+\frac{8}{5}+\frac{12}{25}+\frac{16}{125}+\frac{20}{625}$

3) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k+4k^2\right)$ ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$

ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3-k}{k+1}$ ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$ ו. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k^2+1\right)(k-2)$

* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה'):

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

4) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{20}\frac{5\cdot 4^k+8^k}{2^k}$

ב. $\sum_{k=1}^{11}\frac{2\cdot 4^{k+2}+10^k}{0.4^k}$

ג. $\sum_{k=10}^{20}2^{2k+10}$

* תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: $(a\neq 1)$ $\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}$.

5) חשב את הסכומים הבאים:

א. $1^2+2^2+3^2+...+20^2$

ב. $4^2+5^2+6^2+...+24^2$

ג. $2^2+4^2+6^2+...+22^2$

ד. $1^2+3^2+5^2+...+17^2$

6) הוכח כי:

א. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+4}}{k+2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k+6}}{k+3}$

ב. $\sum_{k=4}^{n-3}\frac{4k+17+2^{2k}}{k+1}=\sum_{k=8}^{n+1}\frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$

7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

א. $\sum_{4}^{11}k^2$

ב. $\sum_{10}^{20}4^{2k}$

תשובות סופיות

1) א. $4^0+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+4^8+4^9+4^{10}$

ב. $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4$

ג. $4a_4+4a_5+4a_6+4a_7+4a_8+4a_9+4a_{10}$

ד. $4\cdot7^2a_7+4\cdot8^2a_8+4\cdot9^2a_9+4\cdot10^2a_{10}+4\cdot11^2a_{11}+4\cdot7^2a_7$

ה. $1x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+8x^8$

ו. $na_5+na_6+na_7+na_8+na_9+na_{10}+na_{11}$

ז. $4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n$

ח. $\left((-1)^2+1\right)+\left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)$

ט. $\left(1^2-x_2-4\right)+\left(2^2-x_4-4\right)+\left(3^2-x_6-4\right)$

2) א. $\sum_{k=0}^{7}2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10}2k$ ג. $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^{7}k(k+1)$

ה. $\sum_{k=1}^{22}(2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^{7}3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14}(2n-1)^2$

ח. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^{5}\frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^{4}\frac{4k}{5^{k-1}}$

3) א. 220 ב. 1650 ג. 4360

ד. 4360 ה. 28 ו. 4545

4) א. $5\cdot\left(2^{21}-2\right)+\frac{4}{3}\left(4^{20}-1\right)$ ב. $32\cdot\frac{10\left(10^{11}-1\right)}{10-1}+\frac{25\left(25^{11}-1\right)}{25-1}$

ג. $2^{10}\left[\frac{4\left(4^{20}-1\right)}{4-1}-\frac{4\left(4^{9}-1\right)}{4-1}\right]$

5) א. 2870 ב. 4886 ג. 2024 ד. 969

6) הוכחה.

7) א. $\frac{8(8+1)(2\cdot8+1)}{6}+6\cdot\frac{8(8+1)}{2}+9\cdot8$ ב. $4^{18}\cdot\frac{16\left(16^{11}-1\right)}{16-1}$

אינדוקציה

שאלות

1) הוכח באינדוקציה כי $4\cdot 10^n + 14\cdot 19^n$ מתחלק ב-9 לכל n טבעי.

2) הוכח באינדוקציה כי $\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$ $\left(k,n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}\right)$.

3) מצא את ה- n הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים $2^n \ge n^2$,
והוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

4) הוכח את הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה כי $(1+x)^n \ge 1+nx$, לכל n טבעי ולכל $x\ge -1$ ממשי.
הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכח כי $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, לכל n טבעי.
רמז: היעזר בתוצאת סעיף א'.

5) הוכח באינדוקציה כי $\dfrac{1}{1+xn} > (1-x)^n$ לכל $0<x<1,\ n\in\mathbb{N}$.

6) הוכח באינדוקציה כי $n!\le\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
רמז: היעזר במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

7) נתון כי $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$.
הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:

א. $a_n\le 2$

ב. $a_n\le a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיביות.

8) הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי,
אם $a_1=-1,\ a_2=0$, $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$,
אז $a_n=n^2-2n$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיבית.

9) הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי,

אם $a_1 = 1,\ a_2 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$,

אז $a_n = \frac{1}{6}\cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיביות.

10) הוכח באינדוקציה כי $4^n - 1$ מתחלק ב-15, לכל n טבעי **זוגי**.

11) הוכח באינדוקציה כי $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ $(n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R})$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

הערה: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים" בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

אי שוויונים מפורסמים

שאלות

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שלכל שני מספרים ממשיים x, y המקיימים $x<1, y>1$, מתקיים $x+y>xy+1$.

ב. הוכח באינדוקציה שלכל $n \geq 2$ טבעי:
אם $a_1 \cdot a_2 \cdot\cdot\cdot\cdot a_n = 1$, אז $a_1+a_2+\ldots+a_n \geq n$ $(0<a_i \in \mathbb{R})$.

2) נסח והוכח את **אי שוויון הממוצעים**.

3) הוכח שלכל $a,b \in \mathbb{R}$ מתקיים:

א. $|a+b| \leq |a|+|b|$ **(אי שוויון המשולש)**

ב. $|a-b| \leq |a|+|b|$

ג. $|a-b| \geq |a|-|b|,\quad |a-b| \geq |b|-|a|$

ד. $|a-b| \geq \left||a|-|b|\right|$

ה. $|a+b| \geq \left||a|-|b|\right|$

ו. $|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$ $(a_i \in \mathbb{R})$

4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נסח והוכח את **אי שוויון קושי-שוורץ**.

ב. הוכח כי אם $a_1+..+a_n=1$ אז $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geq \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R})$.

הערה: **אי שוויון ברנולי** מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".
נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

פתרון אי שוויונים

שאלות

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $x^2-12x>-32$

2) $(x-3)(x-7)\ge 8x-56$

3) $2x^2+2x+24\ge 0$

4) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\le 0$

6) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\ge 0$

7) $|x+2|<3$

8) $|6-2x|<x$

9) $|2x+3|<8<|5-x|$

10) $x^2-6|x+1|-1>0$

11) $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

12) $\sqrt{x+3}<7$

13) $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

14) $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

הערה: לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.

תשובות סופיות

1) $x>8$ או $x<4$

2) $x\ge 11$ או $x\le 7$

3) כל x

4) $x>3$ או $-3<x<1$

5) $\frac{1}{2}\le x<5$

6) $1\le x\le 6$

7) $-5<x<-1$

8) $2<x<6$

9) $-5\frac{1}{2}<x<-3$

10) $x>7$ או $x<-5$

11) $x>4$ או $x<-1$

12) $-3\le x<46$

13) $x<0.472$

14) אין פתרון.

עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

שאלות

1) חשב, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$

2) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{n^2-2}{(n+1)!}+\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

3) חשב:

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\binom{14}{11}$

4) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $1=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$

ב. $\binom{n-1}{k-1}=\frac{k}{n}\binom{n}{k}$

ג. $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

5) הוכח באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים:

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-2}=\binom{n}{2}$$

6) רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$ ב. $(x+2)^5$ ג. $(x-4)^3$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ לכל $0\leq k\leq n$, $k,n\in\mathbb{N}$.

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

8) הוכח שלכל $n\ge 1$ טבעי מתקיים:

א. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$

ב. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

ג. $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+9\binom{n}{2}-\ldots+3^n\binom{n}{n}=4^n$

9) מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a}+2a^2\right)^{10}$.

10) בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא a^7.
מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

11) מצא, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את x, וחשב את ערכו.

12) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}+\frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a=b=1$.

13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15.
מצא את n.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$

2) שאלת הוכחה.

3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 364

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) א. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

ב. $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

ג. $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

7) הוכחה.

8) הוכחה.

9) $T_4 = \frac{15}{2a}$

10) $T_7 = 924a^7$

11) $T_9 = 45$

12) א. $\frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6}$ ב. 2^{18}

13) $n = 6$

שדות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור $(\oplus)$ וכפל $(\otimes)$ על R.
בדוק, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א. $x\oplus y=x+y+4$, $x\otimes y=2xy$

ב. $x\oplus y=x+y$, $x\otimes y=2xy$

ג. $x\oplus y=y$, $x\otimes y=y^2$

2) נתונה הקבוצה $Q[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

הוכח שהקבוצה $Q[\sqrt{2}]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
ב. הוכח שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
ג. הוכח שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
ד. הוכח שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

4) יהיו a,b איברים בשדה.

א. הוכח כי $a+a=a \Leftarrow a=0$.
ב. הוכח כי $a\cdot 0=0\cdot a=0$.
ג. הוכח כי $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0\vee b=0$.

5) יהיו a ו-b איברים של שדה.
הוכח כי:

א. $(-1)\cdot a=-a$
ב. $(-a)b=a(-b)=-ab$

6) הוכח שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.
כלומר, הוכח כי $ab=cb\ \Rightarrow\ a=c$, לכל a,b,c, בשדה $(b\neq 0)$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

אינפי 1

פרק 2 - סדרות

תוכן העניינים

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{-n}\right)^{\ln n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+2}{n^2+1000n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+2n^2+6}{3n^2+10n}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+2n^2+6}{3n^5+10n}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-5n+6}{2n+10}-\dfrac{n}{2}\right)$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^4+2n^2+6+27n^6}}{\sqrt{3n^3+10n+4n^4}}$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1}-\sqrt{5n-1}}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16^n+4^{n+1}}{2^{4n+2}+2^{n+3}}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\cdot 9^n+3^{n+1}}{81^{0.5n}+3^{n+3}}$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{4n^2+2}{n^2+1000n}}$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{3n^3-5n-1}{n^3-2n^2+1}\right)$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{n^4+2n^2+6}{3n^4+10n}}$

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[5]{\dfrac{an+1}{bn+2}}$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+kn}-n\right)$

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

18) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2)$

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn}\right)$

20) $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin\left(\dfrac{4}{n}\right)$

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2+4n+1}$

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+n^2+1}$

23) $\lim\limits_{n\to\infty}4^n\sin\dfrac{1}{n}$

24) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

* רמז לשאלה **24**: $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

<u>הערה חשובה מאוד !</u>

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה x. יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי!
בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

1) 0
2) 4
3) ∞
4) 0
5) -5
6) 1
7) 1.5
8) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
9) 0.25
10) 4
11) 2
12) $\ln 3$
13) $e^{\frac{1}{3}}$
14) $(b\neq 0) \Leftarrow \left(\lim a_n=\sqrt[5]{a/b}\right)$, $(a>0,\ b=0) \Leftarrow (\lim a_n=\infty)$, $(a<0,\ b=0) \Leftarrow (\lim a_n=-\infty)$
15) 2.5
16) $\dfrac{k}{2}$
17) 0.5
18) 0.5
19) $\dfrac{a-b}{2}$
20) 4
21) 0.5
22) $\dfrac{1}{3}$
23) ∞
24) 1

חישוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשב את הגבולות הבאים :

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n$

6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2}$

7) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n}$

8) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^n$

תשובות סופיות

1) $e^{0.5}$

2) 1

3) e^2

4) e^{-1}

5) e^3

6) e^{-12}

7) e^{30}

8) e

חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(2n+1)}{n}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\sin n}{4n+\cos n}$

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+\sin 2n}{n^2+\cos 3n}$

6) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\arctan(2n-3)}{4n+\arctan(n-\ln n)}$

7) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

8) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{4n+\frac{1}{n}}}$

9) $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$

10) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

רמז לשאלה 9: הוכח כי $a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

11) הוכח שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

א. $a_n=\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{5}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+1}}\right)$

ב. $\alpha\in(0,1)$, $a_n=n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha}$

12) יהי x מספר ממשי וחיובי.

נתבונן בסדרה: $a_n=\frac{6n+\sqrt{\lfloor x^2n^2\rfloor}}{3n+\sqrt{2}}$.

הוכח כי $\lim_{n\to\infty}a_n>2$.

13) חשב את הגבול: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^{3n^2-4}+3^{2n^2+1}+4^{1.5n^2+5}+10^n}$.

14) חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3\sqrt{k}}}$.

15) תהי (a_n) סדרה **חיובית**, המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$ לכל n טבעי.

הוכח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?

תשובות סופיות

1) 4

2) 0

3) 0

4) 0.75

5) 3

6) $\frac{3}{4}$

7) 0

8) 16

9) 0

10) 1

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) 9

14) 1

15) שאלת הוכחה.

חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

שאלות

חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n}$

תשובות סופיות

1) 0

2) 0

3) 4

4) $\frac{1}{4e}$

5) ∞

חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות **1-3** נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).
הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

1) $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\ ,\ a_1=\sqrt{2}$

2) $a_{n+1}=\sqrt{2a_n-1},\ a_1=2$

3) $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),\ a_1=2$

4) יהיו $a>0$ ו- $x_1>0$.
נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, לכל n.
הוכח שהסרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$.

5) יהי $x_1=a\geq 0$.
נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{5}\left(x_n^2+6\right)$, לכל n.
א. מצא את כל הערכים של הקבוע a, עבורם הסדרה עולה/יורדת.
ב. קבע האם הסדרה x_n מתכנסת עבור $3<a<3.5$.

6) יהיו $0<b_1<a_1$
נגדיר: $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\ ,\ a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ לכל n.
הוכח שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

7) נתונה הסדרה $a_1=1,\ a_2=1$, $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$.

א.1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

<u>הנח</u> שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ קיים וחשב אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ קיים.
בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכח שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצא ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכח שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשב אותו.

ב.3. הוכח באינדוקציה שהביטוי הסגור שמצאת בסעיף ב.1. הוא אכן נכון.

תשובות סופיות

1) הגבול הוא 2 .

2) הגבול הוא 1.

3) הגבול הוא 1.

4) הגבול הוא $\sqrt{a}$.

5) א. אם $2\le a\le 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

6) שאלת הוכחה.

7) ב.1. $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$

חישוב גבול לפי ההגדרה

שאלות

בשאלות **1-7** הוכח על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+3}=\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\sin n}{2n^2+3}=\frac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+1}=1$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+1}{2n^2+n+3}=2$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\cos^2 n}{n^2+2}=0$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=2$

8) נתון כי הסדרה (a_n) מתכנסת.
הוכח שגבולה הוא יחיד.

9) נתון כי $a_n\to a,\ b_n\to b$.
הוכח, לפי ההגדרה, כי:
א. $(a_n+b_n)\to a+b$
ב. $(a_n\cdot b_n)\to a\cdot b$

בשאלות **10-14** הוכח על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

10) $\lim\limits_{n\to\infty}2n+4=\infty$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}n^3-n^2+5n+6=\infty$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\log(2n+5)=\infty$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{2n+1}=\infty$

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}=-\infty$

15) הוכח שהסדרה $1,101,2,102,3,103,4,104,\ldots$ שואפת לאינסוף.

16) הוכח שהסדרה $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\ldots$ שואפת לאינסוף.

17) הוכח שהסדרה $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots, (-1)^n n, \ldots$ לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

18) הוכח או הפרך :

א. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שלילת הגדרת הגבול של סדרה

שאלות

1) מצא את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות,
וכתוב את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

א. $1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \ldots$

ב. $1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, \ldots$

ג. $1, 0, -4, 1, 0, 4, 1, 0, -4, 1, 0, 4, \ldots$

2) מצא את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות,
וכתוב את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

א. $\frac{1}{3}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{2}{5}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \frac{3}{7}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}, \frac{4}{9}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}, \ldots$

ב. $\frac{3}{3}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}, \frac{7}{5}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}, \frac{11}{7}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}, \frac{15}{9}, \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}}, \ldots$

ג. $a_n = \frac{(-1)^n n + 4}{n+1}$

בשאלות **3-6** הוכח לפי ההגדרה כי :

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+10}{4n+2} \neq \frac{1}{2}$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n+1}{2n^2+2} \neq 1$

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n+1}{2n^2+n+2} \neq \frac{9}{4}$

6) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \neq 1$

7) בסעיפים א-ב הוכח לפי ההגדרה כי :

א. לסדרה $a_n = (-1)^n$ לא קיים גבול.

ב. 1 הוא לא הגבול של הסדרה $a_n = (-1)^n$.

ג. היעזר בתוצאת סעיף א' והוכח שלסדרה $b_n = (-1)^n \frac{3n+4}{n-5}$ לא קיים גבול.

8) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה $0,1,2,0,1,2,0,1,2,\ldots$ מתבדרת.

9) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה $3,2,1,3,2,1,3,2,1,\ldots$ מתבדרת.

10) הוכח, לפי ההגדרה, שלסדרה $0,0,1,0,0,1,0,0,1,\ldots$ לא קיים גבול.

11) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]$ מתבדרת.

12) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{n}{10}-\left[\frac{n}{10}\right]$ מתבדרת.

13) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{n+1} & n \text{ even}\\ \frac{2n+1}{n+2} & n \text{ odd}\end{cases}$ מתבדרת.

14) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה $\frac{1}{2},\mathbf{1},\frac{2}{3},\mathbf{\frac{1}{2}},\frac{3}{4},\mathbf{\frac{1}{3}},\frac{4}{5},\mathbf{\frac{1}{4}},\frac{5}{6},\ldots$ מתבדרת.

15) הוכח, לפי ההגדרה, שלסדרה $a_n=\frac{(-1)^n n+1}{n+2}$ אין גבול.

16) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\sqrt{n}-\left[\sqrt{n}\right]$ מתבדרת.

הדרכה: הוכח קודם את סדרת הטענות הבאה:

1. $\sqrt{m^2}-\left[\sqrt{m^2}\right]=0$ לכל m טבעי.
2. $\sqrt{m^2-1}>m-\frac{1}{2}$ לכל $m\geq 2$ טבעי.
3. $\left[\sqrt{m^2-1}\right]=m-1$ לכל $m\geq 2$ טבעי.
4. $\sqrt{m^2-1}-\left[\sqrt{m^2-1}\right]\geq\frac{1}{2}$ לכל $m\geq 2$ טבעי.

17) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{2n^2+4n+1}{n^2+2n+10}$ לא שואפת ל-∞.

18) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה $0,1,2,1,4,1,6,1,\ldots$ לא שואפת ל-∞.

19) נתונה הסדרה $-1,1,-2,2,-3,3,-4,4,-5,5,\ldots$.
הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה
א. לא שואפת ל-∞.
ב. לא שואפת ל-$-\infty$.

20) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=n\sqrt{10}+(-1)^n\left[n\sqrt{10}\right]$ לא שואפת ל-∞.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרת הגבול לפי היינה

שאלות

הוכח כי הגבולות הבאים אינם קיימים לפי היינה:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{|x-4|}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x+4}{\cos x+10}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x-[x]}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

שאלות

1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{5n}-2(-3)^n+2}{(-3)^{3n}+(-3)^n+2}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{5n}-2(-3)^n+2}{(-3)^{2n}+(-3)^n+2}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)^n$

2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor-n\right)$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lfloor 4n\rfloor-4\lfloor n\rfloor\right)$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{4}-\left[\dfrac{n}{4}\right]\right)$

3) נתון ש- (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.

א. הוכח שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

ב. הוכח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$.

4) הוכח כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_n=\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

5) חשב את הגבול הבא $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right]^n$.

6) הוכח כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_1=2;\ a_{n+1}=\sqrt{11-(a_n)^2}$.

7) נתונה הסדרה a_n, המוגדרת על ידי: $a_1=2;\ a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{a_n}}$.
הוכח שהסדרה מתכנסת.

8) נתונה הסדרה a_n, המוגדרת על ידי: $(n\in\mathbb{N})\ a_1=0;\ a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$.
הוכח שהסדרה מתכנסת.

9) א. הוכח שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.
ב. מצא סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

10) נתונה סדרה $a_n=\sin\frac{\pi}{4}n$.
מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

11) נתונה סדרה $a_n=n\sin\frac{\pi}{4}n$.
מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

12) נתונה סדרה $a_n=1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,...$.
מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

13) נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$.
מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

14) נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\cdot\sqrt[n!]{n^{40}}+\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n}{4}\right)$.
מצא את $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

15) נתונה סדרה a_n. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n=\sqrt[n]{n}\cdot a_n$.
הוכח כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

16) תהי a_n סדרה. נניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים של הסדרה הנתונה.
הוכח שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיימים $m, n \in \mathbb{N}$, כך ש- $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$.

17) נתונה סדרה a_n.
a_{n_k} ו- a_{m_k} שתי תת-סדרות של a_n המקיימות:
1. $a_{n_k} \to L$, $a_{m_k} \to L$
2. כל איברי הסדרה a_n מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכח: $a_n \to L$.
הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות **4-5**.

