# אמידה ובדיקת השערות



# תוכן העניינים


1. הסקה סטטיסטית - הקדמה ..... 1
2. התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי ..... 4
3. התפלגות מינימום ומקסימום ..... 19
4. מושגי יסוד באמידה ..... 23
5. אמידה נקודתית(אנמ, אחה, שיטת המומנטים esm) ..... 28
6. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ..... 63
7. רווח סמך לפרופורציה ..... 74
8. רווח סמך להפרש פרופורציות ..... 80
9. רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים ..... 82
10. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים ..... 86
11. שאלות מסכמות על רווחי סמך ..... 88
12. בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן) ..... 91
13. הלמה של ניימן פירסון ..... 98
14. מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים ..... 105
15. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) ..... 111
16. בדיקת השערות על פרופורציה ..... 138
17. בדיקת השערות על הפרש פרופורציות ..... 151
18. בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים ..... 155
19. בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים ..... 163
20. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות ..... 167
21. בדיקת השערות על שונויות ..... 170
22. מבחני חי בריבוע ..... 188
23. שאלות מסכמות בבדיקת השערות ..... 200

# תוכן העניינים

24. מבחנים אפרמטריים למדגם יחיד ..... 204
25. מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים ..... 214
26. מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים ..... 238

# אמידה ובדיקת השערות

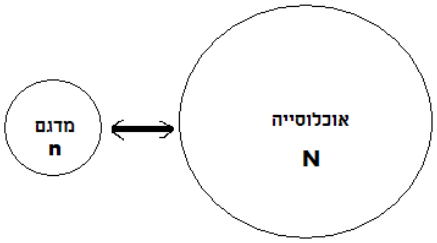
## פרק 1 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

# הסקה סטטיסטית – הקדמה:

## רקע:




**אוכלוסייה:**
קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית.
למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.

**מדגם:**

חלק מתוך האוכלוסייה.
למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה.
הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

**סטטיסטי:**

גודל המחושב על המדגם.

**פרמטר:**

גודל המתאר את האוכלוסייה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:**

| | סטטיסטי (מדגם) | פרמטר (אוכלוסייה) |
|---|---|---|
| **ממוצע** | $\overline{X}$ | $\mu$ |
| **פרופורציה (שכיחות יחסית)** | $\hat{p}$ | $P$ |

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים.
הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

**2)** להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן".
נגדיר את $X$ להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.

א. מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?

ב. מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

| מספר המשפחות | מספר מקלטים |
|---|---|
| 50 | 0 |
| 250 | 1 |
| 350 | 2 |
| 300 | 3 |
| 50 | 4 |
| סך הכול $N=1000$ | |

**3)** נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.

א. מהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה באוכלוסייה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו הסטטיסטי?

## תשובות סופיות:

**1)** א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.

**2)** א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים.
ב. $\bar{X}$ = ממוצע מדגם.

**3)** א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי.
ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 2 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

### תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי ..... 4
2. התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי ..... 12
3. התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם ..... 15

# התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

## רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$.
מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.
גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.
להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:
ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- $\mu$ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- $\sigma^2$.

סטיית תקן של אוכלוסייה: $\sigma$.

### תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- $n$.

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x}) = \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$.
יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.
אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?
ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?
ג. מה התוחלת ומהי סטית התקן של ממוצע המדגם?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דגימה מהתפלגות נורמאלית:**

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע $\mu$ ושונות $\sigma^2$.

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$ , $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

**משפט הגבול המרכזי:**

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע $\mu$ ושונות $\sigma^2$ אזי עבור מדגם מספיק גדול $(n \geq 30)$ ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי: $\bar{x} \sim\!\!\succ N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מיהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו תוחלת ממוצע המדגם?

ו. מהי טעות התקן?

**2)** להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים:

| מספר המשפחות | מספר מקלטים |
|---|---|
| 500 | 0 |
| 2500 | 1 |
| 3500 | 2 |
| 3000 | 3 |
| 500 | 4 |
| סך הכול $N=10000$ | |

א. בנו את פונקציית ההסתברות של $X$.

ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של $X$.

ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

**3)** אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

**4)** משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.

א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.

ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?

ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?

ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?

ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.

א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?

ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?

ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתחולת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?

ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

**6)** הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.

א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?

ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?

ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?

**7)** נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.

א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?

ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?

ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?

ד. בקבוקיי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

**8)** משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.

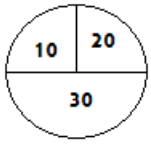
א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?

ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?

ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**9)** בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס׳ הבאים כמוראה בשרטוט:




אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?

ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?

ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה״כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

**10)** לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪.
מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

**11)** קובייה הוטלה 50 פעמים.
מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

**12)** אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס״מ וסטיית תקן של 10 ס״מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס״מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס״מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס״מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

**13)** נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

| $X$ | 8 | 6 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50.
מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**14)** נתון ש- $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם $\bar{X}$. לכן: $P\left(\bar{X}>\mu\right)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.
ב. 0.5.
ג. 1.
ד. לא ניתן לדעת.

**15)** נתון ש- $X$ מתפלג כלשהו עם תוחלת: $\mu$ ושונות $\sigma^2$.
החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $X \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ב. $\mu \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ג. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

**16)** נתון ש- $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. אם נדגום $n$ תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$,
אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $\mu$ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.
ב. $\mu$ יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$ קבוע.
ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו- $\mu$ קבוע.
ד. $\mu$ ו- $\bar{X}$ יהיו קבועים.

**17)** משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם. החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.

א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**18)** משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20.
מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

**19)** מספר המכוניות הנכנסות לחניון "בציר" במשך היום מתפלג פואסונית עם קצב של מכונית אחת לדקה. שומר מסר נתונים על מספר המכוניות שנכנסות בכל שעה לגבי 40 שעות שאסף נתונים.
מה ההסתברות שממוצע מספר המכוניות שנכנסו לחניון לשעה בשעות אלה יהיה לפחות 63?

**20)** הוכיחו שאם משתנה מתפלג כלשהו עם תוחלת $\mu$ ושונות $\sigma^2$, ומבצעים מדגם בגודל $n$ של תצפיות בלתי תלויות מהמשתנה, אזי מתקיימות התכונות הבאות לגבי ממוצע המדגם: $E(\bar{x})=\mu$ ו- $V(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
ה. 78. ו. 10.6.

