

אלגברה ליניארית א



תוכן העניינים

1.	פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות	1
2.	מטריצות	13
3.	דטרמיננטות	32
4.	מרחבים וקטורים	46
5.	שדות	75
6.	שדות - שדה השאריות מודולו p	82
7.	מרחבי מכפלה פנימית	87

אלגברה ליניארית א

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות..... 1
2. מערכות עם פרמטר..... 6
3. שימושים של מערכות ליניאריות..... 9
4. מערכת משוואות הומוגנית..... 11

פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

שאלות

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות :

$$\begin{array}{llll} 2x+y=4 & x-y=0 & x-4y=-7 & x+10y=11 \\ x+y=3 & 2x+y=3 & x-y=-1 & 2x-2y=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{llll} x=3 & 2x+y+z=3 & x-4y+z=-7 & x+10y=11 \\ 2x+y=4 & x-z=0 & x-y=-1 & 2x-2y=0 \\ z+t=8 & & x+y+z=5 & x+y=3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצע על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{(4)} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{(3)} \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(6) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין :

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ג.} \end{array}$$

בשאלות 7-15 הבא את המטריצות הבאות לצורה מדורגת
(בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה מדורגת קנונית):

$$(8) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

$$(12) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(14) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (13) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(15) \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

* בשאלה 15, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{R}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{C}$.

בשאלות 16-27 פתור את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה F :

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 &= 1+4i \\ iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 &= 2+i \\ (-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 &= 5-i \end{aligned}$$

א. $F = \mathbb{R}$

ב. $F = \mathbb{C}$

תשובות סופיות

(1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$(2) \text{ א. } \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ג. } \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{ד. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \text{ א. } R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad \text{ב. } R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad \text{ג. } R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$$

$$(7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ו. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(8) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ז. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(11) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ח. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(12) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R} \qquad F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \qquad (x, y) = (5-2t, t) \quad (17) \qquad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \qquad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \qquad (x, y, z) = (-1-7t, 2+2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \qquad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \qquad (x, y, z, t) = (-a+2b, 1+2a-2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t+1+i, 3, t) \cdot \beta \qquad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1) \cdot \alpha \quad (28)$$

מערכות עם פרמטר

שאלות

בשאלות 1-6 מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$x + ky + z = 1$$

$$x + y + kz = 1 \quad (2)$$

$$kx + y + z = 1$$

$$x - y + z = 1$$

$$5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \quad (1)$$

$$3x - y + (k + 3)z = 3$$

$$2x - y + z = 0$$

$$x + 2y - z = 0 \quad (4)$$

$$5x + (1 - k)y + k^2z = 1$$

$$x + 2ky + z = 0$$

$$3x + y + kz = 2 \quad (3)$$

$$x + 9ky + 5z = -2$$

$$x + ky + 3z = 2$$

$$kx - y + z = 4 \quad (6)$$

$$3x + y + (2 + k)z = 0$$

$$kx - y = 1$$

$$(k - 2)x + ky = -2 \quad (5)$$

$$(k^2 - 1)z = 9$$

בשאלות 7-9 מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$2x - 3y + z = 1$$

$$4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k \quad (8)$$

$$2x + ky = 3$$

$$(k + 3)x + 2y = k^2 + 5 \quad (7)$$

$$6x + 3ky = 7k^2 + 2$$

$$3x + 4y - z = 2$$

$$kx - 2y + z = -1$$

$$x + 8y - 3z = k \quad (9)$$

$$2x + 6y - 2z = 0.5k + 1$$

בשאלות 10-12 מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$x + y - z + t = 1$$

$$ax + y + z + t = b \quad (12)$$

$$3x + 2y + at = 1 + a$$

$$2x + 4y + az = -1$$

$$x + 2y + 4z = -4$$

$$x + 2y - 4z = 0$$

$$x + 2y + 6z = -2b$$

$$(11)$$

$$x + 2y - 4z = b$$

$$7x - 10y + 16z = 7 \quad (10)$$

$$2x - ay + 3z = 1$$

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2 \quad (13) \text{ נתונה מערכת המשוואות:}$$

$$bx + cy + dz = 3$$

- א. מצא תנאי עבור a, b, c, d , כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.
 ב. מצא תנאי עבור a, b, c, d , כך שלכל a , למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

$$(14) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

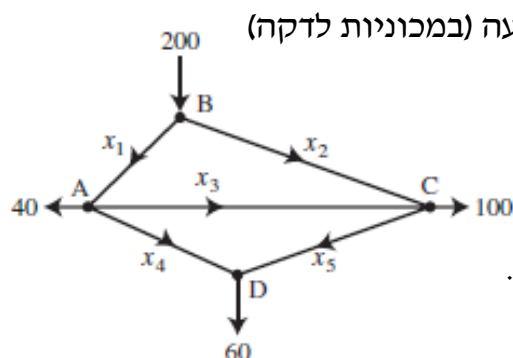
- א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
 ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
 ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת:
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
 ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
 ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z = 0$.
 ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.
 ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$.
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.
 ח. מצא לאיזה ערך של k , $(1, 0, 0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

תשובות סופיות

- (1) 1. $k \neq -2, k \neq 1$ 2. $k = 1$ 3. $k = -2$
- (2) 1. $k \neq -2, k \neq 1$ 2. $k = -2$ 3. $k = 1$
- (3) 1. $k \neq \frac{4}{7}, k \neq -1$ 2. $k = \frac{4}{7}$ 3. $k = -1$
- (4) 1. $k \neq -0.4, k \neq 1$ 2. $k = -0.4$ 3. $k = 1$
- (5) 1. $k \neq -2, k \neq \pm 1$ 2. $k = -2$ 3. $k = \pm 1$
- (6) 1. $k \neq 2, k \neq -3, k \neq -1$ 3. $k = 2, k = -3, k = -1$
- (7) 1. $k = -1$ 2. $k \neq \pm 1$ 3. $k = 1$
- (8) 1. $k = 3$ 3. $k \neq 3$
- (9) 1. $k \neq 1$ 2. $k = 1$
- (10) 1. $a \neq 2$ 2. $a = 2, b \neq -3$ 3. $a = 2, b = -3$
- (11) 1. $b \neq 2.5$ או $a \neq -6$ 3. $a = -6, b = 2.5$
- (12) 1. $a = 2, b \neq 2$ 3. $a = 2, b = 2$ או $a \neq 2$
- (13) א. $ab + 2c \neq d$ ב. $b = 0, c = 1.5, d = 3$
- (14) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix}$
- ג. 1. $k \neq 2, k \neq -1$ 2. $k = -1$ 3. $k = 2$ ד. $(x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$
- ה. $k = \pm 2$ ו. $k = -2$ ז. $k = 2$, לא. ח. $k = -2$

שימושים של מערכות ליניאריות

שאלות



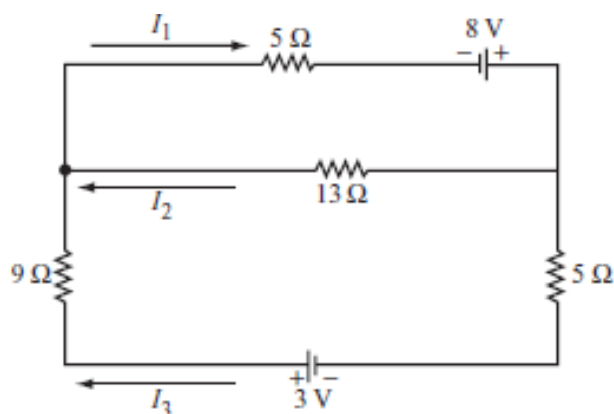
1) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.

א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

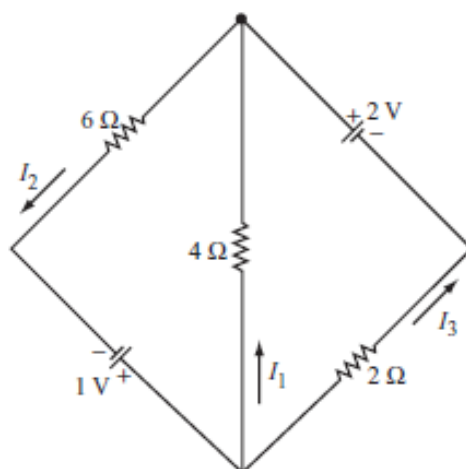
ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת, אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של x_1 , אם ידוע ש- $x_4 = 0$.

בשאלות 2-3 מצא את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):



(2)



(3)

* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות ליניאריות.

תשובות סופיות

(1) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1 = 100 + x_3 - x_5$, $x_2 = 100 - x_3 + x_5$, $x_4 = 60 - x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1 = 40 + x_3$, $x_2 = 160 - x_3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 60$. ג. 40.

$$(2) \text{ א. } I_1 = \frac{255}{317}, I_2 = \frac{97}{317}, I_3 = \frac{158}{317}$$

$$(3) \text{ } I_1 = -\frac{5}{22}, I_2 = \frac{7}{22}, I_3 = \frac{6}{11}$$

מערכת משוואות הומוגנית

שאלות

(1) פתור את המערכת הבאה. על סמך הפתרון, קבע את הפתרון של המערכת

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases}$$

(2) פתור את המערכת הבאה. על סמך הפתרון, קבע את הפתרון של המערכת

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases}$$

- א. מצא את ערכי m , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.
 ב. עבור ערך m שמצאת ב-א, מצא את ערכי k , עבורם למערכת פתרון.
 ג. עבור ערכי m, k שמצאת בסעיפים הקודמים, מצא את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבע את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(4) נתון שהחמישייה $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת

ליניארית נתונה. קבע אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

- א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.
 ב. החמישייה $(4, 0, 2, 0, 0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.
 ג. החמישייה $(4, 0, 2, 1, 1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.
 ד. לכל a ממשי, החמישייה $(4a, 0, 2a, 0, 0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.
 ה. החמישייה $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
 ו. החמישייה $(0, 1, 0, 1, 2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
 ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

תשובות סופיות

- (1) פתרון כללי של המערכת $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$.
 פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$.
- (2) למערכת פתרון יחיד $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.
 למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0, 0, 0)$.
- (3) א. $m = -3$ ב. $k = -2$ ג. פתרון כללי של המערכת $(x, y, z) = (t, t - 1, t)$.
 פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא (t, t, t) .
- (4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.
 ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.
 ז. הטענה לא נכונה.

אלגברה ליניארית א

פרק 2 - מטריצות

תוכן העניינים

13	1. מטריצות
15	2. המטריצה ההופכית
19	3. מטריצה אלמנטרית
21	4. פירוק LU
22	5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית
27	6. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות
28	7. דרגה של מטריצה
31	8. רגרסיה ליניארית

מטריצות

שאלות

- (1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.
קבע אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשום את סדר המטריצה:

- א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$
ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^T B$
ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

- (2) מצא את x, y, z , אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

(3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

(4) $2tr(D^2 - 2E)$

(5) א. $4C^T + A$ ב. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

(6) $I_2 BC$

(7) $tr(C^T C)$

(8) $DABC$

תשובות סופיות

- (1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא
- ו. 6×6 ז. 6×2 ח. לא. ט. 6×4 י. 6×6
- (2) $(x, y, z) = (2, 1, -1)$
- (3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$
- ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$ (4) 230
- א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$ (5)
- א. $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$ (8) 63 (7) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$ (6)

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות 1-9 מצא את ההפוכה של כל מטריצה.
בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \text{(1)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(4)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{(7)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ הפיכה?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ איננה הפיכה?