18) נתונה סדרה חיובית a_n המקיימת $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = 1$.
הוכח כי הסדרה מתכנסת.

19) פתור את שני הסעיפים הבאים:
א. הוכח שלכל סדרה חסומה a_n, $\inf a_n \le \underline{\lim} a_n \le \overline{\lim} a_n \le \sup a_n$
הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
ב. מצא סדרה a_n שעבורה $\inf a_n < \underline{\lim} a_n < \overline{\lim} a_n < \sup a_n$.

20) הוכח שהסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.

21) הוכח את המשפט המפורסם הבא:
לכל שתי סדרות חסומות a_n, b_n מתקיים:
א. $\overline{\lim}(a_n + b_n) \le \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$
ב. $\underline{\lim}(a_n + b_n) \ge \underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n$

22) נתונות שתי סדרות חסומות a_n ו- b_n.
קבע האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכח את קביעתך.
א. ייתכן שמתקיים $\overline{\lim}(a_n + b_n) < \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$.
ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.
ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

23) יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות חסומות.
הוכיחו כי $\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)$.

24) תהי (a_n) סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}a_n)=1$.
א. הוכיחו שאם (a_n) מתכנסת, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.
ב. הוכיחו שאם $L>0$ הוא גבול חלקי של (a_n),
אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי שלה.
ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של (a_n).
ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,
ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של (a_n).

25) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות, (a_n) ו- (b_n),
המקיימות $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$.
ב. יהיו (a_n) ו- (b_n) שתי סדרות, המקיימות $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$.
הוכיחו שאם לכל n מתקיים $0\le a_n,b_n\le 1$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$.

26) תהי $a_n=\langle\sqrt{n}\rangle=\sqrt{n}-[\sqrt{n}]$.
א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה.
ב. מצאו את $\inf\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ו- $\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מינימום.
ג. הוכיחו כי לכל n מתקיים $\langle\sqrt{n^2-1}\rangle=\sqrt{n^2-1}-n+1$.
ד. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-(n-1)\right)=1$.
ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L=1$ הוא גבול חלקי של (a_n).
ו. מצאו את $\sup\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ואת $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$
יש מקסימום.

27) תהי $(a_n)=\left(n-\sqrt{n}\left[\sqrt{n}\right]\right)$.

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.

ב. הוכיחו ש-0 הוא גבול חלקי של (a_n).

ג. מצאו את $\inf\{a_n \mid n\in N\}$ ואת $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, וקבעו האם ל-$\{a_n \mid n\in N\}$ יש מינימום.

ד. יהי ℓ מספר טבעי.
הוכיחו שכמעט לכל n, מתקיים $n<\sqrt{n^2+2\ell}<n+1$.

ה. יהי ℓ מספר טבעי.
הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2\ell}-n\right)=\ell$.

ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של (a_n).

ז. האם (a_n) חסומה מלעיל?

ח. חשבו את $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

ט. מצאו את $\sup\{a_n \mid n\in \mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n\in \mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

תשובות סופיות

1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.
ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm\frac{1}{e}$.

2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, -1.
ב. הגבול של הסדרה הוא 0.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0, 0.25, 0.5, 0.75$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט שטולץ

שאלות

1) חשב: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

2) חשב: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\ldots+n\cdot(2n+1)}{n^3}$.

3) חשב: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, כאשר p קבע שלם וחיובי.

4) חשב: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot c_1+2\cdot c_2+3\cdot c_3+\ldots+n\cdot c_n}{n^3}$, אם ידוע כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}=k$.

5) חשב: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[1^2\cdot a\right]+\left[2^2\cdot a\right]+\ldots+\left[n^2\cdot a\right]}{n^3}$, כאשר a קבוע ממשי.

6) נתון כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$.

הוכח כי:

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=L$ (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- L).

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=L$ (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל- L).

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=L$ (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל- L).

* הערה: בסעיף ב' הנח כי $L\neq 0$. בסעיף ג' הנח כי $a_n>0$ לכל n.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{2}{3}$

3) $\frac{1}{p+1}$

4) $\frac{k}{3}$

5) $\frac{a}{3}$

6) שאלת הוכחה.

מבחן קושי להתכנסות סדרות

שאלות

1) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$, לכל n.
הוכח שהסדרה מתכנסת.

2) הוכח שהסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת לאינסוף.

3) הוכח כי הסדרה $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

4) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < a^n$, לכל n, כאשר $0 < a < 1$.
הוכח שהסדרה מתכנסת.

5) הוכח כי הסדרה $a_n = \frac{\cos\alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$ מתכנסת.

6) סדרה x_n מקיימת: $|x_{n+2} - x_{n+1}| \le k|x_{n+1} - x_n|$ לכל n, כאשר $0 < k < 1$.
הוכח שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.

7) נתונה סדרה x_n המוגדרת על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$, $x_1 = 1$.
הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכח שהסדרה x_n מתכנסת.

א. $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $\quad x_1 = 1,$

ב. $x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n^2}$, $\quad x_1 = 1,$

ג. $x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$, $\quad x_1 = 1,$

9) נגדיר סדרה x_n על ידי: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_{n+2}=\frac{3}{4}x_n+\frac{1}{4}x_{n+1}$.

הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

10) סדרה x_n מקיימת: $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$, לכל n טבעי, ו- $1\le x_1\le x_2\le 2$.

הוכח שהסדרה מתכנסת.

הדרכה: הוכח ראשית שלכל n טבעי מתקיים $\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge\frac{1}{2}$.

11) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה x_n.

אם $\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$, אז x_n מתכנסת.

ב. אם לכל n מתקיים $|x_{n+2}-x_{n+1}|<|x_{n+1}-x_n|$, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ג. אם סדרה x_n מקיימת את תנאי קושי, אז קיים $0<\alpha<1$ כך שלכל n טבעי:

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|\le\alpha\cdot|x_{n+1}-x_n|$$

הערה

בשאלות **7-10** מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחת בשאלה **6**.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שאלות הוכח או הפרך

<u>הערת ניסוח</u>

הניסוחים הבאים שקולים:

א. קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיימת הטענה X.

ב. כמעט לכל n מתקיימת הטענה X.

ג. לכל n, פרט למספר סופי של n-ים, מתקיימת הטענה X.

שאלות

בשאלות **1-13** הוכח או הפרך את הטענה הנתונה:

1) אם a_n סדרה חסומה, אז יש לה גבול.

2) אם b_n סדרה לא חסומה, אז $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$ או $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-\infty$.

3) אם $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|=k$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=k$ או $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=-k$.

4) אם d_n סדרה עולה, אז היא לא חסומה.

5) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול, אז גם ל- (a_n+b_n) וגם ל- $(a_n\cdot b_n)$ אין גבול.

6) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול, אז גם ל- (a_n/b_n) אין גבול.

7) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n\cdot b_n)$ מתבדרת.

8) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n\cdot b_n)$ מתכנסת.

9) אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2=L$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{L}$.

10) אם $a_n<b_n$ לכל n, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n<\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

11) אם $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ וגם b_n חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} a_n b_n=\infty$.

12) אם $\lim_{n\to\infty} a_n=k$ וגם $a_n<1$ לכל n, אז $k<1$.

13) אם $\lim_{n\to\infty} a_n=1$, אז $\lim_{n\to\infty}(a_n)^n=1$.

14) הוכח או הפרך:

א. אם כל האיברים של סדרה מתכנסת הם מספרים רציונליים, אז גם גבולה הוא מספר רציונלי.

ב. אם a_n ו- b_n $(b_n\neq 0)$ סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n=\frac{a_n}{b_n}$ חסומה.

ג. אם a_n סדרה עולה, אז גם הסדרה $b_n=(a_n)^2$ עולה.

ד. אם $\lim_{n\to\infty} a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0$, אז הסדרה a_n חסומה.

ה. אם a_n ו- b_n סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n=\frac{1}{2^{a_n}}\left(b_n^2+2b_n\right)$ חסומה.

ו. אם a_n סדרה מתכנסת ו- b_n $(b_n\neq 0)$ סדרה חסומה, אז לסדרה $(a_n b_n^2)$ יש תת-סדרה מתכנסת.

ז. אם a_n סדרה מתכנסת, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n>N$ מתקיים $\left|\frac{a_n}{n}-1\right|<\frac{1}{2}$.

ח. אם לסדרה יש גבול חלקי, אז היא חסומה.

בשאלות **15-18** הוכח או הפרך את הטענה הנתונה:

15) אם לכל n מתקיים: $a_{n+1}<a_n^2$, $a_n\in(0,1)$ אז הסדרה a_n מתכנסת.

16) הסדרה $a_n=\frac{1-2+3-4+5-6+\ldots+(-1)^{n-1}n}{n}$ מתבדרת.

17) אם לכל n מתקיים: $4x_n(1-x_{n+1})>1$, $x_n\in(0,1)$ אז הסדרה x_n מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$.

18) לכל מספר רציונלי קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים השואפת אליו.

19) הוכח או הפרך:

א. אם הסדרה $(x_n+\frac{1}{n}x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ב. אם הסדרה $\left(x_n^2+\frac{1}{n}x_n\right)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.

20) x_n סדרה של מספרים **שלמים** המקיימת $x_{n+1}\neq x_n$ לכל n.

הוכח או הפרך:

א. הסדרה x_n לא מקיימת את תנאי קושי.

ב. לסדרה x_n לא יכולה להיות תת-סדרה מתכנסת.

21) הוכח או הפרך:

א. אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ ו- $a<b$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n<b_n$.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ וכמעט לכל n מתקיים $a_n\le b_n$, אז $a\le b$.

22) תהי (a_n) סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הוכח או הפרך:

א. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n=0$.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ge 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n\ge 0$.

ג. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n\neq 0$.

ד. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n>0$.

23) הוכח או הפרך:

א. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $a_n\le k$ לכל n, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le k$.

ב. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $a_n<k$ לכל n, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le k$.

24) תהי (a_n) סדרה **חיובית**, המקיימת $a_{n+1}\le\frac{a_n-a_n^2}{2}$, לכל n.

הוכח או הפרך: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

25) הוכח או הפרך:

אם $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^2=0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

26) נתונות שתי סדרות (a_n) ו- (b_n), שעבורן: $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=4,\quad \lim_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=2$.

הוכח או הפרך:

א. $a_n\to 0,\ b_n\to 2$ או $a_n\to 2,\ b_n\to 0$.

ב. $a_nb_n\to 0$

27) נניח שסדרה a_n מקיימת $a_{2n-2}\le a_{2n}\le a_{2n+1}\le a_{2n-1}$ לכל n טבעי.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. a_n עולה.

ב. a_n יורדת.

ג. a_n מתכנסת.

ד. a_n לא מתכנסת.

ה. לסדרה לכל היותר שני גבולות חלקיים.

כיצד תשתנה תשובתך, אם נתון כי a_n מקיימת $a_{2n-2}<a_{2n}<a_{2n+1}<a_{2n-1}$ לכל n טבעי?

28) הסדרה (a_n) מקיימת את התכונה הבאה:

$0\le a_{m+n}\le\frac{1}{2}(a_m+a_n)$ לכל m,n טבעיים.

הוכח או הפרך: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

29) א. תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$.

הוכח או הפרך: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. תהיינה (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך ש- $\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0$.

הוכח או הפרך: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

30) נתונה הסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

הוכח או הפרך:

הגבול של הסדרה קיים והוא קטן מ- 3.

רמז: לכל $x\ge 0$ מתקיים $\ln(1+x)\le x$.

בשאלות **31-34** הוכח או הפרך את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\infty$.

31) אם כמעט כל איברי (a_n) ו- (b_n) חיוביים, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ או $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.

32) אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז גם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים.

33) א. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$.
ב. קיים $N>0$, כך שלכל $n>N$, מתקיים $b_n\neq 0$.
ג. אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=5$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

34) א. אם, כמעט לכל n, $b_n<a_n$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.
ב. אם, כמעט לכל n, $0<b_n<a_n$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

בשאלות **35-38** הוכח או הפרך את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=1$.

35) א. אם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים, אז כמעט כל איברי (b_n) חיוביים.
ב. אם (a_n) חיובית, אז קיים $N>0$, כך ש- $b_n>\frac{1}{2a_n}$, לכל $n>N$.

36) אם (a_n) ו- (b_n) חיוביות, אז (a_n) מתכנסת או (b_n) מתכנסת.

37) א. אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.
ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.
ג. אם (a_n) חיובית ואפסה, אז $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.

38) א. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|L|$.
* הערה: בסעיף זה (ורק בו) מדובר בטענה כללית שלא קשורה לנתוני השאלה.
ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=1$.

בשאלות **39-42** הוכח או הפרך את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי (a_n) ו-(b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=0$.

39) א. $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ או $\lim_{n\to\infty} b_n=0$.
ב. אם, כמעט לכל n, $a_n>1$, אז $\lim_{n\to\infty} b_n=0$.
ג. אם קיימים אינסוף ערכי n, כך ש-$a_n>1$, אז $\lim_{n\to\infty} b_n=0$.
ד. קיים $N>0$, כך שלכל $n>N$, מתקיים $b_n\neq 0$.

40) א. אם $\lim_{n\to\infty} b_n=5$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.
ב. אם, כמעט לכל n, $0<b_n<a_n$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.
ג. אם $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, אז $\lim_{n\to\infty} b_n=0$.

41) אם $\lim_{n\to\infty} b_n=1$, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n<\frac{1}{3}$.

42) א. אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז $\lim_{n\to\infty} a_n\neq\infty$.
ב. אם קיים קבוע $c>0$, כך ש-$b_n\geq c$ כמעט לכל n, אז $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

43) הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
א. קיימת סדרה (a_n) כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.
ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=4$.
ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\infty$.
ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ לא קיים.

44) הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$.

ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים.

45) הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} n|a_n - a_{n+1}| = \infty$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a_n - a_{n+1}) = \infty$.

46) נתונה סדרה חיובית (a_n).

הוכח או הפרך:

א. אם $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

הערה: תרגיל זה מלמד שמבחן השורש "חזק" ממבחן המנה במובן הבא:
כאשר מבחן המנה עובד, אז גם מבחן השורש עובד. אך ההיפך לא נכון.

47) נתונה סדרה חיובית (a_n), וידוע כי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים.

הוכח או הפרך:

א. הסדרה (na_n) אינה חסומה.

ב. הסדרה $(a_{n+1} - a_n)$ חסומה.

ג. הסדרה $\sqrt[n]{a_n}$ חסומה.

ד. הסדרה $\frac{a_n}{n}$ מתכנסת.

ה. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$.

48) סדרה (a_n) תיקרא יורדת אם היא מקיימת $a_{n+1} < a_n$ לכל n.
הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
א. אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < |a_n|$, אז היא יורדת.
ב. אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < a_n$, אז היא יורדת.
ג. אם סדרה (a_n) מקיימת $a_{n+1} < |a_n|$, אז היא יורדת.

49) תהי (a_n) סדרה, המקיימת $a_{n+1} - a_n > -1$ ו- $|a_n| > 2$, לכל n טבעי.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם קיים N טבעי, כך ש- a_N חיובי, אז $a_n > 2$ לכל $n \ge N$.
ב. כמעט כל איברי (a_n) חיוביים או שכל איברי (a_n) שליליים.
ג. אם לכל n מתקיים בנוסף $a_{n+1} < \frac{a_n}{a_1}$, אז $a_1 < -1$.

50) תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם קיים קבוע $c > 0$, כך שלכל n מתקיים $|a_n| \ge c$, אז מתקיים:
כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.
ב. אם $|a_n| > 0$ לכל n, אז מתקיים:
כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.
ג. אם לכל n מתקיים $|a_n| \ge n$, אז (a_n) מתכנסת במובן הרחב.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינפי 1

פרק 3 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

אינפי 1

פרק 4 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

1) $y=x^3-x^2-4x+1$

2) $y=\frac{1}{x^2-4}$

3) $y=\frac{4x+1}{x^2+1}$

4) $y=\frac{1}{x^3-x}$

5) $y=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

6) $y=\sqrt{x-4}$

7) $y=\sqrt{x^2+x-2}$

8) $y=\sqrt[3]{x^2+x-1}$

9) $y=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

10) $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$

11) $y=\log x+\frac{1}{\log x}$

12) $y=e^{x^2+x+1}$

13) $y=\log_x\left(x+4\right)$

14) $y=\tan\left(10x\right)$

15) $y=\cot\left(4x\right)$

16) $y=\arctan\left(x+4\right)$

17) $y=\arcsin\left(x-4\right)$

18) $y=\arccos\left(x+1\right)$

תשובות סופיות

1) כל x.

2) $x \neq \pm 2$

3) כל x.

4) $x \neq 0,1,-1$

5) $x \neq 2,-1$

6) $x \geq 4$

7) $x \leq -2\ ,\ x \geq 1$

8) כל x.

9) $-1 < x < 1$

10) $x < -2\ ,\ x > 1$

11) $x > 0\ ,\ x \neq 1$

12) כל x.

13) $x > 0\ ,\ x \neq 1$

14) $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

15) $x \neq \frac{\pi k}{4}$

16) כל x.

17) $3 < x < 5$

18) $-2 < x < 0$

הרכבת פונקציות

שאלות

1) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x-4$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\frac{4}{x}$.

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

2) נתון: $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$.

חשב $f(f(x))$ עבור $x=3$.

3) נתון: $g(x)=\frac{5-x}{x-7}$ $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$.

חשב $f(g(x))+g(f(x))$ עבור $x=8$.

4) נתון: $g(x)=\ln x$, $f(x)=x^2-7x$.

חשב $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

5) נתון: $g(x)=\ln x$ $f(x)=e^{2x}$.

חשב $f(g(x))$ עבור $x=2$.

6) נתון: $g(x)=\begin{cases} x+3 & x>4 \\ 3x & x\le 4 \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ x^2 & x\le 0 \end{cases}$.

חשב $f(g(x)),\ g(f(x))$.

7) נתונות הפונקציות:

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

מצא נוסחה עבור ההרכבה $z(x)=g(f(x))$.

8) נתונות הפונקציות:

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

א. מצא נוסחה עבור ההרכבה $h(x)=f(g(x))$.

ב. נתון ש- $n\in\mathbb{Z}$ ו- $h(n)\notin\mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n\le -3$
2. $n\ge 1$
3. n אי-זוגי שלילי.
4. אף תשובה אינה נכונה.

9) נתון $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

מצא את $f^n(x)=\underbrace{f(f(f(...(f(x)))}_{n\,\text{Times}}$.

תשובות סופיות

1) א. -3 ב. 4 ג. x^2-4 ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. x

2) 3

3) $\frac{69}{13}$

4) -10

5) 4

6) $g\left(f\left(x\right)\right)=\begin{cases} x^2+3 & x<2 \\ 3x^2 & -2\le x\le 0 \\ \frac{1}{x}+3 & 0<x<\frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x\ge\frac{1}{4} \end{cases}$, $f\left(g\left(x\right)\right)=\begin{cases} \frac{1}{x+3} & x>4 \\ \frac{1}{3x} & 0<x\le 4 \\ \left(3x\right)^2 & x\le 0 \end{cases}$

7) $z(x)=\begin{cases} 4x^2+16x+12 & x<-1.5 \\ -4x^2-20x-25 & -1.5\le x\le -1 \\ x-3 & -1<x<0 \\ -x-2-2\sqrt{x+1} & x\ge 0 \end{cases}$

8) א. $h(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-3} & x<-\sqrt{3} \\ 2x^2-4 & -\sqrt{3}\le x<1 \\ -2x^2-4x+2 & x\ge 1 \end{cases}$ ב. $n\le -3$

9) $f^{\,n}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה.

1) $f(x)=\frac{x-1}{3}$

2) $f(x)=\frac{x+1}{x}$

3) $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$

4) $f(x)=x^2-4\ ,\quad x\geq 0$

בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע.
בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה:

5) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

6) $f(x)=x^2-x$

7) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע,
אם כן, מצא את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

8) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

9) $y=\frac{x^2+3}{2x-1}$

10) $f(x)=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^3$

11) נתונה $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$. האם הפונקציה היא חח"ע?
מצא את התמונה של הפונקציה.

12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבע האם היא פונקציה על:

א. $f(x)=\frac{x-1}{3}\ ;\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

ב. $f(x)=\frac{x+1}{x}\ ;\ f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

ג. $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}\ ;\ f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$

ד. $f(x)=x^2-4\ ;\ f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$

13) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא תחום הגדרה, טווח ותמונה.
בנוסף, קבע האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

ב. $f:\mathbb{R}\to(0,1]$ $\quad g(x)=\frac{1}{x^2+1}$

ג. $f:(1,\infty)\to(0,1]$ $\quad h(x)=\frac{1}{x^2+1}$

14) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$.
תהא $h:A\to C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם f ו- g חח״ע אז h חח״ע.

