

אלגברה ליניארית ב



תוכן העניינים

1	דטרמיננטות
15	ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון
27	העתקות ליניאריות
37	מטריצות והעתקות ליניאריות
49	מרחבי מכפלה פנימית

אלגברה ליניארית ב

פרק 1 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטות..... 1
2. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות..... 9
3. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה..... 10
4. שימושי הדטרמיננטה..... 14

דטרמיננטות

שאלות

בשאלות 1-5 חשב את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א. } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב. } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג. } \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב. } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג. } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג. } \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשב את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א. } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב. } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג. } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{א. (7)} \quad \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \\ \text{ב.} \quad \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \\ \text{ג.} \quad \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{array} \right| \end{array}$$

בשאלות 8-10 חשב את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$(8) \quad \left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{array} \right|$$

$$(9) \quad \left| \begin{array}{cccc} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{array} \right|$$

$$(10) \quad \left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{array} \right|$$

בשאלות 11-12 הראה, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{array}{l} \text{א. (11)} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{array} \right| \\ \text{ב.} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{array} \right| \\ \text{ג.} \quad \left| \begin{array}{ccc} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשב:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{כי: (16) הוכח כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{17) הוכח כי :}$$

$$\text{18) חשב : } \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

בכל אחת מהשאלות 19-25, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n .
חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad \text{19)}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{20)}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{21)}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & \text{else} \end{cases} \quad \text{22)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad \text{23)}$$

$$(24) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 3(n-1) \end{pmatrix}$$

$$(25) a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

* בשאלה 25:

1. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה.

2. הנח כי $c=2$, $b=1$, $a=3$, ומצא:

א. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

ב. את הדטרמיננטה, כאשר $n=20$.

$$(26) \text{ חשב: } \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

בשאלות 27-28 נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4$, $|B|=2$.
חשב:

$$(27) \text{ א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(28) \text{ א. } |-A^{-2}B^TA^3| \quad \text{ב. } |-2A^2A^T \text{adj}B|$$

$$(29) \text{ נתון: } (PQ)^{-1}APQ = B.$$

$$\text{הוכח: } |A|=|B|.$$

(30) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש- $2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשב את $|B|$.

31 נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $A + 3B = 0$, $B^2 - 2A^{-1} = 0$.
חשב את $|A|$, $|B|$.

32 הוכח: 1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 2. $|adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$.

33 נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכח ש- $|A| = 0$.

34 נתון: A מטריצה מסדר n , $|A| = 128$, $2AB = B^T A^2$, ו- B הפיכה.
מצא את n .

35 נתון: $\det(A_{n \times n}) = 2$, $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$.

חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

תשובות סופיות

- (1) א. $ad - bc$ ב. 29 ג. -1
- (2) א. -1 ב. -3 ג. -14
- (3) א. 24 ב. 234 ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0 ב. 0 ג. 3
- (7) א. 24 ב. 44 ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) הוכחה.
- (17) הוכחה.
- (18) $(k-1)^4 (k+4)$
- (19) $n!$
- (20) $(-1)^{n-1} n!$
- (21) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$
- (22) $(a-b)^{n-1} [a + (n-1)b]$
- (23) 1
- (24) $2 \cdot 3^{n-2}$
- (25) 1. $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$, $D_2 = a^2 - bc$, $D_3 = a^3 - 2abc$
2. א. $D_n = 2^{n+1} - 1$ ב. $D_{20} = 2^{21} - 1$
- (26) 0
- (27) א. 4 ב. 2^{13}
- (28) א. -8 ב. -2^{11}
- (29) הוכחה.

$$\frac{81}{32} \quad (30)$$

$$|A|=18, |B|=-2/3 \quad (31)$$

(32) הוכחה.

(33) הוכחה.

$$7 \quad (34)$$

$$4^n \quad (35)$$

כלל קרמר

שאלות

בשאלות 1-3 פתור את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{lll} x+2z+5t=8 & x+z=3 & x+2y=5 \\ -2x-6y=-8 & 4x+y+8z=21 & 3x+4y=11 \\ 5x+3y-7z+4t=5 & 2x+3z=8 & \\ 2x+5y+44z=51 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} kx+y+z+t+r=1 \\ x+ky+z+t+r=1 \\ x+y+kz+t+r=1 \\ x+y+z+kt+r=1 \\ x+y+z+t+kr=1 \end{array} \quad (4) \text{ נתונה מערכת המשוואות: } x+y+kz+t+r=1$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים $x=y=z=t=r$.

(5) יהיו A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$.

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $(A^t A)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad x=1, y=2$$

$$(2) \quad x=1, y=1, z=2$$

$$(3) \quad x=y=z=t=1$$

$$(4) \quad \text{א. } k \neq 1, k \neq -4 \quad \text{ב. } k = -2 \quad \text{ג. לא} \quad \text{ד. הוכחה.}$$

$$(5) \quad \text{א. לא נכונה.} \quad \text{ב. לא נכונה.} \quad \text{ג. לא נכונה.}$$

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות 1-3 חשב את הצמודה הקלאסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \text{נתון:}$$

א. חשב: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשב: $(A^{-1})_{1,5}$.

(5) הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} גם הם מספרים שלמים.

(6) נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

(7) נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

(8) נתון: A, B הפיכות. C, D לא הפיכות. האם המטריצות הבאות הפיכות:

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. AD ד. CD ה. AB

$$(9) \quad \text{מצא את ערכי } k \text{ עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

10) ידוע ש- A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם $AB = 0$, אז $A = 0$.
- ב. אם $|AB| = 0$, אז $A = 0$.
- ג. אם $|AB| = 0$, אז $|A| = 0$.
- ד. אם $AB = 0$, אז $|A| = 0$.

11) נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}$, $B_{5 \times 3}$. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

- א. $|AB| = |BA|$
- ב. $\text{adj}(AB) \neq \text{adj}(BA)$

12) אם B מתקבלת ממטריצה $A_{3 \times 3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4, אז $|adj(A) \cdot B|$ שווה ל:

- א. $4^3 |A|^3$
- ב. $4^3 |B|^3$
- ג. $4 |B|^3$
- ד. $4 |A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית $A = (a_{ij})$ מסדר $n \geq 3$ המקיימת $a_{ij} = i + j - 1$. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- א. $|A| = 4$
- ב. A הפיכה.
- ג. $\text{adj}(A) = 0$
- ד. $|A| = 0$

14) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A , אז:

- א. בהכרח $\det(A) = \det(G)$ וגם $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$.
- ב. בהכרח $\det(A) = \det(G)$, אך ייתכן ש $\text{adj}(A) \neq \text{adj}(G)$.
- ג. ייתכן ש- $\det(A) \neq \det(G)$, אך בהכרח $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$.
- ד. אף תשובה אינה נכונה.

15 תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n \geq 2$, כך ש- $a_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$.

לכל $1 \leq i, j \leq n$, אז בהכרח מתקיים:

א. $|A| = n! - 1$

ב. הפיכה A .

ג. $\text{adj}(A)$ לא הפיכה.

ד. אם $n = 4$, אז $|\text{Adj}(A)| > 214$.

16 תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n \geq 4$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A) = n - 2$, אז בהכרח $\text{adj}(A) = 0$.

ב. אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $\text{adj}(A)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $\text{adj}(A) = 0$, אז בהכרח $A = 0$.

17 A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ- A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4,

אז $\text{adj}B$ מתקבלת מ- $\text{adj}A$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18 תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $|\text{Adj}((-1+i)A)| = i$.

חשב $|\det(A)|$.

19 נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n .

הוכח את הטענות הבאות:

א. A הפיכה $\Leftrightarrow \text{Adj}(A)$ הפיכה.

ב. $\text{Adj}(A^{-1}) = (\text{Adj}(A))^{-1}$.

ג. $|\text{Adj}(A)| = |A|^{n-1}$.

תשובות סופיות

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{adj}(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(4) א. 240 ב. 0.5

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.

ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

(9) אם ורק אם $k = 0$.

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) ד

(13) הוכחה.

(14) ד

(15) ד

(16) הוכחה.

