אלגברה ליניארית

תוכן העניינים

אלגברה ליניארית

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

שאלות

1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} x-y=0 \\ 2x+y=3 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{matrix}$

2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{matrix}$

בשאלות **3-5** בצע על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$

$R_3 \to R_3+R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2+R_1$

$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3-3R_2$

5) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1+3R_3, R_2 \to R_2+3R_3$

$R_1 \to 5R_1-8R_2$

6) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

בשאלות **7-15** הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת**
(בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

7)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

8)
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

10)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

11)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

12)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

14)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

15)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$$
$F=\mathbb{C}$, $F=\mathbb{R}$

* בשאלה **15**, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{R}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{C}$.

בשאלות **27-16** פתור את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

16)
$$\begin{aligned}2x+3y&=8\\5x-4y&=-3\end{aligned}$$

17)
$$\begin{aligned}4x+8y&=20\\3x+6y&=15\end{aligned}$$

18)
$$\begin{aligned}8x-4y&=10\\-6x+3y&=1\end{aligned}$$

19)
$$\begin{aligned}2x_1-x_2-3x_3&=5\\3x_1-2x_2+2x_3&=5\\10x_1-6x_2-2x_3&=32\end{aligned}$$

20)
$$\begin{aligned}x+2y+3z&=-11\\2x+3y-z&=-5\\3x+y-z&=2\end{aligned}$$

21)
$$\begin{aligned}x+2y+3z&=3\\4x+6y+16z&=8\\3x+2y+17z&=1\end{aligned}$$

22)
$$\begin{aligned}x+3y&=2\\2x+y&=-1\\x-y&=-2\end{aligned}$$

23)
$$\begin{aligned}4x-7y&=0\\8x-14y&=2\\-16x+28y&=4\end{aligned}$$

24)
$$\begin{aligned}3x-2y&=1\\-9x+6y&=-3\\6x-4y&=2\end{aligned}$$

25)
$$\begin{aligned}x+2y-3z+2t&=2\\2x+5y-8z+6t&=5\\6x+8y-10z+4t&=8\end{aligned}$$

26)
$$\begin{aligned}x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3\\3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2\\2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0\end{aligned}$$

27)
$$\begin{aligned}x+2y+2z&=2\\3x-2y-z&=5\\2x-5y+3z&=-4\\2x+8y+12z&=0\end{aligned}$$

28) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל **השדה** $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i\\iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i\\(-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i\end{aligned}$$

א. $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

ב. $\mathbf{F}=\mathbb{C}$

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

2) א. $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

6) א. $R_1 \to 2R_1 + R_2$ ב. $R_2 \to R_2 - 4R_1$ ג. $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15) $\underset{F=\mathbb{C}}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $\underset{F=\mathbb{R}}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

16) $(x,y)=(1,2)$ **17)** $(x,y)=(5-2t,t)$ **18)** ϕ

19) ϕ **20)** $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

21) $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$ **22)** $(x,y)=(-1,1)$

23) ϕ **24)** $(x,y)=\left(\frac{1+2t}{3},t\right)$

25) $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$ **26)** ϕ

27) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

28) א. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$ ב. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$

מערכות עם פרמטר

שאלות

בשאלות **1-6** מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

1)
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

בשאלות **7-9** מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

7)
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

8)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

9)
$$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

בשאלות **10-12** מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

10)
$$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

11)
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

12)
$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$

13) נתונה מערכת המשוואות:
$$x+az=1$$
$$y+2z=2$$
$$bx+cy+dz=3$$

א. מצא תנאי עבור a,b,c,d, כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b,c,d, כך שלכל a, למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

14) נתונה המערכת:
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}.$$

א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת:

1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.

ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.

ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$.
האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.

ח. מצא לאיזה ערך של k, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

תשובות סופיות

1) .1 $k \neq 1, k \neq -2$ .2 $k=1$ .3 $k=-2$

2) .1 $k \neq 1, k \neq -2$ .2 $k=-2$ .3 $k=1$

3) .1 $k \neq -1, k \neq \frac{4}{7}$ .2 $k=\frac{4}{7}$ .3 $k=-1$

4) .1 $k \neq 1, k \neq -0.4$ .2 $k=1, k=-0.4$

5) .1 $k \neq \pm 1, k \neq -2$ .2 $k=\pm 1, k=-2$

6) .1 $k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$ .3 $k=-1, k=-3, k=2$

7) .1 $k=-1$ .2 $k \neq \pm 1$ .3 $k=1$

8) .2 $k=3$ .3 $k \neq 3$

9) .1 $k \neq 1$ .2 $k=1$

10) .1 $a \neq 2$ .2 $a=2, b \neq -3$ .3 $a=2, b=-3$

11) .2 $b \neq 2.5$ או $a \neq -6$. .3 $a=-6, b=2.5$

12) .2 $a=2, b \neq 2$ .3 $a=2, b=2$ או $a \neq 2$.

13) א. $ab+2c \neq d$ ב. $b=0, c=1.5, d=3$

14) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$

ג. .1 $k \neq -1$, $k \neq 2$ . .2 $k=-1$ .3 $k=2$ ד. $(x,y,z)=(1+0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k=\pm 2$ ו. $k=-2$ ז. $k=2$, לא. ח. $k=-2$

מערכת משוואות הומוגנית

שאלות

1) פתור את המערכת הבאה. על סמך הפתרון, קבע את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה:
$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ 4x-2y+5z=12 \end{cases}$$

2) פתור את המערכת הבאה. על סמך הפתרון, קבע את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה:
$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

3) נתונה המערכת:
$$\begin{cases} x-y=1 \\ -x+2y-z=k \\ 2x+my+z=3 \end{cases}.$$

א. מצא את ערכי m, עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.

ב. עבור ערך m שמצאת ב-א, מצא את ערכי k, עבורם למערכת פתרון.

ג. עבור ערכי m, k שמצאת בסעיפים הקודמים, מצא את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבע את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

4) נתון שהחמישייה $(4t-2s+4,-t+s,2,t,s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבע אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.

ב. החמישייה $(4,0,2,0,0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.

ג. החמישייה $(4,0,2,1,1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.

ד. לכל a ממשי, החמישייה $(4a,0,2a,0,0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.

ה. החמישייה $(4t-2s,-t+s,0,t,s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ו. החמישייה $(0,1,0,1,2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

תשובות סופיות

1) פתרון כללי של המערכת $\left(4-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t+2,t\right)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $\left(-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t,t\right)$.

2) למערכת פתרון יחיד $(x,y,z)=(1,1,2)$.

למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $\left(0,0,0\right)$.

3) א. $m=-3$ ב. $k=-2$. ג. פתרון כללי של המערכת $(x,y,z)=(t,t-1,t)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא (t,t,t).

4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.

ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.

ז. הטענה לא נכונה.

שימושים של מערכות ליניאריות

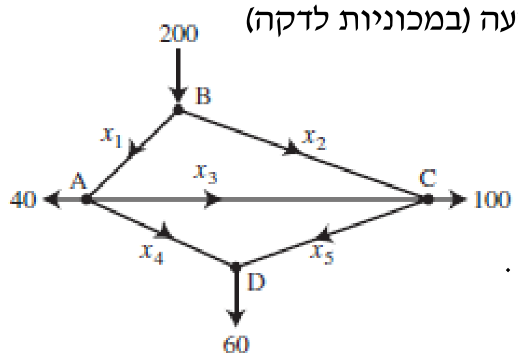
שאלות

1) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.

א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

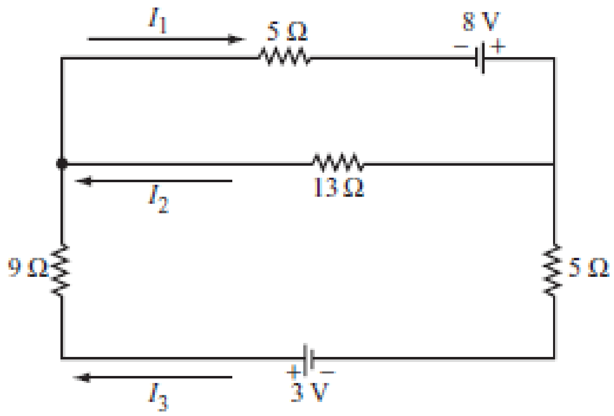
ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת, אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של x_1, אם ידוע ש-$x_4=0$.

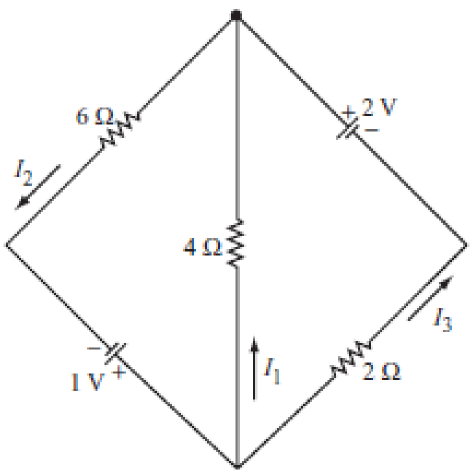


בשאלות **2-3** מצא את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):

2)



3)



* **בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות ליניאריות.**

תשובות סופיות

1) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1=100+x_3-x_5$, $x_2=100-x_3+x_5$, $x_4=60-x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1=40+x_3$, $x_2=160-x_3$, $x_4=0$, $x_5=60$. ג. 40.

2) א. $I_1=\frac{255}{317}, I_2=\frac{97}{317}, I_3=\frac{158}{317}$

3) $I_1=-\frac{5}{22}, I_2=\frac{7}{22}, I_3=\frac{6}{11}$

אלגברה ליניארית

פרק 2 - מטריצות

תוכן העניינים

מטריצות

שאלות

1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4\times6}, B_{4\times6}, C_{6\times2}, D_{4\times2}, E_{6\times4}$.
קבע אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשום את סדר המטריצה:

א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$

ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. E^TB

ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2) מצא את x,y,z, אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix}$.

בשאלות **3-8** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4) $2tr\left(D^2-2E\right)$

5) א. $4C^T+A$ ב. $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$

6) I_2BC

7) $tr\left(C^TC\right)$

8) $DABC$

תשובות סופיות

1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא
ו. 6×6 ז. 6×2 ח. לא. ט. 6×4 י. 6×6

2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

4) 230

5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

7) 63

8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

1) ידוע ש-A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
1. AA^T סימטרית.
2. $A + A^T$ סימטרית.
3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

2) ידוע ש-A ו-B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
3. $A^2 + B$ סימטרית.

3) ידוע ש-A ו-B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:
1. AB^3 אנטי-סימטרית.
2. AB^2 סימטרית.
3. $(A-B)^2$ סימטרית.

4) ידוע ש-A סימטרית ו-B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכח:
1. AB אנטי-סימטרית.
2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.
הוכח כי $A^4B^4 = B^4A^4$.

תשובות סופיות

1) 1,2,3
2) 2
3) 1,2,3
4) הוכחה.
5) הוכחה.

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות **1-9** מצא את ההפוכה של כל מטריצה.
בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ <u>הפיכה</u>?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ <u>איננה</u> הפיכה?

הנח שהמטריצות בשאלות **12-14** הן הפיכות מסדר n, וחלץ את X:

12) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^TP = A$

13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

14) $ABC^TX^{-1}BA^TC = AB^T$

15) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשב את X, אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1} = B + I$.

16) נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$. חשב את Y, אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

17) נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix}$.

חשב את B, אם נתון בנוסף כי: $5A^TB(I+2A)^{-2}=(7A)^{-2}$.

18) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.
הוכח כי A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I.

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.
הוכח כי A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I.

19) נתון כי: $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$.

א. חשב את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכח ש- A הפיכה,
ובטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $A-I$ הפיכה, ומצא את ההופכית שלה.

21) נתון: $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\Q^{-1}BQ=C\end{cases}$.

הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה D, כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:
הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C, אז A דומה ל- C.
(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

22) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\ge 2$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $AB=BA$.
ב. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח B הפיכה.
ג. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח A הפיכה.
ד. אם $(AB)^{100}=I$, אז בהכרח $(BA)^{100}=I$.
ה. אם $(AB)^{100}=0$, אז בהכרח $(BA)^{101}=0$.

23) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, עבורן $A^2+AB=I$.
א. הוכיחו ש-$AB=BA$.
ב. אם נתון בנוסף ש-B^2+BA היא מטריצת האפס,
הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

24) תהיינה A,B מטריצות כלשהן.
הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
א. אם $AB=I$ אז $B=A^{-1}$.
ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A,B מטריצות ריבועיות.
ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A,B מטריצות ריבועיות.
ד. המכפלה AB לא הפיכה.
ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2=A$.
הוכח:
א. למעט המקרה בו $A=I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2,
אז $tr(A)=1$ או ש-A מטריצה אלכסונית.
ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow$ $A^n=A$, לכל n טבעי.

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

10) $k \neq 1,\ k \neq -2$

11) $k = 1,\ k = -4$

12) א. $A^{-1}DC^{-1}$ ב. D ג. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$

13) א. $CD^2 - A$ ב. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$

14) $BA^T C (B^{-1})^T BC^T$

15) $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

16) $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$

17) $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

18) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$

19) א. $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I$

20) א. הוכחה. ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

21) הוכחה.

22) הוכחה.

23) הוכחה.

24) הוכחה.

25) הוכחה.

דרגה של מטריצה

שאלות

1) אמת את המשפט $rank\left(A\right)=rank\left(A^{T}\right)$,

על המטריצה: $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&10\\5&6&7&8&14\\6&8&10&12&24\\3&2&1&0&-6\end{pmatrix}$.

2) אמת את המשפט $rank\left(AB\right)\le\min\left\{rank(A),rank(B)\right\}$,

עבור: $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\6&8&10&12\\3&2&1&0\end{pmatrix}$.

3) נתונה המטריצה: $A=\begin{pmatrix}1-k&0&0&0\\0&1-k&0&0\\0&0&4-k&1\\0&0&0&10-k\end{pmatrix}$.