הנח שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר n , וחלץ את X :

12) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^T P = A$

13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

14) $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

15) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

חשב את X , אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

(16) נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y , אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

(17) נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

חשב את B , אם נתון בנוסף כי: $5A^T B(I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

(18) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכח כי A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A - 3I)(A + 2I) = 0$.

הוכח כי A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

(19) נתון כי: $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

א. חשב את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכח ש- A הפיכה, ובטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I - A$ הפיכה, ומצא את ההופכית שלה.

(21) נתון: $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$.

הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה D , כך ש- $D^{-1}AD = C$.

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C , אז A דומה ל- C .
(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

(22) תהיינה A, B מטריצות ריבועיות ממשייות מסדר $n \geq 2$. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- א. $AB = BA$.
- ב. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח B הפיכה.
- ג. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח A הפיכה.
- ד. אם $(AB)^{100} = I$, אז בהכרח $(BA)^{100} = I$.
- ה. אם $(AB)^{100} = 0$, אז בהכרח $(BA)^{101} = 0$.

(23) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, עבורן $A^2 + AB = I$.

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$.
- ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$ היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

(24) תהיינה A, B מטריצות כלשהן.

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

- א. אם $AB = I$ אז $B = A^{-1}$.
- ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
- ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
- ד. המכפלה AB לא הפיכה.
- ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

(25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2 = A$. הוכח:

- א. למעט המקרה בו $A = I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
- ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
- ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז $\text{tr}(A) = 1$ או ש- A מטריצה אלכסונית.
- ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow A^n = A$, לכל n טבעי.

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) \quad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9) \quad \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \lambda \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad A \quad \text{א.} \quad CD^2 - A \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad \text{ב.} \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ב.} \quad f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (20)$$

(21) הוכחה.

(22) הוכחה.

(23) הוכחה.

(24) הוכחה.

(25) הוכחה.

מטריצה אלמנטרית

שאלות

(1) רשום את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(2) רשום את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(3) הוכח או הפרך כל אחד מסעיפים א-ד.
נתון כי A מטריצה ריבועית, ו- B מתקבלת מ- A ע"י סדרת פעולות דירוג.
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א. B^2 מ- A^2 .

ב. BA מ- A^2 .

ג. BA מ- B^2 .

ד. AB מ- B^2 .

(4) תהי $A \in M_3[R]$, כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה $E_2 E_1 A$?

פתור בשתי דרכים:

דרך א' – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.

דרך ב' – בעזרת כפל מטריצות.

תשובות סופיות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{e_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \quad (1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \cdot \quad (2)$$

$$\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_5} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_6} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_7} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{e_8} = A$$

(3) הוכחה.

(4) -3

פירוק LU

שאלות

(1) רשום את פירוק LU של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

(2) רשום את פירוק LU של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}$

(3) רשום את פירוק LU של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

תשובות סופיות

(1) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U$

(2) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_U$

(3) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

(1) בסעיפים הבאים מצא מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$, המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5$$

$$6x + 4y + z = 2$$

ב.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{בשאלות 2-6 נתון כי:}$$

בטא כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4)$$

$$A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6)$$

$$A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

(7) פתור את מערכת המשוואות הבאה,

$$2x - y + z = 3$$

בעזרת המטריצה ההפוכה: $3x - 2y + 2z = 5$.

$$5x - 3y + 4z = 11$$

(8) פתור את מערכת המשוואות הבאה,

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

(9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (2, -8, 4) \quad , \quad (x, y, z) = (-1, 4, -2)$$

הוכח שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

10) למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :

$$(x, y, z) = (2, 3, 4) \quad , \quad (x, y, z) = (-1, 4, -2)$$

מצא פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$11) \text{ נתונה המערכת : } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

מצא עבור אילו ערכים של הקבוע k , למערכת :
א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* בפתרון השתמש במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$12) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

ידוע כי $\text{rank}(A) = 3$, וידוע כי למערכת $Ax = b$ יש פתרון.
מצאו את הקבועים k, m .

13) נתונה מטריצה ריבועית A , המקיימת את התכונה הבאה :
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה 0.
הוכח ש- A מטריצה לא הפיכה.

14) נתונה מטריצה ריבועית הפיכה A , המקיימת את התכונה הבאה :
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה k .
הוכח שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
בטא קבוע זה בעזרת k .

$$15) \text{ מטריצה } A \text{ מקיימת : } A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

- 16** יהיו A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$.
 עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.
 א. אם למערכת $(AB)x = 0$ קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח A לא הפיכה.
 ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x = 0$, אז למערכת $(BA)x = 0$ קיים פתרון שונה מ-0.
 ג. אם למערכת $Ax = 0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$.
 ד. אם למערכת $(A^t A)x = 0$ קיים פתרון יחיד, אז A לא הפיכה.
 ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x = 0$, אז למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$: $Ax = d$ ($d \neq 0$).
 נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $\text{rank}(A) = 2$.
 ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
 $u = (x_1, x_2, 6, 7)$, $v = (y_1, y_2, 1, 2)$, $w = (z_1, z_2, 4, 3)$
 מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
 א. $x = au + bv + cw$
 ב. $x = (a + b + 1)u - av - bw$
 ג. $x = au + bv + w$
 ד. $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
 ה. $x = (a + b)u - (av + bw + u)$, כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$.

הערה: בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
 בהינתן מערכת הומוגנית $Ax = 0$:

- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
 - מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות.
- בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

תשובות סופיות

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad (2)$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad (3)$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad (4)$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad (5)$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad (6)$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (7)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (8)$$

$$(9) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(10) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$(11) \quad \text{אם } k \neq 2 \text{ או } k \neq -1, \text{ אז יש פתרון אחד.}$$

$$\text{אם } k = 2, \text{ אז יש אינסוף פתרונות.}$$

$$\text{אם } k = -1, \text{ אז אין פתרונות.}$$

$$(12) \quad m = 5, k = 9$$

$$(13) \quad \text{הוכחה.}$$

14) סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

17) הוכחה.

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

- (1) ידוע ש- A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
 1. AA^T סימטרית.
 2. $A + A^T$ סימטרית.
 3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.
- (2) ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
 1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
 2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
 3. $A^2 + B$ סימטרית.
- (3) ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:
 1. AB^3 אנטי-סימטרית.
 2. AB^2 סימטרית.
 3. $(A - B)^2$ סימטרית.
- (4) ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכח:
 1. AB אנטי-סימטרית.
 2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.
- (5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.
הוכח כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.

דרגה של מטריצה

שאלות

(1) אמת את המשפט $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$,

על המטריצה: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

(2) אמת את המשפט $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$,

עבור: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) נתונה המטריצה: $A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix}$

חשב את $\text{rank}(A)$.

(4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n > 1$.
הוכח או הפרך:

א. $\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

ב. $\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

(5) נתון כי A, B מטריצות ריבועיות מסדר $n > 1$.
הוכח או הפרך:

א. אם $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$, אז בהכרח B הפיכה.

ב. ייתכן ש- $\text{rank}(A) < \text{rank}(AB)$.

ג. אם $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$, אז $\text{rank}(AB) > \text{rank}(B)$.

$$6 \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשב את $\text{rank}(A)$, $\text{rank}(B)$.

ב. חשב את $\text{rank}(B^{10} A^{14})$.

7 נניח כי A, B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n .

$$\text{הוכיחו כי } \text{rank} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

8 תהי $A_{8 \times 7}$ מטריצה, כך ש- $\text{rank}(A) = 3$.

הוכח כי קיימות 3 מטריצות A_1, A_2, A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

$$\text{כך ש-} A = A_1 + A_2 + A_3.$$

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר $m \times n$ שדרגתה k .

9 נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$.

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

$$\text{א. } \text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$$

$$\text{ב. } \text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$$

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

תשובות סופיות

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) אם $k=1$, אז $\text{rank}(A)=2$. אם $k=4, k=10$, אז $\text{rank}(A)=3$.
- אם $k \neq 1, 4, 10$, $\text{rank}(A)=4$.
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.
- ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א. $\text{rank}(A)=2$, $\text{rank}(B)=3$. ב. $\text{rank}(B^{10}A^{14})=2$.
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.
- (9) הוכחה.

רגרסיה לינארית

שאלות

1) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש :

$price(x)$	$Demand / sales(y)$
49	124
69	95
89	71
99	45
109	18

- מצא את ישר הרגרסיה של הבעיה.
 - בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא \$54.
 - מה משמעות השיפוע של ישר הרגרסיה?
 - מצא את סכום ריבועי השגיאות בחישוב הנ"ל (SSE).
- הערה : הנח שהביקוש הוא ביחידות מוצר והמחיר הוא בדולרים.

תשובות סופיות

- א. $f(x) = -1.7x + 211$ ב. הביקוש הוא 119.2 יחידות מוצר .
- ג. העלאת מחיר המוצר ב-\$1 תביא לירידה במכירות של 1.7 יחידות מוצר בחודש.
- ד. $SSE = 207.65$

אלגברה ליניארית א

פרק 3 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטות 32
2. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות 40
3. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה 41
4. שימושי הדטרמיננטה 45

דטרמיננטות

שאלות

בשאלות 1-5 חשב את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשב את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \\ \text{ב.} \end{array} & \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \\ \text{א. (7)} \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{array} \right| \\ \text{ג.} \end{array}
 \end{array}$$

בשאלות 8-10 חשב את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{array} \right| \quad (8)$$

$$\left| \begin{array}{cccc} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{array} \right| \quad (9)$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{array} \right| \quad (10)$$

בשאלות 11-12 הראה, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{array}{ccc}
 \left| \begin{array}{ccc} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{array} \right| \\
 \text{ג.} & \text{ב.} & \text{א. (11)}
 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשב:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{כי: (16) הוכח כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{17) הוכח כי :}$$

$$\text{18) חשב : } \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

בכל אחת מהשאלות 19-25, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n .
חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad \text{19)}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{20)}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{21)}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & \text{else} \end{cases} \quad \text{22)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \quad \text{23)}$$

$$(24) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 3(n-1) \end{pmatrix}$$

$$(25) a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

* בשאלה 25:

1. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה.

2. הנח כי $c=2$, $b=1$, $a=3$, ומצא:

א. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

ב. את הדטרמיננטה, כאשר $n=20$.

$$(26) \text{ חשב: } \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

בשאלות 27-28 נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4$, $|B|=2$.
חשב:

$$(27) \text{ א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(28) \text{ א. } |-A^{-2}B^TA^3| \quad \text{ב. } |-2A^2A^T \text{adj}B|$$

$$(29) \text{ נתון: } (PQ)^{-1}APQ = B.$$

$$\text{הוכח: } |A|=|B|.$$

(30) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש- $2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשב את $|B|$.

31 נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $A + 3B = 0$, $B^2 - 2A^{-1} = 0$.
חשב את $|A|$, $|B|$.

32 הוכח: 1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 2. $|adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$.

33 נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכח ש- $|A| = 0$.

34 נתון: A מטריצה מסדר n , $|A| = 128$, $2AB = B^T A^2$, ו- B הפיכה.
מצא את n .