(17) ד

$$\frac{-5}{2^{\frac{1}{2}}} \quad (18)$$

(19) הוכחה.

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

- (1) א. חשב את שטח המקבילית שקדקודיה :
 1. $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$
 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$
 ב. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו : $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$
 ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות : $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$
 ד. חשב את שטח המשולש שקדקודיו : $(1,2), (3,4), (5,8)$
 הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

- (1) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x - y + 4z + 2 = 0$. ד. 2

אלגברה ליניארית ב

פרק 2 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

- 1. ערכים עצמיים וקטורים עצמיים ולכסון מטריצות..... 15
- 2. דימיון מטריצות..... 25

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4:

- א. מצא מטריצה אופיינית.
 - ב. מצא פולינום אופייני.
 - ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
 - ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
 - ה. מצא וקטורים עצמיים.
 - ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
 - ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.
 - כ. לומר, מצא מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
 - ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשב A^{2009} .
 - ט. מצא את הפולינום המינימלי.
 - י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
- במידה והמטריצה הפיכה, בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד, תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 5-6 מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה. כלומר, מצא מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, כאשר D מטריצה אלכסונית. פתור פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 7-11 מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$(12) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A ?

$$(13) \text{ נתונה המטריצה הממשית } A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

- א. מצאו את ערכי a ו- b , עבורם הערכים העצמיים של A יהיו 1 ו-1- בלבד.
 ב. עבור ערכי a ו- b שמצאת בסעיף א, קבע האם המטריצה לכסינה.

14) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 .

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -4$.
מצא את המטריצה A .

15) קבע האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 ,

בעלת וקטורים עצמיים $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.
במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצא אותה.

16) הוכח או הפרך:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

17) נתונה מטריצה ריבועית A .

הוכח או הפרך:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A , אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו- λ ע"ע של A , אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1} .

ג. ל- A ול- A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל- A ול- A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ , אז λ הוא ע"ע של A .

ו. אם $A^{-1} = A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = \pm 1$.

ז. אם $A^2 = A$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

(18) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו- B , מסדר n . הוכח או הפרך:
א. ל- AB ו- BA אותם ערכים עצמיים.

ב. נניח ש- v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו- B , אז v גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

(19) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.
א. הוכיחו כי לכל סקלר k , המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.
ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A , מצא את הערך העצמי של המטריצה $A+kI$.

(20) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3 .
ידוע כי v_1, v_2 הם ו"ע של A , שונים מאפס, המתאימים לע"ע $\lambda = 1$, וכי v_3 הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע $\lambda = -1$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות:
א. אם הווקטורים v_1, v_2 בת"ל, אז $A^{2018} = I$.
ב. A ניתנת ללכסון.
ג. v_3 הוא צרף לינארי של הווקטורים v_1, v_2 .

(21) נתונות שתי מטריצות מסדר n : מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה.
הוכח או הפרך:
א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.
ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.

(22) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n , שעבורן v הוא ו"ע.
א. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n .
ב. עבור $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n = 2$, מצאו בסיס ל- W .

(23) פתור את 2 הסעיפים הבאים:
א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4 .
נתונה המטריצה $B = A^4 - 2A^2 + 10A - 4I$.
הוכח ש- v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשב את הערך העצמי המתאים לו.
ב. נתון ש- v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ .
יהי $p(x)$ פולינום.
הוכח ש- v ו"ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

(24) תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, כאשר a קבוע ממשי.

א. עבור $a=3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A .

ב. עבור איזה ערך של a , הזוג $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A ?

ג. יהי $u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$ וקטור שאינו ו"ע של A .

הוכיחו כי הקבוצה $\{u, Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

(25) תהיינה A ו- B מטריצות ריבועיות מסדר $n \times n$ כך ש- $AB=BA$.

נניח כי $\text{rank}(A) = n-1$, ו- v הוא וקטור עצמי של המטריצה A ,

השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.

הוכח כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B .

(26) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.

1. הוכח כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל- $p(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + |A|$.

2. נתון כי $\text{tr}(A) = 4$. חשב את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה

יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n .

נניח כי $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ הפולינום האופייני של A .

הוכח כי $a_0 = (-1)^n |A|$, $a_{n-1} = -\text{tr}(A)$.

(27) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $\text{rank}(B) = 1$.

הוכח:

א. 0 ע"ע של המטריצה B .

ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0, הוא 3.

ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0, הוא 3 או 4.

ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.

ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0, אז הוא שווה ל- $\text{tr}(B)$.

(28) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר n .

ידוע כי $\text{rank}(B) = k$, כאשר $k < n$.

הוכח כי 0 ערך עצמי של B ומצא את הריבוי הגיאומטרי והאלגברי שלו.

(29) נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$

ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי שונה מ-0.

הוכח שהמטריצה ניתנת לליכסון.

(30) נתונה מטריצה $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ (מטריצה עם שורה אחת).

מצא את הערכים העצמיים של המטריצה $A^T A$ (הנח $n > 1$).

(31) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2 = A$.

תהי A מטריצה אידמפוטנטית.

א. הוכח כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.

ב. רשום את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A .

ג. הוכח כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים.

ד. הוכח כי A ניתנת לליכסון.

ה. הוכח כי $\text{tr}(A) = \text{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

(32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5.

הוכח או הפרך:

א. קיים תת מרחב $W_\alpha = \{u \mid Au = \alpha u\}$ של R^5 , כך ש- $\dim W_\alpha \geq 1$.

ב. אם u_1, u_2 ו"ע של A , אז גם הווקטור $u_1 + u_2$ ו"ע של A .

ג. אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A , אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.

ד. אם A לכסינה מעל R , אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.

ה. אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R .

(33) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3.

נתון כי $\det(A) = \text{tr}(A) = 0$ וכי $\lambda = 1$ ערך עצמי של המטריצה.

הוכח כי המטריצה ניתנת לליכסון ומצא את כל הערכים העצמיים שלה.

(34) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים. ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2, והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4. מכאן נובע ש:

א. $\text{rank}(A) = 4$

ב. A לכסינה.

ג. $\text{tr}(A) > 10$

ד. $|A| \leq 127$

ה. קיים וקטור עצמי v של A , כך ש- $A^2v = 2v$.

(35) תהי A מטריצה מסדר 3, המקיימת $0 < \text{rank}(A - 10I) < \text{rank}(A - 4I) < 3$.

א. מצא את הפולינום האופייני של המטריצה A .

ב. מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A , ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.

ג. קבע האם A הפיכה.

ד. האם נכון לומר ש- $A = 10I$, או ש- $A = 4I$?

ה. קבע האם A לכסינה.

(36) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי.

הוכח או הפרך:

א. אם v וקטור עצמי של A , אז v וקטור עצמי גם של A^n .

ב. אם v וקטור עצמי של A^n , אז v וקטור עצמי גם של A .

ג. אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.

ד. אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

(37) נתונה מטריצה A , שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x) = (x-1)^2$.

הוכח כי המטריצה $A^2 + 4A + 3I$ הפיכה.

(38) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x) = x^2 + bx + c$.

מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.

ב. מטריצה $A \in M_2[R]$ מקיימת $|A| < 0$.

הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א.} \quad \begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = x(x-1)^2 \quad \text{ג.} \quad x=0, x=1$$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=0} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$ – ו-ח. לא ניתנת.

ט. $m(x) = x(x-1)^2$ deg = 3 – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.
י. לא הפיכה.

$$(2) \quad \text{א.} \quad \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \text{ג.} \quad x=1, x=2$$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$ – ו-ח. לא ניתנת.