חשב את $rank\left(A\right)$.

4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n>1$.

הוכח או הפרך:

א. $rank\left(A\right)=n-1 \Rightarrow rank\left(A^{2}\right)=n-1$

ב. $rank\left(A\right)=n-1 \Leftarrow rank\left(A^{2}\right)=n-1$

5) נתון כי A,B מטריצות ריבועיות מסדר $n>1$.

הוכח או הפרך:

א. אם $rank\left(A\right)=rank\left(AB\right)$, אז בהכרח B הפיכה.

ב. ייתכן ש-$rank\left(A\right)<rank\left(AB\right)$.

ג. אם $rank\left(A\right)>rank\left(B\right)$, אז $rank\left(AB\right)>rank\left(B\right)$.

6) נתון $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$.

א. חשב את $rank(B)$, $rank(A)$.

ב. חשב את $rank\left(B^{10}A^{14}\right)$.

7) נניח כי A,B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n .

הוכיחו כי $rank\begin{pmatrix}A&A\\A&B\end{pmatrix}\le 2rank(A)+rank(B)$.

8) תהי A_{8x7} מטריצה, כך ש- $rank(A)=3$.

הוכח כי קיימות 3 מטריצות A_1,A_2,A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A=A_1+A_2+A_3$.

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר mxn שדרגתה k .

9) נתונות שתי מטריצות $B_{5\times3}$, $A_{3\times5}$.

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. $rank(AB)=rank(BA)$

ב. $rank(AB)\neq rank(BA)$

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) אם $k=1$, אז $rank(A)=2$. אם $k=4, k=10$, אז $rank(A)=3$.
אם $k\neq 1,4,10$ $rank(A)=4$.
4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.
ג. הטענה אינה נכונה.
6) א. $rank(B)=3$, $rank(A)=2$. ב. $rank\left(B^{10}A^{14}\right)=2$
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

1) בסעיפים הבאים מצא מטריצות A, $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$, המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$:

א. $$\begin{aligned}2x+y-z&=3\\x+2y-4z&=5\\6x+4y+z&=2\end{aligned}$$

ב. $$\begin{aligned}2x-3y+z+t&=1\\4x+y+2z&=4\\y+z+t&=1\\x-4z-2y&=10\end{aligned}$$

בשאלות **2-6** נתון כי: $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\1&-1&1\\1&-6&3\end{pmatrix}$.

בטא כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות לינאריות:

2) $A\underline{x}=\underline{b}$

3) $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$

4) $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$

5) $A\underline{x}=\underline{x}$

6) $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

7) פתור את מערכת המשוואות הבאה,

בעזרת המטריצה ההפוכה: $$\begin{aligned}2x-y+z&=3\\3x-2y+2z&=5\\5x-3y+4z&=11\end{aligned}$$.

8) פתור את מערכת המשוואות הבאה,

בעזרת המטריצה ההפוכה: $$\begin{aligned}x+4y+2z+4t&=1\\x+2y-z&=0\\y+z+t&=1\\x+3y-z-2t&=0\end{aligned}$$.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$(x,y,z)=(-1,4,-2)$, $(x,y,z)=(2,-8,4)$.

הוכח שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

10) למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים:
$(x,y,z)=(-1,4,-2)$, $(x,y,z)=(2,3,4)$.
מצא פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

11) נתונה המערכת: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.
מצא עבור אילו ערכים של הקבוע k, למערכת:
א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* בפתרונך השתמש במושג 'דרגה של מטריצה'.

12) נתון $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}$.
ידוע כי $rank(A)=3$, וידוע כי למערכת $Ax=b$ יש פתרון.
מצאו את הקבועים k,m.

13) נתונה מטריצה ריבועית A, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה 0.
הוכח ש-A מטריצה **לא** הפיכה.

14) נתונה מטריצה ריבועית הפיכה A, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה k.
הוכח שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
בטא קבוע זה בעזרת k.

15) מטריצה A מקיימת: $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=0$.
הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

16) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.
א. אם למערכת $(AB)x=0$ קיימים שני פתרונות שונים,
אז בהכרח A לא הפיכה.
ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x=0$,
אז למערכת $(BA)x=0$ קיים פתרון שונה מ-0.
ג. אם למערכת $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.
ד. אם למערכת $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז A לא הפיכה.
ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$,
אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

17) נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$: $Ax=d$ $(d\neq 0)$.
נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $rank(A)=2$.
ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
$u=(x_1,x_2,6,7),\ \ v=(y_1,y_2,1,2),\ \ w=(z_1,z_2,4,3)$.
מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
א. $x=au+bv+cw$
ב. $x=(a+b+1)u-av-bw$
ג. $x=au+bv+w$
ד. $x=(a-b)u+(b-c)v+(c-a)w$
ה. $x=(a+b)u-(av+bw+u)$, כאשר $a,b,c\in\mathbb{R}$.

הערה: בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
בהינתן מערכת הומוגנית $Ax=0$:
1. אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
2. מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות.
בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

תשובות סופיות

1) א. $\underline{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-4\\4&4&1\end{pmatrix}$

ב. $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\10\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2&-3&1&1\\4&1&2&0\\0&1&1&1\\1&-2&-4&0\end{pmatrix}$

2) $$\begin{aligned}4x-2y+4z&=1\\x-y+z&=2\\x-6y+3z&=3\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}-2y+4z&=1\\x-5y+z&=2\\x-6y-z&=3\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}(4+k)x-2y+4z&=1\\x+(k-1)y+z&=2\\x-6y+(3+k)z&=3\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}3x-2y+4z&=0\\x-2y+z&=0\\x-6y+2z&=0\end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned}2x+y+z&=3\\-2x-3y-6z&=6\\4x+y+z&=9\end{aligned}$$

7) $(x,y,z)=(1,2,3)$

8) $(x,y,z,t)=(-13,4,-5,2)$

9) הוכחה.

10) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-6\end{pmatrix}$

11) אם $k\neq 2$ או $k\neq -1$, אז יש פתרון אחד.
אם $k=2$, אז יש אינסוף פתרונות.
אם $k=-1$, אז אין פתרונות.

12) $m=5,k=9$

13) הוכחה.

14) סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

17) הוכחה.

מטריצה אלמנטרית

שאלות

1) רשום את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

2) רשום את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

3) הוכח או הפרך כל אחד מסעיפים א-ד.
נתון כי A מטריצה ריבועית, ו-B מתקבלת מ-A ע"י סדרת פעולות דירוג.
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א. B^2 מ-A^2.

ב. BA מ-A^2.

ג. B^2 מ-BA.

ד. B^2 מ-AB.

4) תהי $A\in M_3[R]$, כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.
נגדיר את המטריצות האלמנטריות $E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.
למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה E_2E_1A?

פתור בשתי דרכים:
דרך א' – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.
דרך ב' – בעזרת כפל מטריצות.

תשובות סופיות

(1
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}}_{e_3}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}_{A}$$

(2
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{e_3}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_4}\bullet$$
$$\bullet\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_5}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_6}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_7}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{e_8}=A$$

(3 הוכחה.

(4 -3

פירוק LU

שאלות

1) רשום את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}$.

2) רשום את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}$.

3) רשום את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

1) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{U}$$

2) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&-1&1&0\\3&-2&2&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&2&-4\\0&0&0&3\end{pmatrix}}_{U}$$

3) $$\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\\frac{3}{2}&-2&1&0&0\\-3&2&0&1&0\\4&-3&0&0&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\0&-7&5\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{U}$$

רגרסיה לינארית

שאלות

1) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש:

$price(x)$	$Demand / sales(y)$
49	124
69	95
89	71
99	45
109	18

א. מצא את ישר הרגרסיה של הבעיה.
ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54$.
ג. מה משמעות השיפוע של ישר הרגרסיה?
ד. מצא את סכום ריבועי השגיאות בחישוב הנ"ל (SSE).

הערה: הנח שהביקוש הוא ביחידות מוצר והמחיר הוא בדולרים.

תשובות סופיות

1) א. $f(x) = -1.7x + 211$ ב. הביקוש הוא 119.2 יחידות מוצר.
ג. העלאת מחיר המוצר ב-1$ תביא לירידה במכירות של 1.7 יחידות מוצר בחודש. ד. $SSE = 207.65$

אלגברה ליניארית

פרק 3 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

דטרמיננטות

שאלות

בשאלות **1-5** חשב את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

1) א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

2) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

3) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשב את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

6) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

7) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

בשאלות **8-10** חשב את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג :

8) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

בשאלות **11-12** הראה, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס :

11) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$

12) א. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix}$ ד. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

בשאלות 13-15 נתון כי: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשב:

13) $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16) הוכח כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

17) הוכח כי: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$.

18) חשב: $\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

בכל אחת מהשאלות **19-25**, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n.
חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה:

19) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ 0 & i=j\neq 1 \\ j & i<j \\ -j & i>j \end{cases}$

20) $a_{ij} = \begin{cases} j & i=j+1 \\ n & i=1, j=n \\ 0 & else \end{cases}$

21) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & else \end{cases}$

22) $a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & else \end{cases}$

23) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$

24)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 3(n-1) \end{pmatrix}$$

25)
$$a_{ij}=\begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \\ 0 & else \end{cases}$$

* בשאלה **25**:

1. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה.
2. הנח כי $a=3,\quad b=1,\quad c=2$, ומצא:
   א. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
   ב. את הדטרמיננטה, כאשר $n=20$.

26) חשב:
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix}.$$

בשאלות **28-27** נתון כי A ו-B מטריצות מסדר 3, $|A|=4,\ |B|=2$.
חשב:

27) א. $\left|ABA^{-1}B^{T}\right|$ ב. $|4A^2B^3|$

28) א. $|-A^{-2}B^{T}A^{3}|$ ב. $|-2A^2A^{T}adjB|$

29) נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכח: $|A|=|B|$.

30) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-$2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשב את $|B|$.

31) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשב את $|A|, |B|$.

32) הוכח: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $|adj(A_{nxn})|=|A|^{n-1}$.

33) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכח ש- $|A|=0$.

34) נתון: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$, ו- B הפיכה.
מצא את n.

35) נתון: $\det(A_{nxn})=2,\ \det(B_{nxn})=\frac{1}{3}$.
חשב: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.

תשובות סופיות

1) א. $ad-bc$ ב. 29 ג. -1
2) א. -1 ב. -3 ג. -14
3) א. 24 ב. 234 ג. -300
4) 9
5) 6
6) א. 0 ב. 0 ג. 3
7) א. 24 ב. 44 ג. 104
8) 120
9) 114
10) 6
11) פתרונות באתר : www.GooL.co.il
12) פתרונות באתר.
13) -8
14) 16
15) 9
16) הוכחה.
17) הוכחה.
18) $(k-1)^4(k+4)$
19) $n!$
20) $(-1)^{n-1}n!$
21) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$
22) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$
23) 1
24) $2\cdot 3^{n-2}$
25) 1. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$, $D_2=a^2-bc$, $D_3=a^3-2abc$
2.א. $D_n=2^{n+1}-1$ ב. $D_{20}=2^{21}-1$
26) 0
27) א. 4 ב. 2^{13}
28) א. -8 ב. -2^{11}
29) הוכחה.

30) $\frac{81}{32}$

31) $|A|=18, |B|=-2/3$

32) הוכחה.

33) הוכחה.

34) 7

35) 4^n

כלל קרמר

שאלות

בשאלות **1-3** פתור את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

1)
$$\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$$

4) נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש- $x=y=z=t=r$.

5) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

1) $x=1,\ y=2$

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$

3) $x=y=z=t=1$

4) א. $k\neq 1,\ k\neq -4$ ב. $k=-2$ ג. לא. ד. הוכחה.

5) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות **1-3** חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1} :

1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

4) נתון: $A=\begin{pmatrix}-9&26&-1&14&10\\13&-7&87&4&0\\71&35&3&0&0\\17&2&0&0&0\\2&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

א. חשב: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשב: $(A^{-1})_{1,5}$.

5) הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים,
אזי כל איברי A^{-1} גם הם מספרים שלמים.

6) נתון ש-A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.
הוכח ש-A^{-1} משולשית תחתונה.

7) נתון ש-A הפיכה.
הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

8) נתון: A,B הפיכות. C,D לא הפיכות.
האם המטריצות הבאות הפיכות:

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. AD ד. CD ה. AB

9) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה: $\begin{pmatrix}4&0&7&5&0\\0&0&3k&0&0\\-7k^2&2&4k&k&9+k\\3&0&4&2&-1\\-5&0&-8&-3&2\end{pmatrix}$.

10) ידוע ש- A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם $AB = 0$, אז $A = 0$.
ב. אם $|AB| = 0$, אז $A = 0$.
ג. אם $|AB| = 0$, אז $|A| = 0$.
ד. אם $AB = 0$, אז $|A| = 0$.

11) נתונות שתי מטריצות $A_{3\times5}$, $B_{5\times3}$.
הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
א. $|AB| = |BA|$
ב. $adj(AB) \neq adj(BA)$

12) אם B מתקבלת ממטריצה $A_{3\times3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4,
אז $|adj(A) \cdot B|$ שווה ל:
א. $4^3 |A|^3$
ב. $4^3 |B|^3$
ג. $4|B|^3$
ד. $4|A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית $A = (a_{ij})$ מסדר $n \geq 3$ המקיימת $a_{ij} = i + j - 1$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $|A| = 4$
ב. A הפיכה.
ג. $adj(A) = 0$
ד. $|A| = 0$

14) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A, אז:
א. בהכרח $\det(A) = \det(G)$ וגם $adj(A) = adj(G)$.
ב. בהכרח $\det(A) = \det(G)$, אך ייתכן ש $adj(A) \neq adj(G)$.
ג. ייתכן ש- $\det(A) \neq \det(G)$, אך בהכרח $adj(A) = adj(G)$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

15) תהי $A=\left(a_{ij}\right)$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 2$, כך ש- $a_{ij}=\begin{cases} i & i=j \\ 1 & i\neq j \end{cases}$.

