אלגברה לינארית 2 לתלמידי הנדסה ומדעים

תוכן העניינים

אלגברה לינארית 2 לתלמידי הנדסה ומדעים

פרק 1 - העתקות ליניאריות

תוכן העניינים

העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות **1-15**, קבע, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה ליניארית:

1) $T(x,y)=(x+y,x-y)\ ;\ \ T:R^2\to R^2$

2) $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)\ ;\ \ T:R^3\to R^3$

3) $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)\ ;\ \ T:R^3\to R^2$

4) $T(x,y)=(xy,y,z)\ ;\ \ T:R^2\to R^3$

5) $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)\ ;\ \ T:R^3\to R^3$

6) $\left(B\in M_n[R]\right)\ \ T(A)=BA+AB\ ;\ \ T:M_n[R]\to M_n[R]$

7) $T(A)=A+A^T\ ;\ \ T:M_n[R]\to M_n[R]$

8) $T(A)=|A|\cdot I\ ;\ \ T:M_n[R]\to M_n[R]$

9) $T(A)=A\cdot A^T\ ;\ \ T:M_n[R]\to M_n[R]$

10) $T(A)=A^{-1}\ ;\ \ T:M_n[R]\to M_n[R]$

11) $T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2\ ;\ \ T:P_3[R]\to P_2[R]$

12) $T\left(p(x)\right)=p(x+1)\ ;\ \ T:P_n[R]\to P_n[R]$

13) $T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)\ ;\ \ T:P_n[R]\to P_n[R]$

14) $T\left(p(x)\right)=p^2(x)\ ;\ \ T:P_n[R]\to P_{2n}[R]$

15) $\left(F=C,F=R\right)\ \ T\left(z\right)=\overline{z}\ ;\ \ T:C[F]\to C[F]$

16) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה ליניארית:
$T(x,y)=\left(m^2x^{2m},y^{2m}+x\right)$; $T:R^2\to R^2$?

בשאלות **17-20**, קבע האם קיימת העתקה ליניארית המקיימת את הנתון.
אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

17) $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(7,8,9)$, $T(0,1,1)=(4,5,6)$, $T(1,1,0)=(1,2,3)$.

18) $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(0,1,1)$, $T(0,1,1)=(1,2,1)$, $T(1,0,1)=(1,1,0)$.

19) $T:R^4\to R^3$ כך ש-
$T(1,2,-1,0)=(0,1,-1), T(-1,0,1,1)=(1,0,0), T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$.

20) $T:P_2[R]\to P_2[R]$ כך ש- $T(1)=4, T\left(4x+x^2\right)=x, T(1-x)=x^2+1$.

21) נתונה העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$, המקיימת:
$T(1,0,0)=(a_1,a_2,a_3)$
$T(0,1,0)=(b_1,b_2,b_3)$.
$T(0,0,1)=(c_1,c_2,c_3)$

א. הוכח שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

ב. נסח והוכח טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T:R^n\to R^m$.

22) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to V$.
הוכח או הפרך:
א. אם $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל.
ב. אם $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

תשובות סופיות

1) כן	**2)** כן	**3)** לא	**4)** לא	**5)** כן
6) כן	**7)** כן	**8)** לא	**9)** לא	**10)** לא
11) כן	**12)** כן	**13)** כן	**14)** לא	**15)** לא
16) כן	**17)** כן	**18)** כן	**19)** כן	**20)** כן
21) הוכחה.		**22)** הוכחה.		

גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-6**, מצא :

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

1) $T:R^4\to R^3$, $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)$

2) $T:R^3\to R^4$, $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)$

3) $T:R^4\to R^3$, $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$

4) $T:M_2[R]\to M_2[R]$, $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A$

5) $T:P_2[R]\to P_2[R]$, $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)$

6) $D:P_3[R]\to P_3[R]$, $D\left(p(x)\right)=p'(x)$

7) מצא העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$,
אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

8) מצא העתקה ליניארית $T:R^4\to R^3$,
אשר הגרעין שלה נפרש על ידי : $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

נתונה העתקה ליניארית $T:V\to U$.

9) הוכח כי אם $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim\operatorname{Ker}(T)$ אז הממד של V זוגי.

10) הוכח או הפרך :

א. קימת העתקה ליניארית $T:R^5\to R^5$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

ב. קימת העתקה ליניארית $T:R^4\to R^4$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

11) ידוע שהעתקה לינארית $T:V\to W$,
מקיימת: $\dim(W)=4$, $\dim \operatorname{Im}(T)=\dim \operatorname{Ker}(T)$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של V?
א. 10
ב. 9
ג. 7
ד. 6
ה. כל התשובות לא נכונות.

12) הוכח או הפרך:
א. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ מתקיים $\operatorname{Im}(T^2)\subseteq \operatorname{Im}(T)$.
ב. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ שמקיימת:
$\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Ker}(T^2)$, $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Im}(T^2)$, מתקיים $T=T^2$.
ג. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\operatorname{Im}(T)\subseteq \operatorname{Ker}(T)$,
אז בהכרח $T\neq 0$.