35 נתון: $\det(A_{n \times n}) = 2$, $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$.
חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

תשובות סופיות

- (1) א. $ad - bc$ ב. 29 ג. -1
- (2) א. -1 ב. -3 ג. -14
- (3) א. 24 ב. 234 ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0 ב. 0 ג. 3
- (7) א. 24 ב. 44 ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) הוכחה.
- (17) הוכחה.
- (18) $(k-1)^4 (k+4)$
- (19) $n!$
- (20) $(-1)^{n-1} n!$
- (21) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$
- (22) $(a-b)^{n-1} [a + (n-1)b]$
- (23) 1
- (24) $2 \cdot 3^{n-2}$
- (25) 1. $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$, $D_2 = a^2 - bc$, $D_3 = a^3 - 2abc$
2. א. $D_n = 2^{n+1} - 1$ ב. $D_{20} = 2^{21} - 1$
- (26) 0
- (27) א. 4 ב. 2^{13}
- (28) א. -8 ב. -2^{11}
- (29) הוכחה.

$$\frac{81}{32} \quad (30)$$

$$|A|=18, |B|=-2/3 \quad (31)$$

(32) הוכחה.

(33) הוכחה.

$$7 \quad (34)$$

$$4^n \quad (35)$$

כלל קרמר

שאלות

בשאלות 1-3 פתור את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{lll} x+2z+5t=8 & x+z=3 & x+2y=5 \\ -2x-6y=-8 & 4x+y+8z=21 & 3x+4y=11 \\ 5x+3y-7z+4t=5 & 2x+3z=8 & \\ 2x+5y+44z=51 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} kx+y+z+t+r=1 \\ x+ky+z+t+r=1 \\ x+y+kz+t+r=1 \\ x+y+z+kt+r=1 \\ x+y+z+t+kr=1 \end{array} \quad (4) \text{ נתונה מערכת המשוואות:}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים $x=y=z=t=r$.

(5) יהיו A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$.

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $(A^t A)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad x=1, y=2$$

$$(2) \quad x=1, y=1, z=2$$

$$(3) \quad x=y=z=t=1$$

$$(4) \quad \text{א. } k \neq 1, k \neq -4 \quad \text{ב. } k = -2 \quad \text{ג. לא} \quad \text{ד. הוכחה.}$$

$$(5) \quad \text{א. לא נכונה.} \quad \text{ב. לא נכונה.} \quad \text{ג. לא נכונה.}$$

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות 1-3 חשב את הצמודה הקלאסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \text{נתון:}$$

א. חשב: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשב: $(A^{-1})_{1,5}$.

(5) הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} גם הם מספרים שלמים.

(6) נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

(7) נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

(8) נתון: A, B הפיכות. C, D לא הפיכות. האם המטריצות הבאות הפיכות:

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. AD ד. CD ה. AB

$$(9) \quad \text{מצא את ערכי } k \text{ עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

10) ידוע ש- A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם $AB = 0$, אז $A = 0$.
- ב. אם $|AB| = 0$, אז $A = 0$.
- ג. אם $|AB| = 0$, אז $|A| = 0$.
- ד. אם $AB = 0$, אז $|A| = 0$.

11) נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}$, $B_{5 \times 3}$. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

- א. $|AB| = |BA|$
- ב. $\text{adj}(AB) \neq \text{adj}(BA)$

12) אם B מתקבלת ממטריצה $A_{3 \times 3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4, אז $|adj(A) \cdot B|$ שווה ל:

- א. $4^3 |A|^3$
- ב. $4^3 |B|^3$
- ג. $4 |B|^3$
- ד. $4 |A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית $A = (a_{ij})$ מסדר $n \geq 3$ המקיימת $a_{ij} = i + j - 1$. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- א. $|A| = 4$
- ב. A הפיכה.
- ג. $\text{adj}(A) = 0$
- ד. $|A| = 0$

14) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A , אז:

- א. בהכרח $\det(A) = \det(G)$ וגם $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$.
- ב. בהכרח $\det(A) = \det(G)$, אך ייתכן ש $\text{adj}(A) \neq \text{adj}(G)$.
- ג. ייתכן ש- $\det(A) \neq \det(G)$, אך בהכרח $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$.
- ד. אף תשובה אינה נכונה.

15 תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n \geq 2$, כך ש- $a_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$.

לכל $1 \leq i, j \leq n$, אז בהכרח מתקיים:

א. $|A| = n! - 1$

ב. הפיכה A .

ג. $\text{adj}(A)$ לא הפיכה.

ד. אם $n = 4$, אז $|\text{Adj}(A)| > 214$.

16 תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n \geq 4$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A) = n - 2$, אז בהכרח $\text{adj}(A) = 0$.

ב. אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $\text{adj}(A)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $\text{adj}(A) = 0$, אז בהכרח $A = 0$.

17 A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ- A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4,

אז $\text{adj}B$ מתקבלת מ- $\text{adj}A$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18 תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $|\text{Adj}((-1+i)A)| = i$.

חשב $|\det(A)|$.

19 נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n .

הוכח את הטענות הבאות:

א. A הפיכה $\Leftrightarrow \text{Adj}(A)$ הפיכה.

ב. $\text{Adj}(A^{-1}) = (\text{Adj}(A))^{-1}$.

ג. $|\text{Adj}(A)| = |A|^{n-1}$.

תשובות סופיות

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{adj}(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(4) א. 240 ב. 0.5

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.

ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

(9) אם ורק אם $k = 0$.

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) ד

(13) הוכחה.

(14) ד

(15) ד

(16) הוכחה.

(17) ד

$$\frac{-5}{2^{\frac{1}{2}}} \quad (18)$$

(19) הוכחה.

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

- (1) א. חשב את שטח המקבילית שקדקודיה :
 1. $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$
 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$
 ב. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו : $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$
 ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות : $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$
 ד. חשב את שטח המשולש שקדקודיו : $(1,2), (3,4), (5,8)$
 הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

- (1) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x - y + 4z + 2 = 0$. ד. 2

אלגברה ליניארית א

פרק 4 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

1. מרחבים ותת-מרחבים..... 46
2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית..... 50
3. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה..... 54
4. חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים..... 58
5. וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס..... 63
6. תרגילי תיאוריה מתקדמים..... 65

מרחבים ותת-מרחבים

סימון

- R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R .
- $M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R .
- $P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R .
- $F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f: R \rightarrow R)$ מעל השדה R .

שאלות

בשאלות 1-7 בדוק האם W תת-מרחב של R^3 :

$$W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\} \quad (1)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c\} \quad (2)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\} \quad (3)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\} \quad (4)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\} \quad (5)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid c - b = b - a\} \quad (6)$$

כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

$$W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\} \quad (7)$$

כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

בשאלות 8-15 בדוק האם W תת-מרחב של $M_n[R]$:

(8) W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W = \{A \mid A = A^T\}$.

(9) W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B . כלומר, $W = \{A \mid AB = BA\}$.

(10) W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס. כלומר, $W = \{A \mid |A| = 0\}$.

(11) W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W = \{A \mid A^2 = A\}$.

(12) W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

(13) W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס. כלומר, $W = \{A \mid AB = 0\}$.

(14) W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}$.

(15) W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות 16-21 בדוק האם W הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

(16) W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$.

(17) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

(18) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4 . כלומר, $W = \{p(x) \mid \deg(p) \leq 4\}$.

(19) W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x .

(20) W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n , כאשר $4 \leq n \leq 7$.

(21) $W = \{p(x) \mid p(0) = 1\}$

בשאלות 22-30 בדוק האם W הוא תת-מרחב של $F[R]$:

(22) W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל x ממשי $W = \{f(x) \mid f(-x) = f(x)\}$.

(23) W מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל x ממשי $W = \{f(x) \mid |f(x)| \leq M\}$.

(24) W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

(25) W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

(26) W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

(27) $W = \left\{ f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx = 4 \right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

(28) $W = \{f(x) \mid f'(x) = 0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

(29) $W = \{f(x) \mid f'(x) = 1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

(30) $W = \{f(x) \mid f(x) = f(x+1)\}$

(31) בדוק האם $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של C^3 :

א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.

ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

(32) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

א. מצא וקטור b , כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון.

ב. מהי קבוצת כל הווקטורים b , כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון?

ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של R^5 ?

- (33)** יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה F .
 א. מצאו תנאי על k , עבורו הקבוצה $W = \{p \in V \mid p(0) = p(1) = p(2) = k\}$,
 הינה תת-מרחב של V .
 ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- V , שפורשים את W .

הערה: לפתרון סעיף זה עבור קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

תשובות סופיות

- | | | | | | | | | | |
|------|------------------------------------|--|----|------|----|------|----|------|----|
| (1) | כן | (2) | כן | (3) | כן | (4) | לא | (5) | לא |
| (6) | כן | (7) | לא | (8) | כן | (9) | כן | (10) | לא |
| (11) | לא | (12) | כן | (13) | כן | (14) | כן | (15) | כן |
| (16) | כן | (17) | לא | (18) | כן | (19) | כן | (20) | לא |
| (21) | לא | (22) | כן | (23) | כן | (24) | כן | (25) | כן |
| (26) | כן | (27) | לא | (28) | כן | (29) | לא | (30) | כן |
| (31) | א. כן
ב. לא | | | | | | | | |
| (32) | א. $u = (1, 0, 0, 0, 0)$
ג. לא. | ב. $B = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid -b_1 + b_2 + 2b_3 \neq 0\}$ | | | | | | | |
| (33) | א. $k = 0$ | ב. $W = \text{span}\{2x - 3x^2 + x^3, 6x - 7x^2 + x^4\}$ | | | | | | | |

צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

שאלות

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים :

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

1) א. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?

ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלויה ליניארית?

2) א. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?

ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

3) א. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?

ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

4) נתון $v = (4, 12, k, -2k)$.

א. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v

יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?

ב. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v

יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?

ג. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$

תהיה תלויה ליניארית?

5) נתון $v = (a, b, c, d)$.

א. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v

יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?

ב. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?

ג. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$

תהיה תלויה ליניארית?

(6) הבע את הווקטור $v = (10, 8, 0, 14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2 ו- u_3 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

(7) הבע את הווקטור $v = (7, 10, -2, 11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

(8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- א. בדוק האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.
ב. במידה והמטריצות תלויות, רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.
ג. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B, C\}$?

(9) נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x) = 4 + x + x^2 + 5x^3$, $p_2(x) = 11x - 5x^2 + 3x^3$,
 $p_3(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3$, $p_4(x) = 1 + 3x - x^2 + 2x^3$.

- א. בדוק האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.
ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשום כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.
ג. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1, p_4\}$?

(10) עבור איזה ערכים של a, b, c , הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:
 $\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$

בשאלות 11-13 נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u, v, w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשום כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

$$\{u - v, u - w, u + v - 2w\} \quad (11)$$

$$\{u + 2v + 3w, 4u + 5v + 6w, 7u + 8v + 9w\} \quad (12)$$

$$\{u + v, v + w, w\} \quad (13)$$

בשאלות 14-15 בדוק האם הווקטורים $\{(1, i, i-1), (i+1, i-1, -2)\}$ תלויים ליניארית ב- C^3 :

(14) מעל $\mathbb{C}$.

(15) מעל $\mathbb{R}$.

(16) נתבונן ב- $V = R$ כמרחב וקטורי מעל השדה Q . הוכיחו כי הקבוצה $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- R , כשהוא מרחב וקטורי מעל Q .

(17) תהי $A_{m \times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1, A_2, \dots, A_n$. הוכיחו את הטענה הבאה :
למערכת $Ax = b$ יש פתרון אם ורק אם $b \in \text{span}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

(18) לפניכם 3 תת-קבוצות של R^4 :

$$U = \text{span}\{(1, 2, 2, 1), (1, 1, -1, -1), (0, 0, 1, 1)\}$$

$$W = \text{span}\{(1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 3, 3, 1)\}$$

$$V = \text{span}\{(2, 3, 1, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 4, 3, 1)\}$$

א. האם $U = W$?