לכל $1\leq i,j\leq n$, אז בהכרח מתקיים:

א. $|A|=n!-1$

ב. A הפיכה.

ג. $adj\left(A\right)$ לא הפיכה.

ד. אם $n=4$, אז $|Adj(A)|>214$.

16) תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 4$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $rank\left(A\right)=n-2$, אז בהכרח $adj\left(A\right)=0$.

ב. אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $adj\left(A\right)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $adj\left(A\right)=0$, אז בהכרח $A=0$.

17) A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ-A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4,

אז $adjB$ מתקבלת מ-$adjA$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $|Adj((-1+i)A)|=i$.

חשב $|\det(A)|$.

19) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.

הוכח את הטענות הבאות:

א. A הפיכה $\Leftrightarrow$ $Adj(A)$ הפיכה.

ב. $Adj\left(A^{-1}\right)=\left(Adj(A)\right)^{-1}$

ג. $|Adj(A)|=|A|^{n-1}$

תשובות סופיות

1) $adj(A)=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) א. 240 ב. 0.5

5) הוכחה.

6) הוכחה.

7) הוכחה.

8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.
ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

9) אם ורק אם $k=0$.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) ד

13) הוכחה.

14) ד

15) ד

16) הוכחה.

17) ד

18) $2^{\frac{-5}{2}}$

19) הוכחה.

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

1) א. חשב את שטח המקבילית שקדקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$ 2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$

ב. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(1,1,-1)$, $(-1,3,1)$, $(3,3,-2)$.

ד. חשב את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

1) א.1. 13. א.2. 14 ב. 22 ג. $3x-y+4z+2=0$ ד. 2

אלגברה ליניארית

פרק 4 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

מרחבים ותת-מרחבים

סימון

R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R.

$M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R.

$F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה R.

שאלות

בשאלות **1-7** בדוק האם W תת-מרחב של R^3 :

1) $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$

2) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$

3) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$

4) $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$

5) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$

6) $W=\{(a,b,c)\,|\,c-b=b-a\}$
כלומר, a , b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

7) $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$
כלומר, a , b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

בשאלות **15-8** בדוק האם W תת-מרחב של $M_n[R]$:

8) W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A|\ A=A^T\}$.

9) W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B.
כלומר, $W=\{A|\ AB=BA\}$.

10) W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.
כלומר, $W=\{A|\ |A|=0\}$.

11) W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A|\ A^2=A\}$.

12) W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

13) W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס.
כלומר, $W=\{A|\ AB=0\}$.

14) W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A|\ tr(A)=0\}$.

15) W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות **21-16** בדוק האם W הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

16) W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x)|\ p(4)=0\}$.

17) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

18) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≤ 4.
כלומר, $W=\{p(x)|\deg(p)\le 4\}$.

19) W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

20) W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n, כאשר $4\le n\le 7$.

21) $W=\{p(x)|\ p(0)=1\}$

בשאלות **30-22** בדוק האם W הוא תת-מרחב של $F[R]$:

22) W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x) \mid f(-x)=f(x)\}$.

23) W מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x) \mid |f(x)| \le M\}$.

24) W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

25) W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

26) W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

27) $W=\left\{f(x) \mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

28) $W=\{f(x) \mid f'(x)=0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

29) $W=\{f(x) \mid f'(x)=1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

30) $W=\{f(x) \mid f(x)=f(x+1)\}$

31) בדוק האם $W=\{(z_1,z_2,z_3) \mid z_2=\overline{z}_1, z_3=z_1+\overline{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של C^3 :
א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.
ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

32) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
א. מצא וקטור b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.
ב. מהי קבוצת כל הווקטורים b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון?
ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של R^5 ?

33) יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה F.

א. מצאו תנאי על k, עבורו הקבוצה $W=\{p\in V \mid p(0)=p(1)=p(2)=k\}$, הינה תת-מרחב של V.

ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- V, שפורשים את W.

הערה: לפתרון סעיף זה עבור קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

תשובות סופיות

1)	כן	**2)**	כן	**3)**	כן	**4)**	לא	**5)**	לא
6)	כן	**7)**	לא	**8)**	כן	**9)**	כן	**10)**	לא
11)	לא	**12)**	כן	**13)**	כן	**14)**	כן	**15)**	כן
16)	כן	**17)**	לא	**18)**	כן	**19)**	כן	**20)**	לא
21)	לא	**22)**	כן	**23)**	כן	**24)**	כן	**25)**	כן
26)	כן	**27)**	לא	**28)**	כן	**29)**	לא	**30)**	כן

31) א. כן   ב. לא

32) א. $u=(1,0,0,0,0)$ ב. $B=\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) \mid -b_1+b_2+2b_3\neq 0\}$
ג. לא.

33) א. $k=0$ ב. $W=span\{2x-3x^2+x^3, 6x-7x^2+x^4\}$

צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

שאלות

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1 = (4,1,1,5), \quad u_2 = (0,11,-5,3), \quad u_3 = (2,-5,3,1), \quad u_4 = (1,3,-1,2)$$

1) א. האם u_1 הוא צירוף ליניארי של u_4?
ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

2) א. האם u_3 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?
במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

3) א. האם u_4 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?
במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

4) נתון $v = (4,12,k,-2k)$.
א. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

5) נתון $v = (a,b,c,d)$.
א. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

6) הבע את הווקטור $v=(10,8,0,14)$ כצירוף ליניארי של u_1, u_2 ו- u_3.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הבע את הווקטור $v=(7,10,-2,11)$ כצירוף ליניארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}4&1\\1&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&11\\-5&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&-5\\3&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}$$

א. בדוק האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.
ב. במידה והמטריצות תלויות, רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף ליניארי של יתר המטריצות.
ג. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

9) נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x)=4+x+x^2+5x^3$, $p_2(x)=11x-5x^2+3x^3$, $p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3$, $P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3$.
א. בדוק האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.
ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשום כל פולינום כצירוף ליניארי של שאר הפולינומים.
ג. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

10) עבור איזה ערכים של a,b,c, הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$$

בשאלות **13-11** נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשום כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

11) $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

12) $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

13) $\{u+v,v+w,w\}$

בשאלות **14-15** בדוק האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$, תלויים ליניארית ב- C^3:

14) מעל $\mathbb{C}$.

15) מעל $\mathbb{R}$.

16) נתבונן ב- $V=R$ כמרחב וקטורי מעל השדה Q.
הוכיחו כי הקבוצה $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- R, כשהוא מרחב וקטורי מעל Q.

17) תהי $A_{m\times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1,A_2,\dots A_n$.
הוכיחו את הטענה הבאה:
למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in span\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$.

18) לפניכם 3 תת-קבוצות של R^4:

$$U=span\{(1,2,2,1),(1,1,-1,-1),(0,0,1,1)\}$$
$$W=span\{(1,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1)\}$$
$$V=span\{(2,3,1,0),(1,2,1,0),(1,4,3,1)\}$$

א. האם $U=W$?
ב. האם $U=V$?

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 2u_3 + u_2,\ \ u_2 = u_1 - 2u_3$.
3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 4u_4 - u_2,\ \ u_2 = 4u_4 - u_1$.
4) א+ב+ג. $k = -4$
5) $a = 5t + 3s,\ b = 4t - 13s,\ c = 7s,\ d = 7t$
6) $v = 2u_1 + u_2 + u_3$, אינסוף.
7) $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$, אינסוף.
8) א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$
ב. $A = B + 2C,\quad B = A - 2C,\quad C = 0.5A - 0.5B,\quad D = 0.25A + 0.25B$
9) א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$
ב. $p_1 = p_2 + 2p_3,\ \ p_2 = p_1 - 2p_3,\ \ p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2,\ \ p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2$
10) לכל ערך של a, b, c.
11) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z,\ \ y = 0.5x + 0.5z,\ \ z = 2y - x$.
12) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z,\ \ y = 0.5x + 0.5z,\ \ z = 2y - x$.
13) בלתי תלויים ליניארית.
14) תלויים.
15) בלתי תלויים ליניארית.
16) הוכחה.
17) הוכחה.
18) א. כן. ב. לא.

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

1) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

2) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2x2}[R]$:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&16\\7&8\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

3) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

א. $\{1+x,\ x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

4) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3 ?

ב. מצא קבוצה T', שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה ליניארית ב- T.

ג. השלם את T' לבסיס של R^3.

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

5) לפניך 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

.1 $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ .2 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ .3 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
מצא בסיס וממד ל- W, U ו- V.

6) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

7) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

8) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

9) נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

10) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \;\middle|\; A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

11) נתון $U=\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=0\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

12) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U.

ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V.

13) לפניכם תת-מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצא בסיס וממד ל- U.

14) לפניכם תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות **15-16** מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציין את דרגת המטריצה (rank) :

15) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
2) א. לא. ב. לא. ג. כן.
3) א. לא. ב. לא. ג. כן.
4) א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$
5) א. W - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.
U - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.
V - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.
6) בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.
7) בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.
8) בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.
9) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3.
10) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 0.
11) בסיס: $\{(p_1(x)=-1+x^3,\ \ p_2(x)=-1+x^2,\ \ p_3(x)=-1+x)\}$, ממד: 3.
12) א. בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.
ב. בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.
13) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\3&-7\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2.
14) בסיס: $\{1+x-x^2+2x^3,-3x+3x^2-7x^3\}$, ממד: 2.
15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.
מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.
16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.
מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.

חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מחבים

שאלות

1) לפניך 3 מערכות של משוואות ליניאריות הומוגניות:

$$1)\begin{cases}x+y-z+2w=0\\3x-y+7z+4w=0\\-5x+3y-15z-6w=0\end{cases}\quad 2)\begin{cases}x-y+z+w=0\\x+2z-w=0\\x+y+3z-3w=0\end{cases}\quad 3)\begin{cases}x-y+z+w=0\\2x-2y+2z+2w=0\end{cases}$$

נסמן ב- V, U, W את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 2,1 ו-3 בהתאמה.

א. מצא בסיס וממד ל- U, W ו- V.

ב. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.

ג. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

2) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב R^4:

$$U=sp\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V=sp\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U.

ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V.

ג. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.

ד. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$ (פתור בשתי דרכים שונות).

ה. האם $U+V=R^4$?

ו. האם $U\oplus V=R^4$?

3) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x-x^2+2x^3,3-x+7x^2+4x^3,-5+3x-15x^2-6x^3\}$$

$$V=sp\{1-x+x^2+x^3,1+2x^2-x^3,1+x+3x^2-3x^3,5+x+5x^2+8x^3\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.

ב. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

4) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x+x^3,1+2x+x^2+2x^3,-1+2x+3x^2+2x^3\}$$

$$V=\{p(x)\in P_3[R]\,|\,p(1)=p(-1)=0\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.

ב. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

5) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:
$$U = sp\left\{1+x, x+x^2, 1+x^3\right\}$$
$$V = \left\{ p(x) \in P_3[R] \middle| p'(0)=0 \right\}$$
מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

6) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $M_2[R]$
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y-5z & x-y+3z \\ -x+7y-15z & 2x+4y-6z \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in R \right\}$$
$$W = sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\}$$
א. מצא בסיס וממד ל- U ול- W.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. אשר את משפט הממד עבור תרגיל זה.

7) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_2[R]$:
$$U = \left\{ A \in V \mid A = -A^T \right\} \ , \ W = \left\{ A \in V \mid A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
א. מצא בסיס וממד ל- U ול- W.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. האם $U+W=V$?
ה. האם $U \oplus W = V$?

8) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_3[R]$:
$U = \left\{ A \in V \mid A = A^T \right\}$, $W = \{A \in V \mid$ משולשית עליונה $A\}$
א. מצא בסיס וממד ל- U.
ב. מצא בסיס וממד ל- W.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ה. $U \oplus W = V$

9) יהיו U ו- W שני תת-מרחבים ממימד 2 של R^3.
הוכח כי $\dim(U \cap W) \neq 0$.

10) יהי V מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V ממימד 9.
א. הוכח כי $U+W=V$.
ב. חשב $\dim(U\cap W)$.

11) יהי V מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V ממימד 7.
מצא את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

12) יהי V מרחב וקטורי ממימד 7.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים של V, כך ש- $\dim U=4,\ \dim W=5$ $(U\not\subseteq W)$.
מצא את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

13) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. $\phi\neq A,B\subseteq V$.
נגדיר: $A+B=\{a+b\,|\,a\in A,\ b\in B\}$.
הוכח או הפרך:
א. $sp(A+B)=sp(A)\cup sp(B)$
ב. $sp(A\cup B)=sp(A)\cup sp(B)$
ג. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$
ד. $sp(A+B)=sp(A)+sp(B)$
ה. $sp(A\cap B)=sp(A)\cap sp(B)$

14) יהיו U ו- W תת-מרחבים של R^3, המוגדרים על ידי:
$U=\{(a,b,c)\,|\,a=b=c\},\ W=\{(0,b,c)\}$.
הוכח כי $U\oplus W=R^3$.

15) יהי $V=M_n[R]$.
א. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות הסימטריות.
יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות האנטי-סימטריות.
הוכח כי $U\oplus W=V$.
ב. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות העליונות.
יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות התחתונות.
הוכח כי $U\oplus W\neq V$.