13) מטריצה $A_{m\times n}$ מגדירה העתקה $T:R^n\to R^m$; $T(x)=Ax$,
ואילו $A^T_{n\times m}$ מגדירה העתקה $S:R^m\to R^n$; $S(y)=A^Ty$.
הראה כי $\operatorname{Im}(T)=(\operatorname{Ker}(S))^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) גרעין – בסיס: $\{(0,0,1,4)\}$, מימד: 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד: 3.

2) גרעין – בסיס: $\{(0,0,0)\}$, מימד: 0.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,0,1),(0,5,1,4),(0,0,-6,21)\}$, מימד: 3.

3) גרעין – בסיס: $\{(-7,3,0,1),(1,-2,1,0)\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,2),(0,1,2)\}$, מימד: 2.

4) גרעין – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

5) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=2x+5 \quad , \quad p(x)=1\}$, מימד: 2.

6) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=x^2, \qquad p(x)=x, \qquad p(x)=1\}$, מימד: 3.

7) $$T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

8) $T(x,y,z,t)=(-x-y+z,-2x-y+t,0)$

9) הוכחה.

10) לא.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-4**, קבע האם היא <u>חח"ע</u>,[1] האם היא <u>על</u>, האם היא <u>איזומורפיזם</u> והאם קיימת <u>העתקה הפוכה</u>.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצא אותה.

1) $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

2) $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

3) $T:P_2[R]\to R^3$, $T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

4) $T:M_2[R]\to P_3[R]$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

5) האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4\to R^3$?

6) נתונה העתקה ליניארית $T:U\to V$.
הוכח:
א. אם $\dim(U)<\dim(V)$, אז T לא על.
ב. אם $\dim(U)>\dim(V)$, אז T לא חח"ע.
ג. אם $\dim(U)=\dim(V)$, אז T חח"ע $\Leftrightarrow$ T על.

7) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$.
הוכח או הפרך:
א. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)\neq 0$, אז ההעתקה T אינה על.
ב. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\le\dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
ג. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\ge\dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
ד. אם $\dim(V)<\dim(W)$, אז ההעתקה T חח"ע.

[1] הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$; $\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של V.
הוכח או הפרך:
א. אם $\dim(V)>\dim(W)$ ואם $T(v_1)=0$, אז ייתכן מקרה שבו T חח״ע.
ב. אם $\dim(V)>\dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת״ל.

9) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$.
$\{v_1,v_2...,v_n\}$ קבוצה בת״ל ב- V.
הוכח או הפרך:
א. אם T חח״ע, אז הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת״ל ב- W.
ב. אם הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת״ל ב- W, אז T חח״ע.

10) נתונה העתקה ליניארית $T:R^n\to R^m$.
הוכח או הפרך:
א. אם T היא איזומורפיזם אז $m=n$.
ב. אם $m>n$, אז T חח״ע.
ג. אם $T(v)=Av$ לכל v, אז למטריצה A יש n שורות ו- m עמודות.

11) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to V$, המקיימת $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Ker}(T)$.
הוכח או הפרך:
א. אם T על, אז בהכרח $V=\{0\}$.
ב. אם T חח״ע, אז בהכרח $V=\{0\}$.
ג. T היא איזומורפיזם.
ד. T היא העתקת האפס.

12) נתונה העתקה ליניארית $T:R^n\to R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m\times n}$,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכח או הפרך:
א. אם $v\in\operatorname{Ker}(T)$, אז $v\in\operatorname{rowsp}(A)$.
ב. אם $v\in\operatorname{rowsp}(A)$, אז $v\in\operatorname{Ker}(T)$.
ג. אם $v\in\operatorname{colsp}(A)$, אז $v\in\operatorname{Im}(T)$.
ד. אם $\operatorname{Ker}(T)=\{0\}$, אז $n<m$.

13) נתונה העתקה ליניארית $T:R^n\to R^n$, ונתונה מטריצה A,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכח את הטענות הבאות:
א. אם $\mathrm{rank}(A)=n$, אז T חח"ע.
ב. אם $\mathrm{rank}(A)=n$, אז T על.
ג. אם $T^2(v)=0$, אז $\mathrm{Im}(T)\subseteq \mathrm{Ker}(T)$.
ד. אם $T^2(v)=0$, אז $\mathrm{rank}(A)\le\frac{n}{2}$.

14) נתונה העתקה ליניארית $T:P_3[R]\to R$, המוגדרת על ידי $T(p(x))=p(1)$.
א. מצא את הגרעין והתמונה של ההעתקה.
ב. קבע האם ההעתקה היא חח"ע/על.
ג. ענה על הסעיפים הקודמים עבור $T:P_n[R]\to R$.

15) נתונה העתקה ליניארית $T:M_n[R]\to M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A)=A^T$.
א. מצא את הגרעין והתמונה של ההעתקה.
ב. קבע האם ההעתקה היא חח"ע/על.
ג. מצא את ההעתקה ההפוכה של T.

תשובות סופיות

1) חח״ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}(x+y-2z),\frac{1}{3}(2y-z-x),\frac{1}{3}(z+x+y)\right)$$

2) לא חח״ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

3) חח״ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a,b,c)=0.4a+0.6b+0.2c+(-0.4a+0.4b+0.2c)x+(-0.4c-0.2b+0.2a)x^2$$

4) חח״ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$$

5) לא.