ב. האם $U = V$?

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 2u_3 + u_2$, $u_2 = u_1 - 2u_3$.
- (3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 4u_4 - u_2$, $u_2 = 4u_4 - u_1$.
- (4) א. $k = -4$.
- (5) $a = 5t + 3s$, $b = 4t - 13s$, $c = 7s$, $d = 7t$.
- (6) $v = 2u_1 + u_2 + u_3$, אינסוף.
- (7) $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$, אינסוף.
- (8) א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$.
- ב. $A = B + 2C$, $B = A - 2C$, $C = 0.5A - 0.5B$, $D = 0.25A + 0.25B$.
- (9) א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$.
- ב. $p_1 = p_2 + 2p_3$, $p_2 = p_1 - 2p_3$, $p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2$, $p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2$.
- (10) לכל ערך של a, b, c .
- (11) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z$, $y = 0.5x + 0.5z$, $z = 2y - x$.
- (12) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z$, $y = 0.5x + 0.5z$, $z = 2y - x$.
- (13) בלתי תלויים ליניארית.
- (14) תלויים.
- (15) בלתי תלויים ליניארית.
- (16) הוכחה.
- (17) הוכחה.
- (18) א. כן. ב. לא.

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

(1) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

א. $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$

ב. $\{(1, 1, 2), (1, 2, 3), (3, 3, 4), (2, 2, 1)\}$

ג. $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$

(2) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2 \times 2}[R]$:

א. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

ב. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$

ג. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(3) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

א. $\{1+x, x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x, x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2, 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

(4) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (2, 3, 4)\}$

א. האם T בסיס ל- R^3 ?

ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים,

בלתי תלויה ליניארית ב- T .

ג. השלם את T' לבסיס של R^3 .

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

(5) לפי 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \quad .3 \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad .2 \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad .1$$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.מצא בסיס וממד ל- U, W ו- V .

$$(6) \text{ נתון } U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid a = c, b = d\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .

$$(7) \text{ נתון } U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .

$$(8) \text{ נתון } U = \{v \in R^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .

$$(9) \text{ נתון } U = \{A \in M_{2 \times 2}[R] \mid A = A^T\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .

$$(10) \text{ נתון } U = \left\{ A \in M_{2 \times 2}[R] \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .

$$(11) \text{ נתון } U = \{p(x) \in P_3[R] \mid p(1) = 0\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב**12** לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{span}\{(1, 1, -1, 2), (3, -1, 7, 4), (-5, 3, -15, -6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1, -1, 1, 1), (1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, -3), (5, 1, 5, 8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U .ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V .**13** לפניכם תת-מרחב של המרחב $M_{2 \times 2}[R]$:

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .**14** לפניכם תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = \text{span}\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .**מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה**

בשאלות 15-16 מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציין את דרגת המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. לא. ב. לא. ג. כן.
- (3) א. לא. ב. לא. ג. כן.
- (4) א. לא. ב. $T' = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$. ג. $T' = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (0, 0, 1)\}$.
- (5) א. W - בסיס: $\{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}$, ממד: 2.
- U - בסיס: $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$, ממד: 2.
- V - בסיס: $\{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$, ממד: 3.
- (6) בסיס: $\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$, ממד: 2.
- (7) בסיס: $\{(-1, 1, 0, 1), (2, -1, 1, 0)\}$, ממד: 2.
- (8) בסיס: $\{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$, ממד: 3.
- (9) בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 3.
- (10) בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 0.
- (11) בסיס: $\{p_1(x) = -1 + x^3, p_2(x) = -1 + x^2, p_3(x) = -1 + x\}$, ממד: 3.
- (12) א. בסיס: $\{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2)\}$, ממד: 2.
- ב. בסיס: $\{(1, -1, 1, 1), (0, -1, 1, -2), (0, 0, -2, 5)\}$, ממד: 3.
- (13) בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 2.
- (14) בסיס: $\{1 + x - x^2 + 2x^3, -3x + 3x^2 - 7x^3\}$, ממד: 2.
- (15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4, 1, 1, 5), (0, 11, -5, 3)\}$, ממד: 2.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.
- (16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1, 2, 1, 3, 5), (0, 11, -5, -4), (0, 0, 0, 1, 1)\}$, ממד: 3.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 37 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.

חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים

שאלות

1) לפניך 3 מערכות של משוואות לינאריות הומוגניות :

$$1) \begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$$

נסמן ב- V, U, W את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 1, 2 ו-3 בהתאמה.

א. מצא בסיס וממד ל- U, W ו- V .

ב. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.

ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

2) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{sp}\{(1, 1, -1, 2), (3, -1, 7, 4), (-5, 3, -15, -6)\}$$

$$V = \text{sp}\{(1, -1, 1, 1), (1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, -3), (5, 1, 5, 8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U .

ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V .

ג. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.

ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$ (פתור בשתי דרכים שונות).

ה. האם $U+V = R^4$?

ו. האם $U \oplus V = R^4$?

3) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U = \text{sp}\{1+x-x^2+2x^3, 3-x+7x^2+4x^3, -5+3x-15x^2-6x^3\}$$

$$V = \text{sp}\{1-x+x^2+x^3, 1+2x^2-x^3, 1+x+3x^2-3x^3, 5+x+5x^2+8x^3\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.

ב. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

4) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U = \text{sp}\{1+x+x^3, 1+2x+x^2+2x^3, -1+2x+3x^2+2x^3\}$$

$$V = \{p(x) \in P_3[R] \mid p(1) = p(-1) = 0\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.

ב. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

(5) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:
 $U = \text{sp}\{1+x, x+x^2, 1+x^3\}$
 $V = \{p(x) \in P_3[R] \mid p'(0) = 0\}$
 מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

(6) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $M_2[R]$
 $U = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y-5z & x-y+3z \\ -x+7y-15z & 2x+4y-6z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in R \right\}$
 $W = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\}$
 א. מצא בסיס וממד ל- U ול- W .
 ב. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
 ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cap W$.
 ד. אשר את משפט הממד עבור תרגיל זה.

(7) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_2[R]$:
 $U = \{A \in V \mid A = -A^T\}$, $W = \left\{ A \in V \mid A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$
 א. מצא בסיס וממד ל- U ול- W .
 ב. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
 ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cap W$.
 ד. האם $U+W = V$?
 ה. האם $U \oplus W = V$?

(8) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_3[R]$:
 $U = \{A \in V \mid A = A^T\}$, $W = \{A \in V \mid A \text{ משולשית עליונה}\}$
 א. מצא בסיס וממד ל- U .
 ב. מצא בסיס וממד ל- W .
 ג. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
 ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap W$.
 ה. $U \oplus W = V$.

(9) יהיו U ו- W שני תת-מרחבים מממד 2 של R^3 .
 הוכח כי $\dim(U \cap W) \neq 0$.

(10) יהי V מרחב וקטורי מממד 10.

יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V מממד 9.

א. הוכח כי $U + W = V$.

ב. חשב $\dim(U \cap W)$.

(11) יהי V מרחב וקטורי מממד 10.

יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V מממד 7.

מצא את המימדים האפשריים של $U \cap W$ ו- $U + W$.

(12) יהי V מרחב וקטורי מממד 7.

יהיו U ו- W שני תת-מרחבים של V , כך ש- $\dim U = 4$, $\dim W = 5$, $(U \not\subseteq W)$.

מצא את המימדים האפשריים של $U \cap W$ ו- $U + W$.

(13) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . $\phi \neq A, B \subseteq V$.

נגדיר: $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

הוכח או הפרך:

א. $sp(A + B) = sp(A) \cup sp(B)$.

ב. $sp(A \cup B) = sp(A) \cup sp(B)$.

ג. $sp(A \cup B) = sp(A) + sp(B)$.

ד. $sp(A + B) = sp(A) + sp(B)$.

ה. $sp(A \cap B) = sp(A) \cap sp(B)$.

(14) יהיו U ו- W תת-מרחבים של R^3 , המוגדרים על ידי:

$$U = \{(a, b, c) \mid a = b = c\}, \quad W = \{(0, b, c)\}$$

הוכח כי $U \oplus W = R^3$.

(15) יהי $V = M_n[R]$.

א. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות הסימטריות.

יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות האנטי-סימטריות.

הוכח כי $U \oplus W = V$.

ב. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות העליונות.

יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות התחתונות.

הוכח כי $U \oplus W \neq V$.

תשובות סופיות

$$B_W = \{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}, \quad \dim W = 2 \quad \text{א. (1)}$$

$$B_U = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}, \quad \dim U = 2$$

$$B_V = \{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}, \quad \dim V = 3$$

$$B_{U+V} = \{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}, \quad \dim(U+V) = 3 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap V} = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}, \quad \dim(U \cap V) = 2 \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 0 \\ -3x - y + 2t = 0 \end{cases}, B_U = \{(1, 1, -1, 2), (0, 2, -5, 1)\}, \quad \dim U = 2 \quad \text{א. (2)}$$

$$-8x - y + 5z + 2t = 0, B_V = \{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 1, -2), (0, 0, 2, -5)\}, \quad \dim V = 3 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U+V} = \{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}, \quad \dim(U+V) = 4 \quad \text{ג.}$$

$$B_{U \cap V} = \{(5, 1, 5, 8)\}, \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad \text{ד. ה. כו. ז. לא.}$$

$$U+V = sp\{1+x-x^2+2x^3, 2x-5x^2+x^3, x^2, x^3\}, \quad \dim(U+V) = 4 \quad \text{א. (3)}$$

$$B_{U \cap V} = \{5+x+5x^2+8x^3\}, \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U+V} = \{1+x+x^3, x+x^2+x^3, x^2+2x^3\}, \quad \dim(U+V) = 3 \quad \text{א. (4)}$$

$$B_{U \cap V} = \{-1+x^2\}, \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap V} = \{-1+x^2, 1+x^3\}, \quad \dim(U \cap V) = 2 \quad \text{א. (5)}$$

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U) = 2 \quad \text{א. (6)}$$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 15 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(W) = 3$$

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U+W) = 4 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U \cap W) = 1 \quad \text{ג.}$$

ד. ראו בווידאו.

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \dim U = 1, \quad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \dim W = 2. \quad \text{א. (7)}$$

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U+W) = 3. \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U \cap W) = 0. \quad \text{ג.}$$

ד. לא. ה. לא.

א. (8)

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim U = 6$$

ב.

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim W = 6$$

ג.

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(U+W) = 9$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U \cap W) = 3. \quad \text{ד.}$$

ה. לא.

הוכחה. (9)

א. הוכחה. (10) ב. 8

$$\dim(U+W) = 8, 9 \text{ or } 10, \dim(U \cap W) = 4, 5, 6 \text{ or } 7 \quad \text{(11)}$$

$$\dim(U \cap W) = 2, 3 \text{ or } 4, \dim(U+W) = 6 \text{ or } 7 \quad \text{(12)}$$

הוכחה. (13)

הוכחה. (14)

הוכחה. (15)

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

(1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .

סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .

סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .

סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 .

סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_2}^{B_1}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

$$1. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

$$2. [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$3. [M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1} \right)^{-1}$$

(2) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1 = \{1+x, x, x+x^2\}, \quad B_2 = \{1+x^2, x+x^2, x^2\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .

סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .

סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .

סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3) \quad \text{נתונים שני בסיסים של } M_2[R]:$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B .

סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E .

סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E .

סמן מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

(4) יהי V מרחב וקטורי ויהי B בסיס של V .