תשובות סופיות

1) א. $\dim W = 2$, $B_W = \{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}$

$\dim U = 2$, $B_U = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$

$\dim V = 3$, $B_V = \{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$

ב. $\dim(U+V) = 3$ $B_{U+V} = \{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$

ג. $\dim(U \cap V) = 2$, $B_{U\cap V} = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$

2) א. $\dim U = 2$, $B_U = \{(1, 1, -1, 2),\ (0, 2, -5, 1)\}$, $\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 0 \\ -3x - y + 2t = 0 \end{cases}$

ב. $\dim V = 3$, $B_V = \{(1, -1, 1, 1),\ (0, 1, 1, -2),\ (0, 0, 2, -5)\}$, $-8x - y + 5z + 2t = 0$

ג. $\dim(U+V) = 4$, $B_{U+V} = \{(1, 1, -1, 2),\ (0, -4, 10, -2),\ (0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 1)\}$

ד. $\dim(U \cap V) = 1$, $B_{U\cap V} = \{(5, 1, 5, 8)\}$ ה. כן. ו. לא.

3) א. $\dim(U+V) = 4$, $U + V = sp\{1 + x - x^2 + 2x^3, 2x - 5x^2 + x^3, x^2, x^3\}$

ב. $\dim(U \cap V) = 1$, $B_{U\cap V} = \{5 + x + 5x^2 + 8x^3\}$

4) א. $\dim(U+V) = 3$, $B_{U+V} = \{1 + x + x^3, x + x^2 + x^3, x^2 + 2x^3\}$

ב. $\dim(U \cap V) = 1$, $B_{U\cap V} = \{-1 + x^2\}$

5) $\dim(U \cap V) = 2$, $B_{U\cap V} = \{-1 + x^2, 1 + x^3\}$

6) א. $\dim(U) = 2$, $B_U = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}\right\}$

$\dim(W) = 3$, $B_W = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}\right\}$

ב. $\dim(U+W) = 4$, $B_{U+W} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

ג. $\dim(U \cap W) = 1$, $B_{U\cap W} = \left\{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\right\}$

ד. ראו בווידאו.

7) א. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim W=2$, $B_U=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim U=1$,

ב. $\dim(U+W)=3$, $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$,

ג. $\dim(U\cap W)=0$, $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

ד. לא. ה. לא.

8) א.

$$B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim U=6$

ב.

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim W=6$

ג.

$$B_{U+W}=\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

$\dim(U+W)=9$

ד. $\dim(U\cap W)=3$, $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

ה. לא.

9) הוכחה.

10) א. הוכחה. ב. 8

11) $\dim(U\cap W)=4,5,6\ or\ 7$, $\dim(U+W)=8,\ 9\ or\ 10$

12) $\dim(U+W)=6\ or\ 7$, $\dim(U\cap W)=2,3 or\ 4$

13) הוכחה.

14) הוכחה.

15) הוכחה.

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\ \ B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$
2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$
3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

2) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$B_1=\{1+x,x,\ x+x^2\}\ ,\ \ B_2=\{\ 1+x^2,x+x^2,\ x^2\ \}$.

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

3) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$
$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B.
סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.
ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E.
סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.
ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_B^E$.

4) יהי V מרחב וקטורי ויהי B בסיס של V.
הוכח כי הווקטורים $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ בת״ל,
אם ורק אם וקטורי הקואורדינטות שלהם,
לפי הבסיס B , $\{[u_1],[u_2],...,[u_m]\}$, הם בת״ל.
הסבר כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

תשובות סופיות

1) א. $(x,y-x-z,z)$ ב. $(x,y,z-x-y)$ ג. $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$
ד. $\left[M\right]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

2) א. $(a,b-a-c,c)$ ב. $(a,b,c-a-b)$ ג. $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

3) א. $(x,y-x,z-y+x,t-z+y-x)$ ב. (x,y,z,t) ג. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$

4) שאלת הוכחה.

תרגילי תיאוריה מתקדמים

שאלות הוכחה

1) יהי V מרחב, ותהי $A=\{v_1,v_2\cdots,v_k\}$ קבוצה; $b\in V$.
הוכיחו כי: $sp(A\cup\{b\})=sp(A) \Leftrightarrow b\in sp(A)$.

2) יהיו u,v,w וקטורים, כך ש- $\{u,v\}$ בלתי-תלויה ליניארית ו- $u\in sp(\{v,w\})$.
א. הוכיחו ש- $w\in sp(\{u,v\})$.
ב. נתון גם כי עבור וקטור נוסף z, הקבוצה $\{u,w,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו שגם הקבוצה $\{u,v,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.

3) יהי U מרחב, תהי $A=\{u_1,u_2\dots,u_n\}\subseteq U$ ויהי $u\in U$ וקטור כלשהו.
הוכח כי אם $u\in sp(A)$, וכן $u\notin sp(A-\{u_n\})$, אז $u_n\in sp(u_1,u_2,\dots,u_{n-1},u)$.

4) יהי V מרחב, $b\in V$ ו- $A=\{v_1,v_2\dots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו כי $A\cup\{b\}=\{v_1,v_2\dots,v_k,b\}$ בת"ל $\Leftrightarrow b\in sp(A)$.

5) יהי V מרחב n מימדי, תהי $A=\{v_1,v_2\dots,v_k\}\subseteq V$ ויהי $b\in sp(A)$.
למשוואה $x_1v_1+x_2v_2+\dots x_kv_k=b$ **אין** פתרון יחיד.
הוכח או הפרך:
א. $k\geq n$
ב. A פורשת את V.
ג. A בהכרח תלויה ליניארית.

6) יהי V מרחב, $b\in V$ ו- $A=\{v_1,v_2\dots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכח או הפרך:
א. אם $b\notin sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\dots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ב. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\dots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ג. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\dots v_n+b\}$ היא ת"ל.

7) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v_1,v_2,v_3 \in V$.
נסמן: $S=\{v_1,v_2,v_3\},\quad T=\{av_1+v_2+v_3,v_1+av_2+v_3,v_1+v_2,av_3\}$.
הוכח או הפרך:
א. $spS \subseteq spT$
ב. אם S בלתי תלויה ליניארית ואם $a \neq -2,1$, אז בהכרח $sp(T)=sp(S)$.
ג. $\dim(spT) \le 2$
ד. $\dim(sp(T))=\dim(sp(S))$

8) יהי V מרחב ותהיינה $A=\{v_1,v_2,\dots,v_k\},\ B=\{w_1,w_2,\dots,w_m\}$ קבוצות וקטורים ב- V.
הוכח או הפרך:
א. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$
ב. אם $A\cup B$ בת"ל, אז A,B שתיהן בת"ל.
ג. אם $\dim V=m+k$ וגם A,B שתיהן בת"ל, אז $A\cup B$ בת"ל.
ד. אם $A\cup B$ בת"ל, אז $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

9) יהי V מרחב ויהיו $U,W \subseteq V$ תמר"ים.
תהיינה $B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}\quad A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}\subseteq U,$ שתי קבוצות בת"ל.
הוכח כי אם $U\cap W=\{0\}$, אז $A\cup B$ בת"ל.

10) יהי V מרחב ויהיו U,W תמר"ים שלו.
הוכח כי $U\cup W$ מרחב $\Leftrightarrow W\subseteq U$ או $U\subseteq W$.

לפתרונות המלאים בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

שאלות אמריקאיות

11) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
אז בהכרח מתקיים:
א. מרחב השורות של A^2 מוכל במרחב השורות של A.
ב. אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
ג. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

12) נסמן $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$, $W=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}\right\}$
שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$.
אזי בהכרח מתקיים:
א. $U=W$
ב. $\dim U=\dim W$
ג. $U\subseteq W$
ד. אם $U+W=\mathbb{R}^3$, אז $U\cap W=\{0\}$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

13) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף ש- $Sp(A)=\mathbb{R}_5[x]$.
אזי בהכרח מתקיים:
א. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.
ב. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.
ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
ד. A תלויה ליניארית.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

14) במרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ מעל שדה $\mathbb{R}$,

תהי $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ-$\mathbb{R}^2$.

אז מטריצה P המקיימת $[v]_A=Pv$ לכל $v\in\mathbb{R}^2$, שווה ל:

א. $P=\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}$

ב. $P=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$

ג. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}$

ד. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\-3&1\end{pmatrix}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

15) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהיינה A,B קבוצות שונות לא ריקות וזרות של וקטורים מ-V. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה ליניארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם $A\cup B$ תלויה ליניארית,
אז בהכרח A תלויה ליניארית או B תלויה ליניארית.

ג. אם A,B בלתי תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה ליניארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה ליניארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

16) אם W תת מרחב של מרחב וקטורי V, אז:

א. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W, וכל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V.

ב. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W, אבל לא כל בסיס של W מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של V.

ג. לא כל בסיס של V מכיל בהכרח בסיס כלשהו של W, אבל כל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

17) יהיו U,W שני תתי-מרחבים של מרחב V,
כך ש- $\dim V = n,\ \dim U = \dim W = n-1$.
אז:

א. $n-2 \le \dim(U \cap W)$

ב. אם $U \ne W$, ייתכן ש- $U \subset W$.

ג. קיים $v \in V$, כך ש- $V = U + sp\{v\}$ ו- $U \cap sp\{v\} = \{0\}$.

ד. אם $U + sp\{v\} = V$ ו- $U \cap sp\{v\} = \{0\}$, אז $v \in W$.

18) נניח כי v_1,v_2,v_3,v_4 הם וקטורים במרחב ליניארי V.
הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $Span\{v_1,v_2\} \cap Span\{v_3,v_4\}$ והווקטורים v_1,v_2,v_3,v_4 שונים זה מזה,
אז הווקטורים $v_1 - v_2$ ו- $v_3 - v_4$ הם בת"ל.

ב. אם v_1,v_2 בת"ל וגם v_3,v_4 בת"ל, וכן $Span\{v_1,v_2\} \cap Span\{v_3,v_4\} = \{\underline{0}\}$,
אז v_1,v_2,v_3,v_4 הם בת"ל.

19) אם V,W תת מרחבים של מרחב וקטורי U, ומתקיים:
$\dim U = 6, \dim V = 5, \dim W = 3$,
אז $\dim(V \cap W)$ יכול להיות:

א. 0
ב. 1
ג. 2
ד. 3
ה. 4
ו. 5

20) V,W תת-מרחבים ממימד 3 של $I\mathbb{R}^7$, $\{w_1,w_2,w_3\}$ בסיס של W ו- $\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V, אז:

א. $\{v_1,w_1,v_2,w_2,v_3,w_3\}$ בלתי תלויה ליניארית.

ב. $\{v_1,w_1,v_2,w_2,v_3,w_3\}$ פורשת את $V+W$.

ג. $\{v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3\}$ בת"ל.

ד. $\{v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3\}$ פורשת את $V+W$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

21) אם A מטריצה **לא** ריבועית, אז בהכרח:

א. מרחב השורות של A^t שווה למרחב השורות של A.

ב. מרחב השורות של A^t שונה ממרחב השורות של A.

ג. ממד מרחב השורות של A^t שווה לממד מרחב השורות של A.

ד. ממד מרחב השורות של A^t שונה מממד מרחב השורות של A.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

22) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של AB מוכל במרחב השורות של A.

ב. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.

ג. אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.

ד. אם $AB=2I_n$, אז בהכרח $BA=2I_n$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

23) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.

ב. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.

ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.

ד. A בלתי תלויה ליניארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

24) יהי a מספר ממשי ויהיו $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a\\a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a\\1\\a\end{pmatrix}\right\},W=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\a\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\1\\a\\1\end{pmatrix}\right\}$
שני תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^4$. בהכרח מתקיים:

א. $U\cap W=\{0\}$ לכל ערכי a.

ב. $U\cap W\neq\{0\}$ לכל ערכי a.

ג. $\dim(U\cap W)=3$ לכל ערכי $a\neq\pm 1$.

ד. $\dim(U\cap W)=1$ לכל ערכי $a\neq\pm 1$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

25) נתונות המטריצות $R=\begin{bmatrix}2 & 5 & 5\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$ $T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$.

אז בהכרח מתקיים:

א. $rank(T)=1,\ \ rank(R)=2$

ב. $rank\left(R^3T^5\right)=1$

ג. מרחב השורות של R^3T^5 שווה למרחב השורות של T^5.

ד. $T^{100}=0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

26) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהי $A=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ קבוצה של וקטורים מ- V $(1\le n)$. נניח בנוסף ש- $\dim(V)=n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם A בלתי תלויה לינארית, אז A פורשת את V.

ב. אם A קבוצה פורשת ל- V, אז A בלתי תלויה לינארית.

ג. ייתכנו מקרים בהם A פורשת את V, אך A תלויה לינארית.

ד. ייתכנו מקרים בהם A בלתי תלויה לינארית, אך A אינה פורשת את V.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

27) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהיינה A,B קבוצות שונות לא ריקות של וקטורים מ- V. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם A,B תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cap B$ תלויה לינארית.

ג. אם A,B בלתי תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

28) וקטור הקואורדינטות של הפולינום $2x^3+12x^2-x+11$,
ביחס לבסיס $\{2x^3+3x^2+2,x+1,x^3+x^2,2x^2+2\}$, הוא:

א. $(2,2,-2,4)$

ב. $(4,-2,-1,2)$

ג. $(2,-1,-2,4)$

ד. $(4,-1,2,2)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

29) תהי A מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:

א. אם שורות A בת"ל, אזי עמודות A בת"ל.

ב. אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה ריבועית.

ג. אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה הפיכה.

ד. אם שורות A בת"ל, אזי בהכרח למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

30) נתונים תת-מרחבים של $\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$:

$U=\left\{\left(a,b,c,d\right)\in\mathbb{R}^4 \middle| a+b+c=d\right\}$

$W=sp\left\{\left(1,0,1,1\right),\left(0,2,1,0\right),\left(0,1,1,1\right),\left(1,1,1,0\right)\right\}$

א. מצאו בסיס וממד עבור $U,\ W,\ U\cap W$.

ב. עבור תת מרחבים K,L של מרחב וקטורי V, הגדירו את $K+L$.

31) A מטריצה **לא** ריבועית, כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית $Ax=0$ פתרון יחיד, אז:

א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ ללא פתרון.

א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

ב. יש מערכת לא הומוגנית $A^t y=c$ ללא פתרון.