6) הוכחה.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

9) הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

14) א. $\operatorname{Ker}(T)=span\{-1+x,-1+x^2,-1+x^3\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=3$

$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$

ב. לא חח״ע, כן על.

ג. $\operatorname{Ker}(T)=span\{-1+x,-1+x^2,\dots,-1+x^n\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=n$

$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$

לא חח״ע, כן על.

15) א. $\operatorname{Im}(T)=M_n[R]$, $\operatorname{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right\}$ ב. חח״ע ועל. ג. $T^{-1}(A)=A^T$

פעולות עם העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות **1-9**, תהיינה $S:R^3 \to R^2$ ו- $T:R^3 \to R^3$ העתקות ליניאריות המוגדרות על ידי: $S(x,y,z)=(x-z,y)$, $T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$.

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

1) $S+T$ **2)** $4S$ **3)** $4S-10T$ **4)** TS **5)** ST

6) T^2 **7)** T^{-1} **8)** T^{-2} **9)** S^2

תשובות סופיות

1) לא ניתן להגדיר.

2) $4S=4(x-z,y)$

3) לא ניתן להגדיר.

4) לא ניתן להגדיר.

5) $ST:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $St(x,y,z)=(z-4y,4x-y)$

6) $T^2(x,y,z)=(x,y,16x-8y+z)$

7) $T^{-1}(x,y,z)=(x,4x,-y,17x-4y-z)$

8) $T^{-2}(x,y,z)=(x,y,-16x+8y+z)$

9) לא ניתן להגדיר.

אלגברה לינארית 2 לתלמידי הנדסה ומדעים

פרק 2 - מטריצות והעתקות לינאריות

תוכן העניינים

מטריצה שמייצגת העתקה

הערה:
כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת-מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים).
לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

שאלות

1) נתונים שני בסיסים של R^3:

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_2}^{B_1}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$
2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$
3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

2) נתונה העתקה לינארית: $T:R^3 \to R^3$, $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.

נתונים שני בסיסים של R^3:

$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$, $B_2=\{(1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\}$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1.

סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ב. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2.

סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ג. אשר את הטענות הבאות:

1. $[T]_{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[T(v)]_{B_1}$

2. $[T]_{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[T(v)]_{B_2}$

3. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[T]_{B_1}\cdot[M]_{B_1}^{B_2}=[T]_{B_2}$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשב את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

ו. מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

ז. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

3) נתונה העתקה ליניארית $T:R^3 \to R^3$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$,

היא $[T]_B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

מהי נוסחת ההעתקה? פתור בשתי דרכים שונות.

4) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3, ויהי T אופרטור ליניארי על R^3.

נתון כי: $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}-1 & -9 & 6\\ 1 & 6 & -4\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$ ו- $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}-29 & -45 & 6\\ 20 & 31 & -4\\ 13 & 19 & -1\end{pmatrix}$.

חשב את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

5) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:

$T:M_2[R]\to M_2[R]$, $T(A)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}A$,

לפי הבסיס: $B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

6) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D:P_4[R]\to P_3[R]$, $D\left(p(x)\right)=p'(x)$,
לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

7) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$.
מצא את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.
מצא את נוסחת ההעתקה.

9) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס $B=\{1,1-x,x+x^2\}$,
היא: $[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$.
א. מצא את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצא את $T\left(p(x)\right)$.
* פתור בשתי דרכים שונות.
ב. מצא את $T^2\left(p(x)\right)$.

10) תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית, ותהי A מטריצה ממשית,
כך שמתקיים $T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$.
נתון כי B בסיס ל-$\mathbb{R}^n$ ו-$\operatorname{rank}(A)=n$.
הוכח כי $[T]_B$ הפיכה.

11) נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to P_3[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

א. מצא גרעין ותמונה של ההעתקה.
ב. מצא את נוסחת ההעתקה.

12) נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה, בבסיס הסטנדרטי,
היא $[T]_E=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&9&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

א. מצא גרעין ותמונה של ההעתקה.
ב. חשב את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.
ג. מצא את נוסחת ההעתקה.

13) נתונה העתקה לינארית: $T:P_2[R]\to P_2[R]$; $T(a+bx+cx^2)=b+cx$.
הוכח ש- T העתקה נילפוטנטית.

14) יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל $\mathbb{R}$.
נתון הבסיס $B=\{1,x,x^2\}$, ונתונה ההעתקה הלינארית
$T:V\to V$; $T\left(p(x)\right)=xp''(x)-p'(x)$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B$.
ב. מצאו בסיס וממד עבור $\mathrm{Im}\left(T\right),\mathrm{Ker}\left(T\right)$.
הערה: בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות ונוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.

15) נתונות שתי העתקות ליניאריות $S,T:V\to V$.

יהי $B=\{u,v,w\}$ בסיס ל- V.

נתון כי: $\begin{cases}T(u)=u-v\\T(v)=v-w\\T(w)=w-u\end{cases}$, $\begin{cases}S(u)=u+v\\S(v)=v+w\\S(w)=w+u\end{cases}$.