הוכח כי הווקטורים $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ בת"ל,

אם ורק אם וקטורי הקואורדינטות שלהם,

לפי הבסיס B , $\{[u_1], [u_2], \dots, [u_m]\}$, הם בת"ל.

הסבר כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (x, y - x - z, z) \quad \text{ב. } (x, y, z - x - y) \quad \text{ג. } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ד. } [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ה. הוכחה.}$$

$$(2) \quad \text{א. } (a, b - a - c, c) \quad \text{ב. } (a, b, c - a - b) \quad \text{ג. } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א. } (x, y - x, z - y + x, t - z + y - x) \quad \text{ב. } (x, y, z, t) \quad \text{ג. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) שאלת הוכחה.

תרגילי תיאוריה מתקדמים

שאלות הוכחה

- (1) יהי V מרחב, ותהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה; $b \in V$.
הוכיחו כי: $b \in sp(A) \Leftrightarrow sp(A \cup \{b\}) = sp(A)$.
- (2) יהיו u, v, w וקטורים, כך ש- $\{u, v\}$ בלתי-תלויה ליניארית ו- $u \in sp(\{v, w\})$.
א. הוכיחו ש- $w \in sp(\{u, v\})$.
ב. נתון גם כי עבור וקטור נוסף z , הקבוצה $\{u, w, z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו שגם הקבוצה $\{u, v, z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.
- (3) יהי U מרחב, תהי $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq U$ ויהי $u \in U$ וקטור כלשהו.
הוכח כי אם $u \in sp(A)$, וכן $u \notin sp(A - \{u_n\})$, אז $u_n \in sp(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u)$.
- (4) יהי V מרחב, $b \in V$ ו- $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו כי $A \cup \{b\} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, b\}$ בת"ל $\Leftrightarrow b \in sp(A)$.
- (5) יהי V מרחב n מימדי, תהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ ויהי $b \in sp(A)$.
למשוואה $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = b$ אין פתרון יחיד.
הוכח או הפרך:
א. $k \geq n$.
ב. A פורשת את V .
ג. A בהכרח תלויה ליניארית.
- (6) יהי V מרחב, $b \in V$ ו- $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכח או הפרך:
א. אם $b \notin sp(A)$, אז הקבוצה $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$ היא בת"ל.
ב. אם $b \in sp(A)$, אז הקבוצה $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$ היא בת"ל.
ג. אם $b \in sp(A)$, אז הקבוצה $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$ היא ת"ל.

- (7) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v_1, v_2, v_3 \in V$. נסמן: $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, $T = \{av_1 + v_2 + v_3, v_1 + av_2 + v_3, v_1 + v_2, av_3\}$. הוכח או הפרך:
- $spS \subseteq spT$.
 - אם S בלתי תלויה ליניארית ואם $a \neq -2, 1$, אז $sp(T) = sp(S)$.
 - $\dim(spT) \leq 2$.
 - $\dim(sp(T)) = \dim(sp(S))$.

- (8) יהי V מרחב ותהיינה $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ קבוצות וקטורים ב- V . הוכח או הפרך:
- $sp(A \cup B) = sp(A) + sp(B)$.
 - אם $A \cup B$ בת"ל, אז A, B שתיהן בת"ל.
 - אם $\dim V = m + k$ וגם A, B שתיהן בת"ל, אז $A \cup B$ בת"ל.
 - אם $A \cup B$ בת"ל, אז $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$.

- (9) יהי V מרחב ויהיו $U, W \subseteq V$ תמר"ים. תהיינה $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq U$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ שתי קבוצות בת"ל. הוכח כי אם $U \cap W = \{0\}$, אז $A \cup B$ בת"ל.

- (10) יהי V מרחב ויהיו U, W תמר"ים שלו. הוכח כי $U \cup W$ מרחב $\Leftrightarrow U \subseteq W$ או $W \subseteq U$.

לפתרונות המלאים בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

שאלות אמריקאיות

11) תהינה A, B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$.
אז בהכרח מתקיים:

- א. מרחב השורות של A^2 מוכל במרחב השורות של A .
- ב. אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
- ג. אם $AB = 0$, אז בהכרח $B = 0$ או $A = 0$.
- ד. אף תשובה אינה נכונה.

$$(12) \text{ נסמן } W = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}, U = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}$$

שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$.
אזי בהכרח מתקיים:

- א. $U = W$
- ב. $\dim U = \dim W$
- ג. $U \subseteq W$
- ד. אם $U + W = \mathbb{R}^3$, אז $U \cap W = \{0\}$.
- ה. אף תשובה אינה נכונה.

13) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים

ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x] = Sp(A)$.
אזי בהכרח מתקיים:

- א. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.
- ב. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.
- ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
- ד. A תלויה ליניארית.
- ה. אף תשובה אינה נכונה.

14) במרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ מעל שדה $\mathbb{R}$,

תהי $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ- $\mathbb{R}^2$.

אז מטריצה P המקיימת $[v]_A = Pv$ לכל $v \in \mathbb{R}^2$, שווה ל:

א. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ג. $P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ד. $P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

15) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , ותהיינה A, B קבוצות שונות לא ריקות

וזרות של וקטורים מ- V . אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$.

ב. אם $A \cup B$ תלויה לינארית,

אז בהכרח A תלויה לינארית או B תלויה לינארית.

ג. אם A, B בלתי תלויות לינאריות, אז בהכרח $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$, אז בהכרח $A \cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

16) אם W תת מרחב של מרחב וקטורי V , אז:

א. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W , וכל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V .

ב. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W , אבל לא כל בסיס של W מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של V .

ג. לא כל בסיס של V מכיל בהכרח בסיס כלשהו של W , אבל כל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V .

ד. אף תשובה אינה נכונה.

17) יהיו U, W שני תתי-מרחבים של מרחב V ,

כך ש- $\dim V = n$, $\dim U = \dim W = n - 1$.

אז:

א. $n - 2 \leq \dim(U \cap W)$

ב. אם $U \neq W$, ייתכן ש- $U \subset W$.

ג. קיים $v \in V$, כך ש- $V = U + \text{sp}\{v\}$ ו- $U \cap \text{sp}\{v\} = \{0\}$.

ד. אם $U + \text{sp}\{v\} = V$ ו- $U \cap \text{sp}\{v\} = \{0\}$, אז $v \in W$.

18) נניח כי v_1, v_2, v_3, v_4 הם וקטורים במרחב ליניארי V .

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $\text{Span}\{v_1, v_2\} \cap \text{Span}\{v_3, v_4\}$ והווקטורים v_1, v_2, v_3, v_4 שונים זה מזה,

אז הווקטורים $v_1 - v_2$ ו- $v_3 - v_4$ הם בת"ל.

ב. אם v_1, v_2 בת"ל וגם v_3, v_4 בת"ל, וכן $\text{Span}\{v_1, v_2\} \cap \text{Span}\{v_3, v_4\} = \{0\}$,

אז v_1, v_2, v_3, v_4 הם בת"ל.

19) אם V, W תת מרחבים של מרחב וקטורי U , ומתקיים:

$$\dim U = 6, \dim V = 5, \dim W = 3$$

אז $\dim(V \cap W)$ יכול להיות:

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

ה. 4

ו. 5

20) V, W תת-מרחבים ממימד 3 של $\mathbb{R}^7$, $\{w_1, w_2, w_3\}$ בסיס של W ו- $\{v_1, v_2, v_3\}$

בסיס של V , אז:

א. $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$ בלתי תלויה לינארית.

ב. $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$ פורשת את $V + W$.

ג. $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$ בת"ל.

ד. $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$ פורשת את $V + W$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

21 אם A מטריצה לא ריבועית, אז בהכרח:

- מרחב השורות של A^t שווה למרחב השורות של A .
- מרחב השורות של A^t שונה ממרחב השורות של A .
- ממד מרחב השורות של A^t שווה לממד מרחב השורות של A .
- ממד מרחב השורות של A^t שונה מממד מרחב השורות של A .
- אף תשובה אינה נכונה.

22 תהינה A, B מטריצות ריבועיות ממסיות מסדר $n \geq 2$.

אזי בהכרח מתקיים:

- מרחב השורות של AB מוכל במרחב השורות של A .
- אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.
- אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
- אם $AB=2I_n$, אז בהכרח $BA=2I_n$.
- אף תשובה אינה נכונה.

23 תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים

ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x] = Sp(A)$.

אזי בהכרח מתקיים:

- ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.
- ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.
- שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
- A בלתי תלויה לינארית.
- אף תשובה אינה נכונה.

$$(24) \text{ יהי } a \text{ מספר ממשי ויהיו } U = Sp\left\{\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\right\}, W = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

שני תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^4$. בהכרח מתקיים:

- $U \cap W = \{0\}$ לכל ערכי a .
- $U \cap W \neq \{0\}$ לכל ערכי a .
- $\dim(U \cap W) = 3$ לכל ערכי $a \neq \pm 1$.
- $\dim(U \cap W) = 1$ לכל ערכי $a \neq \pm 1$.
- אף תשובה אינה נכונה.

$$(25) \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

אז בהכרח מתקיים :

א. $\text{rank}(T) = 1, \text{rank}(R) = 2$

ב. $\text{rank}(R^3 T^5) = 1$

ג. מרחב השורות של $R^3 T^5$ שווה למרחב השורות של T^5 .

ד. $T^{100} = 0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(26) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , ותהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ קבוצה של וקטורים

מ- V ($1 \leq n$). נניח בנוסף ש- $\dim(V) = n$. אזי בהכרח מתקיים :

א. אם A בלתי תלויה לינארית, אז A פורשת את V .

ב. אם A קבוצה פורשת ל- V , אז A בלתי תלויה לינארית.

ג. ייתכנו מקרים בהם A פורשת את V , אך A תלויה לינארית.

ד. ייתכנו מקרים בהם A בלתי תלויה לינארית, אך A אינה פורשת את V .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(27) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , ותהיינה A, B קבוצות שונות לא ריקות של

וקטורים מ- V . אז בהכרח מתקיים :

א. אם $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$.

ב. אם A, B תלויות לינאריות, אז בהכרח $A \cap B$ תלויה לינארית.

ג. אם A, B בלתי תלויות לינאריות, אז בהכרח $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$, אז בהכרח $A \cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(28) וקטור הקואורדינטות של הפולינום $2x^3 + 12x^2 - x + 11$,

ביחס לבסיס $\{2x^3 + 3x^2 + 2, x + 1, x^3 + x^2, 2x^2 + 2\}$, הוא :

א. $(2, 2, -2, 4)$

ב. $(4, -2, -1, 2)$

ג. $(2, -1, -2, 4)$

ד. $(4, -1, 2, 2)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(29) תהי A מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:

- א. אם שורות A בת"ל, אזי עמודות A בת"ל.
- ב. אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה ריבועית.
- ג. אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה הפיכה.
- ד. אם שורות A בת"ל, אזי בהכרח למערכת $Ax = 0$ יש פתרון יחיד.
- ה. אף תשובה אינה נכונה.

(30) נתונים תת-מרחבים של $\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$:

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b + c = d\}$$

$$W = \text{sp}\{(1, 0, 1, 1), (0, 2, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\}$$

- א. מצאו בסיס וממד עבור $U, W, U \cap W$.
- ב. עבור תת מרחבים K, L של מרחב וקטורי V , הגדירו את $K + L$.

(31) A מטריצה לא ריבועית, כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית $Ax = 0$ פתרון יחיד, אז:

- א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax = b$ ללא פתרון.
- א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax = b$ עם יותר מפתרון אחד.
- ב. יש מערכת לא הומוגנית $A^t y = c$ ללא פתרון.
- ג. יש מערכת לא הומוגנית $A^t y = c$ עם יותר מפתרון אחד.
- ד. אף תשובה אינה נכונה.