ג. יש מערכת לא הומוגנית $A^t y=c$ עם יותר מפתרון אחד.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

32) תהי A מטריצה ממשית ***לא ריבועית*** מסדר $m\times n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$, אז בהכרח $m<n$.

ב. ייתכן ש-$A^tA=I_m$ וגם $AA^t=I_n$.

ג. אם $rank\left(A\right)=m$, אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות.

ד. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

33) נתונות מטריצות ממשיות A מסדר 2×4 ו-B מסדר 4×4,
כך ש- $rank\left(B\right)=3$, $rank\left(A\right)=2$.

הוכיחו כי $AB\neq 0$.

34) תהי A מטריצה ממשית מגודל $m\times n$, כאשר $m<n$.
נסמן ב- A^T את המטריצה המוחלפת. בהכרח ש:
א. מימד מרחב הפתרונות של המערכת $AX=0$ הוא $n-m$.
ב. למערכת $\left(A^T A\right)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
ג. ייתכן מצב בו למערכת $\left(A^T A\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ד. ייתכן מצב בו למערכת $\left(AA^T\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

35) A מטריצה 3×3, כך ש- $A^2=0$ אבל $A\neq 0$, אז הדרגה של A יכולה להיות:
א. 0
ב. 1
ג. 2
ד. 3
ה. אף תשובה אינה נכונה.

36) תהיינה A מטריצה מסדר 3×5 ו- B מטריצה 5×3 אז:
א. AB הפיכה אם ורק אם BA הפיכה.
ב. AB בהכרח לא הפיכה.
ג. BA בהכרח הפיכה.
ד. אם $AB=0$, אז $rank(A)+rank(B)\leq 5$.

37) אם A מטריצה, כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד,
אז בהכרח:
א. A הפיכה.
ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^t פתרון יחיד.
ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.
ד. מרחב העמודות של A שונה ממרחב הפתרונות של A.

38) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m\times n$, אזי בהכרח מתקיים:
א. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^t x=b$, יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ב. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.
ג. ייתכן ש- $A^t A=I_n$ וגם $AA^t=I_m$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

39) נתון כי $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$ הפיכה.

אז בהכרח:

א. למערכת $\begin{matrix}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y=\alpha_{13}\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y=\alpha_{23}\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y=\alpha_{33}\end{matrix}$ פתרון יחיד.

ב. למערכת $\begin{matrix}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+w=0\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z-4w=1\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+3w=-4\end{matrix}$ אינסוף פתרונות.

ג. למערכת $\begin{matrix}\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z=3\\ \alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z=1\\ \alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z=1\end{matrix}$ אין פתרון.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

תשובות סופיות

11) א **12)** ב **13)** א **14)** ד

15) א+ד **16)** ג **17)** א+ג **18)** הוכחה.

19) ג+ד **20)** ב **21)** ב+ג **22)** ד

23) ה **24)** ב+ד **25)** ב+ג **26)** א+ב

27) א **28)** ג **29)** ג

30)

$$B_U=\{(-1,1,00),(-1,010),(1,001)\}$$
$$B_W=\{(100-1),(010-1),(0012)\}$$
$$U\cap W=sp\{(1,0,2,3),(0,1,2,3)\}$$
$$\dim U=3,\qquad \dim W=3,\qquad \dim(U\cap W)=2$$

31) ד **32)** א+ב+ג **33)** הוכחה.

34) ב+ד **35)** ב **36)** ד

37) ד **38)** א+ג **39)** ב

אלגברה ליניארית

פרק 5 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-4**:

א. מצא מטריצה אופיינית.

ב. מצא פולינום אופייני.

ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.

ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ה. מצא וקטורים עצמיים.

ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.

ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.
כלומר, מצא מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.

ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשב A^{2009}.

ט. מצא את הפולינום המינימלי.

י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
במידה והמטריצה הפיכה, בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד,
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **6-5** מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.
כלומר, מצא מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP=D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
פתור פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

5) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **11-7** מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

7) $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

11) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

12) נתון $A=\begin{pmatrix}k-2 & 2k & k+1\\ k-1 & -1 & 2\\ -k & 0 & -6\end{pmatrix}$.
לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A?

13) נתונה המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix}a & b & b\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -8 & -5\end{pmatrix}$.
א. מצאו את ערכי a ו- b, עבורם הערכים העצמיים של A יהיו **1** ו-**-1 בלבד**.
ב. עבור ערכי a ו- b שמצאת בסעיף א, קבע האם המטריצה לכסינה.

14) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=6,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=-4$.

מצא את המטריצה A.

15) קבע האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3,

בעלת וקטורים עצמיים $v_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצא אותה.

16) הוכח או הפרך:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix}4\\1\\10\end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

17) נתונה מטריצה ריבועית A.

הוכח או הפרך:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו-λ ע"ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.

ג. ל-A ול-A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל-A ול-A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע"ע של A.

ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=\pm1$.

ז. אם $A^2=A$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

18) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו- B, מסדר n. הוכח או הפרך:

א. ל- AB ו- BA אותם ערכים עצמיים.

ב. נניח ש- v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו- B,
אז v גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

19) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.

א. הוכיחו כי לכל סקלר k, המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.

ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A, מצא את הערך העצמי
של המטריצה $A+kI$.

20) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3.

ידוע כי v_1,v_2 הם ו"ע של A, שונים מאפס, המתאימים לע"ע $\lambda=1$,
וכי v_3 הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע $\lambda=-1$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות:

א. אם הווקטורים v_1,v_2 בת"ל, אז $A^{2018}=I$.

ב. A ניתנת ללכסון.

ג. v_3 הוא צרוף לינארי של הווקטורים v_1,v_2.

21) נתונות שתי מטריצות מסדר n: מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה.
הוכח או הפרך:

א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.

ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.

22) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n, שעבורן v הוא ו"ע.

א. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n.

ב. עבור $v=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $n=2$, מצאו בסיס ל- W.

23) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4.
נתונה המטריצה $B=A^4-2A^2+10A-4I$.
הוכח ש- v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשב את הערך
העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש- v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ.
יהי $p(x)$ פולינום.
הוכח ש- v ו"ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

24) תהי $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, כאשר a קבוע ממשי.

א. עבור $a=3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A.

ב. עבור איזה ערך של a, הזוג $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A?

ג. יהי $0\neq u\in\mathbb{R}^2$ וקטור שאינו ו"ע של A.
הוכיחו כי הקבוצה $\{u, Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

25) תהיינה A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$ כך ש-$AB=BA$.
נניח כי $\operatorname{rank}(A)=n-1$, ו-$v$ הוא וקטור עצמי של המטריצה A, השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.
הוכח כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B.

26) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.

1. הוכח כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל- $p(x)=x^2-\operatorname{tr}(A)x+|A|$.
2. נתון כי $\operatorname{tr}(A)=4$. חשב את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
נניח כי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^1+a_0$ הפולינום האופייני של A.
הוכח כי $a_{n-1}=-\operatorname{tr}(A)$, $a_0=(-1)^n|A|$.

27) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $\operatorname{rank}(B)=1$.
הוכח:

א. 0 ע"ע של המטריצה B.

ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0, הוא 3.

ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0, הוא 3 או 4.

ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.

ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0, אז הוא שווה ל- $\operatorname{tr}(B)$.

28) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר n.
ידוע כי $\operatorname{rank}(B)=k$, כאשר $k<n$.
הוכח כי 0 ערך עצמי של B ומצא את הריבוי הגיאומטרי והאלגברי שלו.

29) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.
ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי שונה מ-0.
הוכח שהמטריצה ניתנת לליכסון.

30) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ (מטריצה עם שורה אחת).
מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A^TA (הנח $n>1$).

31) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2=A$.
תהי A מטריצה אידמפוטנטית.
א. הוכח כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.
ב. רשום את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.
ג. הוכח כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים.
ד. הוכח כי A ניתנת ללכסון.
ה. הוכח כי $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5.
הוכח או הפרך:
א. קיים תת מרחב $W_\alpha=\{u \mid Au=\alpha u\}$ של R^5, כך ש-$\dim W_\alpha \geq 1$.
ב. אם u_1,u_2 ו"ע של A, אז גם הווקטור u_1+u_2 ו"ע של A.
ג. אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A, אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.
ד. אם A לכסינה מעל R, אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.
ה. אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R.

33) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3.
נתון כי $\det(A)=tr(A)=0$ וכי $\lambda=1$ ערך עצמי של המטריצה.
הוכח כי המטריצה ניתנת לליכסון ומצא את כל הערכים העצמיים שלה.

34) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2,
והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4.
מכאן נובע ש :

א. $\operatorname{rank}(A)=4$

ב. A לכסינה.

ג. $\operatorname{tr}(A)>10$

ד. $|A|\le 127$

ה. קיים וקטור עצמי v של A, כך ש- $A^2v=2v$.

35) תהי A מטריצה מסדר 3, המקיימת $0<\operatorname{rank}(A-10I)<\operatorname{rank}(A-4I)<3$.

א. מצא את הפולינום האופייני של המטריצה A.

ב. מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A, ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.

ג. קבע האם A הפיכה.

ד. האם נכון לומר ש- $A=10I$, או ש- $A=4I$?

ה. קבע האם A לכסינה.

36) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי.
הוכח או הפרך :

א. אם v וקטור עצמי של A, אז v וקטור עצמי גם של A^n.

ב. אם v וקטור עצמי של A^n, אז v וקטור עצמי גם של A.

ג. אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.

ד. אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

37) נתונה מטריצה A, שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x)=(x-1)^2$.
הוכח כי המטריצה $A^2+4A+3I$ הפיכה.

38) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x)=x^2+bx+c$.
מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.

ב. מטריצה $A\in M_2[R]$ מקיימת $|A|<0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

תשובות סופיות

1) א. $\begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)^2$ ג. $x=0,\ x=1$,

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=0}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 1,1,1\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=x(x-1)^2$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. לא הפיכה.

2) א. $\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-1)^2(x-2)$ ג. $x=1,\ x=2$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=(x-1)^2(x-2)$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. הפיכה.

3) א. $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)(x-2)$ ג. $x=0,\ x=1,\ x=2$

$x=0$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=0}=sp\{\langle -1,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=1}=sp\{\langle 0,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,1,0\rangle,\ \langle 1,0,1\rangle,\ \langle -1,0,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח. $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=x(x-1)(x-2)$ י. לא הפיכה.

4) א. $\begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

ג. $x=6,\ x=2,\ x=-4$

$x=-4$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=6$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=6}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=-4}=sp\{\langle -1,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle -1,1,0\rangle,\ \langle 1,1,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ח. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{2017}+(-4)^{2017} & 2^{2017}-(-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017}-(-4)^{2017} & 2^{2017}+(-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017}+2^{2017} & -6^{2017}+2^{2017} & 2\cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

י. הפיכה.

5) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$

6) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

7) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,

וקטורים עצמיים: $v_{x=3}^{(1)}=(1,0,1),\ \ v_{x=3}^{(2)}=(1,1,0),\ \ V_{x=2}=(1,1,1)$

8) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=(-1,4,1)$, $\boldsymbol{v}_{x=3}=(1,2,1)$, $\boldsymbol{v}_{x=-2}=(-1,1,1)$

9) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=(1,-2,1)$, $\boldsymbol{v}_{x=4}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_{x=-1}=(-1,0,1)$

10) $x=-1,\ x=3$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=(-1,2)$, $\boldsymbol{v}_{x=3}=(1,2)$

11) $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right)$,

$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$

12) $k_1=3,\ k_2=-\frac{32}{9}$

13) א. $a=3,\ b=-4$ או $a=1,\ b=0$ ב. לא לשתיהן.

14) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

15) אין כזו מטריצה.

16) א. הפרכה: $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. ב. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ ג. $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ ד. הוכחה.

17) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.
ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.

18) א. הוכחה. ב. הוכחה.

19) א. הוכחה. ב. $4+k$ הוא ערך עצמי של $A+kI$.

20) א. הפרכה. ב. הוכחה. ג. הפרכה.

21) א. הפרכה. ב. הוכחה.

22) א. הוכחה. ב. הוכחה.

23) א. הערך העצמי הוא 260. ב. הוכחה.

24) א. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

25) הוכחה

26) א.1. הוכחה. א.2. $|A|=4$ ב. הוכחה.

27) הוכחה.

28) הוכחה.

29) הוכחה.

30) 0 ו- $tr(A)$.

31) א. הוכחה. ב. $p(x)=x,\ p(x)=x-1,\ p(x)=x(x-1)$ ג. הוכחה.
ד. הוכחה. ה. הוכחה.

32) הוכחה.

33) הערכים העצמיים הם: $0,1,-1$.

34) הוכחה.

35) א. $p(x)=(x-10)^2(x-4)$
ב. 10 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 2;
4 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 1.
ג. לא הפיכה. ד. לא. ה. לכסינה.

36) הוכחה.

37) הוכחה.

38) א. $p_{4A}(x)=x^2+4bx+16c$ ב. הוכחה.

דמיון מטריצות

שאלות

1) ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי:

א. $|A|=|B|$

ב. $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$

ג. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

2) הוכח באינדוקציה: אם $P^{-1}AP=B$, אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$.
הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $4A=\begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ דומות.

4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&7&0\\9&-17&6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\-1&3&2\\2&-8&-5\end{pmatrix}$.

האם קיימים קבועים ממשיים a, b, כך שהמטריצה A דומה למטריצה B?

5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n: A, B, C. הוכח כי:

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל- B, אז B דומה ל- A.

ג. אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C, אז A דומה ל- C.

ד. אם A דומה ל- B ושתיהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל- B^{-1}.

ה. אם A דומה ל- B, אז A^k דומה ל- B^k, לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל- B ו- $q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל- $q(B)$.

ז. אם A דומה ל- B, אז A^T דומה ל- B^T.

ח. אם A דומה ל- B, אז $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

ט. אם A דומה ל- B, אז $\operatorname{Null}(A)=\operatorname{Null}(B)$.