א. הוכח כי: $\operatorname{Ker}(S)=\{0\}$, $\operatorname{Ker}(T)\neq\{0\}$.

ב. עבור כל אחת מההעתקות קבע האם היא חח"ע ו/או על.

ג. קבע האם $\{T(u),T(v),T(w)\}$ פורשת את V.

ד. קבע האם $\{S(u),S(v),S(w)\}$ פורשת את V.

תשובות סופיות

1) א. $(x, y-x-z, z)$ ב. $(x, y, z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

2) א. $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ ב. $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

ד. לא. ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.

ו. 0 ע"ע יחיד; הו"ע שלו: $(1,-1,1)$. ז. לא.

3) $T(x,y,z)=(x+y, y+z, z-x)$

4) $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0.5&-0.5&1\\-0.75&2.75&0.5\end{pmatrix}$, $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}2&3&0\\-0.5&-1&0.5\\-0.25&-1&0.75\end{pmatrix}$

5) $[T]_B=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&-1&0&2\\3&5&4&-2\\0&-2&0&6\end{pmatrix}$

6) $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

7) $T\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$

8) $T:P_2[R]\to P_2[R]$; $T(p(x))=p(x+1)$

9) א. $T(a+bx+cx^2)=(a+2b-2c)+(2a+4c)x+(2a+b+2c)x^2$

ב. $T^2(a+bx+cx^2)=(a+2c)1+(10a+8b+4c)x+(8a+6b+4c)x^2$

10) הוכחה.

11) א. $\mathrm{Ker}(T)=sp\{-x+x^3,-1+x^2\}$, $\mathrm{Im}(T)=sp\{1+x^2, x+x^3\}$

ב. $T(a+bx+cx^2+dx^3)=(b+d)(1)+(a+c)x+(b+d)x^2+(a+c)x^3$

12) א. $\mathrm{Ker}(T)=sp\left\{\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Im}(T)=sp\left\{\begin{pmatrix}1&4\\7&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\mathrm{tr}(T)=15$, $\det(T)=0$, $\mathrm{rank}(T)=2$

13) הוכחה.

14) א. $[T]_B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ב. $B_{\mathrm{Im}(T)}=\{1\}$, $\dim(\mathrm{Im}(T))=1$
$B_{\mathrm{Ker}(T)}=\{1,x^2\}$, $\dim(\mathrm{Ker}(T))=2$

15) הוכחה.

מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

שאלות

1) מצא את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הליניאריות הבאות, ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של R^n :

א. $T:R^2 \to R^3$, $T(x,y)=(x+y,y,-x)$

ב. $T:R^4 \to R^2$, $T(x,y,z,t)=(4x-y-z+t,x+y+4z+t)$

2) נתונה העתקה ליניארית $T:R^4 \to R^2$; $T(x,y,z,t)=(x+y,z+t)$

מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מהבסיס הסטנדרטי של R^4 לבסיס הסטנדרטי של R^2.

3) תהי $T:R^3 \to R^2$ העתקה ליניארית המוגדרת על ידי:

$T(x,y,z)=(4x+y-z,x-y+z)$

חשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס $B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ של R^3, לבסיס $B_2=\{(1,4),(1,5)\}$ של R^2.

כלומר, את $[T]_{B_1}^{B_2}$.

4) עבור העתקה ליניארית $T:R^3 \to R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$,

כאשר: $B_2=\{(1,0),\ (0,1)\}$, $B_1=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$

מצא את נוסחת ההעתקה.

5) עבור העתקה ליניארית $T:R^3 \to R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

כאשר $B_2=\{(1,1),\ (1,2)\}$, $B_1=\{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (0,0,1)\}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

6) נתונה העתקה ליניארית $T:P_3[R] \to P_2[R]$.

המטריצה שמייצגת את ההעתקה T, מהבסיס הסטנדרטי של $P_3[R]$ לבסיס הסטנדרטי של $P_2[R]$, נתונה על ידי: $[T]=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\0&0&2&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

7) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to R^3$, אשר המטריצה המייצגת

אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, שהמטריצה המייצגת אותה

מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

9) תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית, כך ש- $\dim(V)=n$,

ויהיו B_1,B_2 בסיסים סדורים של V. הוכח או הפרך:

א. $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$

ב. אם T העתקה זהות, אז בהכרח $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$.

ג. אם T העתקה זהות, אז בהכרח $[T]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_2}=I_n$.

10) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to R^3$ המוגדרת על ידי:

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\left(a+b,b+c,c\right)$$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכח שההעתקה הפיכה וחשב את $T^{-1}(a,b,c)$.

ג. חשב את $T^4\left(a+bx+cx^2\right)$.

11) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכח שההעתקה הפיכה וחשב את $T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)$.