ט. $m(x) = (x-1)^2(x-2)$ deg = 3 – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.
י. הפיכה.

$$(3) \quad \text{א.} \quad \begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{ג.} \quad x=0, x=1, x=2$$

$x=0$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=0} = sp\{\langle -1, 0, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=1} = sp\{\langle 0, 1, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$$\text{ה.} \quad \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle -1, 0, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז.} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח.} \quad \begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix} \quad \text{ט.} \quad m(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{י. לא הפיכה.}$$

$$(4) \quad \begin{matrix} \text{א.} & \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix} \\ \text{ב.} & p(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \end{matrix}$$

$$\text{ג. } x=6, x=2, x=-4$$

$$-x=-4 \text{ - ריבוב אלגברי: } 1, -x=2 \text{ - ריבוב אלגברי: } 1, -x=6 \text{ - ריבוב אלגברי: } 1.$$

$$\text{ד. } V_{x=6} = \text{sp}\{ \langle 0, 0, 1 \rangle \} \text{ - ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=2} = \text{sp}\{ \langle 1, 1, 1 \rangle \} \text{ - ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=-4} = \text{sp}\{ \langle -1, 1, 0 \rangle \} \text{ - ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$\text{ה. } \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז. } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix} \quad \text{ט. } m(x) = (x-6)(x-2)(x+4)$$

י. הפיכה.

(5) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים וקטורים עצמיים.

$$\text{מעל } \mathbb{C}: x = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle, v_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

(6) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $v_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle$. לא ניתנת ללכסון.

(7) ערכים עצמיים: $x_1=2, x_{2,3}=3$

$$\text{וקטורים עצמיים: } v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0), v_{x=2} = (1, 1, 1)$$

$$(8) v_{x=-2} = (-1, 1, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=1} = (-1, 4, 1), x=1, x=3, x=-2$$

$$(9) v_{x=-1} = (-1, 0, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=1} = (1, -2, 1), x=1, x=4, x=-1$$

$$(10) v_{x=3} = (1, 2), v_{x=1} = (-1, 2), x=-1, x=3$$

$$(11) v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), v_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, x=1, x=1 \pm \sqrt{3}i$$

$$v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

$$(12) k_1=3, k_2=-\frac{32}{9}$$

$$(13) \text{א. } a=3, b=-4 \text{ או } a=1, b=0 \quad \text{ב. לא לשתייהן.}$$

$$(14) A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

(15) אין כזו מטריצה.

(16) א. הפרכה: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ב. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. ג. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ד. הוכחה.

(17) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.

ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.

(18) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(19) א. הוכחה. ב. $4+k$ הוא ערך עצמי של $A+kI$.

(20) א. הפרכה. ב. הוכחה. ג. הפרכה.

(21) א. הפרכה. ב. הוכחה.

(22) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(23) א. הערך העצמי הוא 260. ב. הוכחה.

(24) א. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ב. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. ג. הוכחה.

(25) הוכחה

(26) א.1. הוכחה. א.2. $|A|=4$. ב. הוכחה.

(27) הוכחה.

(28) הוכחה.

(29) הוכחה.

(30) 0 ו- $tr(A)$.(31) א. הוכחה. ב. $p(x) = x$, $p(x) = x-1$, $p(x) = x(x-1)$. ג. הוכחה.

ד. הוכחה. ה. הוכחה.

(32) הוכחה.

(33) הערכים העצמיים הם: $0, 1, -1$.

(34) הוכחה.

(35) א. $p(x) = (x-10)^2(x-4)$.

ב. 10 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 2;

4 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 1.

ג. לא הפיכה. ד. לא. ה. לכסינה.

(36) הוכחה.

(37) הוכחה.

(38) א. $p_{4A}(x) = x^2 + 4bx + 16c$. ב. הוכחה.

דמיון מטריצות

שאלות

(1) ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי:

א. $|A| = |B|$

ב. $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

ג. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(2) הוכח באינדוקציה: אם $P^{-1}AP = B$, אז $A^n = PB^nP^{-1}$.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$. הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $4A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ דומות.

(4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 9 & -17 & 6 \end{pmatrix}$.

האם קיימים קבועים ממשיים a, b , כך שהמטריצה A דומה למטריצה B ?

(5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n : A, B, C . הוכח כי:

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל- B , אז B דומה ל- A .

ג. אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C , אז A דומה ל- C .

ד. אם A דומה ל- B ושתייהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל- B^{-1} .

ה. אם A דומה ל- B , אז A^k דומה ל- B^k , לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל- B ו- $q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל- $q(B)$.

ז. אם A דומה ל- B , אז A^T דומה ל- B^T .

ח. אם A דומה ל- B , אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

ט. אם A דומה ל- B , אז $\text{Null}(A) = \text{Null}(B)$.

הערה – $\text{Null}(A)$ = מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

(6) הוכח או הפרך :

- א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.
 ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.
 ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2. חשב כל אחד מהבאים או הסבר מדוע לא ניתן לעשות זאת :

א. $\text{rank}(A)$

ב. $\dim \text{Ker}(A)$

ג. $\text{tr}(A)$

ד. $|A^T A|$

ה. ע"ע עבור $A^T A$.

ו. ע"ע עבור $(4A^2 + 10A + I)^{-1}$.

הערה – $\dim \text{Ker}(A) = \text{Nullity}(A)$

(8) הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

תשובות סופיות

- (1) הוכחה.
 (2) הוכחה.
 (3) הוכחה.
 (4) לא.
 (5) הוכחה.
 (6) הוכחה.
 (7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1, \frac{1}{15}, \frac{1}{37}$
 (8) הוכחה.

אלגברה ליניארית ב

פרק 3 - העתקות ליניאריות

תוכן העניינים

1. העתקות ליניאריות 27
2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות 29
3. העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם 32
4. פעולות עם העתקות ליניאריות 36

העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות 1-15, קבע, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה ליניארית:

$$T(x, y) = (x + y, x - y) ; \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$T(x, y, z) = (2x + z, |y|) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

$$T(x, y) = (xy, y, z) ; \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4)$$

$$T(x, y, z) = (x + 1, x + y, y + z) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (5)$$

$$(B \in M_n[\mathbb{R}]) \quad T(A) = BA + AB ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (6)$$

$$T(A) = A + A^T ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (7)$$

$$T(A) = |A| \cdot I ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (8)$$

$$T(A) = A \cdot A^T ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (9)$$

$$T(A) = A^{-1} ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (10)$$

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2 ; \quad T : P_3[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}] \quad (11)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) ; \quad T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad (12)$$

$$T(p(x)) = p'(x) + p''(x) ; \quad T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad (13)$$

$$T(p(x)) = p^2(x) ; \quad T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_{2n}[\mathbb{R}] \quad (14)$$

$$(F = C, F = R) \quad T(z) = \bar{z} ; \quad T : C[F] \rightarrow C[F] \quad (15)$$

16 עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה לינארית:

$$T(x, y) = (m^2 x^{2m}, y^{2m} + x) ; T: R^2 \rightarrow R^2$$

בשאלות **17-20**, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון.
אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

17 $T: R^3 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1,1,0) = (1, 2, 3)$, $T(0,1,1) = (4, 5, 6)$, $T(0,0,1) = (7, 8, 9)$

18 $T: R^3 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1,0,1) = (1,1,0)$, $T(0,1,1) = (1, 2, 1)$, $T(0,0,1) = (0,1,1)$

19 $T: R^4 \rightarrow R^3$ כך ש-

$$T(1, 2, -1, 0) = (0, 1, -1), T(-1, 0, 1, 1) = (1, 0, 0), T(0, 4, 0, 2) = (2, 2, -2)$$

20 $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$ כך ש- $T(1) = 4$, $T(4x + x^2) = x$, $T(1-x) = x^2 + 1$

$$T(1, 0, 0) = (a_1, a_2, a_3)$$

21 נתונה העתקה לינארית $T: R^3 \rightarrow R^3$, המקיימת:

$$T(0, 1, 0) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$T(0, 0, 1) = (c_1, c_2, c_3)$$

א. הוכח שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ב. נסח והוכח טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T: R^n \rightarrow R^m$

22 נתונה העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$.

הוכח או הפרך:

א. אם $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה בת"ל.

ב. אם $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

תשובות סופיות

1) כן	2) כן	3) לא	4) לא	5) כן
6) כן	7) כן	8) לא	9) לא	10) לא
11) כן	12) כן	13) כן	14) לא	15) לא
16) כן	17) כן	18) כן	19) כן	20) כן

21) הוכחה. 22) הוכחה.

גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-6, מצא:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y - 4z + t, 4x + y + 4z - t), \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - 4y - z, x + y, y - z, x + 4z), \quad T: R^3 \rightarrow R^4 \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A, \quad T: M_2[R] \rightarrow M_2[R] \quad (4)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x+4), \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R] \quad (5)$$

$$D(p(x)) = p'(x), \quad D: P_3[R] \rightarrow P_3[R] \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{מצא העתקה ליניארית } T: R^3 \rightarrow R^3, \\ \text{אשר תמונתה נפרשת על ידי: } \{(4, 1, 4), (-1, 4, 1)\}.$$

$$(8) \quad \text{מצא העתקה ליניארית } T: R^4 \rightarrow R^3, \\ \text{אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: } \{(0, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}.$$

נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow U$.

$$(9) \quad \text{הוכח כי אם } \dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T) \text{ אז הממד של } V \text{ זוגי.}$$

(10) הוכח או הפרך:

א. קימת העתקה ליניארית $T: R^5 \rightarrow R^5$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$.

ב. קימת העתקה ליניארית $T: R^4 \rightarrow R^4$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$.

11 ידוע שהעתקה ליניארית $T: V \rightarrow W$, מקיימת: $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T)$, $\dim(W) = 4$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של V ?

א. 10

ב. 9

ג. 7

ד. 6

ה. כל התשובות לא נכונות.

12 הוכח או הפרך:א. לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$ מתקיים $\operatorname{Im}(T^2) \subseteq \operatorname{Im}(T)$.ב. לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$ שמקיימת:

$$T = T^2, \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(T^2), \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker}(T^2)$$

ג. לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$, המקיימת $\operatorname{Im}(T) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$,אז בהכרח $T = 0$.**13** מטריצה $A_{m \times n}$ מגדירה העתקה $T: R^n \rightarrow R^m$; $T(x) = Ax$,ואילו $A_{n \times m}^T$ מגדירה העתקה $S: R^m \rightarrow R^n$; $S(y) = A^T y$.הראה כי $\operatorname{Im}(T) = (\operatorname{Ker}(S))^\perp$.

תשובות סופיות

(1) גרעין – בסיס: $\{(0,0,1,4)\}$, מימד: 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד: 3.

(2) גרעין – בסיס: $\{(0,0,0)\}$, מימד: 0.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,0,1), (0,5,1,4), (0,0,-6,21)\}$, מימד: 3.

(3) גרעין – בסיס: $\{(-7,3,0,1), (1,-2,1,0)\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,2), (0,1,2)\}$, מימד: 2.

(4) גרעין – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

(5) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=2x+5, p(x)=1\}$, מימד: 2.

(6) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=x^2, p(x)=x, p(x)=1\}$, מימד: 3.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$T(x, y, z, t) = (-x - y + z, -2x - y + t, 0) \quad (8)$$

(9) הוכחה.

(10) לא.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-4, קבע האם היא חח"ע¹, האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצא אותה.

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, z - x) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x + 2z) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (2)$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b, b - 2c) \quad , \quad T: P_2[R] \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3 \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow P_3[R] \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית } T: R^4 \rightarrow R^3 ?$$

$$(6) \quad \text{נתונה העתקה ליניארית } T: U \rightarrow V \text{ הוכח:}$$

- א. אם $\dim(U) < \dim(V)$, אז T לא על.
- ב. אם $\dim(U) > \dim(V)$, אז T לא חח"ע.
- ג. אם $\dim(U) = \dim(V)$, אז T חח"ע $\Leftrightarrow T$ על.

$$(7) \quad \text{נתונה העתקה ליניארית } T: V \rightarrow W \text{ הוכח או הפרך:}$$

- א. אם $\dim \text{Ker}(T) \neq 0$, אז ההעתקה T אינה על.
- ב. אם $\dim \text{Ker}(T) = 0$ ו- $\dim(V) \leq \dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
- ג. אם $\dim \text{Ker}(T) = 0$ ו- $\dim(V) \geq \dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
- ד. אם $\dim(V) < \dim(W)$, אז ההעתקה T חח"ע.

¹ הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

(8) נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow W$; $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V .
הוכח או הפרך:

א. אם $\dim(V) > \dim(W)$ ואם $T(v_1) = 0$, אז ייתכן מקרה שבו T חח"ע.

ב. אם $\dim(V) > \dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל.

(9) נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow W$.

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ קבוצה בת"ל ב- V .

הוכח או הפרך:

א. אם T חח"ע, אז הקבוצה $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל ב- W .

ב. אם הקבוצה $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל ב- W , אז T חח"ע.

(10) נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \rightarrow R^m$.

הוכח או הפרך:

א. אם T היא איזומורפיזם אז $m = n$.

ב. אם $m > n$, אז T חח"ע.

ג. אם $T(v) = Av$ לכל v , אז למטריצה A יש n שורות ו- m עמודות.

(11) נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$, המקיימת $\text{Im}(T) = \text{Ker}(T)$.

הוכח או הפרך:

א. אם T על, אז בהכרח $V = \{0\}$.

ב. אם T חח"ע, אז בהכרח $V = \{0\}$.

ג. T היא איזומורפיזם.

ד. T היא העתקת האפס.

(12) נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \rightarrow R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m \times n}$,

כך ש- $T(v) = Av$ לכל $v \in R^n$.

הוכח או הפרך:

א. אם $v \in \text{Ker}(T)$, אז $v \in \text{rowsp}(A)$.

ב. אם $v \in \text{rowsp}(A)$, אז $v \in \text{Ker}(T)$.

ג. אם $v \in \text{colsp}(A)$, אז $v \in \text{Im}(T)$.

ד. אם $\text{Ker}(T) = \{0\}$, אז $n < m$.

13 נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \rightarrow R^n$, ונתונה מטריצה A ,

כך ש- $T(v) = Av$, לכל $v \in R^n$.

הוכח את הטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A) = n$, אז T חח"ע.

ב. אם $\text{rank}(A) = n$, אז T על.

ג. אם $T^2(v) = 0$, אז $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$.

ד. אם $T^2(v) = 0$, אז $\text{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$.

14 נתונה העתקה ליניארית $T: P_3[R] \rightarrow R$, המוגדרת על ידי $T(p(x)) = p(1)$.

א. מצא את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבע האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענה על הסעיפים הקודמים עבור $T: P_n[R] \rightarrow R$.

15 נתונה העתקה ליניארית $T: M_n[R] \rightarrow M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A) = A^T$.

א. מצא את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבע האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצא את ההעתקה ההפוכה של T .

תשובות סופיות

(1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}(x + y - 2z), \frac{1}{3}(2y - z - x), \frac{1}{3}(z + x + y) \right)$$

(2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

(3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(a, b, c) = 0.4a + 0.6b + 0.2c + (-0.4a + 0.4b + 0.2c)x + (-0.4c - 0.2b + 0.2a)x^2$$

(4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = \begin{pmatrix} b + c - d & -a + b + c - d \\ b - d & d \end{pmatrix}$$

(5) לא.

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

$$(14) \text{ א. } \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{span}\{-1 + x, -1 + x^2, -1 + x^3\}, \dim \operatorname{Ker}(T) = 3$$

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{1\}, \dim \operatorname{Im}(T) = 1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

$$\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{span}\{-1 + x, -1 + x^2, \dots, -1 + x^n\}, \dim \operatorname{Ker}(T) = n$$

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{1\}, \dim \operatorname{Im}(T) = 1$$

לא חח"ע, כן על.

$$(15) \text{ א. } \operatorname{Im}(T) = M_n[R], \operatorname{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, T^{-1}(A) = A^T \text{ ג. חח"ע ועל. } \text{ב. } \operatorname{Ker}(T) = \{0\}$$

פעולות עם העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות 1-9, תהינה $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ו- $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקות ליניאריות המוגדרות על ידי: $S(x, y, z) = (x - z, y)$, $T(x, y, z) = (x, 4x - y, x + 4y - z)$.

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

(1) $S + T$	(2) $4S$	(3) $4S - 10T$	(4) TS	(5) ST
(6) T^2	(7) T^{-1}	(8) T^{-2}	(9) S^2	

תשובות סופיות

(1) לא ניתן להגדיר.