הערה – $\operatorname{Null}(A)=$ מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

6) הוכח או הפרך:

א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.

ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.

ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2.
חשב כל אחד מהבאים או הסבר מדוע לא ניתן לעשות זאת:

א. $\operatorname{rank}(A)$

ב. $\dim\operatorname{Ker}(A)$

ג. $\operatorname{tr}(A)$

ד. $|A^T A|$

ה. ע"ע עבור $A^T A$.

ו. ע"ע עבור $\left(4A^2+10A+I\right)^{-1}$.

הערה – $\dim\operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Nullity}(A)$

8) הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

תשובות סופיות

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) לא.

5) הוכחה.

6) הוכחה.

7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1, \frac{1}{15}, \frac{1}{37}$

8) הוכחה.

אלגברה ליניארית

פרק 6 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

1) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2),\ v=(y_1,y_2)$, ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:
$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2$.
בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

2) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2),\ v=(y_1,y_2)$, ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:
$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2$.
עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

3) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3),\ v=(y_1,y_2,y_3)$, ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:
$\langle u,v\rangle = x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3$.
עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

4) לכל שני וקטורים $u=(u_1,\dots,u_n),\ v=(v_1,\dots,v_n)$, ב- $\mathbb{R}^n$,
נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$, כאשר $k_1,\dots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.
הראה כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.
מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i=1$, לכל $1\le i\le n$?

5) לכל שתי מטריצות A,B ב- $M_{mxn}[R]$, נגדיר: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^TA\right)$.
בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.
tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

6) לכל שתי פונקציות $f,\ g$ ב- $C[a,b]$, נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_a^b f\cdot g\,dx$.
בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

7) נתונה מכפלה פנימית על R^3 , שעבורה הקבוצה $B=\{(1,1,0),(1,1,0),(1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי.
חשב את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$.

תשובות סופיות

1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
2) $k>9$
3) $-1<k<1$
4) עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$M_{mxn}[R]$.
6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$C[a,b]$.
7) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$

הנורמה והמרחק

שאלות

1) נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$: $u=(1,-2,2),\ v=(3,-2,6),\ w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^3$, חשב:

א. $\langle u,v\rangle$ ב. $\langle u,w\rangle$ ג. $\langle v,w\rangle$ ד. $\langle u+v,w\rangle$

ה. $\|u\|$ ו. $\|v\|$ ז. $\|u+v\|$ ח. $\mathrm{d}(u,v)$

ט. $\hat{u}$ י. $\hat{v}$

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2\times 3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^TA\right)$ ב- $M_{2\times 3}[R]$,

חשב:

א. $\langle A,B\rangle$ ב. $\langle A,C\rangle$ ג. $\langle A,B+C\rangle$

ד. $\langle B,C\rangle$ ה. $\langle 4A+10B,\ 11C\rangle$ ו. $\|A\|$

ז. $\|B\|$ ח. $\mathrm{d}(A,B)$ ט. $\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3,\ \ q(x)=3x+1,\ \ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$,

חשב:

א. $\langle p,q\rangle$ ב. $\langle p,r\rangle$ ג. $\langle p,q+r\rangle$

ד. $\|p\|$ ה. $\mathrm{d}(p,q)$ ו. $\hat{r}$

4) הוכח: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

5) הוכח: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

6) הוכח: $\langle u-v,u+v\rangle=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכח: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

8) הוכח: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\langle u,v\rangle$.

תשובות סופיות

1) א. 19 ב. -5 ג. -3 ד. -8
ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
ט. $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) א. 185 ב. -12 ג. 173 ד. -24 ה. -3168
ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח. $\sqrt{124}$ ט. $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$

3) א. 9 ב. -9.5833 ג. -0.5833 ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$
ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.

אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

שאלות

1) הוכח כי אם u,v תלויים לינארית, אז $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\cdot\|v\|$.

2) יהיו $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ו- $y_1,y_2,\ldots,y_n$ מספרים ממשיים.
הוכח כי $(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)$.

3) יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
הוכח כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$.

4) חשב את הזווית בין שני הווקטורים $u=(1,2,2),\ v=(-2,1,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

5) חשב את הזווית בין שני הווקטורים $u=(3,4),\ v=(1,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$, ב- $\mathbb{R}^2$.

6) מצא את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x)=2x-1$ ו- $q(x)=x^2$,
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$ שב- $C[0,1]$.

7) מצא את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$,
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^TA)$ ב- $M_{2\times 2}[R]$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) $\theta = 63.61°$
5) $\theta = 9.44°$
6) $\cos\theta = 0.173°$
7) $\cos\theta = 0.00036°$

אורתוגונליות

שאלות

1) הוכח כי הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(4,7,-6)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצא את ערכו של הקבוע k, עבורו הווקטורים $u=(1,k,3),\ \ v=(4,7,-6)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

3) מצא וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(2,5,7)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

4) הוכח כי הפולינומים $p(x)=2x-1,\ \ q(x)=6x^2-6x+1$ אורתוגונליים בקטע $[0,1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

5) במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n\geq$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+\ldots+p(n)q(n).$$

הראה כי הפולינומים:

$$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6),\ \ q(x)=x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות: $A=\begin{pmatrix}k & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב- $M_{2\times 2}[R]$,

מצא את הערך של הקבוע k, עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכח כי: $u\perp v\Leftrightarrow \|u+v\|=\|u-v\|$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

8) הוכח כי: $u\perp v\Leftrightarrow \|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

9) הוכח כי : $\|u\| = \|v\| \Leftarrow (u+v) \perp (u-v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) $k=2$
3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) $k=0.5$
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

משלים אורתוגונלי

שאלות

1) יהי $W = span\{(1,2,-1,1),(2,5,3,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

2) יהי $w = span\{(1,1,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

3) יהי $W = span\{x\} \subseteq P_2[R]$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

4) יהי $W = span\{x, x^2\} \subseteq P_2[R]$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

5) יהי $W = span\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_{2\times2}[R]$
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$
ב- $M_{2\times2}[R]$.

6) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

7) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A \cdot \underline{x} = 0$.
יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תן פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה A.

9) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי: $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$.

10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכח כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכח כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם V ממֵמד סופי).

12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי: $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי: $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) $W^{\perp} = span\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\}$

2) $W^{\perp} = span\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$

3) $W^{\perp} = span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

4) $W^{\perp} = span\{(1.5x^2-6x+5)\}$

5) $W^{\perp} = span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

6) $$B_W = \left(\begin{matrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{matrix}\right)$$

7) $B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

8) הסבר בווידאו.

9) הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

קבוצה ובסיס אורתוגונלי

שאלות

1) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

א. הראה שהקבוצה S אורתוגונלית.

ב. נרמל את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.

ג. ללא חישוב, הוכח שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשום את הווקטור $(13,-1,7)$, כצירוף ליניארי של איברי S.

3) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
רשום את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- $\mathbb{R}^3$, ביחס לבסיס S.

4) נניח ש- $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V.
הוכח שלכל $v\in V$, אז $v=\frac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1+\frac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2+\dots+\frac{\langle v,u_n\rangle}{\langle u_n,u_n\rangle}u_n$.
הערה: הקבוע $a_i=\frac{\langle v,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i, או הרכיב של v ביחס ל- u_i.

5) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\dots\}$ ב- $V=C[0,\pi]$.
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\dots\}$ ב- $V=C[0,2\pi]$.
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
האם הקבוצה מהווה בסיס?

7) נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.

8) נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב- $P_3[R]$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

9) נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב- $P_2[R]$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

10) נתונה הקבוצה $M_3[R] \supseteq S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$.
בדוק: האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
ענה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. $S\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$ ג. הוכחה.

2) $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

3) $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

4) הוכחה.

5) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,
$S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},\dots\right\}$

6) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,
$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\dots\right\}$

7) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$

8) הקבוצה לא אורתוגונלית.

9) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,
$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\right\}$

10) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

ההיטל של וקטור

שאלות

1) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$ לאורך $w=(0,1,-1)$, ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$ לאורך $w=(0,2,-1,2)$, ב- $\mathbb{R}^4$.
מסמנים גם $\operatorname{proj}(v,w)$.

3) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$ לאורך $q(x)=x^2$, במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$.

4) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ לאורך $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תשובות סופיות

1) $c=0,\quad \operatorname{proj}(v,w)=cw=0$

2) $c=\frac{-2}{3},\quad \operatorname{proj}(v,w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2)$

3) $c=\frac{5}{6},\quad \operatorname{proj}(p,q)=c\cdot q(x)=\frac{5}{6}x^2$

4) $c=\frac{1}{6},\quad \operatorname{proj}(A,B)=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

תהליך גרהם-שמידט

שאלות

1) נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U.

2) נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U.

3) נתון: $U = span\{4, x, x^2, x^3\} \subseteq P_3[x]$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

4) נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות סופיות

1) $$B_{orthonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3), \frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$$

2) $$B_{orthonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$$

3) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$$

4) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix}7 & 14\\ -9 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{33}}\right\}$$

מטריצות אורתוגונליות

שאלות

1) ציין אילו מבין המטריצות הבאות הן אורתוגונליות.
במידה והמטריצה אורתוגונלית, מצא עבורה את המטריצה ההופכית:

א. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) הוכח את המשפטים הבאים:
א. מטריצה ריבועית A היא אורתוגונלית אם ורק אם $A^T A = I$.
ב. מטריצה אורתוגונלית A היא הפיכה ומתקיים $A^{-1} = A^T$.

3) ענה על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה אורתוגונלית.
הוכח כי המטריצות A^{-1}, A^T אורתוגונליות.
ב. הוכח כי מכפלת מטריצות אורתוגונליות (מאותו סדר), היא מטריצה אורתוגונלית.
ג. הוכח שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא 1 או -1.
ד. האם סכום מטריצות אורתוגונליות הוא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?
ה. האם מכפלה של מטריצה אורתוגונלית בסקלר היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?
ו. הראה כי אם מטריצה אורתוגונלית היא משולשת, אז היא אלכסונית.

4) תהי A מטריצה מסדר n.
הוכח או הפרך:
א. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n, אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n.
ב. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n, אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n.

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה מסדר n, אשר עמודותיה, $\{v_1,...,v_n\}$,
מהוות בסיס **אורתוגונלי** ל- R^n. נסמן $v_iv_i=\lambda_i$.
הוכח כי $A^TA=\text{diag}\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$.

ב. הוכח: כדי להפוך מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתוגונלי,
יש לחלק כל עמודה בסכום ריבועי איבריה ולשחלף לאחר מכן.

ג. הפוך את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&4&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

ד. הפוך את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&\sqrt{2}\\2&2&-\sqrt{8}\\-\sqrt{0.5}&\sqrt{0.5}&0\end{pmatrix}$.

6) הוכח את המשפט:

יהיו B ו- C שני בסיסים אורתונורמליים של המרחב R^n.
אז מטריצת המעבר מ- B ל- C היא מטריצה אורתוגונלית.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי B לבסיס C,
של המרחב R^n.
הוכח כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס C גם אורתונורמלי.

ב. תהי A מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס אורתונורמלי C,
של המרחב R^n.
הוכח כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס B גם אורתונורמלי.

8) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי אם A מטריצה אורתוגונלית מסדר n,
אז קיימים שני בסיסים אורתונורמליים B ו- C, של המרחב R^n,
כך ש- A משמשת מטריצת המעבר מ- B ל- C.

ב. יהי $v\in R^n$, כך ש- $\|v\|=1$.
הוכח שקיימת מטריצה אורתוגונלית, שהעמודה הראשונה שלה היא
הווקטור v.

תשובות סופיות

1) א. $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ ב. $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

ג. לא אורתוגונלית.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

ג. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.2 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.25 & 0\\ -0.4 & 0 & 0.2\end{pmatrix}$ ד. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.125 & -\sqrt{0.5}\\ 0.25 & 0.125 & \sqrt{0.5}\\ \sqrt{0.125} & -\sqrt{0.125} & 0\end{pmatrix}$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

העתקות אורתוגונליות

שאלות

1) תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה לינארית.
הוכח את המשפט: T אורתוגונלית $\Leftrightarrow$ $\forall u \in R^n \quad \|T(u)\| = \|u\|$.

2) תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה לינארית אורתוגונלית.
א. הוכח כי T איזומורפיזם.
ב. הוכח כי גם T^{-1} אורתוגונלית.

3) ענה על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה אורתוגונלית מסדר n.
נגדיר העתקה לינארית $T:R^n \to R^n$, על ידי $T(u) = Au$.
הוכח כי T היא העתקה אורתוגונלית.
ב. הוכח שכל העתקה אורתוגונלית $T:R^n \to R^n$,
ניתן להציג בצורה $T(u) = Au$, כאשר A אורתוגונלית.

4) ענה על הסעיפים הבאים:
א. הוכח שהערכים העצמיים היחידים של **העתקה** אורתוגונלית הם ± 1.
ב. הוכח שהערכים העצמיים היחידים של **מטריצה** אורתוגונלית הם ± 1.

5) הוכח שמכפלת העתקות אורתוגונליות היא העתקה אורתוגונלית.

6) ענה על הסעיפים הבאים:
א. תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה אורתוגונלית,
ויהי $\{u_1,...,u_n\}$ בסיס אורתונורמלי כלשהו של R^n.
הוכח ש- $\{T(u_1),...,T(u_n)\}$ אף הוא בסיס אורתונורמלי של R^n.
ב. תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה לינארית,
ונניח שיש בסיס אורתונורמלי $\{u_1,...,u_n\}$ של R^n,
כך שגם הקבוצה $\{T(u_1),...,T(u_n)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי של R^n.
הוכח כי T היא העתקה אורתוגונלית.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שמטריצה, שמייצגת העתקה אורתוגונלית לפי בסיס אורתונורמלי, היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית.