**2)** א. להלן טבלה:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X)$ | 0.05 | 0.25 | 0.35 | 0.3 | 0.05 |

ב. $\mu = 2.05$ , $\sigma^2 = 0.9475$ , $\sigma = 0.973$

ג. $\mu_{\bar{x}} = 2.05$ , $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$ , $\sigma\left(\overline{X}\right) = 0.486$

**3)** $\mu_{\bar{x}} = 3.5$ , $\sigma\left(\overline{X}\right) = 1.21$.

**4)** א. 0.8413. ב. 0.0013. ג. 0. ד. 0.1974.

**5)** א. 0. ב. 0. ג. 0.9544. ד. 178.205.

**6)** א. 0.0465. ב. 27.71. ג. 0.2628. ד. התשובה הייתה קטנה.

**7)** א. 0. ב. 0.1587. ג. 0.1587. ד. 0.5.

**8)** א. 0.5468. ב. 0.6826.

**9)** א. להלן טבלה:

| $X$ | 10 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|
| $P(X)$ | 0.25 | 0.25 | 0.5 |

ב. התוחלת: 22.5, השונות: 68.75.

ג. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75. ד. 0.8997.

**10)** 0.0475.

**11)** 0.1814.

**12)** א. 0.9772. ב. 0.0228. ג. 271.

**13)** 0.5.

**14)** ב'.

**15)** ד'.

**16)** ג'.

**17)** א. 2.429. ב. 0.25.

**18)** 0.6826.

**19)** 0.0071.

**20)** שאלת הוכחה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי:

## רקע:

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם: $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה, כלומר, היו: $X_1,\ldots,X_n$ - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה $\mu$ ושונותה $\sigma^2$ אזי:

התוחלת והשונות של סכום התצפיות: $E(T)=n\mu$ , $V(T)=n\sigma^2$.

### דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

אם: $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, אזי: $Z=\frac{T-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ , $T\sim N\left(n\mu,n\sigma^2\right)$.

### משפט הגבול המרכזי:

אם $X$ מתפלג כלשהו וידוע כי: $V(X)=\sigma^2$ ,$E(X)=\mu$ ,

אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30): $T\sim\!\succ N\left(n\mu,n\sigma^2\right)$.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪.
נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורותיהם לסניף בנק.

1. מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
2. מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.

א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק"ג?

ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?

ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?

**2)** נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.

א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?

ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר.
מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?

ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב' הייתה משתנה?

**3)** בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב-4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.

א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?

ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?

**4)** במגדל נבנו 40 יחידות דיור. כמו כן נבנו 135 מקומות חנייה לבניין.
להלן פונקציית ההסתברות של מספר המכוניות ליחידת דיור:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.25 | 0.15 |

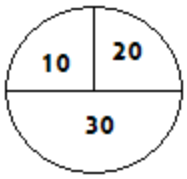
נניח שמספר המכוניות ליחידת דיור בלתי תלויות זו בזו ועם אותה פונקציית הסתברות לכל יחידת דיור (אין צורך בתיקון רציפות).

א. מהי ההסתברות שיהיה מקום בחניון המגדל לכל מכוניות הבניין?

ב. בהינתן ויש מקום במגדל לכל המכוניות, מה הסיכוי שבפועל מספר המכוניות נמוך מ-130?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** בקזינו ישנה רולטה עליה מסומנים המספרים הבאים:




אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום.

א. אם האדם משחק 50 פעמים, מה ההסתברות שבסך הכול יזכה בסכום של 1050 ₪ ומעלה?

ב. האדם מגיע בכל יום לקזינו ומשחק 50 פעם, עד אשר מגיע היום בו הוא יזכה ב-1050 ₪ ומעלה. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הימים שיבלה בקזינו?

**6)** נתון ש- $X_i \sim \exp(\lambda=1)$, כאשר: $i=1,2...100$.

חשבו את הסיכוי: $P\left(\sum_i X_i \geq 115\right)$.

**7)** אורך חיי סוללה (בשעות) הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה: $0<x<1$, $f(x)=2x$. ברגע שסוללה מתרוקנת מחליפים אותה במיידית בסוללה אחרת. כמה סוללות יש להחזיק במלאי אם רוצים שבסיכוי של 90% לפחות המלאי יספיק עבור 35 שעות לפחות?

## תשובות סופיות:

**1)** א. 0.6915 ב. 0.8413 ג. 0.5.

**2)** א. תוחלת: 3000 מ"ל, סטיית תקן: 40 מ"ל. ב. 0.0062.

ג. סעיף א' - לא משתנה, סעיף ב' - לא פתיר, התבסס על התפלגות נורמלית.

**3)** א. 0.0571 ב. 2036.8.

**4)** א. 0.883 ב. 0.7949.

**5)** א. 0.8997 ב. תוחלת 1.111, שונות 0.1239.

**6)** 0.0668.

**7)** 56.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם:

## רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות הדגימה של פרופורציית המדגם.
$Y$ - מספר ההצלחות במדגם (למשל, מספר המובטלים במדגם).

$\hat{p}=\frac{y}{n}$ - פרופורציית ההצלחות במדגם.

למשל, שיעור המובטלים במדגם - $n=200$ :
מספר המובטלים : $Y=20$ .

פרופורציית המובטלים במדגם : $\hat{p}=\frac{20}{200}=0.1$ .

נסמן ב- $p$ את שיעור ההצלחה באוכלוסייה וב- $q$ את שיעור הכישלונות באוכלוסייה.
נבצע מדגם מקרי (הנחה שהתצפיות בלתי תלויות זו בזו) ונתבונן בהתפלגות של פרופורציית המדגם.

**התוחלת, השונות וסטיית התקן של פרופורציית המדגם:**

$$E\left(\hat{p}\right)=p\ \ ,\ V\left(\hat{P}\right)=\frac{pq}{n}\ .$$

משפט הגבול המרכזי עבור הפרופורציה המדגמית:

אם : $np\geq 5\ \&\ nq\geq 5$ , אזי : $\hat{p}\sim N\left(p,\frac{pq}{n}\right)$ . $Z_{\hat{p}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ .

**הערות:**

- התנאים לקרוב הנורמאלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני.
  התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:
  1. $n\cdot p\geq 5$ .
  2. $n\cdot(1-p)\geq 5$ .
- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:
  1. $n\cdot p\geq 10$ .
  2. $n\cdot(1-p)\geq 10$ .
- וישנם מרצים המשתמשים בתנאי : $\left(n\geq 30\right)$ .
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור לנורמלית.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

- כיוון שפרופורציה אינה חייבת להיות מספר שלם בהכרח לא נהוג לבצע כאן תיקון רציפות.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

לפי נתוני משרד החינוך בעיר ירושלים ל-60% מתלמידי התיכון זכאים לתעודת בגרות. נדגמו 200 תלמידי תיכון.

א. מה ההסתברות שהשכיחות היחסית $\left(\hat{p}\right)$ של הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 60%?

ב. מה ההסתברות שפרופורציית הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 70%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** במדינה מסוימת 10% מכלל האוכלוסייה הינם מובטלים.
נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.

א. מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?

ב. מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?

ג. מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?

**2)** נניח כי 30% מהאוכלוסייה תומכים בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

ב. לכל היות 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

ג. יותר מ-27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

**3)** לפי נתוני משרד התקשורת 40% מהאוכלוסייה מחזיקים בטלפון נייד מסוג "סמארטפון". נדגמו 400 אנשים מהאוכלוסייה.

א. מה ההסתברות שבמדגם לכל היותר ל-40% יש סמארטפון?

ב. מה ההסתברות שבמדגם לרוב יש סמאטרפון?

ג. מה ההסתברות שפרופורציית בעלי הסמרטפון במדגם תסטה מהפרופורציה באוכלוסייה בלא יותר מ-4%?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?

**4)** נתון כי 80% מבתי האב מחוברים לאינטרנט. נדגמו 400 בתי אב אקראיים.

א. מה ההסתברות שלפחות 340 מהם מחוברים לאינטרנט?

ב. מה ההסתברות שפרופורציית המחוברים לאינטרנט במדגם תסטה מהפרופורציה האמיתית ביותר מ-4%?

ג. כמה בתי אב יש לדגום כדי שהסטייה בין הפרופורציה המדגמית לפרופורציה האמיתית לא תעלה על 3% בהסתברות של 90%?

ד. מהו העשירון התחתון של התפלגות פרופורציית המדגם?

**5)** נתון שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100.
ב"מועדון ה-700" נכללים נבחנים שמקבלים ציון מעל 700 בפסיכומטרי.
מה הסיכוי שבמועד בו נבחנו 2000 נבחנים אקראיים יהיו לפחות 3% המשתייכים למועדון?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** נתון ש-$X \sim B(n,p)$ , ונגדיר את המשתנה הבא: $\hat{P} = \frac{X}{n}$.

א. הוכיחו ש: $V(\hat{P}) = \frac{P(1-P)}{n}$ , $E(\hat{P}) = p$.

ב. מה $p$ המביא את $V(\hat{P})$ להיות במקסימום?

## תשובות סופיות:

**1)** א. התוחלת: 0.1, השונות: 0.00064. ב. 0.5. ג. 0.3446.

**2)** א. 0.0618. ב. 0.0618. ג. 0.8238.

**3)** א. 0.5. ב. 0. ג. 0.8968. ד. גדלה.

**4)** א. 0.0062. ב. 0.0456. ג. 481. ד. 0.77436.

**5)** 0.0154.

**6)** א. שאלת הוכחה. ב. 0.5.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 3 - התפלגות מינימום ומקסימום

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 19

# התפלגות מינימום ומקסימום:

## רקע:

**התפלגות מקסימום:**

נניח ש-$X_i$ הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה.

נגדיר את: $U=\max\left(x_1,x_2,...x_n\right)$. מתקיים ש: $F_U\left(t\right)=\left(F_X\left(t\right)\right)^n$,

ולכן: $f\left(u\right)=n\cdot\left(F_x\left(u\right)\right)^{n-1}\cdot f_x\left(u\right)$.

**התפלגות מינימום:**

נניח ש-$X_i$ הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה.

נגדיר את: $Z=\min\left(X_1,X_2...,X_n\right)$. מתקיים ש: $F_Z\left(t\right)=1-\left(1-F_X\left(t\right)\right)^n$,

ולכן: $f\left(z\right)=n\cdot\left[1-F_x\left(z\right)\right]^{n-1}\cdot f_x\left(z\right)$.

**דוגמה (הפתרון בהקלטה):**

$X_i\sim\exp\left(\lambda\right)$.

הוכיחו כי: $\min\left(x_i\right)\sim\exp\left(n\lambda\right)$, $i=1,2,...n$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שאם $X_i$ מתפלג רציף עבור כל: $i=1,2,...,n$ באופן בלתי תלוי עם פונקציית צפיפות $f(x)$ ו- $Z=\min(X_1,X_2...X_n)$, מתקיים ש: $f(z)=n\left[1-F_X(z)\right]^{n-1}\cdot f_x(z)$.

ב. הוכיחו שאם $X_i$ מתפלג רציף עבור כל: $i=1,2,...,n$ באופן בלתי תלוי עם פונקציית צפיפות $f(x)$ ו- $U=\max(x_1,x_2,...x_n)$, מתקיים ש: $f(u)=n\cdot\left(F_x(u)\right)^{n-1}\cdot f_x(u)$.

**2)** אורך חיי רכיב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 יום.

א. מכשיר בנוי מ-3 רכיבים בלתי תלויים המחוברים במקביל. בנו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של אורך חיי מכשיר.

ב. חזרו על סעיף א' אם הרכיבים מחוברים בטור.

ג. מה התוחלת והשונות של אורך חיי המכשיר המתואר בסעיף ב'?

**3)** בכיתה 30 תלמידים, כל תלמיד נרדם תוך זמן המתפלג אקספוננציאלית עם קצב של 8 הירדמויות בשעה. המורה צועק אחרי שנרדם התלמיד הראשון ועוזב את הכיתה שנרדם התלמיד האחרון.

א. מה הסיכוי שיצעק אחרי פחות מדקה?

ב. מה הסיכוי שיצא מהכיתה אחרי פחות מדקה?

**4)** 3 אנשים משתתפים בתחרות ריצה ל-100 מטרים. כל אחד מהם רץ את המרחק בזמן שהוא משתנה מקרי בעל התפלגות אחידה בתחום בין 10 ל-12 שניות.

א. מה הסיכוי שהמנצח סיים את הריצה בזמן הגבוה מ-10.5 שניות?

ב. מה הסיכוי שהמפסיד סיים את הריצה בזמן הנמוך מ-11.2 שניות?

ג. מהי התפלגות זמן הריצה של המפסיד בתחרות? מצאו את התוחלת והשונות שלו?