(2) $4S = 4(x - z, y)$

(3) לא ניתן להגדיר.

(4) לא ניתן להגדיר.

(5) $ST: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $ST(x, y, z) = (z - 4y, 4x - y)$

(6) $T^2(x, y, z) = (x, y, 16x - 8y + z)$

(7) $T^{-1}(x, y, z) = (x, 4x - y, 17x - 4y - z)$

(8) $T^{-2}(x, y, z) = (x, y, -16x + 8y + z)$

(9) לא ניתן להגדיר.

אלגברה ליניארית ב

פרק 4 - מטריצות והעתקות ליניאריות

תוכן העניינים

1. מטריצה שמייצגת העתקה 37
2. מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס 43
3. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה 46

מטריצה שמייצגת העתקה

הערה:

כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת-מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים). לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

שאלות

(1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .

סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .

סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .

סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 .

סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_2}^{B_1}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

$$1. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

$$2. [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$3. [M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$$

(2) נתונה העתקה לינארית: $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$.

נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \quad B_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1 .

סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ב. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2 .

סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ג. אשר את הטענות הבאות:

$$1. [T]_{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_1}$$

$$2. [T]_{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [T(v)]_{B_2}$$

$$3. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [T]_{B_1} \cdot [M]_{B_1}^{B_2} = [T]_{B_2}$$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשב את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

ו. מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

ז. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(3) נתונה העתקה לינארית $T: R^3 \rightarrow R^3$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

מהי נוסחת ההעתקה? פתור בשתי דרכים שונות.

(4) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3 , ויהי T אופרטור לינארי על R^3 .

$$\text{נתון כי: } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ ו- } [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -29 & -45 & 6 \\ 20 & 31 & -4 \\ 13 & 19 & -1 \end{pmatrix}$$

חשב את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

(5) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה :

$$, T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A \quad , \quad T : M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

$$. B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} : \text{לפי הבסיס}$$

(6) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D : P_4[R] \rightarrow P_3[R]$, $D(p(x)) = p'(x)$, לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

(7) נתונה העתקה לינארית $T : M_2[R] \rightarrow M_2[R]$. ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

$$. [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{היא}$$

מצא את נוסחת ההעתקה.

(8) נתונה העתקה לינארית $T : P_2[R] \rightarrow P_2[R]$. נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,

$$. [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{היא}$$

מצא את נוסחת ההעתקה.

(9) נתונה העתקה לינארית $T : P_2[R] \rightarrow P_2[R]$. נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס $B = \{1, 1-x, x+x^2\}$,

$$. [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} : \text{היא}$$

א. מצא את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצא את $T(p(x))$.

* פתור בשתי דרכים שונות.

ב. מצא את $T^2(p(x))$.

(10) תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ העתקה לינארית, ותהי A מטריצה ממשית,

כך שמתקיים $T(v) = Av$ לכל $v \in \mathbb{R}^n$.

נתון כי B בסיס ל- $\mathbb{R}^n$ ו- $\text{rank}(A) = n$.

הוכח כי $[T]_B$ הפיכה.

11 נתונה העתקה לינארית $T: P_3[R] \rightarrow P_3[R]$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

א. מצא גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. מצא את נוסחת ההעתקה.

12 נתונה העתקה לינארית $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי,

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

א. מצא גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. חשב את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.

ג. מצא את נוסחת ההעתקה.

13 נתונה העתקה לינארית: $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$; $T(a + bx + cx^2) = b + cx$.

הוכח ש- T העתקה נילפוטנטית.

14 יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל $\mathbb{R}$.

נתון הבסיס $B = \{1, x, x^2\}$, ונתונה ההעתקה הלינארית

$$T(p(x)) = xp''(x) - p'(x); T: V \rightarrow V$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B$.

ב. מצאו בסיס וממד עבור $\text{Im}(T)$, $\text{Ker}(T)$.

הערה: בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות ונוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.

15 נתונות שתי העתקות לינאריות $S, T: V \rightarrow V$.

יהי $B = \{u, v, w\}$ בסיס ל- V .

$$\text{נתון כי: } \begin{cases} S(u) = u + v \\ S(v) = v + w \\ S(w) = w + u \end{cases}, \begin{cases} T(u) = u - v \\ T(v) = v - w \\ T(w) = w - u \end{cases}$$

א. הוכח כי: $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$, $\text{Ker}(S) = \{0\}$.

ב. עבור כל אחת מההעתקות קבע האם היא חח"ע ו/או על.

ג. קבע האם $\{T(u), T(v), T(w)\}$ פורשת את V .

ד. קבע האם $\{S(u), S(v), S(w)\}$ פורשת את V .

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (x, y-x-z, z) \quad \text{ב. } (x, y, z-x-y) \quad \text{ג. } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ד. } [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ה. הוכחה.}$$

$$(2) \quad \text{א. } [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } [T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ג. הוכחה.}$$

$$\text{ד. לא.} \quad \text{ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.} \quad \text{ו. 0 עייע יחיד; הוייע שלו: (1, -1, 1).} \quad \text{ז. לא.}$$

$$(3) \quad T(x, y, z) = (x+y, y+z, z-x)$$

$$(4) \quad [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0.5 \\ -0.25 & -1 & 0.75 \end{pmatrix}, \quad [T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -0.75 & 2.75 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (6) \quad [T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad T(p(x)) = p(x+1) \quad ; \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$$

$$(9) \quad \text{א. } T(a+bx+cx^2) = (a+2b-2c) + (2a+4c)x + (2a+b+2c)x^2$$

$$\text{ב. } T^2(a+bx+cx^2) = (a+2c)1 + (10a+8b+4c)x + (8a+6b+4c)x^2$$

(10) הוכחה.

$$(11) \quad \text{א. } \text{Ker}(T) = \text{sp}\{-x+x^3, -1+x^2\}, \quad \text{Im}(T) = \text{sp}\{1+x^2, x+x^3\}$$

$$\text{ב. } T(a+bx+cx^2+dx^3) = (b+d)(1) + (a+c)x + (b+d)x^2 + (a+c)x^3$$

$$(12) \quad \text{א. } \text{Ker}(T) = \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{Im}(T) = \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{ב. } \text{tr}(T) = 15, \quad \det(T) = 0, \quad \text{rank}(T) = 2$$

(13) הוכחה.

$$(14) \quad \text{א. } [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } B_{\text{Im}(T)} = \{1\}, \quad \dim(\text{Im}(T)) = 1$$

$$B_{\text{Ker}(T)} = \{1, x^2\}, \quad \dim(\text{Ker}(T)) = 2$$

(15) הוכחה.

מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

שאלות

- (1) מצא את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות הבאות, ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של R^n :

א. $T(x, y) = (x + y, y, -x)$, $T: R^2 \rightarrow R^3$

ב. $T(x, y, z, t) = (4x - y - z + t, x + y + 4z + t)$, $T: R^4 \rightarrow R^2$

- (2) נתונה העתקה לינארית $T: R^4 \rightarrow R^2$; $T(x, y, z, t) = (x + y, z + t)$ מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מהבסיס הסטנדרטי של R^4 לבסיס הסטנדרטי של R^2 .

- (3) תהי $T: R^3 \rightarrow R^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי :

$$T(x, y, z) = (4x + y - z, x - y + z)$$

חשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס

$B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ של R^3 , לבסיס $B_2 = \{(1, 4), (1, 5)\}$ של R^2 .

כלומר, את $[T]_{B_1}^{B_2}$.

- (4) עבור העתקה לינארית $T: R^3 \rightarrow R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,

כאשר: $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ מצא את נוסחת ההעתקה.

- (5) עבור העתקה לינארית $T: R^3 \rightarrow R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

כאשר $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$ מצא את נוסחת ההעתקה.

- (6) נתונה העתקה לינארית $T: P_3[R] \rightarrow P_2[R]$.

המטריצה שמייצגת את ההעתקה T , מהבסיס הסטנדרטי של $P_3[R]$

לבסיס הסטנדרטי של $P_2[R]$, נתונה על ידי: $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

(7) נתונה העתקה לינארית $T: P_2[R] \rightarrow R^3$, אשר המטריצה המייצגת

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא}$$

מצא את נוסחת ההעתקה.