(32) תהי A מטריצה ממשית לא ריבועית מסדר $m \times n$. אזי בהכרח מתקיים:

- א. אם למערכת $Ax = b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$, אז בהכרח $m < n$.
- ב. ייתכן ש- $A^t A = I_m$ וגם $AA^t = I_n$.
- ג. אם $\text{rank}(A) = m$, אז למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ יש אינסוף פתרונות.
- ד. אם למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m < n$.
- ה. אף תשובה אינה נכונה.

(33) נתונות מטריצות ממשיות A מסדר 2×4 ו- B מסדר 4×4 ,

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{rank}(B) = 3$$

כך ש- $AB \neq 0$. הוכיחו כי

- (34) תהי A מטריצה ממשית מגודל $m \times n$, כאשר $m < n$.
 נסמן ב- A^T את המטריצה המוחלפת. בהכרח ש:
 א. מימד מרחב הפתרונות של המערכת $AX = 0$ הוא $n - m$.
 ב. למערכת $(A^T A)x = 0$ יש אינסוף פתרונות.
 ג. ייתכן מצב בו למערכת $(A^T A)x = 0$ יש פתרון יחיד.
 ד. ייתכן מצב בו למערכת $(AA^T)x = 0$ יש פתרון יחיד.
 ה. אף תשובה אינה נכונה.

- (35) A מטריצה 3×3 , כך ש- $A^2 = 0$ אבל $A \neq 0$, אז הדרגה של A יכולה להיות:
 א. 0
 ב. 1
 ג. 2
 ד. 3
 ה. אף תשובה אינה נכונה.

- (36) תהיינה A מטריצה מסדר 3×5 ו- B מטריצה 5×3 אז:
 א. AB הפיכה אם ורק אם BA הפיכה.
 ב. AB בהכרח לא הפיכה.
 ג. BA בהכרח הפיכה.
 ד. אם $AB = 0$, אז $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq 5$.

- (37) אם A מטריצה, כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד, אז בהכרח:
 א. A הפיכה.
 ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^t פתרון יחיד.
 ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.
 ד. מרחב העמודות של A שונה ממרחב הפתרונות של A .

- (38) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m \times n$, אזי בהכרח מתקיים:
 א. עבור $m = n$, אם למערכת $Ax = b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$, אז בהכרח למערכת $A^t x = b$, יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$.
 ב. אם למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m < n$.
 ג. ייתכן ש- $A^t A = I_n$ וגם $AA^t = I_m$.
 ד. אף תשובה אינה נכונה.

$$(39) \text{ נתון כי } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \text{ הפיכה.}$$

אז בהכרח:

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

א. למערכת $\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23}$ פתרון יחיד.

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

ב. למערכת $\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1$ אינסוף פתרונות.

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

ג. למערכת $\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1$ אין פתרון.

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

ד. אף תשובה אינה נכונה.

תשובות סופיות

(11) א	(12) ב	(13) א	(14) ד
(15) א+ד	(16) ג	(17) א+ג	(18) הוכחה.
(19) ד+ג	(20) ב	(21) ב+ג	(22) ד
(23) ה	(24) ב+ד	(25) ב+ג	(26) א+ב
(27) א	(28) ג	(29) ג	
$B_U = \{(-1, 1, 00), (-1, 010), (1, 001)\}$			
$B_W = \{(100-1), (010-1), (0012)\}$			
(30)			
$U \cap W = sp\{(1, 0, 2, 3), (0, 1, 2, 3)\}$			
$\dim U = 3, \quad \dim W = 3, \quad \dim(U \cap W) = 2$			
(31) ד	(32) א+ב+ג	(33) הוכחה.	
(34) ד+ב	(35) ב	(36) ד	
(37) ד	(38) א+ג	(39) ב	

אלגברה ליניארית א

פרק 5 - שדות

תוכן העניינים

- 1. חזרה על מושגים מתורת הקבוצות.....75
- 2. שדות.....79

חזרה על מושגים מתורת הקבוצות

שאלות

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון איהשוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האיזוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו :

א. $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב. $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד. $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה. $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה :

א. $5 \in A$ ב. $2 \in A$ ג. $\{2\} \in A$

ד. $\{2\} \subseteq A$ ה. $\{\{2\}\} \subseteq A$ ו. $\emptyset \in A$

ז. $\emptyset \subseteq A$ ח. $\{2, \{2\}\} \subseteq A$ ט. $\{2, 4\} \subseteq A$

י. $\{2, 4\} \in A$ יא. $\{\{2, 4\}\} \in A$ יב. $\{2, 5\} \subseteq A$

יג. $\{2, 5\} \in A$ יד. $\{1, 4\} \in A$

(7) מצא שתי קבוצות, A ו- B , המקיימות :

א. $A \in B$

ב. $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות :

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$, $C = \{3, 5, 7, 9\}$, $D = \{6, 7, 8\}$, $E = \{7, 8\}$

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X \subseteq A$ וגם $X \not\subseteq D$

ב. $X \subseteq D$ וגם $X \not\subseteq C$

ג. $X \subseteq E$ וגם $X \not\subseteq A$

(9) הוכח : $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

10 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשום את :

א. $A \cup B$

ב. $A \cap B$

ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

תשובות סופיות

- (1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ב. לכל x קיים y , כך ש- $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz = \frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.
 ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.
 ה. לכל n טבעי המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$. ב. $\forall x: x^2 + 4 > 0$.
 ג. $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$. ד. $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.
- (3) א. $A = (-4, 4)$, בקבוצה אינסוף איברים.
 ב. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, בקבוצה 7 איברים.
 ג. $C = \{1, 2, 3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D = \{-3, -2, -1, 0\}$, בקבוצה 4 איברים.
 ה. $E = \{0, 1\}$, בקבוצה 2 איברים.
 ו. $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, בקבוצה 9 איברים.
- (4) א. $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$. ב. $B = \{11, 13, 17, 19\}$.
 ג. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. ד. $D = \{1, 4, 9, 16\}$.
- (5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7) $A = \{1, 2\}$ $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א. A, C . ב. E, D . ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) הוכחה.
- (10) $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{4, 6, 8\}$, $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$, $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$, $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$

שדות

שאלות

- 1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור ($\oplus$) וכפל ($\otimes$) על R . בדוק, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א.
$$\begin{aligned}x \oplus y &= x + y + 4 \\x \otimes y &= 2xy\end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned}x \oplus y &= x + y \\x \otimes y &= 2xy\end{aligned}$$

ג.
$$\begin{aligned}x \oplus y &= y \\x \otimes y &= y^2\end{aligned}$$

- 2) נתונה הקבוצה $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$. על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:
- $$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$
- $$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$
- הוכח שהקבוצה $Q[\sqrt{2}]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

- 3) נתונה הקבוצה $C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:
- $$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$
- הוכח שהקבוצה C , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה. באיזה שדה מפורסם מדובר?

- 4) ענה על הסעיפים הבאים:
- א. הוכח שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
- ב. הוכח שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
- ג. הוכח שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
- ד. הוכח שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

(5) יהיו a, b איברים בשדה.

א. הוכח כי $a = 0 \Leftrightarrow a + a = a$.

ב. הוכח כי $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

ג. הוכח כי $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

(6) יהיו a ו- b איברים של שדה.

הוכח כי:

א. $(-1) \cdot a = -a$

ב. $(-a)b = a(-b) = -ab$

(7) הוכח שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.

כלומר, הוכח כי $a = c \Rightarrow ab = cb$, לכל a, b, c , בשדה ($b \neq 0$).

(8) הוכח שלכל שלושה איברים בשדה $a, b, c, 0 \neq$,

קיים בשדה איבר יחיד x , כך ש- $ax + b = c$.

(9) נתון F שדה, ויהיו $x, y \in F$, כך ש- $xy \neq 0, 1$.

הוכיחו, בעזרת אקסיומות השדה, כי $(x - xyx)^{-1} = x^{-1} + (y^{-1} - x)^{-1}$, וכי שני האגפים של המשוואה לעיל מוגדרים היטב.

(10) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור וכפל על R^2 .

א. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$

ב. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$

האם $(R^2, +, \cdot)$ שדה?

(11) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הקבוצה $A = \{f : R \rightarrow R \mid \forall x, f(x) \neq 0\}$.

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

האם הקבוצה A , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

ב. נתונה הקבוצה $B = \{f : R \rightarrow R\}$.

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור וכפל כמו בסעיף א'.

האם הקבוצה B , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

(12) יהי F שדה בעל מספר סופי של איברים.

הראו שלכל איבר $a \neq 0$ ב- F , קיים k טבעי, כך ש- $a^k = 1_F$.

(13) נתון השדה Z_7 .

א. רשום את כל איברי השדה והגדר את פעולות החיבור והכפל בשדה.

ב. מצא את האיבר הנגדי לאיבר 3 ולאיבר 5 בשדה.

ג. מצא את האיבר ההופכי לאיבר 4 ולאיבר 5 בשדה.

(14) נתונה הקבוצה $Z_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$, p מספר ראשוני.

כאשר $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{p}$, ו- $\bar{a} = \{x \in Z \mid a \equiv x \pmod{p}\}$.

לכל $\bar{a}, \bar{b}$ בקבוצה, מגדירים פעולות חיבור וכפל באופן הבא:

$$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b}, \quad \bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

הוכח ש- $(Z_p, \oplus, \otimes)$ מהווה שדה.

בקיזור, הוכח כי קבוצת השאריות מודולו p , כאשר p ראשוני, מהווה שדה.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.

(11) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) א. שאלת הוכחה.

ב. האיבר הנגדי לאיבר $\bar{3}$ הוא $\bar{4}$, והאיבר הנגדי לאיבר $\bar{5}$ הוא $\bar{2}$.

ג. האיבר ההופכי לאיבר $\bar{4}$ הוא $\bar{2}$, והאיבר ההופכי לאיבר $\bar{5}$ הוא $\bar{3}$.

(14) שאלת הוכחה.

אלגברה ליניארית א

פרק 6 - שדות - שדה השאריות מודולו p

תוכן העניינים

- 1. שששש..... 82
- 2. שדה השאריות מודולו p..... 83

לנושא זה לא קיים ספר פרק

שדות – שדה השאריות מודולו p

$$(1) \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת המשוואות}$$

- א. פתור את המערכת מעל שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$.
 ב. פתור את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_7$.
 ג. פתור את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_5$.
 ד. פתור את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_3$.

$$(2) \quad \text{פתור את המערכת} \quad \begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$(3) \quad \text{פתור את המערכת} \quad \begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$(4) \quad \text{פתור את המערכת} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_5$$

$$(5) \quad \text{פתור את המערכת} \quad \begin{cases} x + 4y + 2z + 4t = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ y + z + t = 1 \\ x + 3y - z - 2t = 0 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(6) \quad \text{נתונה מערכת המשוואות} \quad \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

- מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k , למערכת:
 א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

$$(7) \quad \text{נתונה מערכת המשוואות} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \\ 3x - y + (k + 3)z = 3 \end{cases} \text{ מעל } \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k , למערכת:
א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

$$(8) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ מעל } \mathbb{Z}_5.$$

חשב את A^{-1} .

$$(9) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \text{ מעל } \mathbb{Z}_3.$$

חשב את A^{-1} .

$$(10) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix} \text{ מעל } \mathbb{Z}_5.$$

מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k , המטריצה הפיכה.

$$(11) \quad \text{נתונה הקבוצה הבאה מעל } \mathbb{Z}_7:$$

$$\{(k, 1, 1, 1, 1), (1, k, 1, 1, 1), (1, 1, k, 1, 1), (1, 1, 1, k, 1), (1, 1, 1, 1, k)\}$$

מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k , הקבוצה תלויה ליניארית,
ועבור אילו ערכים של הפרמטר k , הקבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

$$(12) \quad \text{במרחב } (Z_5)^4, \text{ מעל השדה } Z_5, \text{ נגדיר שני תתי-מרחבים, } U \text{ ו- } W:$$

$$U = \{(x, y, z, t) \mid 3x + 4y + z + t = 0, 2x + y + 2t = 0\}$$

$$W = \text{sp}\{(2, 3, 0, 4), (1, 1, 4, 1)\}$$

מצא בסיס לתתי המרחבים $U \cap W$, $U + W$, U , W .
מה מספר האיברים בכל מרחב?