**5)** $X_1,X_2$ מתפלגים נורמאלית סטנדרטית.

נגדיר את: $Z=\min(X_1,X_2)$ ואת: $Y=\max(X_1,X_2)$.

א. חשבו $P(z>1)$.

ב. חשבו $P(Y>1)$.

ג. חשבו $P(Y>1/Y>0)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** רונית נכנסת למכון יופי. היא מבצעת טיפול פדיקור ומניקור בו זמנית. משך זמן הפדיקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 20 דקות ומשך זמן המניקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 15 דקות. נניח שאין תלות במשך זמן הטיפול של המניקור והפדיקור.

א. מצאו את ההסתברות שמשך זמן הטיפול לא יעלה על שעה.

ב. ידוע שמשך זמן טיפול הפדיקור עלה על 10 דקות. מה ההסתברות שמשך זמן בטיפול במכון היופי לא יעלה על 20 דקות?

**7)** נתון ש: $X \sim \exp(\lambda)$ ו- $Y \sim \exp(\mu)$. $U = \min(x, y)$ כמו $x, y$ בלתי תלויים.

הוכיחו כי: $U \sim \exp(\mu + \lambda)$.

**8)** $X_1$ ו- $X_2$ שני משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים המתפלגים אחיד בין 0 ל-1.

נגדיר: $Y = \max(x_1, x_2)$.

חשבו את: $P(Y > 0.5)$.

**9)** נתון ש- $X_i \sim U(0,2)$ בלתי תלויים זה בזה כאשר: $i = 1, 2, ..., 5$.

מצאו את פונקציית הצפיפות של: $T = \max(X_i)$.

**10)** נתון משתנה מקרי $X$ בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & o \le x \le 1 \\ 0 & \text{תא} \quad \text{חר} \end{cases}$$

נגדיר את: $W = \max(X_i)$ כאשר: $i = 1, 2, ..., 10$.

חשבו את $E(W)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $F_u(t)=\left(1-e^{-\frac{1}{30}t}\right)^3$. ב. $Z\sim\exp\left(\lambda=\frac{1}{10}\right)$.

ג. תוחלת: 10, שונות: 100.

3) א. 0.9817. ב. 0.

4) א. 0.421875. ב. 0.216. ג. תוחלת: 11.5, שונות: 0.15.

5) א. 0.02518. ב. 0.2922. ג. 0.3896.

6) א. 0.9328. ב. 0.2898.

7) הוכחה.

8) 0.75.

9) $\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^4$.

10) $\frac{30}{31}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 4 - מושגי יסוד באמידה

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 23

# מושגי יסוד באמידה:

## רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל - $\mu$.
כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - $p$.
בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות $\theta$ ואומד ב-$\hat{\theta}$. $\hat{\theta}$ הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את $\theta$.
- שגיאת אמידה: $\left|\hat{\theta}-\theta\right|$ - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

א. מה הפרמטר בדוגמה זו?

ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?

- $\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-$\theta$ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-$\theta$: $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$.
- טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר: $\sigma\left(\hat{\theta}\right)=S.E$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:**

**ממוצע האוכלוסייה $\mu$:**

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$.

$E(\bar{x}) = \mu$ לכן $\bar{x}$ הינו אומר חסר הטיה ל- $\mu$. כמו כן, טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$.

**פרופורציה באוכלוסייה $p$:**

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם: $\hat{p} = \frac{y}{n}$.

$E(\hat{p}) = p$, לכן $\hat{p}$ הינו אומר חסר הטיה ל- $p$. כמו כן טעות התקן: $\sigma(\hat{P}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$.

**שונות האוכלוסייה $\sigma^2$:**

האומד הנקודתי שלו יהיה: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$.

$E(S^2) = \sigma^2$ ולכן $S^2$ הינו אומד חסר הטיה ל- $\sigma^2$: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$.

**הערה:** אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.
להלן התוצאות שהתקבלו: 3, 1, 2, 5, 4, 1, 2, 3, 1, 2.
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד כשהמדגם בגודל 500?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

**2)** לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה .
במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

**3)** נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.

א. מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.

ב. מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.

ג. מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.

**4)** נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$ , $\sum_{i=1}^{20} X^2_i = 1502.2$.

א. אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.

ב. אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.

**5)** במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?

א. סטיית התקן של האוכלוסייה.

ב. סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.

ג. סטיית התקן של המדגם.

ד. סטיית התקן של ממוצע המדגם.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25 .
אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

א. 3.
ב. 2.5.
ג. 1.581.
ד. אין מספיק נתונים לדעת.

**7)** במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, מחולק ב-$n-1$?

א. כאשר $n$ קטן.
ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

**8)** $X_1, X_2, ..., X_{16}$ מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע $\mu$ לא ידוע ושונות: $\sigma^2 = 64$. טעות התקן של האומד ל-$\mu$ היא:

א. 16.
ב. 8.
ג. 4.
ד. 2.

**9)** מהו אומד חסר הטיה?

א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) א. 0.25 ב. 0.019 ג. 0.24 ד. 0.01
2) א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500.
ב. 100 ג. 2342 ד. 58
3) א. 177.9 ב. 64.1 ג. 0.4
4) א. 8.1 ב. 3.16
5) ד'.
6) ג'.
7) ד'.
8) ד'.
9) ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 5 - אמידה נקודתית(אנמ, אחה, שיטת המומנטים mse)

תוכן העניינים

1. אומד חסר הטייה ..... 28
2. אומד ניראות מקסימלית ..... 35
3. שיטת המומנטים ..... 43
4. MSE ..... 46
5. אומד עקיב ..... 49
6. אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית ..... 51
7. שאלות מסכמות ..... 53
8. אומד נראות מקסימלית לשני פרמטרים ( דו ממדי) ..... 58

# אומד חסר הטייה:

## רקע:

$\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-$\theta$, אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-$\theta$: $E(\hat{\theta})=\theta$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

המשתנה $X$ הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| **הסתברות** | $2\theta$ | $1-60\theta$ | $4\theta$ |

מעוניינים לאמוד את $\theta$ על סמך שתי תצפיות מההתפלגות: $X_1$ ו-$X_2$.

א. הראו שהאומד: $T_1=\frac{2X_1+X_2}{2}$, הוא אומד מוטה ל-$\theta$.

הטיה של אומד היא: $E(\hat{\theta})-\theta$. כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד $T_1$?