12) חשב את ST ואת TS, עבור ההעתקות:

$$S:R^2\to R^3 \quad ; \quad S(x,y)=(x-y,x+y,y)$$

$$T:P_2[R]\to R^2 \quad ; \quad T(a+bx+cx^2)=(a+b,b-c)$$

תשובות סופיות

1) א. $[T]=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ ב. $[T]=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$

2) $[T]=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

3) $[T]=\begin{pmatrix}25 & 0 & -6\\ -20 & 0 & 5\end{pmatrix}$

4) $T(x,y,z)=(x+2y+3z,4x+5y+6z)$

5) $T(x,y,z)=(x+y,y+z)$

6) $T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=(b+2c)1+(2c+6d)x+(3d)x^2$

7) $T\left(a+bx+cx^2\right)=(a+b,b+c,c)$

8) $T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

9) הוכחה.

10) א. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ב. $T^{-1}(a,b,c)=(a-b+c)1+(b-c)x+cx^2$

ג. לא ניתן.

11) א. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

ב. $T^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix}b+c-d & -a+b+c-d\\ b-d & d\end{pmatrix}$

12) $ST\left(a+bx+cx^2\right)=(a+c,a+2b-c,b-c)$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

שאלות

1) נתונה העתקה לינארית, $T: M_2[R] \to M_2[R]$; $T(X) = PX$,
כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 2.
נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות P, שעבורן המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
היא וקטור עצמי של ההעתקה.
א. מצאו את W.
ב. הוכיחו כי W היא תת-מרחב של $M_2[R]$, ומצאו לה בסיס.

2) נתונה העתקה לינארית, $T: M_{10}[R] \to M_{10}[R]$; $T(X) = PX$,
כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 10.
ידוע כי A היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה – המתאים לערך העצמי 4.
חשב את $|P|$.

3) מצא העתקה לינארית T, שעבורה המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,
היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה העתקה לינארית $T(x,y,z) = (4x-y-z, x+2y-z, x-y+2z)$
מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ב. נתונה העתקה לינארית: $T: R^3 \to R^3$, $T(x,y,z) = (x+y, y+z, z-x)$.
מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

5) נתונה העתקה לינארית $T(x,y,z) = (x+z, y, x+z)$.
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ג. במידה וכן, חשב $T^{2009}(x,y,z)$.

6) נתונה העתקה לינארית:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad ; \quad T:M_2[R]\to M_2[R]$$

א. מצא את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה ותשובתך לסעיף ג' חיובית, חשב את $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

7) נתונה העתקה לינארית: $T:P_2[R]\to P_2[R] \quad ; \quad T\left(p(x)\right)=p(x+1)$

א. מצא את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

8) יהי V מרחב וקטורי ממימד n.

תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית.

א. הוכח ש- T הפיכה אמ"ם כל הערכים העצמיים של T שונים מאפס.

ב. הוכח כי אם T הפיכה, אז ל- T ול- T^{-1} יש את אותם וקטורים עצמיים.

מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של T ושל T^{-1}?

תשובות סופיות

1) א. $W=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \middle| \lambda\in R\right\}$ ב. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

2) $|P|=4^{10}$

3) $T:M_{2x3}(R)\to M_{2x3}(R) \quad T(X)=4X$

4) א. $v_{\lambda=3}^{(2)}=(1,0,1)$, $v_{\lambda=3}^{(1)}=(1,1,0)$, $v_{\lambda=2}=(1,1,1)$, ניתנת ללכסון.

ב. ערך עצמי: $x=0$, וקטור עצמי: $v_{x=0}=(1,-1,1)$, לא.

5) $v_{\lambda=2}=(1,0,1)$, $v_{\lambda=1}=(0,1,0)$, $v_{\lambda=0}=(-1,0,1)$ ב. ניתנת ללכסון.

ג. $T^{2009}(x,y,z)=\left(2^{2008}x+2^{2008}z, y, 2^{2008}x+2^{2008}z\right)$

6) א. $[T]_E=A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

ב. $v_{x=2}^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $v_{x=2}^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $v_{x=0}^{(2)}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $v_{x=0}^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

ג. כן. ד. $T^{10}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t\\ 2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t\end{pmatrix}$

7) א. $[T]_E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ב. $v_{\lambda=1}=1$ ג. לא ניתנת לליכסון.

8) הוכחה.

אלגברה לינארית 2 לתלמידי הנדסה ומדעים

פרק 3 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-4**:

א. מצא מטריצה אופיינית.

ב. מצא פולינום אופייני.

ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.

ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ה. מצא וקטורים עצמיים.

ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.

ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.
כלומר, מצא מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.

ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשב A^{2009}.

ט. מצא את הפולינום המינימלי.

י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
במידה והמטריצה הפיכה, בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד,
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **5-6** מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.
כלומר, מצא מטריצה הפיכה P, כך ש-$P^{-1}AP=D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
פתור פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

5) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **7-11** מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

7) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

11) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

12) נתון $A=\begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$.
לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A?

13) נתונה המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את ערכי a ו-b, עבורם הערכים העצמיים של A יהיו **1** ו-**-1 בלבד**.
ב. עבור ערכי a ו-b שמצאת בסעיף א, קבע האם המטריצה לכסינה.

14) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=6,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=-4$.

מצא את המטריצה A.

15) קבע האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3,

בעלת וקטורים עצמיים $v_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצא אותה.

16) הוכח או הפרך:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix}4\\1\\10\end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

17) נתונה מטריצה ריבועית A.