(8) נתונה העתקה לינארית $T: M_2[R] \rightarrow P_3[R]$, שהמטריצה המייצגת אותה

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא}$$

מצא את נוסחת ההעתקה.

(9) תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית, כך ש- $\dim(V) = n$,

ויהיו B_1, B_2 בסיסים סדורים של V . הוכח או הפוך:

$$[T]_{B_1}^{B_1} = I_n \quad \text{א.}$$

$$[T]_{B_1}^{B_1} = I_n \quad \text{ב. אם } T \text{ העתקת זהות, אז בהכרח}$$

$$[T]_{B_2}^{B_1} [T]_{B_1}^{B_2} = I_n \quad \text{ג. אם } T \text{ העתקת זהות, אז בהכרח}$$

(10) נתונה העתקה לינארית $T: P_2[R] \rightarrow R^3$ המוגדרת על ידי:

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, c)$$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס.
(הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכח שההעתקה הפיכה וחשב את $T^{-1}(a, b, c)$.

ג. חשב את $T^4(a + bx + cx^2)$.

(11) נתונה העתקה לינארית $T: M_2[R] \rightarrow P_3[R]$, המוגדרת על ידי:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3$$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס.
(הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכח שההעתקה הפיכה וחשב את $T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3)$.

(12) חשב את ST ואת TS , עבור ההעתקות:

$$S(x, y) = (x - y, x + y, y) \quad ; \quad S: R^2 \rightarrow R^3$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b, b - c) \quad ; \quad T: P_2[R] \rightarrow R^2$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad [T] = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ ב.}$$

$$(2) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad [T] = \begin{pmatrix} 25 & 0 & -6 \\ -20 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z)$$

$$(5) \quad T(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

$$(6) \quad T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (b + 2c)1 + (2c + 6d)x + (3d)x^2$$

$$(7) \quad T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, c)$$

$$(8) \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3$$

(9) הוכחה.

$$(10) \quad [T^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad T^{-1}(a, b, c) = (a - b + c)1 + (b - c)x + cx^2 \text{ ב.}$$

ג. לא ניתן.

$$(11) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

$$\text{ב.} \quad T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} b + c - d & -a + b + c - d \\ b - d & d \end{pmatrix}$$

$$(12) \quad ST(a + bx + cx^2) = (a + c, a + 2b - c, b - c)$$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

שאלות

(1) נתונה העתקה לינארית, $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$, $T(X) = PX$; כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 2.

נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות P , שעבורן המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ היא וקטור עצמי של ההעתקה.
א. מצאו את W .
ב. הוכיחו כי W היא תת-מרחב של $M_2[R]$, ומצאו לה בסיס.

(2) נתונה העתקה לינארית, $T: M_{10}[R] \rightarrow M_{10}[R]$, $T(X) = PX$; כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 10.
ידוע כי A היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה – המתאים לערך העצמי 4.
חשב את $|P|$.

(3) מצא העתקה לינארית T , שעבורה המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה העתקה לינארית $T(x, y, z) = (4x - y - z, x + 2y - z, x - y + 2z)$. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ב. נתונה העתקה לינארית: $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(5) נתונה העתקה לינארית $T(x, y, z) = (x + z, y, x + z)$.
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ג. במידה וכן, חשב $T^{2009}(x, y, z)$.

(6) נתונה העתקה לינארית:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} ; T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

- א. מצא את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.
 ב. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
 ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה ותשובתך לסעיף ג' חיובית, חשב את $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

(7) נתונה העתקה לינארית: $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$; $T(p(x)) = p(x+1)$

- א. מצא את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.
 ב. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
 ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(8) יהי V מרחב וקטורי מממד n .

תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית.

- א. הוכח ש- T הפיכה אם"ם כל הערכים העצמיים של T שונים מאפס.
 ב. הוכח כי אם T הפיכה, אז ל- T ול- T^{-1} יש את אותם וקטורים עצמיים.
 מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של T ושל T^{-1} ?

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in R \right\} \quad \text{ב. } B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \quad 4^{10} = |P|$$

$$(3) \quad T(X) = 4X \quad T: M_{2 \times 3}(R) \rightarrow M_{2 \times 3}(R)$$

$$(4) \quad \text{א. } v_{\lambda=2} = (1, 1, 1), v_{\lambda=3}^{(1)} = (1, 1, 0), v_{\lambda=3}^{(2)} = (1, 0, 1), \text{ ניתנת לליכסון.}$$

$$\text{ב. ערך עצמי: } x = 0, \text{ וקטור עצמי: } v_{x=0} = (1, -1, 1), \text{ לא.}$$

$$(5) \quad \text{א. } v_{\lambda=0} = (-1, 0, 1), v_{\lambda=1} = (0, 1, 0), v_{\lambda=2} = (1, 0, 1), \text{ ניתנת לליכסון.}$$

$$\text{ג. } T^{2009}(x, y, z) = (2^{2008}x + 2^{2008}z, y, 2^{2008}x + 2^{2008}z)$$

$$(6) \quad \text{א. } [T]_E = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ב. } v_{x=0}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_{x=0}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_{x=2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_{x=2}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ג. כן. ד. } T^{10} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \\ 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad \text{א. } [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } v_{\lambda=1} = 1 \quad \text{ג. לא ניתנת לליכסון.}$$

$$(8) \quad \text{הוכחה.}$$

אלגברה ליניארית ב

פרק 5 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

49	1. מרחבי מכפלה פנימית
51	2. הנורמה והמרחק
53	3. אי שוויון קושי שוורץ, יישומים
55	4. אורתוגונליות
57	5. משלים אורתוגונלי
59	6. קבוצה ובסיס אורתוגונלי
62	7. ההיטל של וקטור
63	8. תהליך גרהם שמידט
64	9. מטריצות אורתוגונליות
67	10. העתקות אורתוגונליות

מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

(1) לכל שני וקטורים $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 4x_2 y_2$$

בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

(2) לכל שני וקטורים $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + kx_2 y_2$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

(3) לכל שני וקטורים $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + kx_1 y_3 + x_2 y_2 + kx_3 y_1 + x_3 y_3$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

(4) לכל שני וקטורים $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ ב- $\mathbb{R}^n$,

נגדיר: $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n k_i u_i v_i$, כאשר $k_1, \dots, k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.

הראה כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.

מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i = 1$ לכל $1 \leq i \leq n$?

(5) לכל שתי מטריצות A, B ב- $M_{mn}[R]$, נגדיר: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$.

בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mn}[R]$.

tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

(6) לכל שתי פונקציות f, g ב- $C[a, b]$, נגדיר: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot g dx$.

בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$.

- (7) נתונה מכפלה פנימית על R^3 , שעבורה הקבוצה $B = \{(1,1,0), (1,1,0), (1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי. חשב את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$.