ג. תקנו את $T_1$, כך שיהיה אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא: $T_3=1.5X_1-X_2-1$.

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל-$\theta$, אז $g(\hat{\theta})$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $g(\theta)$, רק אם $g$ תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל: $P(X=3)$.

אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה $\sigma^2$: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$.

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של $X$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**תזכורות חשובות:**

אם: $Y=aX+b$, אזי: $E(Y)=aE(X)+b$ , $V(Y)=a^2\cdot V(X)$ , $\sigma_Y=|a|\sigma_x$.

אם: $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ משתנים מקריים, אזי:

$$E(T)=E(X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots\ldots+E(X_n).$$

אם: $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T)=V(X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\ldots\ldots+V(X_n).$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** הציון במבחן מסוים של תלמידי כתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת $\mu$ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת $\mu$, נלקח מדגם של 5 ציונים: $X_1,\ldots,X_5$.

שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

חוקר א' הציע: $T_1=\frac{X_1+\ldots+X_5}{5}$.

חוקר ב' הציע: $T_2=\frac{2X_1-X_3+X_4}{2}$.

חוקר ג' הציע: $T_3=\frac{2X_1+X_3}{2}$.

א. איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?

ב. הציעו תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.

ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 65, 78, 58, 82, 100.
חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.

ד. איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

**2)** כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של $2n$ נשים. נסמן את שונות הגובה ב- $\sigma^2$. הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם זה: $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ , $T_2=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$.

א. בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.

ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

**3)** $X\sim B(n,p)$. כלומר, $X$ הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר $P$ (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל $n$.

א. פתחו אומד חסר הטיה ל- $P$.

ב. מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד?

ג. מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$?

ד. מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** בתיק מניות שתי מניות. מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר לא ידוע: $\theta$, $0 \le \theta \le 2$.
פונקציית ההסתברות של $X$ - מספר המניות שיעלו ביום מסוים:
$P(X=2)=\frac{\theta}{6}$, $P(X=1)=\frac{\theta}{3}$, $P(X=0)=1-\frac{\theta}{2}$.

א. מְצאו אומד בלתי מוטה ל-$\theta$, שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.

ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל-$\theta$, שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום, במשך שלושה ימים - $X_1, X_2, X_3$ (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

**5)** בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר $\theta$ באופן הבא:
הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא $3\theta$,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא $1-4\theta$,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא $\theta$.
במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר $\theta$ על סמך תצפית בודדת.

ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר $\theta$ על סמך 4 תצפיות.

ג. מהו האומדן לפרמטר $\theta$ על סמך תוצאות המדגם.

ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.

ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

**6)** קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. אם $T$ הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר $\theta$, אז $5T$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר $5\theta$.

ב. אם $T$ הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר $\theta$, אז $T^2$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר $\theta^2$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**7)** במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא $p$ , ובמכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא $2p$ .
דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה.
נסמן ב- $X$ את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה, וב- $Y$ את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה.
איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- $p$ ?

א. $\frac{X}{20}$ .

ב. $\frac{Y}{20}$ .

ג. $\frac{X+Y}{60}$ .

ד. $\frac{2X+Y}{80}$ .

**8)** יהיו $T_1$ ו- $T_2$ אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר $\theta$ .

א. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta^2$ , המתבסס על $T_1$ ו- $T_2$ .

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta(1-\theta)$ , המתבסס על $T_1$ ו- $T_2$ .

**9)** נתון ש- $X$ הינו משתנה מקרי עם תוחלת $\mu$ ושונות $\sigma^2$ .
נדגמו $n$ תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסיה.

א. הראו ש- $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ אומד חסר הטייה ל- $\mu$ , כאשר : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ .

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות : $X_1 \cdot X_2$ .

הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- $\mu^2$ .

**10)** $X_i \sim N(\mu,1)$ , כאשר : $i = 1,2...,n$ .
נתון שהתצפיות הינן בלתי תלויות זו בזו.
מצאו אומד חסר הטיה ל- $\mu^2$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**11)** נתונות $n$ תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות בעלת הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+\beta x}{2} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}.$$

א. הראו כי האומד $3\bar{X}$ הנו אומד בלתי מוטה ל-$\beta$.

ב. מצאו את השונות של האומד מהסעיף הקודם.

**12)** $X_1, X_2, ..., X_n$ הינם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}X\cdot A & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}.$$

א. בטאו את ערכו של $A$ באמצעות $\theta$, כדי שפונקציית הצפיפות תהיה לגיטימית.

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל-$\theta$, על סמך $n$ התצפיות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. $T_1$ ו- $T_2$. ב. $\frac{2}{3}T_3$. ג. $T_1=76.6\ ,\ T_2=110$ ד. $T_1$.

**2)** א. ראו בווידאו. ב. $T_2$.

**3)** א. $\frac{x}{n}$. ב. $1-\frac{x}{n}$. ג. $X$. ד. $\theta$.

**4)** א. $\frac{3x}{2}$. ב. $\frac{3\overline{x}}{2}$.

**5)** א. $1-\frac{x}{2}$. ב. $1-\frac{1}{2}\overline{x}$. ג. 0.125 ד. $3\left(1-\frac{1}{2}\overline{x}\right)$.

ה. לשונות 0.917.

**6)** א. נכון. ב. לא נכון.

**7)** ב'.

**8)** א. $T_1\cdot T_2$. ב. $T_1-T_1\cdot T_2$.

**9)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

**10)** $\overline{X}^2-\frac{1}{n}$.

**11)** א. שאלת הוכחה. ב. $V\left(3\overline{X}\right)=\frac{3-\beta^2}{n}$.

**12)** א. $A=\frac{2}{\theta^2}$. ב. $\theta=\frac{3}{2}\overline{X}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אומד נראות מקסימלית:

## רקע:

להלן נלמד את שיטת הנראות המקסימלית למציאת אומדים.

נניח ש- $X$ משתנה מקרי בדיד עם פונקציית הסתברות $P(x,\theta)$,

כאשר $\theta$ הפרמטר הבלתי ידוע.

יהיו: $X_1, X_2, ..., X_n$ תוצאות מדגם מקרי בגודל $n$ הנלקח מאוכלוסייה זו.

נבנה את פונקציית ההסתברות המשותפת (פונקציית הדגימה).