ב. הוכח שכל העתקה לינארית, שהמטריצה המייצגת שלה בבסיס אורתונורמלי כלשהו היא אורתוגונלית, היא בהכרח העתקה אורתוגונלית.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו את הנוסחה עבור ההעתקה T:

א. $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

ב. $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\sqrt{3}x$.

ג. $T:R^2\to R^2$ העתקת הסיבוב בזווית 30^0 ב- R^2.

9) בכל אחד מהסעיפים הבאים תאר את פעולת ההעתקה מבחינה גיאומטרית. השתמש במושגים שיקוף וסיבוב.

א. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ב. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ג. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ד. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

* את סעיף ד' פתור בשתי דרכים שונות.

10) תהי $T:R^2\to R^2$ העתקה לינארית, שמסובבת וקטור ב- θ מעלות נגד כיוון השעון. מצא נוסחה עבור ההעתקה T.

11) תהי $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\tan\frac{\theta}{2}x$.

מצא נוסחה עבור ההעתקה T.

12) תהי $T:R^2\to R^2$ העתקה אורתוגונלית. הוכח ש- T היא בהכרח העתקת סיבוב, או העתקת שיקוף.

תשובות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) א. $T(x,y)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$ ב. $T(x,y)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$

ג. $T(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$

9) א. שיקוף ביחס לישר $y=0.4142x$. ב. שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

ג. סיבוב של 90 מעלות במישור.

ד. דרך I: סיבוב של 90 מעלות ולאחריו שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

דרך II: שיקוף ביחס לישר $y=-\frac{1}{3}x$.

10) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

11) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

12) שאלת הוכחה.

אלגברה ליניארית

פרק 7 - וקטורים גיאומטריים

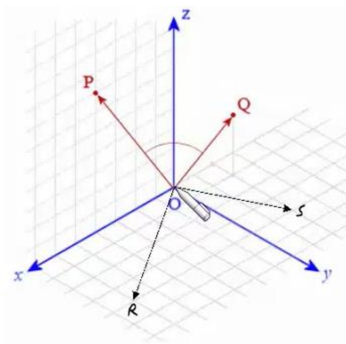
תוכן העניינים

וקטורים

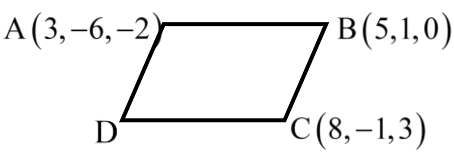
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\mathbf{u}$, $\vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

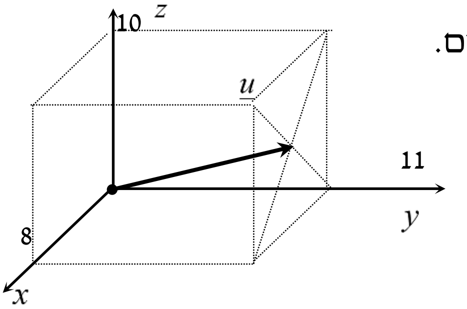
1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



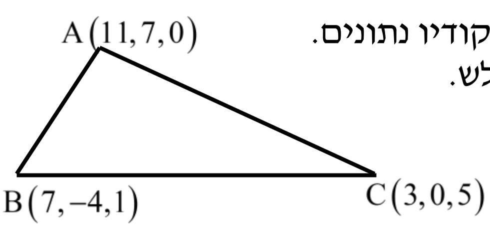
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

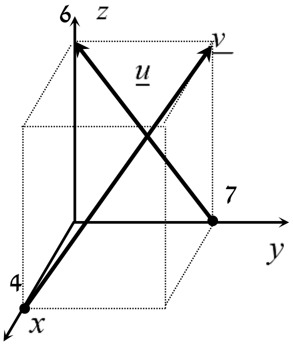


5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



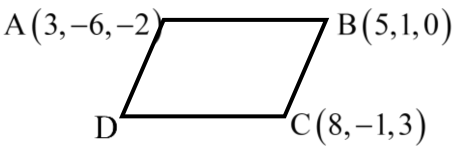
7) מצא את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$, כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראה כי: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



בשאלות **16-10** נתונים הווקטורים : $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, **16** הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשב :

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשב :

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $\mathrm{d}(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\mathrm{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **19-17** נתונות הנקודות : $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים :

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.
א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.
ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, כאשר:
א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$
ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$
ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצא את שטחו של משולש ABC, שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצא וקטור $\underline{w}$, שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) ענה על שני הסעיפים הבאים:
א. הוכח כי $|u+v|=|u-v| \Leftrightarrow u\perp v$.
הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.
ב. הוכח כי $|u+v|^2=|u|^2+|v|^2 \Leftrightarrow u\perp v$.
הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

26) ענה על חמשת הסעיפים הבאים:
א. הוכח כי $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$.
ב. הוכח כי $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$.
ג. הוכח כי $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$.
ד. הוכח כי $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$.
תן פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.
ה. הוכח כי $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$.

תשובות סופיות

1) $\vec{S}=(-2,4,0)$, $\vec{R}=(6,4,0)$, $\vec{Q}=(-2,1,3)$, $\vec{P}=(4,0,7)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{v}=(-4,7,6)$, $\underline{u}=(0,-7,6)$

7) א. $x=5$, $y=-2$, $z=6$

8) א. הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}^*$

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) הוכחה.

21) א. הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277^\circ$ ב. $\alpha=90^\circ$ ג. $\alpha=180^\circ$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) הוכחה.

26) הוכחה.

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

חשב: $(u\times v)\times w$.

2) חשב את שטח המשולש, שקדקודיו: $A(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי: $|u|\neq 0$, $\quad u\cdot w=0,\quad u\times v=0$.

הוכח כי: $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי: $|v|=4$, $\quad |u|=1,\quad u\perp v$.

חשב: $|(u+v)\times(u-v)|$.

5) נתון $w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

חשב:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

ב. חשב את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

7) חשב את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5),B(1,-1,-4),C(3,3,10),D(8,6,3)$.

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a,b,c}$.
הוכח כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a, a-b, a+b-4c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכח כי $\left[(u+v)\times(v+w)\right](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי: $u\cdot(v\times w)=4$.
חשב:
א. $u\cdot(w\times v)$
ב. $(v\times w)\cdot u$
ג. $w\cdot(u\times v)$
ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a,b,c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a\times b\times c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) הוכחה.

4) 8

5) א. -3 ב. -3 ג. -3

6) א. -6 ב. 1

7) $9\frac{1}{3}$

8) הוכחה.

9) הוכחה.

10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

11) אין לו נוסחה.

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

(1 הוכח שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

(2 מצא את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

(3 נתונים שני ישרים:
$$L_1:\quad \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},\quad L_2:\quad x+7=y-5,\ \ z=3$$
א. הוכח שהישרים מצטלבים.
ב. מצא את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

(1 הוכחה.

(2 $\sqrt{26}$

(3 א. הוכחה. ב. 5.7735

אלגברה ליניארית

פרק 8 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

הצגה פרמטרית של ישר

שאלות

1) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$?

2) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x}=t(2,-1,5)$?

3) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

4) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

5) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$ ומקביל לישר $\ell: \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

6) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$ ומאונך לישר: $\ell: \underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell: \underline{x}=(1,2,3)+t(4,5,6)$.
כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות x, y ו- z.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $x=1+2t$, $y=10$, $z=4-t$.
כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

8) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

9) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$ ומקביל לציר ה- z.

10) מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell: \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

11) ישר עובר בנקודה $(1,-1,4)$ וכיוונו $(4,10,2)$.
מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(4,10,2)$

ב. $\underline{x}=(3,4,5)+t(4,10,2)$

ג. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(2,5,1)$

ד. $\underline{x}=(5,9,6)+t(8,20,4)$

ה. כל התשובות נכונות.

12) ישר עובר דרך הנקודות $A(1,-1,2)$ ו- $B(4,0,1)$.
תאר את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נקי' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

13) הצג כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell:\begin{cases}x=1-4t\\y=2t\\z=2+10t\end{cases}$

ב. $\ell:\begin{cases}x=1+t\\y=4\\z=10t\end{cases}$

ג. $\ell:\ \dfrac{x-1}{2}=y+1=z-4$

ד. $\ell:\ x-1=y+10,\ z=4$

ה. $\ell:\ \begin{cases}x-y+z=1\\2x-y+3z=3\end{cases}$

תשובות סופיות

1) כן.

2) לא.

3) $\ell : \underline{x}=(-5,-2)+t(6,8)$

4) $\ell : \underline{x}=(4,1,1)+t(1,1,3)$

5) $\ell : \underline{x}=(2,-7,1)+s(-4,2,1)$

6) $\ell : \underline{x}=(1,2,3)+t(2,1,0)$

7) א. $x=1+4t \, , y=2+5t \, , z=3+6t$ ב. $\ell : \underline{x}=(1,10,4)+t(2,0,-1)$

8) $\ell : \underline{x}=t(0,1,0)$

9) $\ell : \underline{x}=(3,-1,4)+t(0,0,1)$

10) $(7,-5,0)$

11) ה

12) א. $\ell : \underline{x}=(1,-1,2)+t\cdot(3,1,-1)$ ב. $\ell : \begin{cases} x=1+3t \\ y=-1+t \\ z=2-t \end{cases}$

ג. $\ell : \frac{x-1}{3}=y+1=2-z$ ד. $\ell : \begin{cases} x-3y=4 \\ y+z=1 \end{cases}$

13) א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-4,2,10)$ ב. $\underline{x}=(1,4,0)+t(1,0,10)$

ג. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(2,1,1)$ ד. $(x,y,z)=(1,-10,4)+t(1,1,0)$

ה. $(x,y,z)=(2,1,0)+t(-2,-1,1)$

מצב הדדי בין ישרים

שאלות

1) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x} = (2,-3,0) + t(5,-1,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (12,-5,4) + s(-10,2,-4)$.

2) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x} = (0,1,-7) + t(-2,1,1)$, $\ell_4 : \underline{x} = (2,0,-6) + s(6,-3,-3)$.

3) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x} = (-3,5,1) + t(4,0,-1)$, $\ell_6 : \underline{x} = (-1,7,4) + s(-1,1,2)$.

4) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x} = (3,0,0) + t(2,-2,5)$, $\ell_8 : \underline{x} = (0,1,-5) + s(3,1,-2)$.

5) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x} = (-4,1,-1) + t(3,0,-1)$, $\ell_{10} : \underline{x} = s(6,0,-2)$.

6) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x} = (2,8,-1) + t(1,0,0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5,8,2) + s(2,0,-1)$.

7) מצא את ערכו של הפרמטר k, שבעבורו הישרים הבאים:
$\ell_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1,-2,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$
א. מקבילים.
ב. מתלכדים.

8) נתונות הנקודות: $A(3,-1,5)$, $B(k,-1,3)$, $C(-6,3,-1)$, $D(-2,3,k)$.
הראה כי לכל ערך של k, הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

תשובות סופיות

1) מתלכדים.

2) מקבילים.

3) נחתכים, $(1,5,0)$.

4) מצטלבים.

5) מקבילים.

6) נחתכים, $(1,8,-1)$.

7) א. $k=2$. ב. $k=-2$.

8) שאלת הוכחה.

הצגה פרמטרית של מישור

שאלות

1) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:
$A(1,-4,0)$, $B(3,6,2)$, $C(0,-3,1)$.

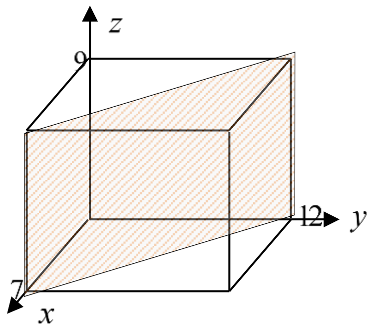
2) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)$.

3) נתונים שני ישרים: $\ell_2 : \underline{x}=(2,16,11)+s(0,1,-6)$, $\ell_1 : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)$.
הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

4) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$
ומכיל את ציר ה- x.

5) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.
מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.



תשובות סופיות

1) $\pi : \underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$

2) $\pi : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$

3) $\pi : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)+s(0,1,-6)$

4) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$

5) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$

6) $\pi : \underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,9)+s(-7,12,0)$

משוואת מישור

שאלות

1) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x-y+3z-6=0$:

א. $D(5,7,1)$

ב. $E(2,-1,1)$

2) מצא את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על המישור: $\pi : kx-2y+(1+k)z+7=0$.

3) נתונה משוואת מישור: $\pi : 3x+2y-z-9=0$.
מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

4) נתונה משוואת מישור: $\pi : 4x+y-2z+8=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות

1) א. על המישור. ב. לא על המישור.

2) $k=3$

3) $(0,0,-9)$, $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$, $(3,0,0)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$

מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi : 2x+3z-12=0$.
כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצא את משוואת המישור.

3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

4) המישור π עובר בנקודות: $C(4,-1,0)$, $B(2,0,0)$, $A(1,0,-3)$.
מצא את משוואת המישור.

5) ענה על הסעיפים הבאים:
א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$.
1. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד,
ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
2. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.
ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.
ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

תשובות סופיות

1) $\pi : \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$

2) $\pi : -2x+3y+z+19=0$

3) $\pi : x-3y+8z=0$

4) $\pi : 3x+6y-z-6=0$

5) א. 1. $\pi : \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ 2. $-2x+3y+z-1=0$
ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא.

מישורים המקבילים לצירים

שאלות

1) נתונה משוואת מישור : $\pi : (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות

1) $k=3$

2) 6 יח"נ.

מצב הדדי בין ישר ומישור

1) נתונים הישר והמישור הבאים : $\ell : \underline{x} = (5,0,1) + t(4,1,-2)$, $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

2) נתונים הישר והמישור הבאים :
$\ell : \underline{x} = (2,-1,6) + t(-1,1,2)$, $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

3) נתונים הישר והמישור הבאים : $\ell : \underline{x} = (-6,1,0) + t(3,0,-1)$, $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

4) נתונים הישר והמישור הבאים : $\ell : \underline{x} = (1,a,3) + t(4,1-b,0)$, $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$.
מצא את ערכי a ו- b בעבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות

1) הישר חותך, $(1,-1,3)$.