הוכח או הפרך:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו-λ ע"ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.

ג. ל-A ול-A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל-A ול-A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע"ע של A.

ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=\pm1$.

ז. אם $A^2=A$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

18) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו- B, מסדר n. הוכח או הפרך:

א. ל- AB ו- BA אותם ערכים עצמיים.

ב. נניח ש- v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו- B,
אז v גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

19) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.

א. הוכיחו כי לכל סקלר k, המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.

ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A, מצא את הערך העצמי
של המטריצה $A+kI$.

20) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3.

ידוע כי v_1,v_2 הם ו"ע של A, שונים מאפס, המתאימים לע"ע $\lambda=1$,

וכי v_3 הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע $\lambda=-1$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות:

א. אם הווקטורים v_1,v_2 בת"ל, אז $A^{2018}=I$.

ב. A ניתנת ללכסון.

ג. v_3 הוא צרוף לינארי של הווקטורים v_1,v_2.

21) נתונות שתי מטריצות מסדר n: מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה.
הוכח או הפרך:

א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.

ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.

22) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n, שעבורן v הוא ו"ע.

א. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n.

ב. עבור $v=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $n=2$, מצאו בסיס ל- W.

23) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4.
נתונה המטריצה $B=A^4-2A^2+10A-4I$.
הוכח ש- v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשב את הערך
העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש- v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ.
יהי $p(x)$ פולינום.
הוכח ש- v ו"ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

24) תהי $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, כאשר a קבוע ממשי.

א. עבור $a=3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A.

ב. עבור איזה ערך של a, הזוג $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A?

ג. יהי $0 \neq u \in \mathbb{R}^2$ וקטור שאינו ו"ע של A.
הוכיחו כי הקבוצה $\{u, Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

25) תהיינה A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר $n \times n$ כך ש-$AB=BA$.
נניח כי $\operatorname{rank}(A)=n-1$, ו-$v$ הוא וקטור עצמי של המטריצה A,
השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.
הוכח כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B.

26) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.

1. הוכח כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל- $p(x)=x^2-\operatorname{tr}(A)x+|A|$.
2. נתון כי $\operatorname{tr}(A)=4$. חשב את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
נניח כי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0$ הפולינום האופייני של A.
הוכח כי $a_{n-1}=-\operatorname{tr}(A)$, $a_0=(-1)^n|A|$.

27) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $\operatorname{rank}(B)=1$.
הוכח:

א. 0 ע"ע של המטריצה B.

ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0, הוא 3.

ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0, הוא 3 או 4.

ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.

ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0, אז הוא שווה ל- $\operatorname{tr}(B)$.

28) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר n.
ידוע כי $\operatorname{rank}(B)=k$, כאשר $k<n$.
הוכח כי 0 ערך עצמי של B ומצא את הריבוי הגיאומטרי והאלגברי שלו.

29) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.
ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי שונה מ-0.
הוכח שהמטריצה ניתנת לליכסון.

30) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ (מטריצה עם שורה אחת).
מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A^TA (הנח $n>1$).

31) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2=A$.
תהי A מטריצה אידמפוטנטית.
א. הוכח כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.
ב. רשום את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.
ג. הוכח כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים.
ד. הוכח כי A ניתנת ללכסון.
ה. הוכח כי $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5.
הוכח או הפרך:
א. קיים תת מרחב $W_\alpha=\{u\mid Au=\alpha u\}$ של R^5, כך ש-$\dim W_\alpha\geq 1$.
ב. אם u_1,u_2 ו"ע של A, אז גם הווקטור u_1+u_2 ו"ע של A.
ג. אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A, אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.
ד. אם A לכסינה מעל R, אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.
ה. אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R.

33) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3.
נתון כי $\det(A)=tr(A)=0$ וכי $\lambda=1$ ערך עצמי של המטריצה.
הוכח כי המטריצה ניתנת לליכסון ומצא את כל הערכים העצמיים שלה.

34) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2,
והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4.
מכאן נובע ש :

א. $\operatorname{rank}(A)=4$

ב. A לכסינה.

ג. $\operatorname{tr}(A)>10$

ד. $|A|\le 127$

ה. קיים וקטור עצמי v של A, כך ש- $A^2v=2v$.

35) תהי A מטריצה מסדר 3, המקיימת $0<\operatorname{rank}(A-10I)<\operatorname{rank}(A-4I)<3$.

א. מצא את הפולינום האופייני של המטריצה A.

ב. מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A, ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.

ג. קבע האם A הפיכה.

ד. האם נכון לומר ש- $A=10I$, או ש- $A=4I$?

ה. קבע האם A לכסינה.

36) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי.
הוכח או הפרך :

א. אם v וקטור עצמי של A, אז v וקטור עצמי גם של A^n.

ב. אם v וקטור עצמי של A^n, אז v וקטור עצמי גם של A.

ג. אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.

ד. אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

37) נתונה מטריצה A, שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x)=(x-1)^2$.
הוכח כי המטריצה $A^2+4A+3I$ הפיכה.

38) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x)=x^2+bx+c$.
מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.