13 הציגו דוגמה של העתקה ליניארית $T : M_2[\mathbb{Z}_5] \rightarrow M_2[\mathbb{Z}_5]$, המקיימת את התנאים הבאים:

1. $\{0\} \neq \text{Ker}(T) \subset \text{Im}(T)$

2. $\text{Ker}(T) \neq \text{Im}(T)$

3. $T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

מספיק להגדיר את ההעתקה על הווקטורים של בסיס שתבחרו.

14 נתונה העתקה ליניארית $T : P_2[\mathbb{Z}_5] \rightarrow P_3[\mathbb{Z}_5]$

המוגדרת על ידי $T(p(x)) = (x+3)p(x) + p(0)(x^3+2)$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה T ,

מהבסיס $E_1 = \{\bar{1}, x, x^2\}$ לבסיס $E_2 = \{\bar{1}, x, x^2, x^3\}$.

ב. מצאו בסיס ומימד ל- $\text{Im}(T)$.

כמה איברים יש ב- $\text{Im}(T)$?

ג. מצאו בסיס ומימד ל- $\text{Ker}(T)$.

כמה איברים יש ב- $\text{Ker}(T)$?

תשובות סופיות

$$(1, 2) \quad \text{ד.} \quad (2, 1), (4, 0), (0, 2), (3, 3) \quad \text{ג.} \quad (1, 6) \quad \text{ב.} \quad (1, -1) \quad \text{א.} \quad (1) \quad (2)$$

$$(0, 3, 0) \quad (3)$$

$$(1, 2, 1) \quad (4)$$

$$(0, 3, 0) \quad (5)$$

$$(1, -3, 2, 2) \quad (6)$$

$$k=1, k=0, k=2 \quad \text{פתרון יחיד : } 9 \text{ פתרונות : } k=1.$$

אין אופציה של אינסוף פתרונות ואין אופציה של אין פתרון.

$$k=1, k=0, k=2, k=4 \quad \text{פתרון יחיד : } 5 \text{ פתרונות : } k=3, \text{ אין פתרון : } k=1.$$

אין אופציה של אינסוף פתרונות.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$k=0, k=2, k=4 \quad (10)$$

$$k=1, k=3 \quad \text{עבור } k=1, k=3, \text{ הווקטורים תלויים ליניארית,}$$

ועבור $k=0, k=2, k=4, k=5, k=6$ הווקטורים בלתי-תלויים ליניארית.

$$B_U = \{(4, 0, 2, 1), (2, 1, 0, 0)\} \quad \text{מספר האיברים : } 25. \quad (12)$$

$$B_W = \{(1, 1, 4, 1), (0, 1, 2, 2)\} \quad \text{מספר האיברים : } 25.$$

$$B_{U+W} = \{(1, 1, 4, 1), (0, 1, 2, 2), (0, 0, 4, 0)\} \quad \text{מספר האיברים : } 125.$$

$$B_{U \cap W} = \{(2, 4, 2, 1)\} \quad \text{מספר האיברים : } 5.$$

(13) ההעתקה הבאה :

$$T \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$; 25, B_{\text{Im}T} = \{x + x^3, x^2 + 2x^3\}, \quad \dim \text{Im}T = 2 \quad \text{ב.} \quad [T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$; 5, B_{\text{Ker}T} = \{9 - 3x + x^2\}, \quad \dim \text{Ker}T = 1 \quad \text{ג.}$$

אלגברה ליניארית א

פרק 11 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

87	1. מרחבי מכפלה פנימית
89	2. הנורמה והמרחק
91	3. אי שוויון קושי שוורץ, יישומים
93	4. אורתוגונליות
95	5. משלים אורתוגונלי
97	6. קבוצה ובסיס אורתוגונלי
100	7. ההיטל של וקטור
101	8. תהליך גרהם שמידט
102	9. מטריצות אורתוגונליות
105	10. העתקות אורתוגונליות

מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

(1) לכל שני וקטורים $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 4x_2 y_2$$

בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

(2) לכל שני וקטורים $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + kx_2 y_2$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

(3) לכל שני וקטורים $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + kx_1 y_3 + x_2 y_2 + kx_3 y_1 + x_3 y_3$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

(4) לכל שני וקטורים $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ ב- $\mathbb{R}^n$,

נגדיר: $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n k_i u_i v_i$, כאשר $k_1, \dots, k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.

הראה כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.

מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i = 1$ לכל $1 \leq i \leq n$?

(5) לכל שתי מטריצות A, B ב- $M_{mn}[R]$, נגדיר: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$.

בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mn}[R]$.

tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

(6) לכל שתי פונקציות f, g ב- $C[a, b]$, נגדיר: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot g dx$.

בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$.

- (7) נתונה מכפלה פנימית על R^3 , שעבורה הקבוצה $B = \{(1,1,0), (1,1,0), (1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי. חשב את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$.

תשובות סופיות

- (1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
- (2) $k > 9$
- (3) $-1 < k < 1$
- (4) עבור $k_i = 1$ לכל $1 \leq i \leq n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
- (5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mn}[R]$.
- (6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$.
- (7) $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

הנורמה והמרחק

שאלות

1) נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$: $u = (1, -2, 2)$, $v = (3, -2, 6)$, $w = (5, 3, -2)$

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^3$, חשב:

א. $\langle u, v \rangle$	ב. $\langle u, w \rangle$	ג. $\langle v, w \rangle$	ד. $\langle u + v, w \rangle$
ה. $\ u\ $	ו. $\ v\ $	ז. $\ u + v\ $	ח. $d(u, v)$
ט. $\hat{u}$	י. $\hat{v}$		

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2 \times 3}[R]$:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2 \times 3}[R]$,

חשב:

א. $\langle A, B \rangle$	ב. $\langle A, C \rangle$	ג. $\langle A, B + C \rangle$
ד. $\langle B, C \rangle$	ה. $\langle 4A + 10B, 11C \rangle$	ו. $\ A\ $
ז. $\ B\ $	ח. $d(A, B)$	ט. $\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0, 1]$:

$$p(x) = x + 3, q(x) = 3x + 1, r(x) = x^2 - 4x - 1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$

חשב:

א. $\langle p, q \rangle$	ב. $\langle p, r \rangle$	ג. $\langle p, q + r \rangle$
ד. $\ p\ $	ה. $d(p, q)$	ו. $\hat{r}$

$$(4) \text{ הוכח: } \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

$$(5) \text{ הוכח: } \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

$$(6) \text{ הוכח: } \langle u-v, u+v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2.$$

$$(7) \text{ הוכח: } \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

$$(8) \text{ הוכח: } \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = \langle u, v \rangle.$$

תשובות סופיות

- (1) א. 19 ב. -5 ג. -3 ד. -8
 ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
 ט. $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$
- (2) א. 185 ב. -12 ג. 173 ד. -24 ה. -3168
 ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח. $\sqrt{124}$ ט. $\frac{1}{\sqrt{355}} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
- (3) א. 9 ב. -9.5833 ג. -0.5833 ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$
- ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2 - 4x - 1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$
- (4) שאלת הוכחה.
 (5) שאלת הוכחה.
 (6) שאלת הוכחה.
 (7) שאלת הוכחה.
 (8) שאלת הוכחה.

אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

שאלות

(1) הוכח כי אם u, v תלויים לינארית, אז $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.

(2) יהיו $x_1, x_2, \dots, x_n$ ו- $y_1, y_2, \dots, y_n$ מספרים ממשיים. הוכח כי $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$.

(3) יהיו f, g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a, b]$. הוכח כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)$.

(4) חשב את הזווית בין שני הווקטורים $u = (1, 2, 2)$, $v = (-2, 1, 2)$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

(5) חשב את הזווית בין שני הווקטורים $u = (3, 4)$, $v = (1, 2)$ ביחס למכפלה הפנימית $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$ ב- $\mathbb{R}^2$.

(6) מצא את $\cos \theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x) = 2x - 1$ ו- $q(x) = x^2$ בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$ שב- $C[0, 1]$.

(7) מצא את $\cos \theta$ עבור הזווית θ שבין $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$.

תשובות סופיות

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) $\theta = 63.61^\circ$ (5) $\theta = 9.44^\circ$ (6) $\cos \theta = 0.173^\circ$ (7) $\cos \theta = 0.00036^\circ$

אורתוגונליות

שאלות

1) הוכח כי הווקטורים $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 7, -6)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצא את ערכו של הקבוע k , עבורו הווקטורים $u = (1, k, 3)$, $v = (4, 7, -6)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

3) מצא וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 5, 7)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

4) הוכח כי הפולינומים $p(x) = 2x - 1$, $q(x) = 6x^2 - 6x + 1$ אורתוגונליים בקטע $[0, 1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$).

5) במרחב $P_n[\mathbb{R}]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n \geq 0$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{k=0}^n p(k)q(k) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \dots + p(n)q(n)$$

הראה כי הפולינומים:

$$p(x) = x(x-2)(x-4)(x-6), \quad q(x) = x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[\mathbb{R}]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות: $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$,

מצא את הערך של הקבוע k , עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכח כי: $\|u + v\| = \|u - v\| \Leftrightarrow u \perp v$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

8) הוכח כי: $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow u \perp v$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

9) הוכח כי : $(u - v) \perp (u + v) \Leftrightarrow \|u\| = \|v\|$
 מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

תשובות סופיות

1) הוכחה.

2) $k = 2$

3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) $k = 0.5$

7) הוכחה.

8) הוכחה.

9) הוכחה.

משלים אורתוגונלי

שאלות

(1) יהי $W = \text{span}\{(1, 2, -1, 1), (2, 5, 3, 1)\}$.

מצא בסיס וממד עבור $W^\perp$.
הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

(2) יהי $w = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$.

מצא בסיס וממד עבור $W^\perp$.
הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

(3) יהי $W = \text{span}\{x\} \subseteq P_2[R]$.

מצא בסיס וממד עבור $W^\perp$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0, 1]$.

(4) יהי $W = \text{span}\{x, x^2\} \subseteq P_2[R]$.

מצא בסיס וממד עבור $W^\perp$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0, 1]$.

(5) יהי $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_{2 \times 2}[R]$.

מצא בסיס וממד עבור $W^\perp$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$
ב- $M_{2 \times 2}[R]$.

(6) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

(7) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

(8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A \cdot \underline{x} = 0$.

יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תן פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה A .

(9) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V .

הוכח כי: $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$.

(10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V .

הוכח כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

(11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V .

הוכח כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם V מממד סופי).

(12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V .

הוכח כי: $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

(13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V .