ב. אם f ו- g חח״ע אז h על.

ג. אם f ו- g על אז h על.

ד. אם f ו- g על אז h חח״ע.

ה. אם f חח״ע ו- g על אז h חח״ע.

ו. אם f חח״ע ו- g על אז h על.

ז. אם f על ו- g חח״ע אז h חח״ע.

ח. אם f על ו- g חח״ע אז h על.

15) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$.
תהא $h:A\to C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$.
נתון כי h על.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. f חח״ע.

ב. f על.

ג. g חח״ע.

ד. g על.

16) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ \ g:B\to C$.
תהא $h:A\to C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$.
נתון כי h חח"ע.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

1) $f^{-1}(x)=3x+1$, כל y .

2) $f^{-1}(x)=\frac{1}{x-1}$, $y\neq 1$

3) $y\neq 3$, $f^{-1}(x)=\frac{2x-2}{x-3}$

4) $y\geq -4$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$

5) לא חח"ע. תמונה: $y\leq -2$ או $y\geq 2$.

6) לא חח"ע. תמונה: $y\geq -\frac{1}{4}$.

7) לא חח"ע. תמונה $0\leq y\leq 1$.

8) כן חח"ע. תמונה: $y>0$. פונקציה הפוכה: $x>0$ $f^{-1}(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

9) לא חח"ע. תמונה: $y\geq 2.3$ או $y\leq -1.3$

10) כן חח"ע. תמונה: $y\neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}$.

11) לא חח"ע. תמונה: $y\geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.

12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$; על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; לא על.

ג. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; על.

ד. תחום הגדרה $[0,\infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4,\infty)$; לא על.

13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0,1]$; לא על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0,1]$; על.

ג. תחום הגדרה $[1,\infty)$, טווח $(0,1]$, תמונה: $(0,0.5)$; לא על.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצא איזה מבין הפונקציות בשאלות **1-8** הן אי זוגיות ואיזה זוגיות:

1) $y=4x^3$ **2)** $y=x^4+x^{10}$ **3)** $y=1$

4) $y=\frac{1}{x}$ **5)** $y=x^2+\sin^2 x$ **6)** $y=2^x$

7) $y=\ln x+x^2$ **8)** $y=\sin x\cdot\cos x$

9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
נסמן: $k(x)=-f(x),\ z(x)=f(x^2)$.
בדוק, עבור כל אחת מהפונקציות k,z, האם היא זוגית או אי-זוגית.

10) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
נסמן: $z(x)=-g(x^3)$ ו- $k(x)=-f(x^3)$.
טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.
טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.
איזו טענה נכונה?

11) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
נסמן: $k(x)=f(-x)+x^{11}g(|x|)$, $z(x)=-g(-4x)\cdot f(x^4)$
בדוק, עבור כל אחת מהפונקציות z,k, האם היא זוגית או אי-זוגית.

12) הוכח כי:
א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

תשובות סופיות

שאלות **1-8**: זוגית: **2,3,5,8**; אי- זוגית: **1,4**; כללית: **6,7**.

9) k אי-זוגית, z זוגית.

10) טענה ב'.

11) k אי-זוגית, z זוגית.

12) שאלת הוכחה.

פונקציה מחזורית

שאלות

מצא את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-20**:

1) $y=1+10\sin(0.5x+4)$

2) $y=1+14\cos 20x$

3) $y=-4+20\tan 4x$

4) $y=-1+14\sec 2x$

5) $y=\sin^2 4x$

6) $y=\cos^2 2x$

7) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$

8) $y=(\sin x+\cos x)^2$

9) $y=\cos^4 x+\sin^4 x$

10) $y=\cot^2 x$

11) $y=\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{10}$

12) $y=\sin 4x+\sin 14x$

13) $y=\sin 4x+\sin 14x+\sin x$

14) $y=\cos 2x\cos x$

15) $y=\sin^3 x$

16) $y=\sin^4 x$

17) $y=\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}$

18) $y=|\sin x|$

19) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

20) $y=\cot x-\tan x$

הוכח שהפונקציות בשאלות **21-26** אינן מחזוריות:

21) $y=x+\sin x$

22) $y=x+\cos x$

23) $y=x\sin x$

24) $y=x^2\cos x$

25) $y=\frac{\sin x}{x}$

26) $y=\cos 5x+\cos\sqrt{5x}$

הערה: בשאלות **21** ו-**22** נדרש ידע בחקירת פונקציה.

27) הוכח:

אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור p,

אז $y=a+b\cdot f(cx+d)$ מחזורית בעלת מחזור $\frac{p}{c}$.

28) הוכח: אם T הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל n שלם $f(x+nT)=f(x)$.

29) נתון כי f,g מוגדרות לכל x ובעלת מחזור p_1, p_2, בהתאמה.

נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.

הוכח כי גם הפונקציות $(g \neq 0)$ $\frac{f}{g}$, $f \cdot g$, $f \pm g$ הן מחזוריות.

30) נתונה הפונקציה $f(x) = x - [x]$.

א. שרטט את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכח את תשובתך מסעיף ב.

31) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0,1]$.

צייר את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x,

שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשום נוסחה עבור f.

32) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$.

צייר את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x,

שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב-$[0,1]$, ורשום נוסחה עבור g.

תשובות סופיות

1) 4π	2) $\frac{\pi}{10}$	3) $\frac{\pi}{4}$	4) π	5) $\frac{\pi}{4}$
6) $\frac{\pi}{2}$	7) π	8) π	9) $\frac{\pi}{2}$	10) π
11) 40π	12) π	13) 2π	14) 2π	15) 2π
16) π	17) π	18) π		

19) הפונקציה היא למעשה $y=1$, כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

20) $\frac{\pi}{2}$

21) הוכחה.

22) הוכחה.

23) הוכחה.

24) הוכחה.

25) הוכחה.

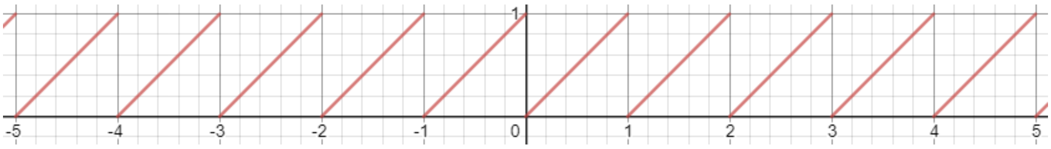
26) הוכחה.

27) הוכחה.

28) הוכחה.

29) הוכחה.

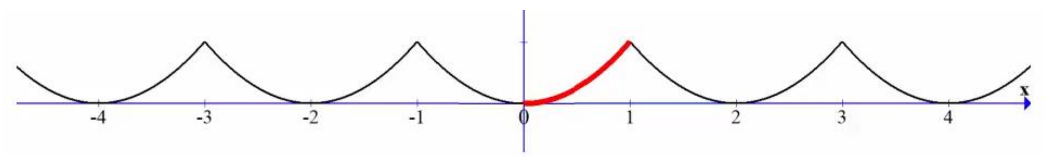
30) א.



ב. 1 ג. הוכחה.

31) $g(x)=x-k,\ k-1\le x\le k+1$ עבור k שלם, זוגי.

32) $g(x)=(x-k)^2,\ k-1\le x\le k+1$ עבור k שלם, זוגי.



פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

שאלות

רשום כל אחת מהפונקציות **1-4** כפונקציה מפוצלת ושרטט את גרף הפונקציה:

1) $y=|x-2|$ **2)** $y=3|x+1|$

3) $y=x^2+2|x-1|$ **4)** $y=\frac{|x|}{x}$

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x\le 4\\ -x & x<0\end{cases}$.

א. חשב $f(1),\ f(4),\ f(-4),\ f(0),\ f(7)$.

ב. שרטט את גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

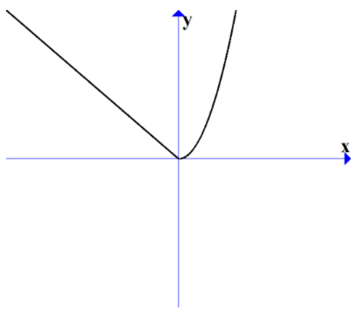
תשובות סופיות

1) $y=\begin{cases}x-2 & x\ge 2\\ 2-x & x<2\end{cases}$ **2)** $y=\begin{cases}3x+3 & x\ge -1\\ -3x-3 & x<-1\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}x^2+2x-2 & x\ge 1\\ x^2-2x+2 & x<1\end{cases}$ **4)** $y=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

5) א. $f(1)=1,\ f(4)=16,\ f(-4)=4,\ f(0)=0,\ f(7)=\text{undefind}$

ב.



ג. הפונקציה כללית.

תרגילים משולבים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ x^3+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

שרטט את הפונקציה, וקבע האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x} & x>1 \\ x^5+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.
קבע האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

3) נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש,
ופונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.
נסמן: $z(x)=-g(x^3)$ ו- $k(x)=-f(x^3)$.
טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ג': $h(x)=k(x)z(x)$ זוגית.
מי מבין הטענות נכונה?

4) נתונות שתי פונקציות, $f,g:[0,1]\to[0,1]$.
נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,
אך אינה יורדת ממש.
תהי $h(x)=f(g(x))$.
איזו טענה נכונה?
א. h יורדת חלש.
ב. h עולה ממש.
ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.
ד. h אינה חסומה בהכרח.

5) נתונות הפונקציות $g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<0\\ -x^2-2x-1 & x\ge 0\end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases}x+4 & x\le 0\\ \sqrt{x} & x>0\end{cases}$.
תהי $h(x)=f(g(x))$.
א. מצא את h בקטע $[-2,0)$.
ב. קבע האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.
ג. קבע האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.
ד. קבע האם $h:[-2,0)\to[0,4]$ היא על.
* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=x^3,\ \ g(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$.
קבע מי מבין הטענות הבאות נכונה.
הפונקציה $h(x)=f(g(x))$ היא:
א. חסומה.
ב. אי-זוגית.
ג. חח"ע.
ד. מונוטונית.

7) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=x^3,\ \ g(x)=-\lfloor x \rfloor$.

א. בדוק את מונוטוניות $z(x)=f\left(g(x)\right)$.

ב. בדוק את מונוטוניות $k(x)=g\left(f(x)\right)$.

ג. בדוק האם $h(x)=\sqrt[3]{f(x)}-g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a<b\ \Leftarrow\ f(a)\ge f(b)$ אז הפונקציה f יורדת חלש.

8) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $\begin{array}{l} f(x)=\left(3\lfloor x \rfloor\right)^3+27\lfloor x \rfloor \\ g(x)=f(x)+x^3-28 \end{array}$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח״ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח״ע.

9) מצא את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$,

וקבע את תחום הגדרתה.

הוכח שהפונקציה על $\mathbb{R}$.

הערה: הפונקציה לעיל נקראת סינוס היפרבולי.

10) חקור את מונוטוניות הפונקציה $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכח שהפונקציה חסומה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.

2) אף טענה אינה נכונה.

3) טענה ב׳ נכונה.

4) טענה א׳ נכונה.

5) א. $h(x)=x^2$ ב. הפונקציה חח״ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.

6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח״ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.

7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.

8) שאלת הוכחה.

9) $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; תחום הגדרתה: כל x.

10) ראו באתר.

11) א. $-1\le x\le 2$ ב. $0\le y\le \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
ד. $-1\le x<\frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2}<x\le 2$ ירידה.

אינפי 1

פרק 5 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

הצבה

שאלה

חשב את הגבולות בסעיפים **א-ד**:

א. $\lim_{x\to 4} x^2+x+1$

ב. $\lim_{x\to 10}\frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x\to 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשב את הגבולות בשאלות **1-9**:

1) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim_{x\to-5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim_{x\to1}\frac{x^7-x}{x-1}$

4) $\lim_{x\to1}\frac{x^n-x}{x-1}$

5) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

6) $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}$

7) $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}$

8) $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}$

9) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4}$

תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{10}{8.5}$ 3) 6 4) $n-1$ 5) -3

6) 32 7) 3 8) 27 9) $\frac{8}{17}$

הכפלה בצמוד

שאלות

חשב את הגבולות בשאלות **1-8**:

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

3) $\lim\limits_{x\to3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

8) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$ **2)** 4 **3)** $-\frac{1}{12}$ **4)** $\frac{3}{8}$

5) $\frac{1}{6}$ **6)** $\frac{3}{4}$ **7)** $\frac{1}{3}$ **8)** $-\frac{8}{3}$

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשב את הגבולות בשאלות **1-9** (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$):

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{4x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin 2x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

תשובות סופיות

1) $\frac{3}{4}$ **2)** $\frac{3}{4}$ **3)** $\frac{1}{2}$ **4)** $\frac{1}{2}$ **5)** $\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{2}$ **7)** $\frac{1}{8}$ **8)** 4 **9)** $\frac{1}{4}$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-12:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4}{x}$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^2}{x-2}$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{-x^2}{(2-x)^2}$

4) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

5) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$

6) $\lim_{x\to 2^-}-\frac{1}{2}\ln(2-x)$

7) $\lim_{x\to 0^+}\left((\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

8) $\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

10) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

11) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

12) $\lim_{x\to 0^+}\ln x\cdot\cot x$

תשובות סופיות

1) ϕ 2) ϕ 3) $-\infty$ 4) ϕ

5) $-\infty$ 6) ∞ 7) ∞ 8) ϕ

9) 0 10) 1 11) ϕ 12) $-\infty$

x שואף לאינסוף

שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-26 :

1) $\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{\ln x}$

2) $\lim_{x\to-\infty}\arctan x+e^{x}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^3+10x}$

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}$

6) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+6}{2x+10}-\frac{x}{2}\right)$

7) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

8) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

9) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-5x}}{x^3-2x^2+1}$

10) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+2x^2+6+27x^6}}{\sqrt{3x^3+10x+4x^4}}$

11) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

12) $\lim_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

13) $\lim_{x\to-\infty}\frac{16^x+4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

14) $\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

15) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

16) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}}$

17) $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1}\right)$

18) $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}}$

19) $\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}\right)$

20) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}}$

21) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

22) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}-x\right)$

23) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

24) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

25) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2\right)$

26) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

תשובות סופיות

1) 0	2) $-\frac{\pi}{2}$	3) 4	4) $-\infty$
5) 0	6) -5	7) 1	8) -1
9) -3	10) 1.5	11) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$	12) $\frac{1}{4}$
13) 0	14) 4	15) $\frac{1}{9}$	16) 2
17) $\ln 3$	18) $e^{\frac{1}{3}}$	19) 0	

20) אם $b \neq 0$: $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $b=0\ ,\ a>0$: ∞ . אם: $b=0\ ,\ a<0$: $-\infty$.

21) 2.5	22) $\frac{k}{2}$	23) $\frac{1}{2}$	24) $-\frac{1}{2}$
25) $\frac{1}{2}$	26) $\frac{a-b}{2}$		

הגבול של אוילר

שאלות

חשב את הגבולות בשאלות **1-9**:

(היעזר בגבול של אוילר: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$):

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$

6) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2}$

8) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x}$

9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{x}\right)^x$

תשובות סופיות

1) $e^{\frac{1}{2}}$ **2)** 1 **3)** e^2 **4)** e^{-1} **5)** e^3

6) e **7)** e^{-12} **8)** e^{30} **9)** e

כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשב את הגבולות בשאלות **1-10**:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos(2x+1)}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+\sin 2x}{x^2+\cos 3x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\cos\left(\ln x^2\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\arctan(2x-3)}{4x+\arctan(x-\ln x)}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^x+3^x+4^x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}[x]$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}[x]$

11) נתונה פונקציה $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $\lim\limits_{x\to 2}z(x)=4$,

ונתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $4z(x)\le f(x)\le(z(x))^2$, לכל x .

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(z(x))}{x}\ ,\ \lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)\ ,\ \lim_{x\to 2}\tan(z(x))\ ,\ \lim_{x\to 2}f(x)$$

תשובות סופיות

1) 0 **2)** 0 **3)** $\frac{3}{4}$ **4)** 3 **5)** 0

6) 0 **7)** $\frac{3}{4}$ **8)** 4 **9)** 1 **10)** 0

11) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=16$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos(z(x))}{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to 2}\tan(z(x))=\tan 4$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)=2$

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

חשב את הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ של הפונקציות בשאלות **1-6**:

1) $$(a=0),\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 4x}{x} & x>0\\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0\end{cases}$$

2) $$(a=1)\ ,f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x>1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x<1\end{cases}$$

3) $$(a=0)\ ,f(x)=\frac{|x|}{x}$$

4) $$(a=\infty)\ ,\ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

5) $$(a=-\infty)\ ,f(x)=\frac{|x|}{x}$$

6) א. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

ב. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

תשובות סופיות

1) 4 **2)** ϕ **3)** ϕ **4)** 1 **5)** -1

6) א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות 1-6, **על פי הגדרת הגבול**, הוכח:

1) $\lim_{x\to 2} 7x+14=28$

2) $\lim_{x\to 4} x^2+x=20$

3) $\lim_{x\to 24} \sqrt{x+1}=5$

4) $\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x+2}}=\frac{1}{4}$

5) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x}{x^2-2}=1$

6) $\lim_{x\to \alpha} \sin x=\sin\alpha$

7) חשב, **על פי הגדרת הגבול**: $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

הוכח, **על פי הגדרת הגבול**, את המקרים 8-11:

8) $\lim_{x\to 2} \frac{3+x}{x^2+1}=1$

9) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+7}{x+2}=1$

10) $\lim_{x\to \infty} \frac{3-4x}{2x+1}=-2$

11) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1}=3$

12) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to\infty} f(x)=-5$.
הוכח כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f(x)<-4$.

13) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to\infty} f(x)=5$.
הוכח כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f^2(x)>16$.

14) נניח f פונקציה ממשית וחיובית בתחום $[a,\infty)$ המקיימת $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח שמתקיים $\lim_{x\to\infty} \sqrt{f(x)}=0$.

15) נתון הגבול הבא: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}=1$.

מצא ערך של $M>0$, עבורו לכל $x>M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצא M, כך ש-$\left|f(x)-L\right|<0.1$: $\forall x>M$).

16) מגדירים את הפונקציה הבאה: $f(x)=\begin{cases}2 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}\end{cases}$.

האם הגבולות קיימים? הוכח את תשובותיך בהסתמך על הגדרת הגבול.

א. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ב. $\lim\limits_{x\to 2.5}f(x)$ ג. $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$

17) בהינתן הגבול $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x+4}{x+11}=\frac{1}{2}$, מצא $\delta>0$, כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x-1|<\delta$, אי-השוויון $\left|\frac{2x+4}{x+11}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}$ מתקיים.

18) הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.

ב. אם $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.

ג. אם $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=L$, אז: הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ קיים ושווה ל-L או $-L$.

ד. אם הגבולות $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ ו-$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ קיימים,
אז גם הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ קיים.

19) רוצים להוכיח כי $\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2}{x+3}\neq1$ לפי ההגדרה.

20) רוצים להוכיח כי $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x+1}{x+10}\neq1$ לפי ההגדרה.

21) הוכח שאם $\lim\limits_{x\to0}f(x)=3$, אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה $f(x)>2$.

22) הוכח שאם $\lim_{x\to x_0} f(x) > L$, אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x) > L$.

תשובות סופיות

7) $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר : GOOL.co.il

אינפי 1

פרק 6 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות **1-6**: בדוק את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר"[1] שלהן,
ובשאלות **1** ו-**2**, שרטט גם את גרף הפונקציה:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 2 \\ 5-x & x>2 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x & x\ge 1 \\ x^2 & x<1 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\le 1 \\ |x-2| & 1<x<2 \\ 1 & x=2 \\ x-2 & x>2 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<0 \\ x^2 & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ x-3 & x<0 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x>0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x>0 \\ 2 & x=0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **3-6**:
רשום עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא.
בנוסף, הדגם פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות **8-11**: מה צריך להיות הערך הקבוע של k, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x:

8) $f(x)=\begin{cases} kx^2+x-2 & x\le 2 \\ 5kx-6 & x>2 \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} & x\ne 1 \\ k & x=1 \end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & x\ne 2 \\ k & x=2 \end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} 2x-k & x\le 0 \\ x^{2x} & x>0 \end{cases}$

הערה: שאלה **11** ניתן לפתור רק לאחר שלומדים את כלל לופיטל.