ב. מטריצה $A\in M_2[R]$ מקיימת $|A|<0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

תשובות סופיות

1) א. $\begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)^2$ ג. $x=0,\ x=1$,

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=0}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 1,1,1\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=x(x-1)^2$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. לא הפיכה.

2) א. $\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-1)^2(x-2)$ ג. $x=1,\ x=2$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=(x-1)^2(x-2)$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. הפיכה.

3) א. $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)(x-2)$ ג. $x=0,\ x=1,\ x=2$

$x=0$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=0}=sp\{\langle -1,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=1}=sp\{\langle 0,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,1,0\rangle,\ \langle 1,0,1\rangle,\ \langle -1,0,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח. $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=x(x-1)(x-2)$ י. לא הפיכה.

4) א. $\begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

ג. $x=6,\ x=2,\ x=-4$

$x=-4$ – ריבוי אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוי אלגברי: 1, $x=6$ – ריבוי אלגברי: 1.

ד. $V_{x=6}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

$V_{x=-4}=sp\{\langle -1,1,0\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle -1,1,0\rangle,\ \langle 1,1,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ח. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{2017}+(-4)^{2017} & 2^{2017}-(-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017}-(-4)^{2017} & 2^{2017}+(-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017}+2^{2017} & -6^{2017}+2^{2017} & 2\cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

י. הפיכה.

5) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$

6) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

7) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,

וקטורים עצמיים: $V_{x=2}=(1,1,1),\ v^{(2)}_{x=3}=(1,1,0),\ v^{(1)}_{x=3}=(1,0,1)$

8) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1}=(-1,4,1)$, $v_{x=3}=(1,2,1)$, $v_{x=-2}=(-1,1,1)$

9) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1}=(1,-2,1)$, $v_{x=4}=(1,1,1)$, $v_{x=-1}=(-1,0,1)$

10) $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1}=(-1,2)$, $v_{x=3}=(1,2)$

11) $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right)$,

$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$

12) $k_1=3,\ k_2=-\frac{32}{9}$

13) א. $a=3,\ b=-4$ או $a=1,\ b=0$ ב. לא לשתיהן.

14) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

15) אין כזו מטריצה.

16) א. הפרכה: $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. ב. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ ג. $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ ד. הוכחה.

17) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.
ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.

18) א. הוכחה. ב. הוכחה.

19) א. הוכחה. ב. $4+k$ הוא ערך עצמי של $A+kI$.

20) א. הפרכה. ב. הוכחה. ג. הפרכה.

21) א. הפרכה. ב. הוכחה.

22) א. הוכחה. ב. הוכחה.

23) א. הערך העצמי הוא 260. ב. הוכחה.

24) א. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

25) הוכחה

26) א.1. הוכחה. א.2. $|A|=4$ ב. הוכחה.

27) הוכחה.

28) הוכחה.

29) הוכחה.

30) 0 ו- $tr(A)$.

31) א. הוכחה. ב. $p(x)=x,\ p(x)=x-1,\ p(x)=x(x-1)$ ג. הוכחה.
ד. הוכחה. ה. הוכחה.

32) הוכחה.

33) הערכים העצמיים הם: $0,1,-1$.

34) הוכחה.

35) א. $p(x)=(x-10)^2(x-4)$
ב. 10 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 2;
4 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 1.
ג. לא הפיכה. ד. לא. ה. לכסינה.

36) הוכחה.

37) הוכחה.

38) א. $p_{4A}(x)=x^2+4bx+16c$ ב. הוכחה.

דמיון מטריצות

שאלות

1) ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי:

א. $|A|=|B|$

ב. $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$

ג. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

2) הוכח באינדוקציה: אם $P^{-1}AP=B$, אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$.
הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $4A=\begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ דומות.

4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&7&0\\9&-17&6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\-1&3&2\\2&-8&-5\end{pmatrix}$.

האם קיימים קבועים ממשיים a, b, כך שהמטריצה A דומה למטריצה B?

5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n: A, B, C. הוכח כי:

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל- B, אז B דומה ל- A.

ג. אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C, אז A דומה ל- C.

ד. אם A דומה ל- B ושתיהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל- B^{-1}.

ה. אם A דומה ל- B, אז A^k דומה ל- B^k, לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל- B ו- $q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל- $q(B)$.

ז. אם A דומה ל- B, אז A^T דומה ל- B^T.

ח. אם A דומה ל- B, אז $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

ט. אם A דומה ל- B, אז $\operatorname{Null}(A)=\operatorname{Null}(B)$.

הערה – $\operatorname{Null}(A)$ = מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

6) הוכח או הפרך:

א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.

ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.

ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2.
חשב כל אחד מהבאים או הסבר מדוע לא ניתן לעשות זאת:

א. $\operatorname{rank}(A)$

ב. $\dim\operatorname{Ker}(A)$

ג. $\operatorname{tr}(A)$

ד. $|A^TA|$

ה. ע"ע עבור A^TA.

ו. ע"ע עבור $(4A^2+10A+I)^{-1}$.

הערה – $\dim\operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Nullity}(A)$

8) הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

תשובות סופיות

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) לא.

5) הוכחה.

6) הוכחה.

7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1, \frac{1}{15}, \frac{1}{37}$

8) הוכחה.