הוכח כי: $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

תשובות סופיות

$$W^\perp = \text{span}\{(-3, 1, 0, 1), (11, -5, 1, 0)\} \quad (1)$$

$$W^\perp = \text{span}\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \quad (2)$$

$$W^\perp = \text{span}\left\{\left(-\frac{2}{3} + x\right), \left(-\frac{1}{2} + x^2\right)\right\} \quad (3)$$

$$W^\perp = \text{span}\{(1.5x^2 - 6x + 5)\} \quad (4)$$

$$W^\perp = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad (5)$$

$$B_W = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$B_{W^\perp} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad (7)$$

(8) הסבר בוודא.

(9) הוכחה.

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

קבוצה ובסיס אורתוגונלי

שאלות

1 נתונה קבוצת וקטורים $S = \{(2,1,-4), (1,2,1), (3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

- א. הראה שהקבוצה S אורתוגונלית.
 ב. נרמל את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
 ג. ללא חישוב, הוכח שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2 נתונה קבוצת וקטורים $S = \{(2,1,-4), (1,2,1), (3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
 ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשום את הווקטור $(13, -1, 7)$,
 כצירוף לינארי של איברי S .

3 נתונה קבוצת וקטורים $S = \{(2,1,-4), (1,2,1), (3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
 רשום את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v = (a, b, c)$ ב- $\mathbb{R}^3$,
 ביחס לבסיס S .

4 נניח ש- $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V .
 הוכח שלכל $v \in V$, אז $v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle} u_n$.
 הערה: הקבוע $a_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i ,
 או הרכיב של v ביחס ל- u_i .

5 נתונה קבוצת פונקציות $S = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}$ ב- $V = C[0, \pi]$.
 האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
 במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
 נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
 ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6 נתונה קבוצת פונקציות $S = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ ב- $V = C[0, 2\pi]$.
 האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
 ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
 האם הקבוצה מהווה בסיס?

(7) נתונה קבוצה $S = \{(2, 4, 4), (4, -1, -1), (0, 2, -2)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.

(8) נתונה קבוצה $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ ב- $P_3[R]$.

בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0, 1]$)

(9) נתונה קבוצה $S = \{1, 2x - 1, 6x^2 - 6x + 1\}$ ב- $P_2[R]$.

בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0, 1]$)

(10) נתונה הקבוצה $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_3[R]$

בדוק: האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
ענה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

תשובות סופיות

1 א. הוכחה. ב. $S = \left\{ \frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}}, \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}, \frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}} \right\}$ ג. הוכחה.

2 $(13, -1, 7) = \frac{-1}{7}(2, 1, 4) + 3(1, 2, 1) + \frac{24}{7}(3, -2, 1)$

3 $\frac{2a+b-4c}{21}(2, 1, 4) + \frac{a+2b+c}{6}(1, 2, 1) + \frac{3a-2b+c}{14}(3, -2, 1)$

4 הוכחה.

5 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S = \left\{ \frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}}, \dots \right\}$$

6 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

7 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה

אורתונורמלית, $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{36}}(2, 4, 4), \frac{1}{\sqrt{8}}(4, -1, -1), \frac{1}{\sqrt{18}}(0, 2, -2) \right\}$

8 הקבוצה לא אורתוגונלית.

9 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S = \{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$$

10 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא

אורתונורמלית, $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{80}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

ההיטל של וקטור

שאלות

- (1) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v = (1, 2, 2)$ לאורך $w = (0, 1, -1)$ ב- $\mathbb{R}^3$.
- (2) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v = (1, -2, 2, 0)$ לאורך $w = (0, 2, -1, 2)$ ב- $\mathbb{R}^4$. מסמנים גם $\text{proj}(v, w)$.
- (3) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x) = 2x - 1$ לאורך $q(x) = x^2$ במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0, 1]$.
- (4) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ לאורך $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תשובות סופיות

- (1) $\text{proj}(v, w) = cw = 0, \quad c = 0$
- (2) $\text{proj}(v, w) = cw = -\frac{2}{3}(0, 2, -1, 2), \quad c = -\frac{2}{3}$
- (3) $\text{proj}(p, q) = c \cdot q(x) = \frac{5}{6}x^2, \quad c = \frac{5}{6}$
- (4) $\text{proj}(A, B) = cB = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{6}$

תהליך גרהם-שמידט

שאלות

1 נתון: $U = \text{span}\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U .

2 נתון: $U = \text{span}\{(2, 2, 2, 2), (1, 1, 2, 4), (1, 2, -4, -3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U .

3 נתון: $U = \text{span}\{4, x, x^2, x^3\} \subseteq P_3[x]$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U , בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1, 1]$.

4 נתון: $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U , בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות סופיות

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 3), \frac{1}{\sqrt{21}}(-4, -1, 2) \right\} \quad (1)$$

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ w_1 = \frac{(2, 2, 2, 2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1, -1, 0, 2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1, 3, -6, 2)}{\sqrt{50}} \right\} \quad (2)$$

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3 - 3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}} \right\} \quad (3)$$

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{33}} \right\} \quad (4)$$

מטריצות אורתוגונליות

שאלות

- 1) ציין אילו מבין המטריצות הבאות הן אורתוגונליות.
במידה והמטריצה אורתוגונלית, מצא עבורה את המטריצה ההופכית:

א. $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- 2) הוכח את המשפטים הבאים:

- א. מטריצה ריבועית A היא אורתוגונלית אם ורק אם $A^T A = I$.
ב. מטריצה אורתוגונלית A היא הפיכה ומתקיים $A^{-1} = A^T$.

- 3) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. תהי A מטריצה אורתוגונלית.
הוכח כי המטריצות A^{-1}, A^T אורתוגונליות.
ב. הוכח כי מכפלת מטריצות אורתוגונליות (מאותו סדר), היא מטריצה אורתוגונלית.
ג. הוכח שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא 1 או -1.
ד. האם סכום מטריצות אורתוגונליות הוא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?
ה. האם מכפלה של מטריצה אורתוגונלית בסקלר היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?
ו. הראה כי אם מטריצה אורתוגונלית היא משולשת, אז היא אלכסונית.

- 4) תהי A מטריצה מסדר n .

הוכח או הפרך:

- א. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n ,
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n .
ב. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n ,
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n .

(5) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. תהי A מטריצה מסדר n , אשר עמודותיה, $\{v_1, \dots, v_n\}$, מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n . נסמן $v_i v_i = \lambda_i$. הוכח כי $A^T A = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.
- ב. הוכח: כדי להפוך מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתוגונלי, יש לחלק כל עמודה בסכום ריבועי איבריה ולשחלף לאחר מכן.

ג. הפוך את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ד. הפוך את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 2 & -\sqrt{8} \\ -\sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} & 0 \end{pmatrix}$.

(6) הוכח את המשפט :

- יהיו B ו- C שני בסיסים אורתונורמליים של המרחב R^n . אז מטריצת המעבר מ- B ל- C היא מטריצה אורתוגונלית.

(7) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. תהי A מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי B לבסיס C , של המרחב R^n . הוכח כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס C גם אורתונורמלי.
- ב. תהי A מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס אורתונורמלי C , של המרחב R^n . הוכח כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס B גם אורתונורמלי.

(8) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. הוכח כי אם A מטריצה אורתוגונלית מסדר n , אז קיימים שני בסיסים אורתונורמליים B ו- C , של המרחב R^n , כך ש- A משמשת מטריצת המעבר מ- B ל- C .
- ב. יהי $v \in R^n$, כך ש- $\|v\|=1$. הוכח שקיימת מטריצה אורתוגונלית, שהעמודה הראשונה שלה היא הוקטור v .

תשובות סופיות

$$(1) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \text{ א.} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ ב.}$$

ג. לא אורתוגונלית.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.125 & -\sqrt{0.5} \\ 0.25 & 0.125 & \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.125} & -\sqrt{0.125} & 0 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

העתקות אורתוגונליות

שאלות

- (1) תהי $T: R^n \rightarrow R^n$ העתקה לינארית.
הוכח את המשפט: T אורתוגונלית $\Leftrightarrow \forall u \in R^n, \|T(u)\| = \|u\|$.
- (2) תהי $T: R^n \rightarrow R^n$ העתקה לינארית אורתוגונלית.
א. הוכח כי T איזומורפיזם.
ב. הוכח כי גם T^{-1} אורתוגונלית.
- (3) ענה על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה אורתוגונלית מסדר n .
נגדיר העתקה לינארית $T: R^n \rightarrow R^n$, על ידי $T(u) = Au$.
הוכח כי T היא העתקה אורתוגונלית.
ב. הוכח שכל העתקה אורתוגונלית $T: R^n \rightarrow R^n$, ניתן להציג בצורה $T(u) = Au$, כאשר A אורתוגונלית.
- (4) ענה על הסעיפים הבאים:
א. הוכח שהערכים העצמיים היחידים של העתקה אורתוגונלית הם ± 1 .
ב. הוכח שהערכים העצמיים היחידים של מטריצה אורתוגונלית הם ± 1 .
- (5) הוכח שמכפלת העתקות אורתוגונליות היא העתקה אורתוגונלית.
- (6) ענה על הסעיפים הבאים:
א. תהי $T: R^n \rightarrow R^n$ העתקה אורתוגונלית,
ויהי $\{u_1, \dots, u_n\}$ בסיס אורתונורמלי כלשהו של R^n .
הוכח ש- $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ אף הוא בסיס אורתונורמלי של R^n .
ב. תהי $T: R^n \rightarrow R^n$ העתקה לינארית,
ונניח שיש בסיס אורתונורמלי $\{u_1, \dots, u_n\}$ של R^n ,
כך שגם הקבוצה $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי של R^n .
הוכח כי T היא העתקה אורתוגונלית.

7) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. הוכח שמטריצה, שמייצגת העתקה אורתוגונלית לפי בסיס אורתונורמלי, היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית.
 ב. הוכח שכל העתקה לינארית, שהמטריצה המייצגת שלה בבסיס אורתונורמלי כלשהו היא אורתוגונלית, היא בהכרח העתקה אורתוגונלית.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו את הנוסחה עבור ההעתקה T :

- א. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.
 ב. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y = \sqrt{3}x$.
 ג. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת הסיבוב בזווית 30° ב- $\mathbb{R}^2$.

9) בכל אחד מהסעיפים הבאים תאר את פעולת ההעתקה מבחינה גיאומטרית. השתמש במושגים שיקוף וסיבוב.

$$\begin{aligned} \text{א. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{ב. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{ג. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{ד. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

* את סעיף ד' פתור בשתי דרכים שונות.

10) תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית, שמסובבת וקטור ב- θ מעלות נגד כיוון השעון. מצא נוסחה עבור ההעתקה T .

11) תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y = \tan \frac{\theta}{2} x$. מצא נוסחה עבור ההעתקה T .

12) תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה אורתוגונלית. הוכח ש- T היא בהכרח העתקת סיבוב, או העתקת שיקוף.

תשובות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

$$(8) \quad \text{א. } T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \right) \quad \text{ב. } T(x, y) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)$$

$$\text{ג. } T(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)$$

$$(9) \quad \text{א. שיקוף ביחס לישר } y = 0.4142x \quad \text{ב. שיקוף ביחס לישר } y = \frac{1}{2}x$$

ג. סיבוב של 90 מעלות במישור.

$$\text{ד. דרך I: סיבוב של 90 מעלות ולאחריו שיקוף ביחס לישר } y = \frac{1}{2}x$$

$$\text{דרך II: שיקוף ביחס לישר } y = -\frac{1}{3}x$$

$$(10) \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(11) \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(12) שאלת הוכחה.