[1] נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות **12-15** : מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b,
על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

12) $$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le 0 \\ \dfrac{\sin x}{2x} & 0<x<\pi \\ a\cos x & x\ge \pi \end{cases}$$

13) $$f(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x}+x^2 & x<-1 \\ bx^2+x-1 & -1\le x\le 1 \\ 4\dfrac{\sqrt{x-1+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x>1 \end{cases}$$

14) $$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ (x-1)\ln(x+1)+b & 0\le x\le 1 \\ a\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+4} & x<0 \end{cases}$$

15) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x<1 \\ ax^2+b & 1\le x\le 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x>2 \end{cases}$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק לאחר שלומדים את כלל לופיטל.

16) הוכח או הפרך:

א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

17) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה?
הוכח את טענתך.

18) תהי $f(x)=\begin{cases}|x|-1 & |x+1|\geq 4 \\ 2 & |x+1|<4\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי $g(x)=x+\frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x.
האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x?

19) תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.
תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי $g(x)=\begin{cases}f(x) & 0<x<1 \\ x^2 & 1\leq x<2\end{cases}$.

א. האם יתכן שהנקודה $x_0=1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g? נמק.

ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמק.

20) תהי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)=f(x)f(y)$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
הוכח ש- f רציפה לכל x.

21) תהי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)=\left[f(x)f(y)\right]^2$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
הוכח ש- f רציפה לכל x.

22) יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $f(a)\neq g(a)$,
עבור a ממשי מסוים.
הראה שקיימת סביבה של a, שבה $f(x)\neq g(x)$.

<u>הערה</u>
תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:
תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(a)\neq 0$, עבור a ממשי מסוים.
הראה שקיימת סביבה של a, שבה $f(x)\neq 0$.
פשוט לקחנו $g(x)=0$.
בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

23) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=x-\frac{1}{2}\lfloor 2x \rfloor$.

הוכח או הפרך :

א. הפונקציה f חסומה לכל x .

ב. הפונקציה f רציפה לכל x .

ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .

ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

תשובות סופיות

1) רציפה.

2) רציפה.

3) רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.

4) רציפה בנקודות $x=0,1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.

5) לא רציפה.

6) לא רציפה.

7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.

8) $k=1$

9) $k=4$

10) $k=\frac{2}{3}$

11) $k=-1$

12) $a=0\ ,\ b=\frac{1}{2}$

13) $a=1\ ,\ b=2$ או $a=2\ ,\ b=1$.

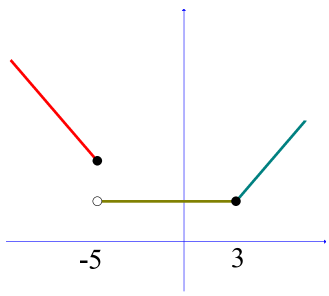
14) $a=-2e^{-1}\ ,\ b=e^{-1}$

15) $a=\frac{e}{3}\ ,\ b=-\frac{e}{3}$

16) הוכחה.

17) הוכחה.

18) א.



ב. הפונקציה רציפה לכל $x\neq-5$. ב-5- יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.

19) א. לא. ב. כן.

20) הוכחה.

21) הוכחה.

22) הוכחה.

23) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות **1-4** הוכח שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

1) $x^3+4x-1=0$

2) $x^2=-\ln x$

3) $x-0.25\sin x=7$

4) $x^3+bx^2+cx+d=0$

בשאלות **5-6** הוכח שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

5) $e^x-5x=0$

6) $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה לכל x, המקיימת: $f(0)=1$, $f(1)=2$.

הוכח שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to[-4,4]$ פונקציה רציפה.

הוכח שלמשוואה $2x+f(x)=1$ יש לפחות פתרון אחד.

8) מצא קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה $x^2=10-\frac{1}{x}$ יש פתרון.

9) נגדיר $f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}$.

א. חשב את $f(2)$, $f(0)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2+\frac{1}{x-1}=0$

יש פתרון בקטע $(0,2)$?

10) תהיינה f,g פונקציות רציפות ב-$[a,b]$ המקיימות $f(a)<g(a),\ f(b)>g(b)$
הוכח שקיימת נקודה $a<c<b$ שבה $f(c)=g(c)$.

11) נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ שהוא חלקי לתחום הגדרתה.
נניח ש- $f([a,b])\subseteq[a,b]$.
הוכח כי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש-$f(c)=c$.
נקודה c כנ"ל נקראת "**נקודת שֶׁבֶת**" של הפונקציה.

12) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$.
הוכח כי קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)=c^{1.5}$.

13) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(1)$.
א. הוכח כי קיימת נקודה $c\in[0,0.5]$ כך ש-$f(c)=f(c+0.5)$.
ב. הוכח כי קיימות נקודות $c,d\in[0,1]$ כך ש-$f(c)=f(d)$.

14) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)<f(2)<f(1)$.
הוכח כי קיימים $c_1,c_2\in[0,2]$ כך ש-$f(c_1)=f(c_2)$.

15) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,8]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(8)$.
הוכח כי קיימות נקודות $c_1,c_2,c_3,c_4\in[0,8]$ כך ש-
$f(c_1)=f(c_2),\ f(c_3)=f(c_4)$.

16) הוכח שהפונקציה $f(x)=x+\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

17) הוכח שהפונקציה $f(x)=x\cdot\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

18) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור 2π.
הוכח שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(x_0+\pi)=f(x_0)$.

19) יהיו $0\le a_1,\dots,a_n\le1$ קבועים המקיימים $a_1+\dots+a_n=1$.
הוכיחו כי למשוואה $|x-a_1|+\dots+|x-a_n|=\frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

20) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ורציפה.
הוכח כי f עולה ממש או יורדת ממש.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ פונקציה חח"ע ועל.
הוכח כי f לא רציפה ב- $\mathbb{R}$.

21) תהי $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ פונקציה רציפה.
הוכח כי קיימים אינסוף ערכים של x, שעבורם $f(x)=\sin x$.

22) יהי P פולינום ממעלה **זוגית**, מהצורה $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$,
ונניח כי $a_0<0$.
הוכח כי ל- P ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

23) יהיו f,g פונקציות רציפות המקיימות:
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=k,\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-k,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-k,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=k$, כאשר $0<k\in\mathbb{R}$.
הוכח כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x)=g(x)$.

24) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b), ותהיינה $x_1,\ldots,x_n$ (כאשר $n>1$)
נקודות כלשהן ב- (a,b).

הוכח שקיימת נקודה c בקטע (a,b), כך ש- $f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$.

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b).
האם לכל $c\in(a,b)$, ניתן למצוא נקודות $x_1,\ldots,x_n$, שונות זו מזו,
כאשר $n>1$, כך ש- $f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$?
הוכח את תשובתך.

25) תהי f פונקציה רציפה בקטע פתוח (a,b).
נניח כי: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$.
הראה כי תמונת הקטע (a,b) היא $\mathbb{R}$.

26) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(1)=4$, $f(0)=-1$.
תהי $S=\{x\in[0,1]\mid f(x)=0\}$.
א. הוכח ש- S לא ריקה.
ב. הוכח שלקבוצה S יש חסם עליון, שנסמנו α.
ג. הוכח כי $\alpha\in(0,1]$.
ד. הוכח כי $f(\alpha)=0$.

27) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, כך ש- $f(a)=f(b)$.
הוכח שקיימים $a<x_1<x_2<b$, כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$.

תשובות סופיות

8) $[0.1,1]$

9) א. $f(0)=-1$, $f(2)=5$ ב. לא.

שאלות **1-7** ושאלות **10-27** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

תכונות נוספות של פונקציות רציפות

שאלות

1) קבע בכל סעיף, האם הטענה נכונה או לא נכונה. הוכח את תשובתך.
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא:

א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
ד. חסומה, אבל לא רציפה.
ה. רציפה, אבל לא חסומה.
ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה,
שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי f, היא קטע.

2) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(x)>0$, לכל $x\in[a,b]$.
הוכח שקיים $\alpha>0$, כך ש- $f(x)\geq\alpha$, לכל $x\in[a,b]$.

3) תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונניח כי $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ קיים.
הוכח ש- f חסומה.

4) יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות x_1,x_2,
המקיימות $x_1<x_2$, קיימת נקודה $x_1<x_3<x_2$, שעבורה $f(x_3)=g(x_3)$.
הוכח כי $f(x)=g(x)$, לכל x.

5) תהי $f:[0,1]\to(0,1)$ פונקציה על.
הוכח ש- f לא רציפה ב- $[0,1]$.

6) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x)=f(x^2)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.
הוכח ש- f פונקציה קבועה.

7) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x+y)=f(x)+f(y)$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
הוכח כי $f(x)=f(1)x$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

8) תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a,b), ונניח שקיים קבוע ממשי K, כך שלכל שתי נקודות, x_1 ו- x_2, בקטע (a,b), מתקיים **תנאי ליפשיץ**:
$$|f(x_1)-f(x_2)|\le K|x_1-x_2|$$
הוכח כי $f(x)$ רציפה בקטע (a,b).
* נסה להוכיח בשתי דרכים שונות.

9) הוכח שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט.
באריכות:
הוכח שאם f פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה $x_0\in\mathbb{R}$, כך ש- $f(x)\ge f(x_0)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

10) בסעיפים א ו-ב הוכח:
א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.
ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.
ג. תהי $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. הוכח שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה $x\in\mathbb{R}$.
הערה: הפונקציה הנ"ל נקראת פונקציית דִירִיכְלֶה.

11) הוכח או הפרך:
א. אם $f(x)$ רציפה בנקודה c, אז $|f(x)|$ רציפה בנקודה c.
ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודה c, אז $f(x)$ רציפה בנקודה c.

בשאלות **12-13** הוכח:

12) אם f רציפה ב- x_0, אז קיימת סביבה של x_0, בה f חסומה.

13) אם f רציפה ב- x_0, ואם $f(x_0)>0$, אז קיימת סביבה של x_0, שבה $f(x)>0$.

תשובות סופיות

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

שיטת החצייה

שאלות

1) נתונה המשוואה $x^3-2x^2-x+2=0$. בעזרת שיטת החצייה בקטע $[-2,3]$,
מצא שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות.
מהו קירוב השורש?

2) נתונה המשוואה: $x^3-x-2=0$.
א. מצא קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.
ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?
ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

תשובות סופיות

1) 0.07

2) א. $[1,2]$ ב. 10 ג. $x=1.520$

אינפי 1

פרק 7 - נושאים מתקדמים - רציפות במידה שווה

תוכן העניינים

רציפות במידה שווה לפי הגדרה

שאלות

הוכח את המשפטים הבאים:

1) $f(x)=7$ (פונקציה קבועה) רבמ״ש (רציפה במידה שווה) ב- $\mathbb{R}$.

2) $f(x)=2x+3$ רבמ״ש ב- $\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\sqrt{x}$ רבמ״ש ב- $[0,\infty)$.

4) $f(x)=\sqrt{|x|+1}$ רבמ״ש ב- $\mathbb{R}$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תנאים לרציפות במידה שווה

שאלות

1) הוכח שהפונקציה $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$.

2) הוכח שהפונקציה $f(x)=xe^{-x^2}$ רציפה במידה שווה בקטע $-\infty<x<\infty$.

3) הוכח שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ רציפה במידה שווה ב- $(0,\infty)$.

4) הוכח שהפונקציה $f(x)=\arctan(x)$ רציפה במידה שווה ב- $(-\infty,\infty)$.

5) הוכח כי הפונקציה $f(x)=\ln x$ רציפה במידה שווה בקטע $[1,\infty)$.

6) הוכח כי הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בקטע $[1,\infty)$.

7) הוכח כי הפונקציה $f(x)=\arctan(x)$ רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

8) הוכח כי הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,\infty)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תנאים לשלילת רציפות במידה שווה

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=\sin x^2$ בקטע $-\infty<x<\infty$.
הוכח שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=e^x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ בקטע $(0,1)$.
הוכח שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=x\sin x$ בקטע $0\le x<\infty$.
הוכח שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=\ln x$ בקטע $0<x<1$.
הוכח שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינפי 1

פרק 8 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

לתשומת לבך

בפרק זה אנו מניחים שהנך יודע לגזור פונקציות לפי נוסחאות גזירה כפי שנלמד בבית הספר.
במידה והנחה זו שגויה, עבור ראשית לפרק הבא, למד את הנושא, ורק כשסיימת חזור לכאן.

שאלות*

בשאלות **1-6** חשב את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

1) $f(x)=x^2+4x+1$ **2)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$ **3)** $f(x)=\sin 4x$

4) $f(x)=e^x$ **5)** $f(x)=\ln x$ **6)** $f(x)=\sqrt{x+10}$

7) חשב את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$.

8) חשב את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$.

9) חשב את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x\cdot z(x)$ כאשר $\lim_{x\to 0} z(x)=4$, $z(0)=1$.

10) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1} & x>0\\ -(x+1)^2 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצא את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדוק על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

11) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ (n טבעי).

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

12) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^n \arctan\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ (n טבעי).

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

13) חשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(4+x)-\ln 4}{x}$

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1+x}-e}{x}$

14) נתון כי f גזירה בנקודה x_0. הוכח כי:

א. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ב. $2x_0 f(x_0)-x_0^2 f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2 f(x_0)-x_0^2 f(x)}{x-x_0}$

15) נתון כי f גזירה וזוגית. הוכח כי f' אי זוגית.

16) נתונה פונקציה המוגדרת ב-$[a,b]$ ומקיימת לכל x,y ב-$[a,b]$:
$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|^2$.
הוכח כי f גזירה ב-$[a,b]$ וחשב את נגזרתה.

17) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\mathbb{Q} \\ x^3 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.
חשב את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

18) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.
חשב את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

19) נתונה הפונקציה $f(x)=\left|\sin^5 x\right|$.

א. חשב את $f'(x)$.

ב. מצא את כל הנקודות עבורן $f'(x)=0$.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

20) הוכח או הפרך:

א. אם h גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0, אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-x_0.

ב. אם h אינה גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0, אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-x_0.

ג. אם h אינה גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0, אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-x_0.

ד. אם h גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0, אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-x_0.

21) הוכח או הפרך:

א. אם f גזירה, אז $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$.

ב. אם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

22) הוכח או הפרך:

א. אם f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$.

ב. אם f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

23) נתון כי $f(x)$ רציפה ב-$x=4$, ומקיימת $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-\pi-10(x-4)}{x-4}=0$.

הוכח ש-f גזירה ב-$x=4$, וחשב את $f'(4)$.

24) תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x=0$ המקיימת $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

א. הוכח כי $f(0)=0$.

ב. הוכח כי f גזירה ב-$x=0$ ו-$f'(0)=0$.

25) תהי f פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f(0)=0$ ו-$f'(0)=k$.

הוכח כי $\lim\limits_{x\to\infty} x f\left(\frac{1}{x}\right)=k$.

26) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה x_0.

א. אם $f(x_0)\neq 0$, הוכח שגם $|f|$ גזירה ב-x_0.

ב. אם $f(x_0)=0$, הראה שייתכן כי $|f|$ גזירה ב-x_0 וייתכן שלא.

27) תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה x_0.
נגדיר $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
הראה שאם $f(x_0)\neq g(x_0)$, אז h גזירה ב- x_0.

28) תהי f פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.
הוכח כי אם f גזירה ב- 0, אז $f'(0)=0$.

הערה: פתור בשתי דרכים שונות.

29) נתונה פונקציה $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(xy)=f(x)+f(y)$,
לכל $x,y\in(0,\infty)$.
נתון כי f גזירה בנקודה $x=1$.
א. הוכח כי $f(1)=0$ ו- $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.
ב. הראה כי f גזירה, ושלכל $x>0$, $f'(x)=\frac{f'(1)}{x}$.

30) נתון כי f פונקציה גזירה המקיימת $\frac{f(x)+f(y)}{2}=f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.
הוכח ש- f פונקציה ליניארית.

31) ענה על הסעיפים הבאים:
א. הוכח את הטענה הבאה:
אם f גזירה ב- x_0, אז $f'(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+a_n)-f(x_0)}{a_n}$
לכל סדרה $a_n\to 0$.
ב. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0=1$, ו- $f(1)=1$.
הראה שאם $k\in\mathbb{N}$, אז
$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(f(1+\tfrac{1}{n})+f(1+\tfrac{2}{n})+\ldots+f(1+\tfrac{k}{n})\right)-k\right]=\frac{k(k+1)}{2}f'(1).$$
ג. חשב את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{10}{n}}-10\right]$.

32) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שפונקציית דיריכלה $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכח שהפונקציה $f(x)=(x-1)^2D(x)$ גזירה **רק** בנקודה $x=1$.

33) תהי f פונקציה גזירה ב- x_0.

א. הוכח כי $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

ב. תן דוגמה של פונקציה רציפה f, באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך $f'(x_0)$ אינו קיים.

ג. הבע באמצעות $f'(x_0)$ את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}{h}$.

34) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- x_0.

א. הוכח כי $f''(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$.

ב. תן דוגמה של פונקציה f, באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך $f''(x_0)$ אינו קיים.

הערה: פתור את סעיף א' רק אחרי שלמדת את כלל לופיטל.

תשובות סופיות

1) $f'(x)=2x+4$

2) $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$

3) $f'(x)=4\cos 4x$

4) $f'(x)=e^x$

5) $f(x)=\frac{1}{x}$

6) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+10}}$

7) $44!$

8) 2

9) 4

10) א. רציפה לכל x. ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

11) א. $n>1$ ב. $n>2$

12) א. $n>1$ ב. $n>1$

13) א. $\frac{1}{4}$ ב. e

14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) שאלת הוכחה. $f'=0$

17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0)=0$.

18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים: $f'(1)=0$.

19) א. $f'(x)=\begin{cases} 5\sin^4 x\cos x & 2n\pi<x<(2n+1)\pi \\ 0 & x=n\pi \\ -5\sin^4 x\cos x & (2n+1)\pi<x<(2n+2)\pi \end{cases}$ ב. $x=\frac{\pi}{2}n$

20) שאלת הוכח או הפרך.

21) שאלת הוכח או הפרך.

22) שאלת הוכח או הפרך.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

30) שאלת הוכחה.

31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55

32) שאלת הוכחה.

33) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=|x|$ ג. $-5f'(x_0)$

34) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

1) תאר שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).
השתמש בפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$ על מנת להדגים שתי שיטות אלה.
בנוסף, הסבר מתי עליך להשתמש בכל אחת מהשיטות שתיארת.

בשאלות **2-9** בדוק גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחר.
בנוסף, רשום נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות:

2) $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5<x<0 \\ x^2+2x & x\ge 0 \end{cases}$

6) $f(x)=2+4|x-1|$

7) $f(x)=3x^2+x|x|+1$

8) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

10) בדוק האם הפונקציה משאלה **5** גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

11) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x\ge -1 \\ \frac{1}{x}+a & x<-1 \end{cases}$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x=-1$?

ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א', בדוק על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=-1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

12) מצא עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}\ln^3 x & 0<x\le e\\ ax+b & x>e\end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשום נוסחה עבור הנגזרת.

13) מצא עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}e^x & 0<x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשום נוסחה עבור הנגזרת.

14) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+4x & x<0\\ px+q & x\ge 0\end{cases}$.
קבע עבור אילו ערכים של הקבועים p ו- q הפונקציה הנתונה:
א. רציפה. ב. גזירה.

15) חשב את $f'(0)$, עבור הפונקציה: $f(x)=\left|x^4-x^3+\sin(10x)-1\right|$.

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|\cos\pi x|} & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
הוכח שהפונקציה לא גזירה לכל x ממשי.

תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי x את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- x (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[4.1]=4$, $[-4.1]=-5$.

17) נתונה הפונקציה $f(x)=[x]-[-x]$.
חשב את $f'(x)$.

18) נתונה הפונקציה $f(x)=[x]\sin(\pi x)$.
חשב את $f'(x)$ **על פי ההגדרה**.

19) נתונה הפונקציה $f(x)=[x]\left(1-\cos(\pi x)\right)$.
חשב את $f'(x)$.

20) הוכח שאם f היא פונקציה המקיימת $\left|f\left(x\right)\right| \le x^2$ לכל x,
אז f גזירה ב-$x=0$.

21) תהי f פונקציה רציפה ב-$x_0=0$.
הוכח כי הפונקציה $z\left(x\right)=\left|x\right| f\left(x\right)$ גזירה ב-$x_0=0$ אם ורק אם $f\left(0\right)=0$.