אם אנו יודעים את תוצאות המדגם, ולא את הפרמטר, קוראים לפונקציית הנראות שהיא פונקציה של הפרמטר.

נגדיר את פונקציית הנראות:

$$L(\theta) = P(x_1,\theta)\cdot P(x_2,\theta)\cdot ...\cdot P(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i,\theta).$$

פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את התצפית הראשונה (כפונקציה של $\theta$), כפול ההסתברות לקבל את התצפית השנייה, וכולי. כלומר, המשמעות של פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את המדגם שהתקבל, כפונקציה של הפרמטר המבוקש $\theta$.

אם מדובר במשתנה רציף, נכפיל את פונקציות הצפיפות ולא את פונקציות ההסתברות:

$$L(\theta) = f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdot ...\cdot f(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta).$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

הסיכוי של שחקן כדורסל לקלוע לסל הוא $p$ (לא ידוע). השחקן זורק כדורים לסל עד שהוא קולע בפעם הראשונה. נניח כי הזריקות בלתי תלויות זו בזו.
הכדור נכנס לסל לראשונה בניסיון השלישי.
השחקן חוזר על התהליך שוב, והפעם הכדור נכנס לסל בניסיון החמישי.
מצאו את פונקציית הנראות של $p$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אומד נראות מקסימלית עבור $\theta$ הוא האומד $\hat{\theta}$, שממקסם את פונקציית הנראות $L(\theta)$.
כלומר, אנו מחפשים את האומד שיגרום לכך שהמדגם המקרי שקיבלנו יהיה כמה שיותר סביר.

**שלבים למציאת אומד נראות מקסימלית:**

- לוקחים את פונקציית ההסתברות המשותפת של המדגם (או צפיפות משותפת אם המשתנה רציף).
- מציבים את תוצאות המדגם ומקבלים את פונקציית הנראות (פונקציה של הפרמטר הנחקר).
- מוצאים מקסימום לפונקציית הנראות (לעיתים כדאי להוסיף $ln$ כדי להקל על המלאכה).

**המשך דוגמה:**

חשבו את אומדן הנראות המקסימלית עבור $p$.

**משפט:** אם $\hat{\theta}$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור $\theta$, אזי $g\left(\hat{\theta}\right)$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור $g\left(\hat{\theta}\right)$, בהנחה והפונקציה היא חד-חד ערכית (אינווריאנטיות).

**המשך דוגמה:**

מצאו אומדן נראות מקסימלית לסיכוי של שחקן הכדורסל לקלוע לסל פעמיים ברצף.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא $p$ (לא ידוע).
השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה.
נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.

א. חשבו את פונקציית הנראות של $p$ , וציירו גרף שלה.

ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור $p$ .

ג. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $p$ , אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים, עד אשר ניצח.

**2)** מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסוימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של $\lambda$ לקוחות ביום.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- $\lambda$ , על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסוים.

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- $\lambda$ , על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב- $n$ ימים מסוימים.

**3)** הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר $\lambda$.
דגמו 4 אנשים מקריים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם.
התוצאות שהתקבלו בדקות הן: 3, 7,5 ו-3.

א. פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר זה על סמך $n$ תצפיות כלשהן.

ב. מהו האומדן לפרמטר?

**4)** משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער, ביום אחד, מתפלג אחיד: $U(0,q)$.

כדי לאמוד את $\theta$ , נשאלו ביום מסוים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי-בית באותו יום.

א. אלעד הכין ביום מסוים שעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של $\theta$ המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.

ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $\theta$ על סמך התצפית.

ג. משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו 1,3,1.5.
מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $\theta$ על סמך המדגם הזה.

ד. מצאו באופן כללי אומד נראות מקסימלית ל- $\theta$ , על סמך מדגם של $n$ בני נוער – $X_1,\ldots,X_n$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות $\sigma^2$ לא ידועה.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית עבור השונות על סמך מדגם $X_1,\ldots,X_n$ מתצפיות מהאוכלוסייה.

ב. נדגמו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 165, 174, 174. מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

**6)** פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר $p$ בהתפלגות הבינומית, על סמך מדגם בגודל $n$, בו $X$ הוא מספר ההצלחות במדגם.

**7)** $X$ הוא משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות: $f(x)=\begin{cases}2\theta xe^{-\theta x^2} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל-$\theta$ על סמך $n$ תצפיות בלתי תלויות: $X_1,\ldots,X_n$.

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל-$\theta^2$.

**8)** בכד א' 10 כדורים שחורים ו-10 לבנים ובכד ב' 5 כדורים שחורים ו-15 לבנים. דוגמים באקראי כדור, בלי לדעת מאיזה כד.

א. מצא אומד נראות מקסימלית לכד שממנו הוצא הכדור על סמך הצבע של הכדור.

ב. מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

**9)** הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשבץ מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה. נתנו ליוסי לפתור חמישה תשבצים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.

א. מה אומדן הנראות המקסימלית לתוחלת זמן הפתרון של תשבץ על ידי יוסי (אין חובה לפתח).

ב. מה אומדן הנראות המקסימלית לסיכוי שייקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**10)** מספר הלקוחות הממתינים בתור במוקד טלפוני הוא משתנה מקרי $X$, בעל התפלגות התלויה בפרמטר $\theta$, באופן הבא:

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X)$ | $4\theta^2$ | $4\theta-8\theta^2$ | $1-4\theta+4\theta^2$ |

בחמישה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו: 0, 0, 0, 1, 0 לקוחות ממתינים בתור.

א. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית עבור הפרמטר $\theta$, על-סמך המדגם הנתון.

ב. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסיכוי שלא יהיו לקוחות בתור.

**11)** אדם מחזיק בידו שני מטבעות: מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן – שהסיכוי לקבל בו תוצאה של עץ הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לך כמה פעמים הוא קיבל עץ. אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל: את ההוגן או את זה שאינו הוגן.

א. מצא אומד בשיטת הנראות המקסימלית לסוג המטבע שהוטל.

ב. מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עץ?

**12)** מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה.
דוגמים 50 אנשים אקראיים ומתקבל ש-4 מהם מובטלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

ב. מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה.

ג. מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

**13)** במשחק מחשב שלוש רמות משחק:
ברמה 1 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.9.
ברמה 2 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.7.
ברמה 3 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.4.
יוסי בחר ברמה מסוימת, אך אינו יודע באיזו רמה הוא בחר.
הוא משחק במשחק ברמה שבחר פעמיים.