תשובות סופיות

- (1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
- (2) $k > 9$
- (3) $-1 < k < 1$
- (4) עבור $k_i = 1$ לכל $1 \leq i \leq n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
- (5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mn}[R]$.
- (6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$.
- (7) $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

הנורמה והמרחק

שאלות

1 נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$: $u = (1, -2, 2)$, $v = (3, -2, 6)$, $w = (5, 3, -2)$

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^3$, חשב :

א. $\langle u, v \rangle$	ב. $\langle u, w \rangle$	ג. $\langle v, w \rangle$	ד. $\langle u + v, w \rangle$
ה. $\ u\ $	ו. $\ v\ $	ז. $\ u + v\ $	ח. $d(u, v)$
ט. $\hat{u}$	י. $\hat{v}$		

2 נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2 \times 3}[R]$:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2 \times 3}[R]$,

חשב :

א. $\langle A, B \rangle$	ב. $\langle A, C \rangle$	ג. $\langle A, B + C \rangle$
ד. $\langle B, C \rangle$	ה. $\langle 4A + 10B, 11C \rangle$	ו. $\ A\ $
ז. $\ B\ $	ח. $d(A, B)$	ט. $\hat{A}$

3 נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0, 1]$:

$$p(x) = x + 3, q(x) = 3x + 1, r(x) = x^2 - 4x - 1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$

חשב :

א. $\langle p, q \rangle$	ב. $\langle p, r \rangle$	ג. $\langle p, q + r \rangle$
ד. $\ p\ $	ה. $d(p, q)$	ו. $\hat{r}$

$$(4) \text{ הוכח: } \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

$$(5) \text{ הוכח: } \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

$$(6) \text{ הוכח: } \langle u-v, u+v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2.$$

$$(7) \text{ הוכח: } \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

$$(8) \text{ הוכח: } \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = \langle u, v \rangle.$$

תשובות סופיות

- (1) א. 19 ב. -5 ג. -3 ד. -8
 ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
 ט. $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$
- (2) א. 185 ב. -12 ג. 173 ד. -24 ה. -3168
 ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח. $\sqrt{124}$ ט. $\frac{1}{\sqrt{355}} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
- (3) א. 9 ב. -9.5833 ג. -0.5833 ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$
- ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2 - 4x - 1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$
- (4) שאלת הוכחה.
 (5) שאלת הוכחה.
 (6) שאלת הוכחה.
 (7) שאלת הוכחה.
 (8) שאלת הוכחה.

אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

שאלות

(1) הוכח כי אם u, v תלויים לינארית, אז $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.

(2) יהיו $x_1, x_2, \dots, x_n$ ו- $y_1, y_2, \dots, y_n$ מספרים ממשיים. הוכח כי $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$.

(3) יהיו f, g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a, b]$. הוכח כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)$.

(4) חשב את הזווית בין שני הווקטורים $u = (1, 2, 2)$, $v = (-2, 1, 2)$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

(5) חשב את הזווית בין שני הווקטורים $u = (3, 4)$, $v = (1, 2)$ ביחס למכפלה הפנימית $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$ ב- $\mathbb{R}^2$.

(6) מצא את $\cos \theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x) = 2x - 1$ ו- $q(x) = x^2$ בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$ שב- $C[0, 1]$.

(7) מצא את $\cos \theta$ עבור הזווית θ שבין $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$.

תשובות סופיות

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) $\theta = 63.61^\circ$ (5) $\theta = 9.44^\circ$ (6) $\cos \theta = 0.173^\circ$ (7) $\cos \theta = 0.00036^\circ$

אורתוגונליות

שאלות

1) הוכח כי הווקטורים $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 7, -6)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצא את ערכו של הקבוע k , עבורו הווקטורים $u = (1, k, 3)$, $v = (4, 7, -6)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

3) מצא וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 5, 7)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

4) הוכח כי הפולינומים $p(x) = 2x - 1$, $q(x) = 6x^2 - 6x + 1$ אורתוגונליים בקטע $[0, 1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$).

5) במרחב $P_n[\mathbb{R}]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n \geq 0$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{k=0}^n p(k)q(k) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \dots + p(n)q(n)$$

הראה כי הפולינומים:

$$p(x) = x(x-2)(x-4)(x-6), \quad q(x) = x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[\mathbb{R}]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות: $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$,

מצא את הערך של הקבוע k , עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכח כי: $\|u + v\| = \|u - v\| \Leftrightarrow u \perp v$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

8) הוכח כי: $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow u \perp v$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

9) הוכח כי : $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow (u-v) \perp (u+v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

תשובות סופיות

1) הוכחה.

2) $k = 2$

3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) $k = 0.5$

7) הוכחה.

8) הוכחה.

9) הוכחה.

משלים אורתוגונלי

שאלות

(1) יהי $W = \text{span}\{(1, 2, -1, 1), (2, 5, 3, 1)\}$.

מצא בסיס וממד עבור $W^\perp$.
הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

(2) יהי $w = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$.

מצא בסיס וממד עבור $W^\perp$.
הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

(3) יהי $W = \text{span}\{x\} \subseteq P_2[R]$.

מצא בסיס וממד עבור $W^\perp$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0, 1]$.

(4) יהי $W = \text{span}\{x, x^2\} \subseteq P_2[R]$.

מצא בסיס וממד עבור $W^\perp$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0, 1]$.

(5) יהי $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_{2 \times 2}[R]$.

מצא בסיס וממד עבור $W^\perp$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$
ב- $M_{2 \times 2}[R]$.

(6) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

(7) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

(8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A \cdot \underline{x} = 0$.

יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תן פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה A .

(9) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V .

הוכח כי: $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$.

(10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V .

הוכח כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

(11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V .

הוכח כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם V מממד סופי).

(12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V .

הוכח כי: $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

(13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V .

הוכח כי: $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

תשובות סופיות

$$W^\perp = \text{span}\{(-3, 1, 0, 1), (11, -5, 1, 0)\} \quad (1)$$

$$W^\perp = \text{span}\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \quad (2)$$

$$W^\perp = \text{span}\left\{\left(-\frac{2}{3} + x\right), \left(-\frac{1}{2} + x^2\right)\right\} \quad (3)$$

$$W^\perp = \text{span}\{(1.5x^2 - 6x + 5)\} \quad (4)$$

$$W^\perp = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad (5)$$

$$B_W = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$B_{W^\perp} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad (7)$$

(8) הסבר בוודא.

(9) הוכחה.

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

קבוצה ובסיס אורתוגונלי

שאלות

1 נתונה קבוצת וקטורים $S = \{(2,1,-4), (1,2,1), (3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

- א. הראה שהקבוצה S אורתוגונלית.
 ב. נרמל את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
 ג. ללא חישוב, הוכח שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2 נתונה קבוצת וקטורים $S = \{(2,1,-4), (1,2,1), (3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
 ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשום את הווקטור $(13, -1, 7)$,
 כצירוף לינארי של איברי S .

3 נתונה קבוצת וקטורים $S = \{(2,1,-4), (1,2,1), (3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
 רשום את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v = (a, b, c)$ ב- $\mathbb{R}^3$,
 ביחס לבסיס S .

4 נניח ש- $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V .
 הוכח שלכל $v \in V$, אז $v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle} u_n$.
 הערה: הקבוע $a_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i ,
 או הרכיב של v ביחס ל- u_i .

5 נתונה קבוצת פונקציות $S = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}$ ב- $V = C[0, \pi]$.
 האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
 במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
 נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
 ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6 נתונה קבוצת פונקציות $S = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ ב- $V = C[0, 2\pi]$.
 האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
 ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
 האם הקבוצה מהווה בסיס?

7) נתונה קבוצה $S = \{(2, 4, 4), (4, -1, -1), (0, 2, -2)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.

8) נתונה קבוצה $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ ב- $P_3[R]$.

בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

9) נתונה קבוצה $S = \{1, 2x-1, 6x^2-6x+1\}$ ב- $P_2[R]$.

בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

10) נתונה הקבוצה $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_3[R]$

בדוק: האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
ענה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

תשובות סופיות

1 א. הוכחה. ב. $S = \left\{ \frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}}, \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}, \frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}} \right\}$ ג. הוכחה.

2 $(13, -1, 7) = \frac{-1}{7}(2, 1, 4) + 3(1, 2, 1) + \frac{24}{7}(3, -2, 1)$

3 $\frac{2a+b-4c}{21}(2, 1, 4) + \frac{a+2b+c}{6}(1, 2, 1) + \frac{3a-2b+c}{14}(3, -2, 1)$

4 הוכחה.

5 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S = \left\{ \frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}}, \dots \right\}$$

6 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

7 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה

אורתונורמלית, $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{36}}(2, 4, 4), \frac{1}{\sqrt{8}}(4, -1, -1), \frac{1}{\sqrt{18}}(0, 2, -2) \right\}$

8 הקבוצה לא אורתוגונלית.