22) יהיו f ו-g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$.
הוכח או הפרך:

א. אם $f(x_0)=g(x_0)$ ו-$f_{-}^{'}(x_0)=g_{+}^{'}(x_0)$,
אז הפונקציה z, המוגדרת על ידי $z(x)=\begin{cases} f(x) & x \le x_0 \\ g(x) & x \ge x_0 \end{cases}$, גזירה ב-$x_0$.

ב. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לא גזירה ב-x_0 ו-$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ב-$\mathbb{R}$,
אז $g \circ f$ איננה גזירה ב-$\mathbb{R}$.

ג. אם g גזירה מימין ב-x_0 והפונקציה f מוגדרת בסביבה מלאה של $g(x_0)$ וגזירה מימין ב-$g(x_0)$, אזי $f \circ g$ גזירה מימין ב-x_0.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

23) תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות ב-$\mathbb{R}$.
נתון ש-g היא פונקציה רציפה ב-$\mathbb{R}$, ולכל $x>y$
מתקיים $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=g\left(\frac{x+y}{2}\right)$.
הוכח כי f גזירה ב-$\mathbb{R}$, ושלכל x ממשי מתקיים $f'(x)=g(x)$.

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\ge 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

2) $f'(x)=\begin{cases}2x-4 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

3) $f'(x)=\begin{cases}2x-5 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

4) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\ge 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

5) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+2x} & -0.5<x<0\\ 2x+2 & x\ge 0\end{cases}$

6) $f'(x)=4\ (x>1)\quad ,\quad f'(x)=-4\ (x<1)$

7) $f'(x)=8x\ (x\ge 0)\quad ,\quad f'(x)=4x\ (x<0)$

8) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

10) לא גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

11) א. $a=1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

12) $a=3/e\quad b=-2$ $\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x}\ln^2 x & 0<x<e\\ \dfrac{3}{e} & x\ge e\end{cases}$

13) $a=e\quad b=0$ $\quad f'(x)=\begin{cases}e^x & 0<x<1\\ e & x\ge 1\end{cases}$

14) א. $q=0$ ב. $q=0, p=4$

15) -10

16) הוכחה.

17) $f'(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Z}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

18) $f'(x)=\begin{cases}[x]\cos(\pi x)\pi & x\notin\mathbb{Z}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

19) $f'(x)=\begin{cases}[x]\sin\pi x & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z},\ x \text{ even}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z},\ x \text{ odd}\end{cases}$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות **20-23** היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינפי 1

פרק 9 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות **27-35** מצא רק את הנגזרת הראשונה):

1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{2x}$

2) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{2x+10}$

3) $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)^2}$

4) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

5) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

6) $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$

7) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

8) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

9) $f(x)=x\cdot\ln x$

10) $f(x)=x^2\cdot\ln x$

11) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$

12) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-32$

13) $f(x)=\ln^2 x+\dfrac{1}{\ln^2 x}$

14) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

15) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

16) $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

17) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

18) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

19) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

20) $f(x)=\sin(x^3)$

21) $f(x)=\cos(x^4)$

22) $f(x)=\sin^3 x$

23) $f(x)=\tan(x^2)$

24) $f(x)=\ln(\cos x^2)$

25) $f(x)=\arcsin(2x+3)$

26) $f(x)=\arctan(x^2)$

27) $f(x)=(x+1)^{\sin x}$

28) $f(x)=(\sin x)^x$

29) $f(x)=(\cos x)^{\ln x}$

30) $y=x^{\ln x}$

31) $y=\sqrt[x]{x}$

32) $y=x^{\sqrt{x}}$

33) $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

34) $y=(x^2+1)^x$

35) $y=(x+1)^{(x+1)}$

הערה: בשאלות **28** ו-**29** נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתיהן.

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\ f''(x)=\frac{4}{x^3}$

2) $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\ f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

3) $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\ f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$

4) $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\ f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

5) $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\ f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$

6) $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\ f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

7) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\ f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

8) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\ f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$

9) $f'(x)=\ln x+1,\ f''(x)=\frac{1}{x}$

10) $f'(x)=x(2\ln x+1),\ f''(x)=2\ln x+3$

11) $f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\ f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$

12) $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\ f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$

13) $f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\ f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$

14) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\ \ f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$

15) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\ \ f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$

16) $f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\ \ f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

17) $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\ \ f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

18) $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\ \ f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$

19) $f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\ \ f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

20) $f'(x)=\cos(x^3)\cdot 3x^2,\ \ f''(x)=-9x^4\sin(x^3)+6x\cdot\cos(x^3)$

21) $f'(x)=-\sin(x^4)\cdot 4x^3,\ \ f''(x)=-16x^6\cos(x^4)-12x^2\cdot\sin(x^4)$

22) $f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x,\ \ f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$

23) $f'(x)=\frac{2x}{\cos^2(x^2)},\ \ f''(x)=\frac{2\cdot\cos^2(x^2)-8x^2\cos(x^2)\sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$

24) $f'(x)=\tan(x^2)\cdot(-2x),\ \ f''(x)=\frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)}-2\tan(x^2)$

25) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\cdot 2,\ \ f''(x)=\frac{4(2x+3)}{\left(1-(2x+3)^2\right)^{1.5}}$

26) $f'(x)=\frac{2x}{1+x^4},\ \ f''(x)=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$

27) $f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(x+1)+\frac{\sin x}{x+1}\right)$

28) $f'(x)=(\sin x)^{x}\left(\ln(\sin x)+\cot x\cdot x\right)$

29) $f'(x)=(\cos x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}-\tan x\cdot\ln x\right)$

30) $y'=x^{\ln x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$

31) $y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

32) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$

33) $y'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sqrt{x}\right)$

34) $y'=\left(x^2+1\right)^{x}\left(1\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\cdot x\right)$

35) $y'=(x+1)^{(x+1)}\left[\ln(x+1)+1\right]$

גזירה סתומה

שאלות

1) גזור את הפונקציה הסתומה: $x^2+y^5-1=1$.

2) גזור את הפונקציה הסתומה: $4\ln x+10\ln y=y^2$.

3) גזור את הפונקציה הסתומה: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

4) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2+y^2=25$, בנקודה $(3,4)$.

5) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2+y-x=xy$, דרך הנקודה $(1,1)$.

6) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2y+e^{y^2-4x}=\ln x+1$, דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

7) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy+y}+x^2y=xy^2$, דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

8) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2}+y=y^2-1$, דרך הנקודה $(0,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

9) נתונה הפונקציה הסתומה $x+y\cdot e^y=xy^2+x^2$.

א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y=0$.

ב. מצא את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שמצאת בסעיף א.

10) גזור את הפונקציה הסתומה: $x^y-xy=10$.

11) גזור את הפונקציה הסתומה: $x^y-y^x=1$.

12) נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצא את ערך y^n בנקודה בה $y=1$.

13) נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של x.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

1) $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$, $\quad 5y^4-1\neq 0,$

2) $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$, $\quad \frac{10}{y}-2y\neq 0,$

3) $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$, $\quad \sqrt{x}\neq 1,\quad \sqrt{x}\neq 0,$

4) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

5) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

6) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

7) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{5}{6}$

8) $y=\frac{4}{3}x+2$

9) א. $(0,0),\ (1,0)$ ב. בראשית הצירים: $y=-x$, המשוואה השנייה: $y=x-1$.

10) $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$, $\quad x^y\cdot\ln x-x\neq 0,$

11) $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$, $\quad x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0,$

12) -1

13) שאלת הוכחה.

כלל השרשרת

שאלות

1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4)=10$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x^2)$.

חשב את $g'(2)$.

2) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(2)=4$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשב את $g'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכח כי g יורדת.

3) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1)=e$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=x^2+f(\ln x)$.

א. חשב את $g'(e)$.

ב. הוכח שהפונקציה g עולה בנקודה $x=e$.

ג. חשב את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}$.

4) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f(1)=-2$, $f'(1)=e$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f^2(\ln x)$.

א. חשב את $g'(e)$.

ב. האם g עולה או יורדת, בנקודה $x=e$?

ג. נתון כי f שלילית ועולה. מה ניתן לומר על g?

5) נתונה פונקציה, $f(x)$, יורדת וחיובית.

נגדיר פונקציה חדשה $g(x)=\sqrt{f(x^2)+4}$.

מי מהבאים נכון?

א. g עולה לכל x.

ב. g יורדת לכל x.

ג. g עולה לכל $x>0$.

ד. g יורדת לכל $x>0$.

6) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\sqrt{x})-1}{f(\sqrt{x})}$.

ידוע כי $f(10)=f'(10)=4$. חשב $g'(100)$.

7) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)+4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$, $f(1)=1$. חשב $g'(1)$.

8) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\ln x)}{f(\ln x)+1}$.

ידוע כי $f'(0)=1$, $f(0)=2$. חשב $g'(1)$.

9) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^{10}(4x)+1}{f\left(\frac{4}{x}\right)+1}$.

ידוע כי $f'(4)=2$, $f(4)=1$. חשב $g'(1)$.

10) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$, $f(1)=1$. חשב $g'(1)$.

תשובות סופיות

1) 40

2) א. -16 ב. הוכחה.

3) א. $2e+1$ ב. הוכחה. ג. $2e+1$

4) א. -4 ב. יורדת. ג. $g'(x)<0$

5) ד

6) $\frac{17}{80}$

7) 36

8) $\frac{8}{9}$

9) 44

10) -2

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזור את הפונקציות הבאות :

1) $y=\sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}}\cdot\sqrt[10]{(2x+1)^7}$

2) $y=\left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x}$

3) $y=\frac{(x+2)^{3x+4}\cdot(5x+6)}{(7x+8)\cdot(9x+10)}$

תשובות סופיות

1) $y'=y\left[\frac{1}{4}\frac{1}{10x-1}\cdot10+\frac{7}{10}\frac{1}{2x+1}\cdot2-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$

2) $y'=\left((10x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{2^x}\cdot\frac{1}{4}\left[2^x\cdot\ln2\cdot\ln(10x+1)+\frac{1}{10x+1}\cdot10\cdot2^x\right]$

3) $y'=y\left[3\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(3x+4)+\frac{1}{5x+6}\cdot5-\frac{1}{7x+8}\cdot7-\frac{1}{9x+10}\cdot9\right]$

אינפי 1

פרק 10 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

תוכן העניינים

מציאת מספר הפתרונות של משוואה

שאלות

הוכח שלמשוואות בשאלות **1-4** יש בדיוק פתרון אחד:

1) $x^3+4x-1=0$

2) $x^2=-\ln x$

3) $x-0.25\sin x=7$

4) $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

5) נתונה המשוואה $ax^3+bx^2+cx+d=0$, ונתון כי $b^2<3ac$.
מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכח את תשובתך.

עבור כל אחת מהמשוואות **6-9**, מצא את מספר הפתרונות ופתור אותה:

6) $e^{x-1}=x$

7) $\arctan x-x=0$

8) $\ln(x+5)-4=x$

9) $x^2+x\sin x=1-\cos x$

10) תהי f פונקציה גזירה לכל x, המקיימת: $f(1)=2,\ f(0)=1,\ f'(x)\le 1$.
הוכח שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

הוכח שלמשוואות בשאלות **11-13** יש בדיוק שני פתרונות:

11) $e^x-5x=0$ **12)** $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$ **13)** $1+4x^4=8x^3$

בכל אחת מהמשוואות **14-17**, מצא קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הנח שכל הפרמטרים שונים מאפס):

14) $ax^2 + bx + c = 0$

15) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

16) $x + a\cos(bx) = 1$

17) $(n > 4,\ odd)\ ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0$

18) הוכיחו שלמשוואה $x^2 + x^3 + 5x = 1$ יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.
הערה: שאלה זו עליך לפתור תוך שימוש במשפט רול.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) פתרון יחיד.
6) $x=1$
7) $x=0$
8) $x=-4$
9) $x=0$
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) $b^2-4ac=0$
15) $4b^2-12ac<0$
16) $\frac{1}{ab}<-1$, $\frac{1}{ab}>1$
17) $b^2(n-2)^2-4anc(n-4)<0$
18) שאלת הוכחה.

פתרון משוואות פולינומיאליות

שאלות

צמצם עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות **1-3**:

1) $$\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$$

2) $$\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$$

3) $$\frac{4x^2+x-1}{x-2}$$

פתור את המשוואות הבאות:

4) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

5) $k^3+2k^2-3k+20=0$

6) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

7) $k^3-6k^2+12k-8=0$

8) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

9) $k^3-k^2+k-1=0$

10) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

11) $7x^3-33x^2+21x+61=0$

תשובות סופיות

1) x^2+1

2) 0

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

5) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

6) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

7) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

8) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

9) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

10) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$

11) פתרון מקורב: $x=0.8459$.

שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

שאלות

פתור את המשוואות הבאות (שאלה **2** בשיטת ניוטון-רפסון):

1) $1+4x^4=8x^3$

2) $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

תשובות סופיות

1) פתרון מדויק $x=-1$.

2) פתרונות מקורבים: $x=1.9672$, $x=0.5576$.

אינפי 1

פרק 11 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

תוכן העניינים

משפט רול

שאלות

1) בדוק האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצא את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $[0,2]$ $\quad f(x)=x^3-3x^2+2x$

ב. $[-1,1]$ $\quad f(x)=\frac{x^2-1}{x-2}$

2) נתון ש- $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$.

הראה ש- $f(1)=f(5)$, אך אין נקודה c, כך ש- $f'(c)=0$.

האם הדבר סותר את משפט רול? נמק.

3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$,

ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, x_0,x_1,x_2, עבורן $f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)$.

הוכח שקיים c ממשי, כך ש- $f''(c)=0$.

4) תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שלכל n טבעי מתקיים $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$.

הוכח שקיימת $x_0\in(0,1)$, כך ש- $f'''(x_0)=0$.

5) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שמתקיים $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$.

הראה שלמשוואה $f'''(x)=0$ יש פתרון.

6) נתון כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נתון בנוסף כי f פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0=2$.

הוכח כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

7) נתונה פונקציה f, גזירה ב- $\mathbb{R}$.
תהי g מוגדרת על ידי $g(x)=(x^2-1)f(x)$.
הראה כי g גזירה ב- $\mathbb{R}$, והוכח כי הנגזרת, g',
מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1,1)$.

8) הוכח:
אם f גזירה ב- $\mathbb{R}$ ו- $f(1)=0$, אז הפונקציה $g(x)$, המוגדרת על ידי
$g(x)=xf(x)$, גזירה ב- $\mathbb{R}$, וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x)=0$.

9) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0$ ו- $f(x)>0$ לכל $0<x\le 1$.
הוכח שקיים $c\in(0,1)$, כך ש- $\frac{f'(c)}{f(c)}=2\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.

10) אם $c_0+\frac{c_1}{2}+\ldots+\frac{c_{n-1}}{n}+\frac{c_n}{n+1}=0$ $(c_i\in\mathbb{R})$,
הוכח שלמשוואה $c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n=0$
יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0,1)$.

11) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0,\ f(1)=1$.
הראה שלמשוואה $f'(x)=2x$ קיים פתרון בקטע $(0,1)$.

12) תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
נניח שלכל x ממשי מתקיים $f'(x)g(x)\ne g'(x)f(x)$.
הראה שבין כל שני שורשים של f קיים לפחות שורש אחד של g.

13) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה,
כך ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $f'(0)>0,\ f'(1)>0$.
א. הוכח שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.
ב. הוכח שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.
ג. הוכח שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0,1)$.

14) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל n טבעי $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$.

חשב את $f''(0)$.

ב. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0)>0$.

הוכח שקיים n טבעי, כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)\neq 1$.

15) תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל n טבעי $f\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.

חשב את $f''(1)$.

16) נתון כי f,g גזירות לכל x וכי $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\neq 0$ ב- $\mathbb{R}$.

הוכח שלמשוואה $f(x)g(x)=A$ יש לכל היותר פתרון אחד.

A קבוע כלשהו.

17) נתון כי f גזירה לכל x וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- $\mathbb{R}$.

תהי x_0 נקודה כלשהי.

הוכח כי לגרף של $y=f(x)$ ולישר המשיק בנקודה x_0 יש נקודה משותפת אחת ויחידה - x_0.

במילים אחרות: הוכח כי הגרף של $y=f(x)$ נמצא כולו מעל המשיק או מתחתיו.

18) נתון כי f גזירה פעמיים בקטע (a,b), ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

נתון שלמשוואה $f'(x)=0$ יש שלושה פתרונות בקטע.

הוכח שלמשוואה $f(x)=0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.

תן דוגמה לפונקציה f המקיימת $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

תשובות סופיות

1) א. כן, $1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. ב. כן, $2-\sqrt{3}$.

2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x=3$.

14) א. 0 ב. הוכחה.

15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$

שאלות

הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $$\frac{b-a}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b-a}{a} \qquad (0<a<b)$$

2) $$\frac{b-a}{2\sqrt{b}}<\sqrt{b}-\sqrt{a}<\frac{b-a}{2\sqrt{a}} \qquad (0<a<b)$$

3) $$(a-b)e^{-a}<e^{-b}-e^{-a}<(a-b)e^{-b} \qquad (a<b)$$

4) $$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^2 b} \qquad \left(0<a<b<\frac{\pi}{2}\right)$$

5) $$\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2} \qquad (0<a<b)$$

6) $$\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\arcsin b-\arcsin a<\frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \qquad (0<a<b<1)$$

7) $$\frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}}<\frac{\operatorname{arcsinh}(b)-\operatorname{arcsinh}(a)}{b-a}<\frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \qquad (0<a<b)$$

8) $$\frac{b-a}{1-a^2}<\operatorname{arctanh}(b)-\operatorname{arctanh}(a)<\frac{b-a}{1-b^2} \qquad (0<a<b<1)$$

9) $\sqrt[n]{b}\cdot\dfrac{b-a}{n\cdot b}<\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{a}\cdot\dfrac{b-a}{n\cdot a}$ $\quad(0<a<b)$

10) $\dfrac{2b(b-a)}{b^2+1}<\ln\left(\dfrac{b^2+1}{a^2+1}\right)<\dfrac{2a(b-a)}{a^2+1}$ $\quad(1<a<b)$

11) $\ln b-\ln a+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\le\dfrac{1}{4}(b-a)$ $\quad(1<a<b<3)$

12) $|\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|$ $\quad(x_1<x_2)$

13) $|\cos x_2-\cos x_1|\le|x_2-x_1|$ $\quad(x_1<x_2)$

14) $|\arctan y-\arctan x|\le|y-x|$ $\quad(x<y)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0,x]$

שאלות

הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $x<\tan x<\dfrac{x}{\cos^2 x}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

2) $\dfrac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$ $(x>0)$

3) $x<\arcsin x<\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<x<1)$

4) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\operatorname{arcsinh}(x)<x$ $(x>0)$

5) $x<\operatorname{arctanh}(x)<\dfrac{x}{1-x^2}$ $(0<x<1)$

6) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ $(x>0)$

7) $1+x<e^x<1+xe^x$ $(x>0)$

8) $\sin x\le x$ $(x>0)$

9) $\tan x<4x$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{3}\right)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

שאלות

הוכח את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5$

3) $\frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – שאלות כלליות

שאלות

1) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x, המקיימת $|f'(x)|\le 5$.
ידוע כי $f(1)=3$, $f(4)=18$.
הוכח כי $f(2)=8$.

2) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x, המקיימת $|f'(x)|\le 7$.
ידוע כי $f(1)=3$, $f(4)=18$.
הוכח כי $4\le f(2)\le 10$.

3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$, ונניח ש- $f(a)=f(b)=0$,
וכן שקיימת נקודה c, כאשר $c\in(a,b)$, כך ש- $f(c)>0$.
הוכח שקיימת נקודה m בקטע (a,b), כך ש- $f''(m)<0$.

4) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b), כך ש- f' חסומה בקטע (a,b).
א. הוכח שקיים $M>0$, כך שלכל x ו- y ב- (a,b) מתקיים:
$|f(y)-f(x)|\le M|y-x|$.
ב. הוכח ש- f רציפה במידה שווה ב- (a,b).
כלומר, הוכח שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל x ו- y ב- (a,b),
המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

5) נניח כי f רציפה ב- $[0,\infty)$ וגזירה ב- $(0,\infty)$.
כמו כן, $f(0)=0$, ו- f' מונוטונית עולה.
א. הוכח כי $\frac{f(x)}{x}<f'(x)$ ב- $(0,\infty)$.
ב. הוכח כי $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ מונוטונית עולה ב- $(0,\infty)$.

6) תהיינה f,g פונקציות רציפות ב- $[a,\infty)$ וגזירות ב- (a,∞).
נתון כי: $f(a)=g(a)$ ו- $f'(x)\le g'(x)$ לכל $x>a$.
הוכח כי: $f(x)\le g(x)$ לכל $x\ge a$.