אלגברה לינארית 2 לתלמידי הנדסה ומדעים

פרק 4 - שדות - שדה השאריות מודולו p

תוכן העניינים

לנושא זה לא קיים ספר פרק

שדות – שדה השאריות מודולו p

1) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=-1 \end{cases}$.

א. פתור את המערכת מעל שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$.
ב. פתור את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_7$.
ג. פתור את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_5$.
ד. פתור את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_3$.

2) פתור את המערכת $\begin{cases} 3x+y+4z=3 \\ 4x+3y+3z=4 \\ 2x+4z=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$.

3) פתור את המערכת $\begin{cases} 3x+y+4z=3 \\ 4x+3y+3z=4 \\ 2x+4z=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$.

4) פתור את המערכת $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+4x_2+4x_3=2 \\ 3x_1+x_3=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

5) פתור את המערכת $\begin{cases} x+4y+2z+4t=1 \\ x+2y-z=0 \\ y+z+t=1 \\ x+3y-z-2t=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

6) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \\ kx+y+z=1 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$.

מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k, למערכת:
א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

7) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3y+(k^2+3)z=k^2+1 \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$.

מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k, למערכת:

א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

8) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

חשב את A^{-1}.

9) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_3$.

חשב את A^{-1}.

10) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k, המטריצה הפיכה.

11) נתונה הקבוצה הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$\{(k,1,1,1,1),(1,k,1,1,1),(1,1,k,1,1),(1,1,1,k,1),(1,1,1,1,k),\}$$

מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k, הקבוצה תלויה ליניארית,

ועבור אילו ערכים של הפרמטר k, הקבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

12) במרחב $(Z_5)^4$, מעל השדה Z_5, נגדיר שני תתי-מרחבים, U ו- W:

$$U=\{(x,y,z,t)\mid 3x+4y+z+t=0,\ \ 2x+y+2t=0\}$$

$$W=sp\{(2,3,0,4),\ (1,1,4,1)\}$$

מצא בסיס לתתי המרחבים $U\cap W,\ U+W,\ U,W$.

מה מספר האיברים בכל מרחב?

13) הציגו דוגמה של העתקה ליניארית $T:M_2[\mathbb{Z}_5]\to M_2[\mathbb{Z}_5]$,
המקיימת את התנאים הבאים:

1. $\{0\}\neq \mathrm{Ker}(T)\subset \mathrm{Im}(T)$
2. $\mathrm{Ker}(T)\neq \mathrm{Im}(T)$
3. $T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

מספיק להגדיר את ההעתקה על הווקטורים של בסיס שתבחרו.

14) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[\mathbb{Z}_5]\to P_3[\mathbb{Z}_5]$,
המוגדרת על ידי $T(p(x))=(x+\bar{3})p(x)+p(\bar{0})(x^3+\bar{2})$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה T,
מהבסיס $E_1=\{\bar{1},x,x^2\}$ לבסיס $E_2=\{\bar{1},x,x^2,x^3\}$.

ב. מצאו בסיס ומימד ל-$\mathrm{Im}(T)$.
כמה איברים יש ב-$\mathrm{Im}(T)$?

ג. מצאו בסיס ומימד ל-$\mathrm{Ker}(T)$.
כמה איברים יש ב-$\mathrm{Ker}(T)$?

תשובות סופיות

1) א. $(1,-1)$ ב. $(1,6)$ ג. $(2,1),\ (4,0),\ (0,2),\ (3,3)$ ד. $(1,2)$

2) $(0,3,0)$

3) $(1,2,1)$

4) $(0,3,0)$

5) $(1,-3,2,2)$

6) פתרון יחיד: $k=0,\ k=2$, 9 פתרונות: $k=1$.
אין אופציה של אינסוף פתרונות ואין אופציה של אין פתרון.

7) פתרון יחיד: $k=0,\ k=2,\ k=4$, 5 פתרונות: $k=3$, אין פתרון: $k=1$.
אין אופציה של אינסוף פתרונות.

8) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}$

9) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\2&2\end{pmatrix}$

10) $k=0,\ k=2,\ k=4$

11) עבור $k=1,\ k=3$, הווקטורים תלויים ליניארית,
ועבור $k=0,\ k=2,\ k=4,\ k=5,\ k=6$, הווקטורים בלתי-תלויים ליניארית.

12) $B_U=\{(4,0,2,1),\ (2,1,0,0)\}$, מספר האיברים: 25.
$B_W=\{(1,1,4,1),\ (0,1,2,2)\}$, מספר האיברים: 25.
$B_{U+W}=\{(1,1,4,1),\ (0,1,2,2),\ (0,0,4,0)\}$, מספר האיברים: 125.
$B_{U\cap W}=\{(2,4,2,1)\}$, מספר האיברים: 5.

13) ההעתקה הבאה:

$$T\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\qquad T\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\qquad T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

14) א. $[T]=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&3&0\\0&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}$ ב. $\dim \operatorname{Im} T=2$, $B_{\operatorname{Im}T}=\{x+x^3,x^2+2x^3\}$, 25;
ג. $\dim KerT=1$, $B_{KerT}=\{9-3x+x^2\}$, 5.