9 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S = \{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$$

10 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא

אורתונורמלית, $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{80}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

ההיטל של וקטור

שאלות

- (1) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v = (1, 2, 2)$ לאורך $w = (0, 1, -1)$ ב- $\mathbb{R}^3$.
- (2) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v = (1, -2, 2, 0)$ לאורך $w = (0, 2, -1, 2)$ ב- $\mathbb{R}^4$. מסמנים גם $\text{proj}(v, w)$.
- (3) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x) = 2x - 1$ לאורך $q(x) = x^2$ במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0, 1]$.
- (4) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ לאורך $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תשובות סופיות

- (1) $\text{proj}(v, w) = cw = 0, \quad c = 0$
- (2) $\text{proj}(v, w) = cw = -\frac{2}{3}(0, 2, -1, 2), \quad c = -\frac{2}{3}$
- (3) $\text{proj}(p, q) = c \cdot q(x) = \frac{5}{6}x^2, \quad c = \frac{5}{6}$
- (4) $\text{proj}(A, B) = cB = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{6}$

תהליך גרהם-שמידט

שאלות

1 נתון: $U = \text{span}\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U .

2 נתון: $U = \text{span}\{(2, 2, 2, 2), (1, 1, 2, 4), (1, 2, -4, -3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U .

3 נתון: $U = \text{span}\{4, x, x^2, x^3\} \subseteq P_3[x]$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U , בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1, 1]$.

4 נתון: $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U , בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות סופיות

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 3), \frac{1}{\sqrt{21}}(-4, -1, 2) \right\} \quad (1)$$

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ w_1 = \frac{(2, 2, 2, 2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1, -1, 0, 2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1, 3, -6, 2)}{\sqrt{50}} \right\} \quad (2)$$

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3 - 3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}} \right\} \quad (3)$$

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{33}} \right\} \quad (4)$$

מטריצות אורתוגונליות

שאלות

- 1) ציין אילו מבין המטריצות הבאות הן אורתוגונליות.
במידה והמטריצה אורתוגונלית, מצא עבורה את המטריצה ההופכית:

א. $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- 2) הוכח את המשפטים הבאים:

- א. מטריצה ריבועית A היא אורתוגונלית אם ורק אם $A^T A = I$.
ב. מטריצה אורתוגונלית A היא הפיכה ומתקיים $A^{-1} = A^T$.

- 3) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. תהי A מטריצה אורתוגונלית.
הוכח כי המטריצות A^{-1}, A^T אורתוגונליות.
ב. הוכח כי מכפלת מטריצות אורתוגונליות (מאותו סדר), היא מטריצה אורתוגונלית.
ג. הוכח שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא 1 או -1.
ד. האם סכום מטריצות אורתוגונליות הוא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?
ה. האם מכפלה של מטריצה אורתוגונלית בסקלר היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?
ו. הראה כי אם מטריצה אורתוגונלית היא משולשת, אז היא אלכסונית.

- 4) תהי A מטריצה מסדר n .

הוכח או הפרד:

- א. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n ,
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n .
ב. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n ,
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n .

(5) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. תהי A מטריצה מסדר n , אשר עמודותיה, $\{v_1, \dots, v_n\}$, מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n . נסמן $v_i v_i = \lambda_i$. הוכח כי $A^T A = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.
- ב. הוכח: כדי להפוך מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתוגונלי, יש לחלק כל עמודה בסכום ריבועי איבריה ולשחלף לאחר מכן.

ג. הפוך את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ד. הפוך את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 2 & -\sqrt{8} \\ -\sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} & 0 \end{pmatrix}$.

(6) הוכח את המשפט :

- יהיו B ו- C שני בסיסים אורתונורמליים של המרחב R^n . אז מטריצת המעבר מ- B ל- C היא מטריצה אורתוגונלית.

(7) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. תהי A מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי B לבסיס C , של המרחב R^n . הוכח כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס C גם אורתונורמלי.
- ב. תהי A מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס אורתונורמלי C , של המרחב R^n . הוכח כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס B גם אורתונורמלי.

(8) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. הוכח כי אם A מטריצה אורתוגונלית מסדר n , אז קיימים שני בסיסים אורתונורמליים B ו- C , של המרחב R^n , כך ש- A משמשת מטריצת המעבר מ- B ל- C .
- ב. יהי $v \in R^n$, כך ש- $\|v\|=1$. הוכח שקיימת מטריצה אורתוגונלית, שהעמודה הראשונה שלה היא הוקטור v .

תשובות סופיות

$$(1) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \text{ א.} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ ב.}$$

ג. לא אורתוגונלית.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.125 & -\sqrt{0.5} \\ 0.25 & 0.125 & \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.125} & -\sqrt{0.125} & 0 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

העתקות אורתוגונליות

שאלות

- (1) תהי $T: R^n \rightarrow R^n$ העתקה לינארית.
הוכח את המשפט: T אורתוגונלית $\Leftrightarrow \forall u \in R^n, \|T(u)\| = \|u\|$.
- (2) תהי $T: R^n \rightarrow R^n$ העתקה לינארית אורתוגונלית.
א. הוכח כי T איזומורפיזם.
ב. הוכח כי גם T^{-1} אורתוגונלית.
- (3) ענה על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה אורתוגונלית מסדר n .
נגדיר העתקה לינארית $T: R^n \rightarrow R^n$, על ידי $T(u) = Au$.
הוכח כי T היא העתקה אורתוגונלית.
ב. הוכח שכל העתקה אורתוגונלית $T: R^n \rightarrow R^n$, ניתן להציג בצורה $T(u) = Au$, כאשר A אורתוגונלית.
- (4) ענה על הסעיפים הבאים:
א. הוכח שהערכים העצמיים היחידים של העתקה אורתוגונלית הם ± 1 .
ב. הוכח שהערכים העצמיים היחידים של מטריצה אורתוגונלית הם ± 1 .
- (5) הוכח שמכפלת העתקות אורתוגונליות היא העתקה אורתוגונלית.
- (6) ענה על הסעיפים הבאים:
א. תהי $T: R^n \rightarrow R^n$ העתקה אורתוגונלית,
ויהי $\{u_1, \dots, u_n\}$ בסיס אורתונורמלי כלשהו של R^n .
הוכח ש- $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ אף הוא בסיס אורתונורמלי של R^n .
ב. תהי $T: R^n \rightarrow R^n$ העתקה לינארית,
ונניח שיש בסיס אורתונורמלי $\{u_1, \dots, u_n\}$ של R^n ,
כך שגם הקבוצה $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי של R^n .
הוכח כי T היא העתקה אורתוגונלית.

7) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. הוכח שמטריצה, שמייצגת העתקה אורתוגונלית לפי בסיס אורתונורמלי, היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית.
 ב. הוכח שכל העתקה לינארית, שהמטריצה המייצגת שלה בבסיס אורתונורמלי כלשהו היא אורתוגונלית, היא בהכרח העתקה אורתוגונלית.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו את הנוסחה עבור ההעתקה T :

- א. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.
 ב. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y = \sqrt{3}x$.
 ג. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת הסיבוב בזווית 30° ב- $\mathbb{R}^2$.

9) בכל אחד מהסעיפים הבאים תאר את פעולת ההעתקה מבחינה גיאומטרית. השתמש במושגים שיקוף וסיבוב.

$$\begin{array}{ll} \text{א. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{ב. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{ג. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{ד. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

* את סעיף ד' פתור בשתי דרכים שונות.

10) תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית, שמסובבת וקטור ב- θ מעלות נגד כיוון השעון. מצא נוסחה עבור ההעתקה T .

11) תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y = \tan \frac{\theta}{2} x$. מצא נוסחה עבור ההעתקה T .

12) תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה אורתוגונלית. הוכח ש- T היא בהכרח העתקת סיבוב, או העתקת שיקוף.

תשובות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

$$(8) \quad \text{א. } T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \right) \quad \text{ב. } T(x, y) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)$$

$$\text{ג. } T(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)$$

$$(9) \quad \text{א. שיקוף ביחס לישר } y = 0.4142x \quad \text{ב. שיקוף ביחס לישר } y = \frac{1}{2}x$$

ג. סיבוב של 90 מעלות במישור.

$$\text{ד. דרך I: סיבוב של 90 מעלות ולאחריו שיקוף ביחס לישר } y = \frac{1}{2}x$$

$$\text{דרך II: שיקוף ביחס לישר } y = -\frac{1}{3}x$$

$$(10) \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(11) \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(12) שאלת הוכחה.