7) נניח כי f גזירה ב- $(0,\infty)$.
א. נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.
הוכח כי $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=0$.
ב. נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)>0$.
הוכח כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

8) ענה על הסעיפים הבאים:
א. נתון: f גזירה ב- $\mathbb{R}$, K קבוע ממשי.
הוכח: $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=K \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=K$.
ב. ללא שימוש בכלל לופיטל, חשב את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

9) נניח כי f גזירה ב- $\mathbb{R}$.
האם נכון לומר כי מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\infty \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$?
הוכח או הפרך את תשובתך.
הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז',
הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

10) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)|<1$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכח שקיים לכל היותר c אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c$.

11) תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x)<0$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכח שקיים בדיוק c אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c^2$.

12) תהי f פונקציה גזירה ב- $[a,b]$.
הוכח שקיימים $c_1,c_2,c_3\in(a,b)$, כך ש- $c_2\ne c_3$ ו- $f'(c_1)=\frac{f'(c_2)+f'(c_3)}{2}$.

13) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.
נניח שהישר, המחבר את הנקודות $(0, f(0))$ ו- $(1, f(1))$,
חותך את הגרף של f בנקודה $(a, f(a))$, כאשר $0<a<1$.
הוכח שקיים $x_0\in[0,1]$, כך ש- $f''(x_0)=0$.

14) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נניח ש- f גזירה ב- (a,b) ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=L$, כאשר $L\in\mathbb{R}$.
הוכח כי $f_+'(a)$ קיים וש- $f_+'(a)=L$.

15) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה שמקיימת $f(0)=0$.
נניח שלכל $x\in[0,1]$ מתקיים $|f'(x)|\le|f(x)|$.
הוכח כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

16) נתון כי f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b).
א. ידוע כי $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכח כי f קבועה ב- $[a,b]$.
ב. ידוע כי $f'(x)=m$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכח כי f לינארית ב- $[a,b]$.

17) ענה על הסעיפים הבאים:
א. נתון כי f,g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b).
ידוע כי $f'(x)=g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכח כי $f(x)=g(x)+c$ ב- $[a,b]$.
ב. הוכח כי $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$.

18) נתון כי f גזירה בקטע (a,b), ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$.
הוכח כי f' לא חסומה בקטע.

תשובות סופיות

8) ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי

שאלות

1) הוכח שלכל $1 \le a < b$ מתקיים $n(\ln b - \ln a) < b^n - a^n$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

2) הוכח, כי עבור כל a, b, המקיימים $0 < a < b < 1$,
מתקיים $\frac{b}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\ln b - \ln a} < \frac{a}{1+a^2}$.

3) הוכח, כי עבור כל a, b, המקיימים $1 < a < b$,
מתקיים $\frac{2\sqrt{a}}{1+a^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} < \frac{2\sqrt{b}}{1+b^2}$.

4) הוכח כי $|\tan y - \tan x| \le 8|\sin x - \sin y|$ לכל $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

5) הוכח כי $\arctan x > \ln(1+x)$ לכל $x \in (0,1)$.

6) הוכח שלכל $x \neq 0$ מתקיים $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x$.

7) תהי f פונקציה רציפה ב- $[0,1]$ וגזירה ב- $(0,1)$.
הוכח שבקטע $(0,1)$ קיים פתרון למשוואה $f(1) - f(0) = \frac{f'(x)}{2x}$.

8) תהי f פונקציה רציפה ב- $[0,1]$ וגזירה ב- $(0,1)$, ויהי n מספר טבעי כלשהו.
הוכח שקיים $0 < c < 1$, המקיים $f(1) - f(0) = \frac{f'(c)}{nc^{n-1}}$.

9) יהיו a ו- b מספרים חיוביים כלשהם.
הוכח שקיים פתרון למשוואה $(a^3 - b^3)\cos x = 3x^2(\sin a - \sin b)$.

10) תהי f פונקציה גזירה ב- $[a,b]$, כאשר $a \geq 0$.
הוכח שקיימים $c_1, c_2 \in [a,b]$, כך ש- $\frac{f'(c_1)}{a+b} = \frac{f'(c_2)}{2c_2}$.

11) תהי f פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$, כאשר $ab > 0$.
הוכח שלמשוואה $f'(x) \cdot x - f(x) = \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}$
קיים פתרון בקטע $[a,b]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט דרבו

שאלות

1) האם קיימת פונקציה גזירה f, שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4x & x<1\\ x-1 & x\ge 1\end{cases}$?

2) האם קיימת פונקציה גזירה f, שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4x & x\ne 1\\ 0 & x=1\end{cases}$?

3) האם קיימת פונקציה גזירה f, שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4 & x=0\\ x^2 & x\ne 0\end{cases}$?

4) האם קיימת פונקציה גזירה f, שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \frac{1}{x^2} & x\ne 0\end{cases}$?

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$. הוכח:
אם f' לא רציפה ב-x_0, אז x_0 היא לא נקודת אי-רציפות סליקה.

ב. האם קיימת פונקציה f, גזירה ב-$\mathbb{R}$,
שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}4 & x=0\\ x^2 & x\ne 0\end{cases}$?

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$. הוכח:
אם f' לא רציפה ב-x_0, אז x_0 היא לא נקודת אי-רציפות מסוג I.

ב. האם קיימת פונקציה f גזירה ב-$\mathbb{R}$,
שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}x+1 & x\ge 1\\ 4x & x<1\end{cases}$?

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$. הוכח:

אם f' לא רציפה ב- x_0, אז $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)\neq\pm\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f'(x)\neq\pm\infty$.

כלומר, x_0 היא לא נקודת אי-רציפות מסוג שני, שבה אחד הגבולות החד-צדדיים אינסופי.

ב. האם קיימת פונקציה f, גזירה ב- $\mathbb{R}$,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\end{cases}$?

8) האם קיימת פונקציה f, גזירה ב- $[0,1]$,

שהנגזרת שלה ב- $[0,1]$ נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$?

9) תהי f פונקציה גזירה ב- $\mathbb{R}$, ונניח כי $f(0)=0,\ f(1)=f(2)=1$.

הוכח שקיים $x\in(0,2)$, שעבורו $f'(x)=\frac{1}{4}$.

10) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b), ומקיימת $f'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכח כי f מונוטונית בקטע (a,b).

11) ממשפט דרבו נובע, שהנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת את תכונת ערך הביניים (למרות שהנגזרת לא בהכרח רציפה).

האם הנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת גם את משפטי ויירשטראס?

הוכח או הפרך את תשובתך.

תשובות סופיות

1) לא.
2) לא.
3) לא.
4) לא.
5) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
6) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
7) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
8) לא.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינפי 1

פרק 12 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ ו- $\frac{\infty}{\infty}$

חשב את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשב את הגבולות הבאים (ביטויים אי- רציונאליים):

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשב את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\quad (a,b>0)$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשב את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$

14) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$

חשב את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

16) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$

17) $\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(ax^2\right)}{bx^2}$

18) $\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(ax\right)}{\sin\left(bx\right)}$

19) $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

20) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

חשב את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

21) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

22) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{x^4}$

23) $\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x\left(1+x\right)}{x^3}$

24) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}{x^4}$

25) $\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\cos x^2\right)}{x^4}$

26) $\lim_{x\to0}\frac{\arctan\left(x^2+3x\right)}{\arcsin\left(x^2-4x\right)}$

27) $\lim_{x\to\infty}\tanh x$

28) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sinh x}$

29) $\lim_{x\to0}\frac{2\cosh x-2}{1-\cos 2x}$

30) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

31) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

32) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+x+1}{e^x}$

33) $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln x\right)^2+2\ln x-3}{x}$

34) $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\sin x\right)}{\ln\left(\tan x\right)}$

35) $\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$	2) $\frac{20}{17}$	3) $n-1$	4) 4	5) $\frac{1}{6}$
6) $\frac{3}{2}$	7) $\frac{5}{6}$	8) $-\frac{3}{2}$	9) 1	10) $\ln\frac{a}{b}$
11) $\frac{1}{2}$	12) $\frac{1}{6}$	13) $-\frac{1}{2}$	14) 2	15) 1
16) 1	17) $\frac{a}{b}$	18) $\frac{a}{b}$	19) $\frac{1}{6}$	20) $\frac{1}{2}$
21) $\frac{1}{2}$	22) $\frac{1}{8}$	23) $\frac{1}{3}$	24) $-\frac{1}{3}$	25) $-\frac{1}{2}$
26) $-\frac{3}{4}$	27) 1	28) 1	29) $\frac{2}{3}$	30) $\frac{1}{2}$
31) $\frac{1}{2}$	32) ∞	33) 0	34) ∞	35) 0

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $0\cdot\infty$

חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim_{x\to\infty}x^{2}e^{-x}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x$

4) $\lim_{x\to0^{+}}\tan x\cdot\ln x$

5) $\lim_{x\to0}\left(1-\cos x\right)\cot x$

6) $\lim_{x\to0^{+}}x\cdot\ln x$

7) $\lim_{x\to3^{+}}\left(x^{2}-9\right)\cdot\ln\left(x-3\right)$

8) $\lim_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

9) $\lim_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

תשובות סופיות

1) ∞
2) 0
3) 0
4) 0
5) 0
6) 0
7) 0
8) 6
9) $\frac{5}{2}$

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty-\infty$

חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

3) $\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(3x)-\ln(\sin 5x)\right]$

4) $\lim_{x\to \infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

5) $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

6) $\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

תשובות סופיות

1) 0

2) $\frac{1}{2}$

3) $\ln\frac{3}{5}$

4) $\frac{1}{2}$

5) $-\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{3}$

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: ∞^0 , $0^{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$

חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

2) $\lim_{x\to 0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

3) $\lim_{x\to 2^+} (2x-4)^{x-2}$

4) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

5) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

6) $\lim_{x\to 0} (1+\tan 3x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

8) $\lim_{x\to 0} \left(\cos x^2\right)^{\frac{1}{x^4}}$

9) $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

10) $\lim_{x\to 0^+} x^{\tan x}$

11) $\lim_{x\to 0} (x+1)^{\cot x}$

12) $\lim_{x\to 0^+} (x+\sin x)^{\tan x}$

13) $\lim_{x\to 0^+} \left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$

14) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

תשובות סופיות

1) e 2) 1 3) 1 4) 1 5) e^2

6) 1 7) e^3 8) $e^{1/3}$ 9) $e^{-1/2}$ 10) 1

11) 1 12) e 13) 1 14) e

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

הראה זאת והסבר מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים. לבסוף, חשב את הגבול.

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{4}$

3) $\frac{3}{4}$

אינפי 1

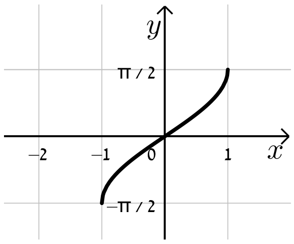
פרק 13 - נושאים מתקדמים - פונקציות טריגונומטריות הפוכות

תוכן העניינים

נושאים מתקדמים – פונקציות טריגונומטריות הפוכות

סיכום כללי

הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות

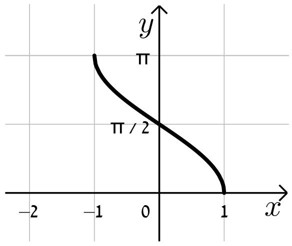


תיאור גרפי של הפונקציה $f(x)=\arcsin(x)$:

סימון נוסף: $f(x)=\sin^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-1\le x\le 1$.

טווח: $-\frac{\pi}{2}\le f(x)\le \frac{\pi}{2}$.

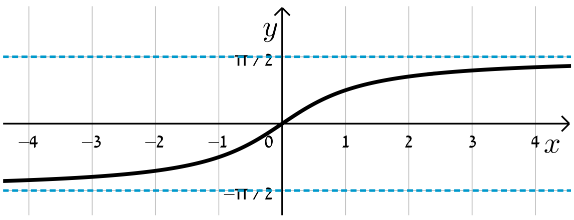


תיאור גרפי של הפונקציה $f(x)=\arccos(x)$:

סימון נוסף: $f(x)=\cos^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-1\le x\le 1$.

טווח: $0\le f(x)\le \pi$.

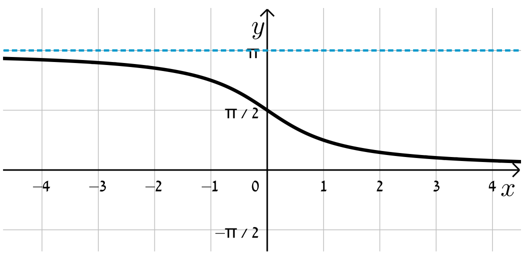


תיאור גרפי של הפונקציה $f(x)=\arctan(x)$:

סימון נוסף: $f(x)=\tan^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-\infty< x< \infty$.

טווח: $-\frac{\pi}{2}< f(x)< \frac{\pi}{2}$.



תיאור גרפי של הפונקציה $f(x)=\text{arccot}(x)$:

סימון נוסף: $f(x)=\cot^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-\infty< x< \infty$.

טווח: $0< f(x)< \pi$.

קשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות להפוכות

עבור הפונקציות הטריגונומטריות, שאינן חח"ע, נקבל את הקשרים הבאים :

הפונקציה	הזהות
סינוס	$\sin\left(\sin^{-1}(x)\right)=x \qquad -1\le x\le 1$
	$\sin^{-1}\left(\sin(x)\right)=\begin{cases} x-2\pi k & -\frac{\pi}{2}+2\pi k\le x\le \frac{\pi}{2}+2\pi k \\ \pi(k+1)-x & \frac{\pi}{2}+2\pi k\le x\le \frac{3\pi}{2}+2\pi k \end{cases}$
קוסינוס	$\cos\left(\cos^{-1}(x)\right)=x \qquad -1\le x\le 1$
	$\cos^{-1}\left(\cos(x)\right)=\begin{cases} x-2\pi k & 2\pi k\le x\le \pi(1+2k) \\ 2\pi k-x & \pi(1+2k)\le x\le 2\pi(k+1) \end{cases}$
טנגנס	$\tan\left(\tan^{-1}(x)\right)=x \qquad -\infty<x<\infty$
	$\tan^{-1}\left(\tan(x)\right)=x-\pi k \qquad -\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k$
קוטנגנס	$\cot\left(\cot^{-1}(x)\right)=x \qquad -\infty<x<\infty$
	$\cot^{-1}\left(\cot(x)\right)=x-\pi k \qquad \pi k<x<\pi+\pi k$

שאלות

בשאלות **1-12** חשב ללא מחשבון :

1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **2)** $\arccos(-1)$

3) $\text{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **4)** $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$

5) $\arccos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **6)** $\arcsin(-0.5)$

7) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ **8)** $\sin\left(\arcsin(-0.5)\right)$

9) $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ **10)** $\cos\left(\text{arccot}(1)\right)$

11) $\sin\left(2\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right)$ **12)** $\tan\left(-\text{arccot}\left(\sqrt{3}\right)\right)$

בשאלות **13-15** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות:

13) $y=\arcsin\frac{2x+1}{3-3x}$

14) $y=\arccos\frac{x+3}{2x+1}$

15) $y=\arctan\frac{1}{1-\ln x}$

בשאלות **16-19**, הוכח כי לכל x מתחום ההגדרה מתקיים:

16) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

17) $\sin\left(2\arccos x\right)=2x\sqrt{1-x^2}$

18) $\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$

19) $x\neq 0$, $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\frac{x}{|x|}$

20) הראה את הקשר הבא: $\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\pi$.

תשובות סופיות

1) $-\frac{\pi}{4}$ **2)** π **3)** $\frac{\pi}{3}$ **4)** $-\frac{\pi}{3}$

5) ϕ **6)** $-\frac{\pi}{6}$ **7)** $-\frac{\pi}{6}$ **8)** $-\frac{1}{2}$

9) $\frac{1}{2}$ **10)** 1 **11)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **12)** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

13) $x\geq 4$, $x\leq\frac{2}{5}$ **14)** $x\geq 2$, $x\leq-\frac{4}{3}$ **15)** $x>0$, $x\neq e$

16) - 20) שאלות הוכחה.

אינפי 1

פרק 14 - נושאים מתקדמים - פונקציות היפרבוליות

תוכן העניינים

הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות

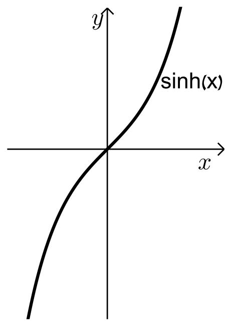
סיכום כללי

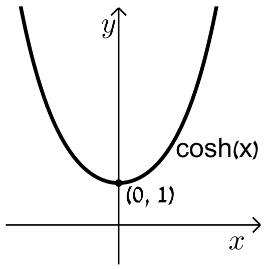
הפונקציות ההיפרבוליות הן:

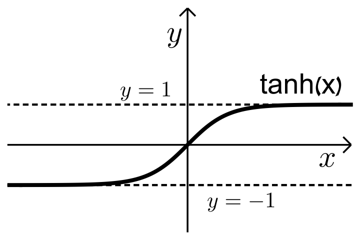
$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

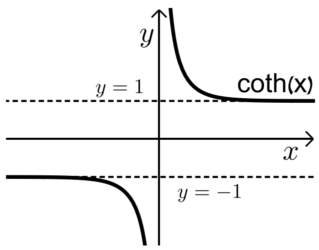
$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \coth(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

תיאורים גרפיים









שאלות

1) חשב את ערכה של הפונקציה ההיפרבולית $\sinh(x)$, עבור $x=1$.

2) נתון כי $\sinh(x_0)=-1$.
חשב את ערכן של הפונקציות $\cosh(x_0)$, $\tanh(x_0)$ ו- $\coth(x_0)$.

3) חשב: $\sinh(\ln 5)$.

4) חשב: $\tanh(-3\ln 2)$.

תשובות סופיות

1) 1.175

2) $\cosh(x_0)=\sqrt{2}\ ,\ \tanh(x_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \coth(x_0)=-\sqrt{2}$

3) 2.4

4) $-\frac{63}{65}$

זהויות עם פונקציות היפרבוליות

סיכום כללי

<u>טבלת זהויות יסודיות של פונקציות היפרבוליות</u>

ארגומנט שלילי	טנגנס וקוטנגנס היפרבוליים	סינוס וקוסינוס היפרבוליים
$\cosh(-x)=\cosh(x)$	$1+\tanh^2(x)=\dfrac{1}{\cosh^2(x)}$	$\cosh(x)\pm\sinh(x)=e^{\pm x}$
$\sinh(-x)=-\sinh(x)$	$\coth^2(x)-1=\dfrac{1}{\sinh^2(x)}$	$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

סכום והפרש ארגומנטים
$\sinh(x\pm y)=\sinh(x)\cosh(y)\pm\cosh(x)\sinh(y)$
$\cosh(x\pm y)=\cosh(x)\cosh(y)\pm\sinh(x)\sinh(y)$

זהויות של ארגומנט כפול
$\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$
$\cosh(2x)=\cosh^2(x)+\sinh^2(x)=2\sinh^2(x)+1=2\cosh^2(x)-1$

שאלות

1) הוכח את הזהות $\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$.

2) הוכח את הזהות הכפולה $\sinh\left(\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{\cosh(x)-1}{2}}=\dfrac{\sinh(x)}{\sqrt{2(\cosh(x)+1)}}$,

בתחום $x\geq 0$.

3) הוכח את הזהות $\cosh^4(x)-\sinh^4(x)=\cosh(2x)$.

4) הוכח את הזהויות $\cosh(x\pm y)=\cosh(x)\cosh(y)\pm\sinh(x)\sinh(y)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות של פונקציות היפרבוליות

סיכום כללי

להלן הנגזרות יסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות :

$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$(\sinh(x))' = \cosh(x)$
$(\coth(x))' = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$	$(\cosh(x))' = \sinh(x)$

שאלות

1) גזור את הפונקציה $f(x) = \cosh(\ln x)$.

2) גזור את הפונקציה $f(x) = \sinh(\tanh(x))$.

3) גזור את הפונקציה $f(x) = \cosh(\ln(\sin x))$.

4) גזור את הפונקציה $f(x) = \sinh^2(x^3)$.