2) מקבילים.

3) הישר מוכל.

4) $a = 1$, $b = -7$

מצב הדדי בין מישורים

שאלות

1) נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1 : 2x - y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב. $\pi_3 : x + 3y - z + 1 = 0$, $\pi_4 : 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג. $\pi_5 : 5x - 2y - 2z + 3 = 0$, $\pi_6 : 2x + 3y + z - 5 = 0$

2) נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1 : 2x + \left(k^2 + k\right)y - 2z + 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$.

מצא את ערכי k עבור המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

תשובות סופיות

1) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

2) א. $k \neq 2, -3$ ב. $k = -3$ ג. $k = 2$

ישר חיתוך בין מישורים

שאלות

1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_2 : 2x-y+z+10=0$, $\pi_1 : 4x+y-2z+2=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_4 : 2x-3y+z+4=0$, $\pi_3 : 8x+2y-3z+2=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_6 : 5x-2z+20=0$, $\pi_5 : 3x-3y+z+2=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_8 : z-2=0$, $\pi_7 : x-2y-z+6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

5) מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x-5y+z+18=0$
עם המישור $[xz]$.

6) נתונים שני מישורים: $\pi_2 : 4x+y-z-6=0$, $\pi_1 : x-3y+2z-1=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות

1) $\ell : \underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$

2) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$

3) $\ell : \underline{x}=(0,4,10)+t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$

5) $\ell : \underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$

6) $\ell : \underline{x}=t(1,9,13)$

זווית בין שני ישרים

שאלות

1) מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x} = (4,0,0) + t(6,8,1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4,2,-4)$

ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10,17,-18) + t(3,0,-6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6,5,4) + s(0,4,0)$

2) מצא את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3,4,6)$, $B(6,0,-2)$ וישר העובר דרך הנקודות: $C(6,5,1)$, $D(-1,4,2)$ וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

3) נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $D(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

4) נתון מישור שמשוואתו: $3x-4y+6=0$. הנקודות $A(x,6,1)$, $B(-2,y,-1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$. מצא את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא: $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות

1) א. $78.521°$ ב. $90°$

2) $63.37°$. הישרים מצטלבים.

3) א. 1. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(3,5,-1)$ א. 2. $\ell : \underline{x} = (4,2,-1) + t(-1,-3,3)$

א. 3. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. $35.477°$.

4) $C(0,2,11)$ או $C(0,28.45,11)$

זווית בין ישר ומישור

שאלות

1) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$, $\ell : \underline{x} = (-2,0,5) + t(-2,1,2)$.

2) נתונות הנקודות $D(-7,3,-1)$, $C(1,2,5)$, $B(0,2,-1)$, $A(1,-1,2)$.
מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה
היא: $2x + y - 2z - 6 = 0$. קדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$.
מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים: $x_B = z_B = -1$.

תשובות סופיות

1) $18.87°$
2) $44.83°$
3) $14.9°$

זווית בין שני מישורים

שאלות

1) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1 : 4x+3y+z-12=0$
ו- $\pi_2 : 4x-7y+5z+3=0$.

2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם:
$A(0,2,-5)$, $B(3,-1,1)$, $C(7,-1,-5)$, $D(3,2,0)$.
מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

3) מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות

1) $90°$
2) $87.539°$
3) $32.312°$

מרחק בין שתי נקודות במרחב

שאלה

1) נתונות הנקודות: $A\left(2,4,-5\right)$, $B\left(0,-2,6\right)$ ו-$C\left(k,-1,13-k\right)$.
מצא ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה-שוקיים: $AB=AC$.

תשובה

1) $k=8$ או $k=12$.

מרחק בין נקודה לישר

שאלות

1) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell : \underline{x}=t(2,0,-7)$.

2) נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$, $B(2,-1,0)$, $A(1,6,-1)$.
חשב את שטח המשולש ABC.

3) על הישר $\ell : \underline{x}=(5,-2,0)+t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$. מצא את שיעורי הקדקוד B
(שתי אפשרויות).

תשובות סופיות

1) $\sqrt{54}$

2) 12.75 יח"ש.

3) $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.

מרחק בין נקודה למישור

שאלות

1) מצא את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

2) מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell: \underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $\text{A}(4,5,-9)$.

3) נתונים ישר ומישור: $\pi: 2x+4y-4z+15=0$, $\ell: \underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות

1) $2\frac{1}{2}$

2) $\pi: 3x-2y+z+21=0$ או $\pi: 3x-2y+z-7=0$.

3) $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

מרחק בין ישרים מקבילים

שאלות

1) נתונות הנקודות $D(12,11,-8)$, $C(6,1,4)$, $B(12,-5,2)$, $A(15,0,-4)$.

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1 : \underline{x} = (2,0,-1) + t(1,-2,1) \quad , \quad l_2 : \underline{x} = (-8,-1,19) + s(-4,1,6)$$

$$l_3 : \underline{x} = (-2,7,-11) + r(-2,4,-2) \quad , \quad l_4 : \underline{x} = (-2,1,5) + q(4,-1,-6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

תשובות סופיות

1) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

2) א. הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

מרחק בין ישר למישור

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $4x-z+6=0$.

א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

ב. מצא את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

2) נתונים ישר ומישור: $\pi:3x+12y-4z+k-10=0$, $l:\underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות

1) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$

2) א. הוכחה. ב. $k=2,4$

מרחק בין מישורים מקבילים

שאלות

(1 נתונה משוואת מישור: $\pi : 3x-4y+5z-10=0$.
מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

(2 נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1 : x-2y-2z+6=0$, $\pi_2 : x-2y-2z-12=0$.
מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

(3 נתונים שישה מישורים:
$\pi_1 : 2x+y-2z-11=0$, $\pi_2 : x+2y+2z+5=0$, $\pi_3 : 2x-2y+z+3=0$
$\pi_4 : 2x+y-2z+7=0$, $\pi_5 : x+2y+2z-1=0$, $\pi_6 : kx+qy+z+p=0$
מצא את ערכי הפרמטרים k, q ו- p שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

(4 כדור שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות

(1 $\pi_1 : 3x-4y+5z+10=0$, $\pi_2 : 3x-4y+5z-30=0$

(2 $\pi_3 : x-2y-2z-3=0$

(3 $k=2$, $q=-2$, $p=18,-12$

(4 $12x+4y-3z-136=0$

מרחק בין ישרים מצטלבים

שאלות

1) נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1 : \underline{x}=(-3,2,6)+t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x}=(0,2,-7)+s(1,0,-1)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

2) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1 : \underline{x}=(-1,0,5)+t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x}=(2,-1,9)+s(6,-1,0)$. מצא את המרחק שביניהם.

3) מצא את מרחק הישר $\ell : \underline{x}=(4,-2,-1)+t(-1,1,6)$ מציר ה- z.

תשובות סופיות

1) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח״א.

2) 1.567 יח״א.

3) $\sqrt{2}$ יח״א.

שאלות מסכמות

1) נתונות הנקודות $C(1,1,1)$, $B(1,2,0)$, $A(1,1,3)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצא את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

2) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים, מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצא גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$, $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$

ב. $\underline{x}=(1,-1,0)+s(12,-3,1)$, $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$

ג. $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$, $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$

ד. $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$, $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$

3) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

4) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם.
במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D', שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא: $\pi_1 : 4x+y+3z-28=0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא: $\pi_2 : x+2y-2z+6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

6) הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור, שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצא את משוואת המישור, המשיק לכדור בנקודה A.

7) נתונים מישור וישר: $\pi : 2x-y+2z+1=0$, $\ell : \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.
מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z, הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

8) נתונים שני מישורים: $\pi_2 : 4x-2y+4z-1=0$, $\pi_1 : 2x-4y+4z-5=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

9) נתונים ישר ומישור: $\pi : 6x+2y-z+5=0$, $\ell_1 : \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, ℓ_2, המקביל למישור π, עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π, הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
מצא את שטח המלבן PQQ'P'.
(הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2)

10) נתונים שני מישורים: $\pi_2 : 3x+y+2z+11=0$, $\pi_1 : 2x+y+z-5=0$.
ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של $60°$ עם הישר $\ell_2 : \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצא את משוואת המישור π_3.

תשובות סופיות

1) א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. הזווית היא: 47.6°.

3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל.
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$, הזווית היא: 40.78°.

4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$, זווית: 63.6°.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

5) $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$, $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

6) $\pi:\ -3x+y+3z+15=0$.

7) $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

8) $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

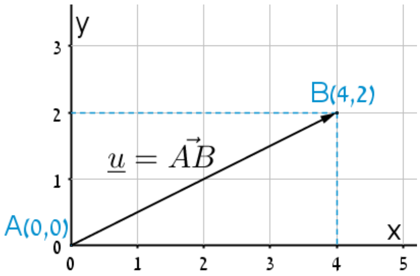
9) 10.467 יח"ש.

10) $\pi_3:x+2y-z-58=0$ או $\pi_3:2x+y+z-5=0$

סיכום כללי

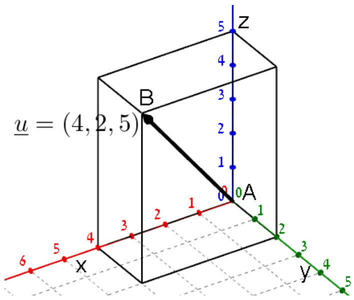
הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.



דוגמאות:

- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.

ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע״י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$
הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}, z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$; $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$.

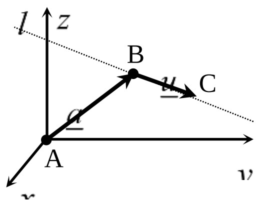
מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

מכפלה סקלרית של שני וקטורים α ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$, $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

גודלו של וקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר



ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ נקרא **וקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.
הווקטור $\underline{u}$ נקרא **וקטור הכיוון של הישר.**
זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell:\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים: $\underline{a}=\overrightarrow{AB}=B-A=(5,3,1)$; $\underline{u}=\overrightarrow{BC}=C-B=(7,0,10)-(5,3,1)=(2,-3,9)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l:\underline{x}=(5,3,1)+t(2,-3,9)$.

***הערות:**

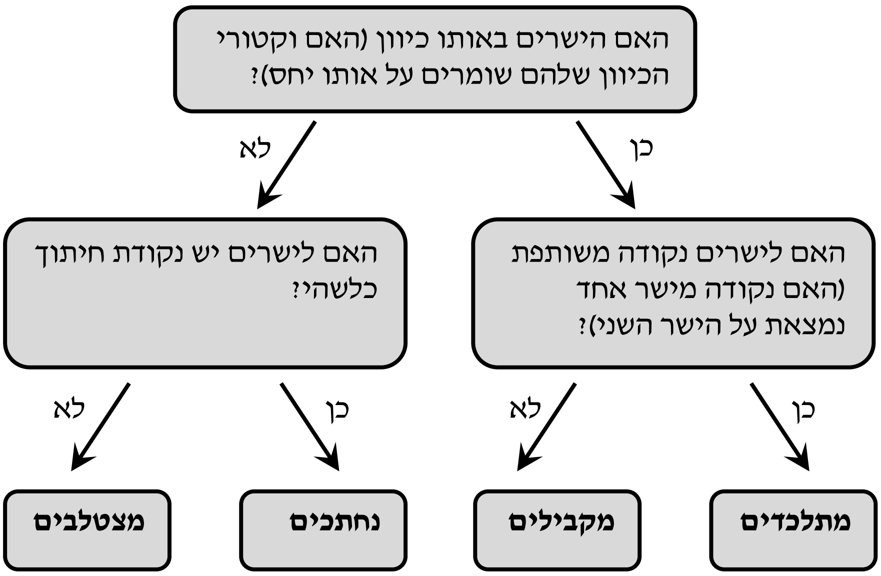
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l:\underline{x}=(7,0,10)+t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים

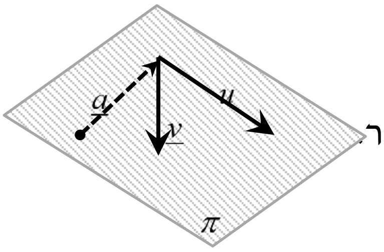
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע״י שלושה ווקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ הוא **ווקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ הם **וקטורי הכיוון של המישור.**
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע״י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t, s הם מספרים ממשיים כלשהם ו-$\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע״י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π.

משוואת מישור

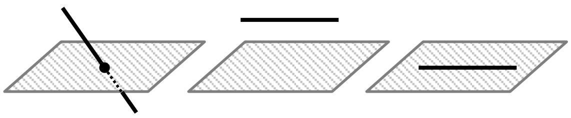
ניתן להציג מישור ע״י משוואה באופן הבא: $\pi: \ ax + by + cz + d = 0$,

כאשר: (x, y, z) היא נקודה על המישור והמקדמים a, b, c הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h} = (a, b, c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.



כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

מתלכדים	מקבילים	נחתכים
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$	כל מצב אחר

חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.
- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1=\underline{a_1}+t\underline{u_1}$ ו- $l_2=\underline{a_2}+s\underline{u_2}$ תחושב: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{u_1}\cdot\underline{u_2}}{|\underline{u_1}|\cdot|\underline{u_2}|}\right|$.
- זווית חדה α בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$

  תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.
- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

  ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{h_1}\cdot\underline{h_2}}{|\underline{h_1}|\cdot|\underline{h_2}|}\right|$.

חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

2. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l:\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$ יחושב ע״י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

3. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ למישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע״י: $d=\left|\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע״י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.

5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע״י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.

6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:

   א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

   ב. שימוש בנוסחה: $d=\left|\dfrac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע״י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.