א. הציעו א.נ.מ. לרמה של המשחק שיוסי שיחק, על סמך מספר הפעמים שסיים את המשחק.

ב. אם יוסי סיים את שני המשחקים, מה יהיה האומדן לרמה?

ג. מהו א.נ.מ. לסיכוי, שמתוך שני משחקים הוא יצליח בדיוק משחק אחד?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**14)** $X_1, X_2, ..., X_n$ מתפלגים אחיד בקטע: $[-\theta, \theta]$.
מצא אומד נראות מקסימלית לפרמטר $\theta$.

**15)** $X_1, X_2, ..., X_n$ מתפלגים בדיד לפי פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X=k)=\frac{\binom{2}{k}\cdot P^k\cdot(1-P)^{2-k}}{1-(1-P)^2} \qquad K=1,2$$

הוכח שא.נ.מ ל- $P$, הינו: $\frac{2}{\overline{X}}-2$.

**16)** במכשיר חשמלי יש 2 סוללות שפועלות באופן ב"ת זו בזו, והוא מפסיק לפעול ברגע שאחת הסוללות מפסיקה לעבוד. הסיכוי של סוללה לתפקד לפחות חודש הוא $P$. כאשר המכשיר מפסיק לפעול מחליפים את שתי הסוללות שלו. בתחילת הניסוי נלקחו 80 מכשירים כאלה עם סוללות חדשות ולאחר חודש נמצא ש-30 מהם עדיין פועלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית עבור $P$.

ב. רשמו את האומד שבו השתמשתם בחלק א' באופן כללי, עבור מדגם של $n$ מכשירים שמתוכם נמצאו $Y$ מכשירים שעדיין פועלים לאחר חודש אחד.

ג. בהנחה שאורך החיים (בחודשים) של סוללה בודדת הוא מעריכי, עם פי צפיפות: $f(t)=\theta e^{-\theta t}$ עבור $t>0$.
מצא א.נ.מ. עבור $\theta$, המבוסס על $Y$.
מהו האומדן המתאים מן המדגם הנתון?

**17)** חיוג אוטומטי של מכשיר טלפון משדר אות אחת לשתי דקות. אם לאחר 20 דקות (10 אותות חיוג) המספר שאליו מטלפנים עדיין תפוס, החיוג האוטומטי נפסק.

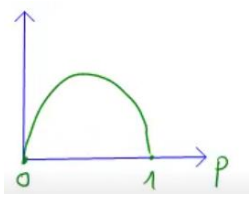
א. רשמו את פונקציית ההסתברות של המשתנה $X$ – מספר הפעמים שהחייגן האוטומטי מחייג למספר הטלפון המבוקש, אם ההסתברות לקבלת צליל "פנוי" בשידור אחד של אות חיוג הוא $P$.

ב. מתוך 12 ניסיונות חיוג אוטומטי למשרד הרישוי בזמנים שונים במשך 5 ימים, התקבלו התוצאות הבאות: בשני ניסיונות הופסק החיוג האוטומטי ובשאר הניסיונות שבהם הצליח המטלפן להשיג את המספר המבוקש, מספר החיוגים האוטומטיים עד לקבל צליל "פנוי" היו: 1, 6, 2, 7, 3, 8, 2, 2, 1, 5.
מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור $P$, על סמך התוצאות שהתקבלו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) א. $L(p)=(1-p)\cdot p$. להלן גרף:




ב. 0.5. ג. $\frac{2}{9}$.

2) א. $X$. ב. $\overline{X}$.

3) א. $\frac{1}{\overline{X}}$. ב. $\frac{2}{9}$.

4) א. 1. ב. 1. ג. 3. ד. $\hat{\theta}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$.

5) א. $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-170)^2}{n}$. ב. 40.2.

6) $\frac{x}{n}$.

7) א. $\frac{n}{\sum X_i^2}$. ב. $\left(\frac{n}{\sum X_i^2}\right)^2$.

8) א. ראה סרטון. ב. כד א'.

9) א. 32. ב. 0.3916.

10) א. 0.45. ב. 0.81.

11) א.ראה סרטון. ב. הוגן.

12) א. 0.08. ב.0.92. ג. 11.5.

13) א. $\hat{\theta}=\begin{cases}3 & X=0,1\\ 1 & X=2\end{cases}$. ב. 1. ג. $\hat{p}=\begin{cases}2\cdot 0.4\cdot 0.6 & X=0,1\\ 2\cdot 0.9\cdot 0.1 & X=2\end{cases}$.

14) $\max|X_i|$.

15) שאלת הוכחה.

16) א. 0.6124 ב. $\hat{p}=\sqrt{\frac{y}{n}}$ ג. 0.49.

17) א. $P(x)=\begin{cases}(1-p)^{x-1}p & 1\le x\le 9\\ (1-p)^9 & x=10\end{cases}$. ב. 0.1818.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## נספח:
## התפלגויות רציפות

| ההתפלגות | פונקציית הצפיפות | פונקציית ההתפלגות המצטברת | תוחלת | שונות | הערות | אנ"מ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X \sim U(a,b)$ | $f(x)=\frac{1}{b-a}$ $a \le x \le b$ | $\frac{t-a}{b-a}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | | $b=\max(X_i)$ $a=\min(X_i)$ |
| $X \sim \exp(\lambda)$ | $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ | $1-e^{-\lambda t}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. $\lambda$ - הוא ממוצע האירועים ביחידת זמן. | $\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}}$ |
| $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ | $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | $\Phi(t)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ | $\hat{\mu}=\bar{X}$ $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ |

## התפלגויות בדידות

| ההתפלגות | פונקציית ההסתברות $P(X=k)$ | תוחלת | שונות | הערות | אנ"מ |
|---|---|---|---|---|---|
| בינומית $B(n,p)$ $0 \le p \le 1$ | $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$ | $np$ | $np(1-p)$ | (1) | $\hat{P}=\frac{Y}{n}$ |
| גיאומטרית $G(p)$ $0<p\le 1$ | $(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots,\infty$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ | (2) | $\hat{P}=\frac{1}{\bar{X}}$ |
| אחידה $U(a,b)$ | $\frac{1}{b-a+1}$ $K=a,\ldots,b$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$ | (3) | $b=\max(X_i)$ $a=\min(X_i)$ |
| פואסונית $P(\lambda)$ $\lambda>0$ | $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,\ldots,\infty$ | $\lambda$ | $\lambda$ | (4) | $\hat{\lambda}=\bar{X}$ |

(1) מספר ההצלחות ב- $n$ ניסויי ברנולי ב"ת. $p$ - ההסתברות להצלחה.