תשובות סופיות

1) $f'(x) = \frac{\sinh(\ln x)}{x}$

2) $f'(x) = \frac{\cosh(\tanh(x))}{\cosh^2(x)}$

3) $f'(x) = \sinh(\ln(\sin(x))) \cdot \cot(x)$

4) $f'(x) = 3x^2 \sinh(2x^3)$

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

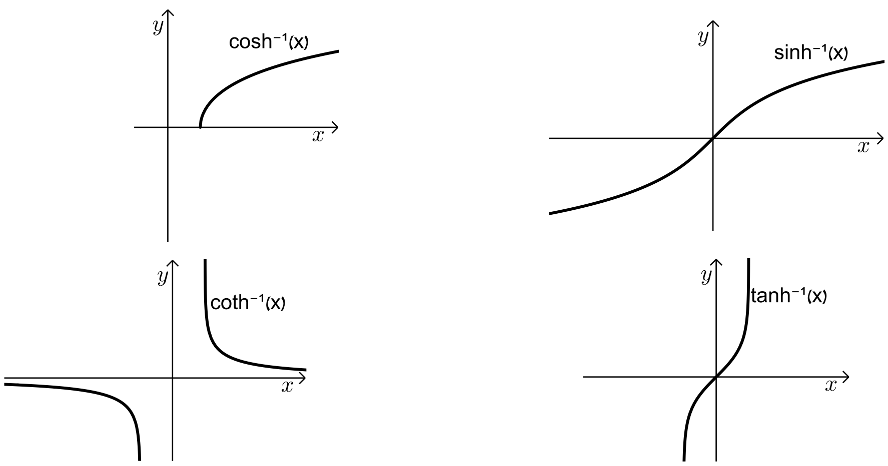
סיכום כללי

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות הן:

$$\sinh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad \tanh^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad \coth^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

תיאורים גרפיים



הערה

יש המסמנים פונקציה הפוכה עם arc, למשל $\sinh^{-1}(x)=\text{arcsinh}(x)$.

שאלות

1) הוכח כי $\sinh(\text{arc}\cosh(x))=\sqrt{x^2-1}$, לכל $|x|>1$.

2) הוכח כי $\cosh(\text{arc}\tanh(x))=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, לכל $|x|<1$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות

סיכום כללי

להלן הנגזרות יסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות:

$\left(\tanh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{1-x^2}\ ,\ \lvert x\rvert<1$	$\left(\sinh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\left(\coth^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{1-x^2}\ ,\ \lvert x\rvert>1$	$\left(\cosh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ,\ x>1$

שאלות

1) גזור את הפונקציה $f(x)=\ln\left(\operatorname{arcsinh}(x)\right)$.

2) גזור את הפונקציה $f(x)=\ln\left(\cosh\left(\operatorname{arctanh}(x)\right)\right)$.

3) גזור את הפונקציה $f(x)=\operatorname{arcsinh}\left(\operatorname{arccosh}\left(\tan(x)\right)\right)$.

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$

2) $f'(x)=\frac{x}{1-x^2}$

3) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\cosh^{-1}(\tan x)\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan^2 x-1}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$

אינפי 1

פרק 15 - תרגילי תיאוריה מתקדמים - חשבון דיפרנציאלי (הפרק באנגלית)

תוכן העניינים

Convergence of a Sequence, Monotone Sequences (סדרות)

Questions

1) Let A be a non-empty subset of $\mathbb{R}$ and $\alpha = \inf A$. Show that there exists a sequence (a_n) such that an $a_n \in A$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $a_n \to \alpha$.

2) Let $x_0 \in \mathbb{Q}$. Show that there exists a sequence (x_n) of irrational numbers such that $x_n \to x_0$.

3) Let A be a non-empty subset of $\mathbb{R}$ and $x_0 \in \mathbb{R}$. Show that there exists a sequence (a_n) in A such that $|x_0 - a_n| \to d(x_0, A)$. Recall that $d(x, A) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$.

4) Let (a_k) be a bounded sequence. For every $n \in \mathbb{N}$, define $x_n = \sup\{a_k : k < n\}$. Show that the sequence (x_n) converges.

Cauchy Criterion, Bolzano - Weierstrass Theorem

5) Let (x_n) be a sequence of integers such that $|x_{n+1} - x_n| \geq 1$ for all $n \in \mathbb{N}$. Prove or disprove the following statements.
   a) The sequence (x_n) does not satisfy the Cauchy criterion.
   b) The sequence (x_n) cannot have a convergent subsequence.

6) Show that a sequence (x_n) of real numbers has no convergent subsequence if and only if $|x_n| \to \infty$.

7) Let (x_n) be a sequence in $\mathbb{R}$ and $x_0 \in \mathbb{R}$. Suppose that every subsequence of (x_n) has a subsequence converging to x_0. Show that $x_n \to x_0$.

8) Let (x_n) be a sequence in $\mathbb{R}$. We say that a positive integer n is a peak of the sequence if $m > n$ implies $x_n > x_m$ (i.e., if x_n is greater than every subsequent term in the sequence).

a) If (x_n) has infinitely many peaks, show that it has a decreasing subsequence.

b) If (x_n) has only finitely many peaks, show that it has an increasing subsequence.

c) From (a) and (b) conclude that every sequence in $\mathbb{R}$ has a monotone subsequence. Further, every bounded sequence in $\mathbb{R}$ has a convergent subsequence (An alternate proof of Bolzano-Weierstrass Theorem).

Continuity and Limits (גבולות ורציפות)

Questions

1) Let $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=5$. Show that $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

2) Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $x_0\in\mathbb{R}$. Suppose $\lim_{x\to x_0} f(x)$ exists.

Show that $\lim_{x\to 0} f(x+x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$.

3) Let $f(x)=|x|$ for every $x\in\mathbb{R}$. Show that f is continuous on $\mathbb{R}$.

4) Let $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ be defined by $f(0)=0$ and $f(x)=x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ for $x\neq 0$.

Is f continuous?

5) Let $[\cdot]$ denote the integer part function and $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ be defined by

$f(x)=[x^2]\sin\pi x$.

a) Show that f is continuous at each $x\neq\sqrt{n},\ n\in\mathbb{N}$. [Here $\mathbb{N}$ includes 0]

b) Show that f is continuous at each $x=k\in\mathbb{N}$.

c) Show that f is discontinuous at each $x=\sqrt{n},\ n\in\mathbb{N}$ such that $x\notin\mathbb{N}$.

6) Let the function $f:[0,1]\to[a,b]$ be one-one and onto. Suppose f is continuous.

Show that f^{-1} is also continuous.

7) Let $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ be given by

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{if } x=\frac{p}{q} \text{ where } p,q\in\mathbb{N} \text{ and } p,q \text{ have no common factor}\\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational}\end{cases}$$

a) Suppose $x_n\to x_0$ for some x_0, with $x_n\neq x$ for all $n\in\mathbb{N}$, and suppose

$x_n=\frac{p_n}{q_n}\in(0,1)$ where $p_n,q_n\in\mathbb{N}$ have no common factors. Show that

$\lim_{n\to\infty} q_n=\infty$.

b) Show that f is continuous at every irrational.

c) Show that f is discontinuous at every rational.

Existence of Extrema, Intermediate Value Property (משפט ערך הביניים ומשפט ויירשטראס)

Questions

1) Give an example of a function f on $[0,1]$ which is not continuous but satisfies the IVP*. *We say that f has the property IVP [Intermediate Value Property] on $[a,b]$ if for every $x,y\in[a,b]$ and α satisfying $f(x)<\alpha<f(y)$ or $f(x)>\alpha>f(y)$ there exists $x_0\in[x,y]$, such that $f(x_0)=\alpha$.

2) Let $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ be continuous. Show that there exists an $x_0\in[0,1]$ such that $f(x_0)=\frac{1}{3}\left[f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{3}{4})\right]$.

3) Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a continuous function. Show that f is a constant function if
a) $f(x)$ is rational for each $x\in\mathbb{R}$.
b) $f(x)$ is an integer for each $x\in\mathbb{Q}$.

4) Let $p(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a polynomial function of odd degree. Show that p is onto.

5) Let $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ be continuous such that
$\inf\{f(x):x\in[0,1]\}=\inf\{g(x):x\in[0,1]\}$.
Show that there exists $x_0\in[0,1]$ such that $f(x_0)=g(x_0)$.

6) A cross country runner runs continuously an eight kilometers course in 40 minutes without taking rest. Show that, somewhere along the course, the runner must have covered a distance of one kilometer in exactly 5 minutes.

7) Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a continuous one-one map.
Show that f is either strictly increasing or strictly decreasing.

8) Let $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ be a bijective map. Show that f is not continuous on $\mathbb{R}$.

9) Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a continuous function.
a) Suppose f attains each of values exactly two times. Given: $f(x_1)=f(x_2)=\alpha$ for some $x_1,x_2,\alpha\in\mathbb{R}$, and $f(x_0)>\alpha$ for some $x_0\in[x_1,x_2]$. Show that f attains its maximum in $[x_1,x_2]$ exactly at one point.
b) Using (a) show that f cannot attain each of its values exactly two times.

Differentiability and Rolle's Theorem
(גזירות ומשפט רול)

Questions

1) Let $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ be a twice differentiable function such that $f''(0)>0$. Show that there exists $n\in\mathbb{N}$ that $f(\frac{1}{n})\neq 1$.

2) Let f be a differentiable function on $\mathbb{R}$ such that $f(0)=f(1)=0$, $f'(0)>0$ and $f'(1)>0$.

a) Show that $\exists\delta>0$ such that $f(x)<0$ on $(1-\delta,1)$.

b) Show that $\exists c_1,c_2\in(0,1)$ such that $c_1\neq c_2$ and $f'(c_1)=f'(c_2)=0$.

3) Let $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ be thrice differentiable. Suppose $f(\frac{1}{n})=0$ for all $n\in\mathbb{N}$. Show that there exists $x_0\in(0,1)$ such that $f'''(x_0)=0$.

4) Give an example of a function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ which is differentiable only at $x=1$.

5) Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be differentiable at $x_0\in\mathbb{R}$.

a) If $f(x_0)\neq 0$, show that $|f|$ is also differentiable at x_0.

b) If $f(x_0)=0$, give examples to show that $|f|$ may or may not be differentiable at x_0.

6) Let $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be differentiable at $x_0\in\mathbb{R}$. Define $h(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}\ \forall x\in\mathbb{R}$. Show that if $f(x_0)\neq g(x_0)$ then h is differentiable at x_0.

7) Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be differentiable at $x=1$ and $f(1)=1$. Show that if $k\in\mathbb{N}$ then $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f(1+\frac{1}{n})+f(1+\frac{2}{n})+\ldots+f(1+\frac{k}{n})-k\right]=\frac{k(k+1)}{2}f'(1)$.

8) Let $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ be differentiable and $f(0)=0$ and $f(1)=1$. Show that the equation $f'(x)=2x$ has a solution on $(0,1)$.

9) Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be such that $f'''(x)$ exists for all $x\in[a,b]$.
Suppose that $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$.
Show that the equation $f'''(x)=0$ has a solution.

10) Let $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be differentiable functions. Suppose that $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$. Show that between any two roots of f, there exists at least one root* of g.
*Recall: a root of f is a solution of $f(x)=0$.

11) Let $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ satisfy $f(xy)=f(x)+f(y)\ \forall x,y\in(0,\infty)$.
Suppose that f is differentiable at $x=1$.
Show that f is differentiable at every $x\in(0,\infty)$ and $f'(x)=\dfrac{f'(1)}{x}$.
Hint: first show that $f(1)=0$ and $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$.

12) Let $p(x)=a+bx+cx^2$. Find all values of $a,b,c\in\mathbb{R}$ for which the function $p(|x|)$ is differentiable at 0.

Mean Value Theorem, L'Hôpital's Rule (משפט לגראנז' וכלל לופיטל)

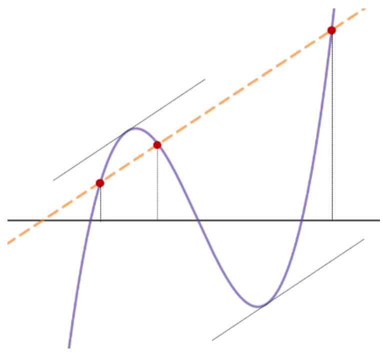
Questions

1) Does there exist a differentiable function $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ satisfying $f(0)=-1,\ f(2)=4$ and $f'(x)\le 2$, for all $x\in[0,2]$?

2) Let $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ be differentiable such that $|f'(x)|<1$ for all $x\in[0,1]$. Show that there exists at most one $c\in[0,1]$ such that $f(c)=c$.

3) Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be differentiable such that for some $\alpha\in\mathbb{R}$, $|f'(x)|\le\alpha<1$ for all $x\in\mathbb{R}$. Let $a_1\in\mathbb{R}$ and define a sequence (a_n) recursively by $a_{n+1}=f(a_n)$. Show that (a_n) converges.

4) Let $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ be twice differentiable. Suppose that the line segment joining the points $(0,f(0))$ and $(1,f(1))$ intersect the graph of f at a point $(a,f(a))$, where $0<a<1$. Show that there exists $x_0\in[0,1]$ such that $f''(x_0)=0$.



5) Let $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ be continuous. Suppose f is differentiable on $(0,1)$ and $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=L$ for some $L\in\mathbb{R}$. Show that $f'(0)$ exists and $f'(0)=L$.

6) Let $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ be differentiable and $f(0)=0$. Suppose that $|f'(x)|<|f(x)|$ for all $x\in[0,1]$. Show that $f(x)=0$ for all $x\in[0,1]$.

7) Let $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ be continuous and $f(0)=0$. Suppose that $f'(x)$ exists for all $x\in(0,\infty)$ and f' is increasing on $(0,\infty)$. Show that the function $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ is increasing on $(0,\infty)$.

8) Let $a \geq 0$ and $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ be differentiable. Using Cauchy's mean value theorem*, show that there exist $c_1, c_2 \in (a,b)$ such that $\frac{f'(c_1)}{a+b} = \frac{f'(c_2)}{2c_2}$.

* $\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a<c<b}$

9) Let $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be such that $f''(c)$ exists at some $c \in \mathbb{R}$. Using L'Hôpital's rule, show that $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(c+h)-2f(c)+f(c-h)}{h^2} = f''(c)$. Give an example where the above limit exists but $f''(c)$ does not exist.

10) Let $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ be differentiable. If $f'(x) \neq 0$ for all $x \in [a,b]$, show that either $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$ or $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in [a,b]$.

11) Let $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ be differentiable and let $\alpha \in \mathbb{R}$ be such that $f'(a) < \alpha < f'(b)$. Define $g(x) = f(x) - \alpha x$ for all $x \in [a,b]$.

a) Show that there exists $c \in [a,b]$ such that $g'(c) = 0$.
Hint: prove by contradiction, noting that $g'(a) < 0$ and $g'(b) < 0$.

b) From the above, conclude that if a function f is differentiable on an interval $[a,b]$, then f' has the Intermediate Value Property on $[a,b]$.

12) Let f be differentiable on $[a,b]$ $(a<b)$. Show that there exist $c_1, c_2, c_3 \in (a,b)$ such that $c_2 \neq c_3$ and $f'(c_2) + f'(c_3) = 2f'(c_1)$.

13) Suppose $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ is continuous and $\int_0^1 f(t)dt = 1$.

a) Show that there exists $c \in (0,1)$ such that $f(c) = 1$.

b) Show that there exist $c_1 \neq c_2$ in $(0,1)$ such that $f(c_1) + f(c_2) = 2$.

14) Let $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ be such that $|f'(x)| < 10$ for all $x \in (0,1)$ and let (x_n) be a sequence in $(0,1)$ satisfying the Cauchy criterion. Show that the sequence $(f(x_n))$ converges.

15) Let $f:[0,1]\to[0,1]$ be such that $f'(x)<0$ for all $x\in[0,1]$. Show that there is one and only one $c\in[0,1]$ such that $f(c)=c^2$.

16) Let $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ and $a_n=f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)$, $n=1,2,\ldots$

Show that:

a) if f is continuous, then $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converges;

b) if f is differentiable and $|f'(x)|<\frac{1}{2}$ $\forall x\in[0,1]$, then $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\cos n)\sqrt{n}$ converges.

Power Series, Taylor Series (טורי חזקות וטורי טיילור)

Questions

1) Answer the following sections:

a) Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be such that $f''(x)\ge 0$ for all $x\in[a,b]$.
Suppose $x_0\in[a,b]$.
Show that for any $x\in[a,b]$ $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.
I.e., the graph of f lies above the tangent line to the graph at $(x_0, f(x_0))$.

b) Show that $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ for all $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

2) Let $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ be infinitely differentiable and let $x_0\in(a,b)$. Suppose that there exists $M>0$ such that $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M^n$ for all $n\in\mathbb{N}$ and $x\in(a,b)$.
Show that Taylor's series of f around x_0 converges to $f(x)$ for all $x\in(a,b)$.

3) Let (a_n) be a sequence of nonnegative reals and suppose that $(a_n^{\frac{1}{n}})$ is a bounded sequence. For each n, define $A_n=\sup\{a_k^{\frac{1}{k}}:k\ge n\}$.
(A_n) converges since it is decreasing and bounded below (by 0).
So $A_n\to L$ for some $L\ge 0$.

a) Show that if $L<1$, the series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converges and if $L>1$ the series diverges.

b) Show that the radius of convergence of the power series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ is $\frac{1}{L}$.

אינפי 1

פרק 16 - אינטגרביליות, המשפטים היסודיים ומשפטי ערך הביניים לאינטגרלים (הפרק באנגלית)

תוכן העניינים

אינטגרביליות

שאלות

1) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
נניח שקיימת חלוקה P של $[a,b]$, כך ש- $L(P,f)=U(P,f)$.
הוכח ש- f פונקציה קבועה.

2) בכל אחד מהמקרים הבאים, הערך את האינטגרל העליון והתחתון של f,
הראה ש- f אינטגרבילית ומצא את האינטגרל של f.
א. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, נגדיר $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, על ידי $f(x)=\alpha$ לכל $x\in[a,b]$.
ב. $f(x)=0$ כאשר $0\le x<\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=10$ ו- $f(x)=1$ כאשר $\frac{1}{2}<x\le 1$.
ג. $f(x)=x$ לכל $x\in[0,1]$.

3) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהי (P_n) חלוקה,
כך ש- $U(P_n,f)-L(P_n,f)\to 0$.
א. הראה ש- f אינטגרבילית.
ב. הוכח כי: $\lim\limits_{n\to\infty}U(P_n,f)=\lim\limits_{n\to\infty}L(P_n,f)=\int_a^b f(x)dx$.

4) בכל אחד מהמקרים הבאים, הראה ש- f אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן:
א. $f(x)=x$ ב- $[0,1]$.
ב. $f(x)=x^2$ ב- $[0,1]$.
ג. $f(x)=\frac{1}{x}$ ב- $[1,2]$.

5) יהיו f_1,f_2,f פונקציות חסומות ב- $[0,1]$, כך ש- $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$
לכל $x\in[0,1]$.
הנח כי f_1 ו- f_2 אינטגרביליות וכן $\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 f_2(x)dx=I$.
הראה כי f אינטגרבילית ומצא את $\int_0^1 f(x)dx$.

6) תהי פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f(x)=x$ לכל x רציונלי,
ו- $f(x)=0$ לכל x אי-רציונלי.
הערך את האינטגרל העליון והתחתון של f, והראה כי f אינה אינטגרבילית.

7) תהי $f:[0,1]\to[0,1]$, מוגדרת באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{אם } x=\frac{p}{q}\neq 1 \text{, כאשר } p,q\in\mathbb{N} \text{, ול- } p,q \text{ אין גורמים משותפים}\\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי או } x=0 \text{ או } x=1\end{cases}$$

א. תהי A_N מוגדרת באופן הבא, לכל $N\in\mathbb{N}$: $A_N=\left\{x\in(0,1)\mid x=\frac{p}{q}\right\}$,
כאשר $p,q\in\mathbb{N}$, $q\leq N$ ול- p,q אין גורמים משותפים.
הראה שהקבוצה A_N סופית.

ב. ל- $N\in\mathbb{N}$ ו- $\varepsilon>0$ נתונים, הראה כי קיימים קטעים
$[x_1,x_2],[x_3,x_4],\ldots,[x_{2m-1},x_{2m}]$, כך ש:
$0<x_1<x_2<x_3<x_4<\ldots<x_{2m-1}<x_{2m}<1$,
$A_N\subseteq(x_1,x_2)\cup(x_3,x_4)\cup\ldots\cup(x_{2m-1},x_{2m})$,
ו- $\frac{\varepsilon}{2}\geq|x_1-x_2|+|x_3-x_4|+\ldots+|x_{2m-1}-x_{2m}|$.

ג. הראה ש- f אינטגרבילית.

ד. מצא שתי פונקציות אינטגרביליות, g ו- h ב- $[0,1]$,
כך שההרכבה $g\circ h$ אינה אינטגרבילית.

8) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן $[c,d]\subseteq[a,b]$.
הראה ש- f אינטגרבילית ב- $[c,d]$.

9) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי f חסומה ב- $[c,d]$, ונתון:

$$M=\sup\{f(x)\mid x\in[c,d]\},\quad M'=\sup\{|f(x)|\mid x\in[c,d]\}$$

$$m=\inf\{f(x)\mid x\in[c,d]\},\quad m'=\inf\{|f(x)|\mid x\in[c,d]\}$$

הוכח כי $M'-m'\leq M-m$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.
הוכח כי $|f|$ ו- f^2 אינטגרביליות.

10) מצא דוגמה לפונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, כך שמתקיים:

א. $|f|$ אינטגרבילית, אבל f אינה אינטגרבילית.

ב. f^2 אינטגרבילית, אבל f אינה אינטגרבילית.

11) תהיינה f ו- g שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

א. הוכח כי אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. הוכח כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$.

ג. הוכח כי אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$,

אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

היעזר באי-שוויון זה כדי להראות ש- $\frac{\sqrt{2}}{6}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{3}}{8}$.

12) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\ge0}$ (כלומר, $f(x)\ge0$).

א. הוכח כי אם f רציפה וכן $\int_a^b f(x)dx=0$, אז $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

ב. הבא דוגמה לפונקציה f, אינטגרבילית ב- $[a,b]$, כאשר $\int_a^b f(x)dx=0$,

אבל קיים $x_0\in[a,b]$, עבורו $f(x_0)>0$.

הערה: f לא תהיה רציפה.

13) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שלכל $c\in(0,1)$, הפונקציה f אינטגרבילית ב- $[c,1]$.

א. הוכח כי f אינטגרבילית ב- $[0,1]$.

ב. היעזר בסעיף א', והוכח כי $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \sin\frac{1}{x} & x\in(0,1]\end{cases}$ אינטגרבילית ב- $[0,1]$.

14) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שכאשר המכפלה fg אינטגרבילית ב- $[a,b]$, עבור פונקציה אינטגרבילית

כלשהי g, מתקיים $\int_a^b(fg)(x)dx=0$.

הוכח כי $f(x)\equiv0$ (כלומר, $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$).

15) ענה על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $x, y \geq 0$.

הוכח כי $\lim_{n\to\infty}\left(x^n + y^n\right)^{\frac{1}{n}} = \max\{x, y\}$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ רציפה.

הוכח כי $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b \left(f(x)\right)^n dx\right) = \sup\{f(x) \mid x\in[a,b]\}$.

16) [אי-שוויון קושי-שוורץ]

א. יהיו $x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_n \in \mathbb{R}$.

הוכח כי $\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

רמז: $\sum_{i=1}^n \left(tx_i + y_i\right)^2 \geq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

ב. תהיינה f, g שתי פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

הוכח כי $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

רמז: $\int_a^b \left[tf(x) + g(x)\right]^2 dx \geq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

17) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

משנים את הערכים של f במספר סופי של נקודות.

הוכח שהפונקציה שמתקבלת אינטגרבילית.

18) סעיף א'

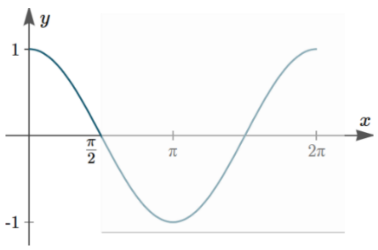
1. הוכח כי $b^n-a^n=(b-a)\left(b^{n-1}+b^{n-2}a+b^{n-3}a+\ldots++b^{n-2}+a^{n-1}\right)$,
כאשר $n\in\mathbb{Z}^+$ וכן $a,b\in\mathbb{R}$.

2. הוכח כי $(k+1)^n<\dfrac{(k+1)^{n+1}-k^{n+1}}{n+1}<k^n$, כאשר $k,n\in\mathbb{Z}^+$.

3. הוכח כי $\sum_{k=1}^{m}k^n<\dfrac{m^{n+1}}{n+1}<\sum_{k=1}^{m-1}k^n$.
כלומר, $1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n+m^n<\dfrac{m^{n+1}}{n+1}<1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n$.

סעיף ב'

תהי $f(x)=x^n$ מוגדרת בתחום $[0,1]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.
בעזרת סכומי רימן, הוכח כי f אינטגרבילית ב-$[0,1]$, וחשב $\int_0^1 f(x)dx$.
רמז: חלק את הקטע $[0,1]$ ל-m קטעים שווים והיעזר בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.



19) תהי $f(x)=\cos x$ מוגדרת ב-$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.
השתמש בסכומי רימן והוכח ש-f אינטגרבילית ב-$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, וחשב את $\int_0^{\pi/2}f(x)dx$.

רמז 1: חלק את $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ל-n קטעים שווים, והנח כי $n\to\infty$.
רמז 2: השתמש בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר $k\in\mathbb{Z}^+$ ו-$\theta\in\mathbb{R}$,
$\sin\frac{\theta}{2}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2k+1)\theta}{2}-\sin\frac{(2k-1)\theta}{2}\right]$, כדי להעריך את הסכום:
$\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right]$.

20) חשב את $\int_1^2 f(x)dx$, בעזרת החלוקה $P_n=\left\{\overset{=1}{x_0},x_1,\ldots,\overset{=2}{x_n}\right\}$,
כאשר $(0\le i\le n)$ $x_i=2^{\frac{i}{n}}$, וגם:

א. $f(x)=\frac{1}{x}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\quad P_4=\left\{1,2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{2}{4}},2^{\frac{3}{4}},2\right\}$

21) תהיינה f,g שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. הוכח:

א. אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$, אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

22) כזכור, משפט ערך הביניים לאינטגרלים טוען כי:

אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, אז קיים $c\in(a,b)$, כך ש- $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$.

הוכח שהמשפט נכשל, אם נחליף את המילה 'רציפה' במילה 'אינטגרבילית'.

23) נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אי-שלילית.

הוכח כי $\sqrt{f}$ אף היא אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

24) נתונה הפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. הוכח או הפרך:

א. אם f אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס,

אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ב. אם f רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ג. אם f אינטגרבילית, אז כך גם f^2.

ד. אם $|f|$ אינטגרבילית, אז כך גם f.

25) חשב את $\int_{0.25}^{4.3}\lfloor x\rfloor dx$, כאשר $\lfloor x\rfloor=\max\{n\in\mathbb{Z}\,|\,n\le x\}$ (פונקציית הערך השלם).

26) הוכח כי אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$, אז αf אינטגרבילית ב-$[a,b]$,

וכן $\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$.

רמז: הנח תחילה כי $\alpha\ge 0$, והיעזר בפונקציה $-f$, ל-$\alpha<0$.

27) הוכח כי אם f,g אינטגרביליות ב-$[a,b]$, אז כך גם $f+g$,

ובנוסף מתקיים $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.

רמז: הוכח כי $\overline{\int_a^b}(f+g)\le\overline{\int_a^b}f+\overline{\int_a^b}g$ וכן $\underline{\int_a^b}(f+g)\ge\underline{\int_a^b}f+\underline{\int_a^b}g$.

28) נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן שקיים $c>0$, כך ש- $|f(x)|\ge c$ לכל $x\in[a,b]$. [לחלופין: f אינטגרבילית ואינה אפס; $\frac{1}{f}$ חסומה]

הוכח כי גם $g=\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

29) נניח כי f,g אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

א. הוכח כי גם $f\cdot g$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

ב. הוכח כי אם $|g(x)|\ge c>0$ לכל $x\in[a,b]$,

אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

30) הנח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ וכן ש- $a<c<b$, והוכח כי:

א. אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב-$[a,c]$ ו- $[c,b]$.

ב. אם f אינטגרבילית ב-$[a,c]$ ו- $[c,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב-$[a,b]$.

ג. באיזה מהמקרים, בסעיפים א' ו-ב', מתקיים השוויון:

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

31) נניח כי f,g אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

נגדיר $\varphi=\max\{f,g\}$ וכן $\psi=\min\{f,g\}$.

הוכח כי גם φ,ψ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

רמז: $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}\left[a+b+|a-b|\right]$, $\min\{a,b\}=?$

32) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

בהינתן החלוקה $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ של $[a,b]$ וכן $\varepsilon>0$,

נגדיר שתי תתי-קבוצות, $A_\varepsilon(P)$ ו- $B_\varepsilon(P)$ של $\{1,\dots,n\}$, באופן הבא:

$i\in A_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i<\varepsilon$, ו- $i\in B_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i\ge\varepsilon$.

כמו כן, נגדיר $s_\varepsilon(P)=\sum_{i\in B_\varepsilon(P)}\Delta x_i$.

הוכח כי פונקציה חסומה f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אם ורק אם

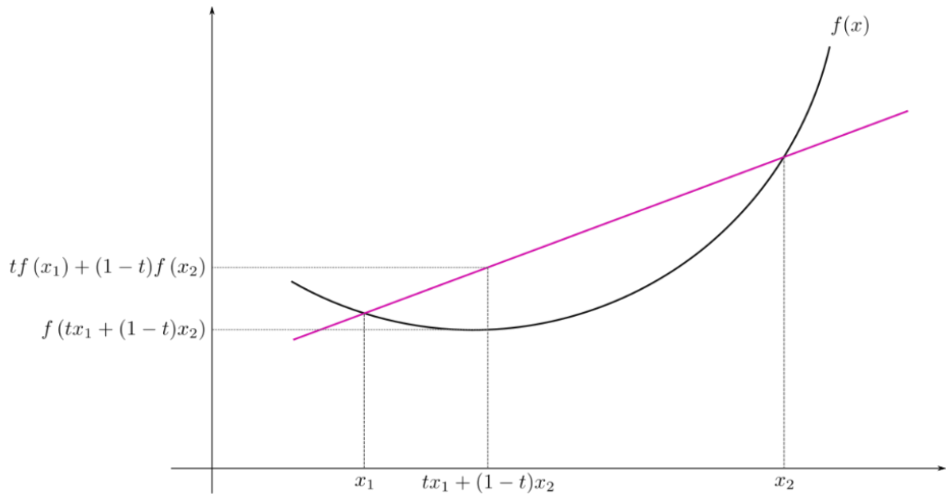
לכל $\varepsilon>0$ ולכל $\tau>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל P כנ"ל $\|P\|<\delta\ \Rightarrow\ s_\varepsilon(P)<\tau$.

33) נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהי $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.

א. האם תמיד נוכל לבחור תגיות $C=\{c_1,\dots,c_n\}$ ל- P,
כך ש- $S(f;P,C)=L(f,P)$? נמק.
הערה: ב"תגיות" הכוונה ש- $x_{i-1}<c_i<x_i$.

ב. האם תשובתך תשתנה אם יינתן גם כי f רציפה?

34) זכור כי פונקציה f על קטע I תיקרא קמורה, אם לכל $a,b\in I$, ולכל $t\in[0,1]$,
מתקיים $f(t\cdot a+(1-t)\cdot b)\le t\cdot f(a)+(1-t)\cdot f(b)$.



א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה.
הוכח כי לכל $t_1,\dots,t_n\in[0,1]$ המקיימים $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$, מתקיים אי-השוויון
$f\left(\sum_{i=1}^{n}t_ia_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}t_if(a_i)$. [רמז: אינדוקציה על n]

ב. (אי-שוויון יֶנְסֶן)
תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה ורציפה, ותהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה.
הוכח כי $f\left(\int_0^1 g(x)dx\right)\le\int_0^1 f(g(x))dx$.

35) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

א. הוכח כי f אי-זוגית אם ורק אם F זוגית.

ב. הוכח כי f זוגית אם ורק אם F אי-זוגית.

36) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

א. הוכח כי אם F מחזורית, אז גם f מחזורית.

ב. מצא דוגמה שבה f מחזורית אבל F לא-מחזורית.

37) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, תהי $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ ויהי $0\neq p\in\mathbb{R}$.

הוכח ששני התנאים הבאים שקולים:

1. $f(x+p)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
2. קיים $c\in\mathbb{R}$, כך ש- $\int_x^{x+p} f(t)dt=c$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

38) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכח שקיים $c\in[a,b]$, כך ש- $\int_a^c f(x)dx=\int_c^b f(x)dx$.

39) תהי A קבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, שהן אינטגרביליות בכל $[a,b]$,

ומקיימות את השוויון הבא לכל $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{\int_0^x f(t)dt=f(x)-1}$.

א. מצא דוגמה לפונקציה ב- A.

ב. הוכח כי אם $f\in A$, אז f גזירה ב- $\mathbb{R}$.

(רמז: תחילה הראה ש- f רציפה).

ג. מצא את כל הפונקציות f ב- A.

40) א. נגדיר פונקציה $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ באופן הבא: $f(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t^2}+\int\limits_0^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$.

הוכח כי f פונקציה קבועה, ומצא את $C\in\mathbb{R}$, כך ש- $f(x)\equiv C$.

תוכל להשתמש ב: $\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x$.

ב. נגדיר $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, על ידי $g(x)=\int\limits_{-\cos x}^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

הוכח ש- g פונקציה קבועה.

המשפט היסודי של החדו"א, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן

שאלות

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי כל פונקציה רציפה בקטע סגור וחסום היא נגזרת.

ב. הראה כי פונקציה אינטגרבילית בקטע סגור וחסום אינה בהכרח נגזרת.

2) תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת כך: $f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x<0\\ 1 & 0\le x\le 1\end{cases}$,

ונגדיר את $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ עבור $-1\le x\le 1$.

שרטט את הגרפים של f ו- F, בהינתן:

א. f אינה רציפה (ב- 0), אבל F רציפה.

ב. F **אינה** גזירה ב- 0.

ג. תן דוגמה לפונקציה $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, כך ש- f אינה רציפה ב- 0,

אבל $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ גזירה ב- 0.

3) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכח כי $\int_{a}^{b} f(t)\,dt=\lim_{x\to b^{-}}\int_{a}^{x} f(t)\,dt$.

4) הוכח את 'משפט ערך הביניים השני לאינטגרלים', בהנחה שהפונקציות רציפות (ולא אינטגרביליות):

תהי f רציפה ב- $[a,b]$.

אם קיימת פונקציה גזירה F ב- $[a,b]$, כך ש- $F'=f$,

אז $\int_{a}^{b} f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

5) נגדיר $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ באופן הבא: $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$,

ונגדיר $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ כך: $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

הוכח כי $F'=f$, אבל האינטגרל $\int_{-1}^{1}f(t)dt$ לא קיים.

6) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה, כך ש- $|f(x)|\le\int_0^x f(t)dt$, לכל $x\in[0,1]$.

הוכח כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

7) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה. נגדיר $g(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכח כי $g''=f$.

8) תהי f רציפה ב- $\mathbb{R}$ ויהי $\alpha\neq 0$.

נגדיר $g(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\sin[\alpha(x-t)]dt$.

הראה כי $f(x)=g''(x)+\alpha^2 g(x)$.

9) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ גזירה ב-$[0,1]$.

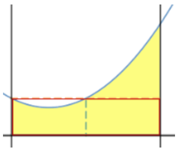
הראה כי קיים $c\in(0,1)$, כך ש- $f'(c)$ $\int_0^1 f(x)dx=f(0)+\frac{1}{2}f'(c)$.

10) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה ונניח כי $\int_0^1 f(x)dx=1$.

הראה כי קיים $c\in(0,1)$, כך ש- $f(c)=3c^2$.

11) תהי $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$ רציפה.

הראה כי קיים $c\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, כך ש- $2\cos 2c\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)dt=f(c)$.

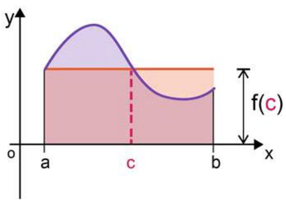


12) תהי $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ פונקציה, כך ש- $f''(x)>0$, לכל $x\in[0,a]$.
הוכח כי $\int_0^a f(x)dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$.

13) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, ונניח כי $\int_a^x f(t)dt=\int_x^b f(t)dt$, לכל $x\in[a,b]$.
הוכח כי $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

14) תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות, ונניח כי f עולה ו- g אי-שלילית.
הוכח כי קיים $c\in[a,b]$,
כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$.

משפט ערך הביניים הראשון לאינטגרלים



אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, אז קיים $c\in(a,b)$,
כך ש- $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

משפט ערך הביניים של לגראנז'

אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, וכן גזירה ב- (a,b) , אז קיים $c\in(a,b)$,
כך ש- $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

15) ענה על הסעיפים הבאים :
א. בהנחה שמשפט ערך הביניים של לגראנז' מתקיים, הוכח את משפט ערך הביניים הראשון לאינטגרלים.
ב. בהנחה שמשפט ערך הביניים הראשון לאינטגרלים מתקיים, הוכח את משפט ערך הביניים של לגראנז' לפונקציות עם נגזרת ראשונה רציפה.

16) השתמש במשפט ערך הביניים הראשון לאינטגרלים,
והוכח כי $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

17) תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות, ונתון כי $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.
הוכח כי קיים $c\in[a,b]$, כך ש- $f(c)=g(c)$.

משפט ערך הביניים השני לאינטגרלים

תהי f רציפה ו- g אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

אם $g(x)\geq 0$, (או $g(x)\leq 0$) ב- $[a,b]$, אז קיים $c\in[a,b]$, כך ש-

$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$.

18) הוכח כי $\frac{\pi^2}{9}\leq\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx\leq\frac{2\pi^2}{9}$.

19) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכח כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$.

20) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכח כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx=f(0)$.

21) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכח כי $\lim_{\|P\|\to 0}S(P,f)=\int_a^b f(x)dx$.

סימונים: $P=\{\overset{=a}{x_0},x_1,\dots,\overset{=b}{x_n}\}$, $S(P,f)=\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,

$c_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\|P\|=\max_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}$.

22) תהי $a_n=\ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

המר את a_n לסכום רימן ומצא את $\lim_{n\to\infty}a_n$.

23) תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, כך ש- f' ו- g' רציפות ב- $[a,b]$.

הוכח כי $\int_a^b f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$.

24) תהי $\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות, ותהי f רציפה בטווח של ϕ.

הוכח כי $\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)}f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$.

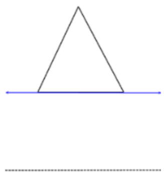
25) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ויהיו $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירות.
הוכח כי אם הטווחים של u ו- v מוכלים ב- $[a,b]$,
אז $\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f\left(v(x)\right)\frac{dv}{dx} - f\left(u(x)\right)\frac{du}{dx}$.

26) נגדיר את $f:[1,\infty)$ באופן הבא: $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$.
פתור את השוויון $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$.

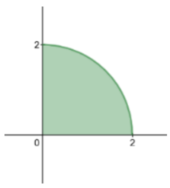
נפח שטח מעטפת ומשפט פאפוס

שאלות

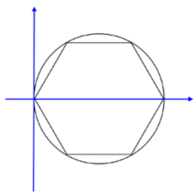
1) נתון משולש שווה צלעות עם בסיס המתלכד עם ציר ה- x.
אורך צלע המשולש a.
השתמש במשפט פאפוס על מנת לחשב את נפח הגוף,
הנוצר על ידי סיבוב המשולש סביב הישר $y=-a$.



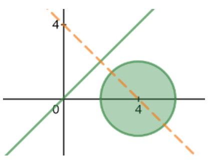
2) השתמש במשפט פאפוס ומצא את מרכז הכובד של התחום
$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4,\ x\geq 0 \text{ and } y\geq 0\}$.
רמז: נפח כדור בעל רדיוס r, הוא $\frac{4}{3}\pi r^3$.



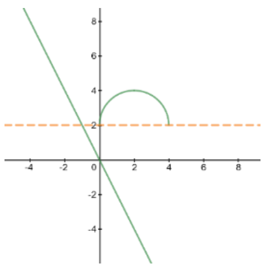
3) נתון משושה החסום במעגל $(x-2)^2+y^2=1$.
המשושה מסתובב סביב ציר ה- y.
מצא את שטח הפנים של השטח שנוצר,
ואת נפח הגוף שנוצר.



4) הדיסק המעגלי $(x-4)^2+y^2\leq 4$ מסתובב סביב הציר $y=x$.
מצא את נפח הגוף שנוצר.



5) נתבונן בקשת המעגלית $(x-2)^2+(y-2)^2=4,\ y\geq 2$.
הקשת מסתובבת סביב הציר $y+2x=0$.
מצא את שטח הפנים של הגוף שנוצר.



6) יהיו $(\bar{x},\bar{y})$ מרכז העקום $y=\frac{1}{2}(x^2+1),\ \ 0\leq x\leq 1$.
מצא את $\bar{x}$ בעזרת משפט פאפוס.