(2) מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי ב"ת, $p$ - ההסתברות להצלחה.

(3) בחירה אקראית של מספר בין $a$ ו- $b$.

(4) מספר אירועים ביחידת זמן, $\lambda$ - קצב האירועים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# שיטת המומנטים:

## רקע:

מומנט מסדר ראשון של משתנה $X$ מוגדר להיות: $E(X)$.

מומנט מסדר שני של משתנה $X$ מוגדר להיות: $E(X^2)$.

באופן כלל, מומנט מסדר $r$ מוגדר להיות: $E(X^r)$.

מומנט מסדר ראשון של $n$ תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות: $\frac{\sum X_i}{n}$ - זהו מומנט מסדר ראשון של המדגם.

מומנט מסדר שני של $n$ תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות: $\frac{\sum X_i^2}{n}$ - זהו המומנט מסדר שני של המדגם.

באופן כללי, מומנט מסדר $r$ של $n$ תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות: $\frac{\sum X_i^r}{n}$ - זהו מומנט ה-$r$ של המדגם.

השיטה: משווים את המומנט המתאים של ההתפלגות לפי המומנט המתאים של המדגם.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

נגיד שמספר הפעמים שאדם מתעטש ביום מתפלג פואסונית על ידי פרמטר $\lambda$ (קצב ההתעטשויות ביום). רוצים לאמוד את $\lambda$ בשיטת המומנטים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** $X$ מתפלג אחיד רציף מהערך המינימלי $a$ לערך המכסימלי 20. מצא אומד לערך מינימלי $a$ לפי שיטת המומנטים על סמך $n$ תצפיות מההתפלגות.

**2)** דוגמים $n$ תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות נורמאלית אשר תוחלתה היא $\mu$ והשונות שלה היא $\sigma^2$. מצא אומדים לפרמטרים אלה לפי שיטת המומנטים.

**3)** אדם מטיל מטבע רגיל $n$ פעמים. יש לאמוד את מספר הפעמים שהוא מטיל את המטבע וזאת על סמך $X$ – מספר העצים שהוא קיבל.

א. מצא אומד בשיטת המומנטים ל-$n$ על סמך $X$ בודד.

ב. מצא אומד בשיטת המומנטים ל-$n$ על סמך חזרה של $m$ פעמים על אותו תהליך בו מטילים את המטבע ההוגן n פעמים.

ג. מהו האומדן אם האדם חזר על התהליך שלוש פעמים:
פעם אחת קיבל 5 עצים, בפעם השנייה הוא קיבל 4 עצים ובפעם השלישית הוא קיבל 7 עצים.

**4)** נתון ש-$X_i \sim \exp(\lambda)$. מצא אומד בשיטת המומנטים לפרמטר $\lambda$ על סמך מדגם של $n$ תצפיות.

**5)** נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x)=\begin{cases}\theta \cdot X^{\theta-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & else\end{cases}$.

א. בטא את $E(X)$ כפונקציה של הפרמטר $\theta$.

ב. מצא אומד ל-$\theta$ על פי שיטת המומנטים.

**6)** הזמן בדקות להכנת לחם במאפייה מתפלג באופן הבא: $X_i \sim N(10,\sigma^2)$.
במדגם של הכנת ארבעה לחמים התקבלו התוצאות הבאות: 5, 10, 6, 4.

א. אמוד את $\sigma^2$ בשיטת המומנטים על סמך מדגם בגודל $n$.

ב. מצא את האומדן ל-$\sigma^2$. מה הבעייתיות בתשובה?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) $\hat{a} = 2\bar{X} - 20$.

2) $\bar{X} = \hat{\mu}$ , $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2$.

3) א. $\hat{n} = 2X$. ב. $\hat{n} = 2\bar{X}_m$. ג. $\hat{n} = 10\frac{2}{3}$.

4) $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$.

5) א. $\frac{\theta}{\theta+1}$. ב. $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$.

6) א. $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - 100$. ב. -55.75.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# קריטריון MSE – תוחלת ריבוע הטעות:

## רקע:

הקריטריון הנפוץ ביותר כדי לבדוק את טיב האומד הוא קריטריון MSE:
Mean Squared Error – תוחלת ריבוע טעות האמידה.

$$MSE\left(\hat{\theta}\right)=E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2=V\left(\hat{\theta}\right)+\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2 .$$

כאשר: $V\left(\hat{\theta}\right)$ - הינה שונות האומד.

$E\left(\hat{\theta}\right)-\theta$ - הינה ההטיה של האומד.

אם $T_1$ ו- $T_2$ הינם אומדים לפרמטר $\theta$, האומד העדיף יהיה זה עם MSE קטן יותר.
כלומר, אם: $MSE\left(T_1\right)>MSE\left(T_2\right)$, אז $T_2$ עדיף על $T_1$.

**דוגמה (הפתרון בהקלטה):**

נתון משתנה $X$ המתפלג אחיד רציף באופן הבא: $X\sim U\left(3,\theta\right)$.

מוצעים שני אומדים לפרמטר $\theta$ על סמך תצפית בודדת: $T_1=2X-3$ ו- $T_2=\frac{3X-3}{2}$.

איזה אומד עדיף לאמידת הפרמטר $\theta$?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת.
מוצעים שני אומדים אפשריים ממוצע של שתי תצפיות וממוצע של שלוש תצפיות.
לפי קריטריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE), איזה אומד עדיף? הסבירו.

**2)** בעיר מסוימת בשוויץ בכל $\theta$ דקות רכבת מגיעה לתחנה מסוימת.
דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת - $X$.

א. הצע אומד חסר הטיה ל-$\theta$, על סמך $X$.

ב. סטטיסטיקאי הציע לאמוד את $\theta$ על סמך האומד: $1.5X$.
האם האומד הנ"ל מוטה?

ג. איזה אומד מבין האומדים בסעיפים א' ו-ב' עדיף?

**3)** חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחלות במחלת השפעת בחורף (להלן: הפרמטר $P$). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים, ומתבונן בסטטיסטי $X$ - מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף.
הוא מתלבט בין שני אומדים: $T_1=\frac{X}{5}$ ו- $T_2=\frac{X+1}{7}$.

א. מי מבין האומדים הללו הוא חסר הטיה?

ב. מי מבין האומדים עדיף אם $P=0.5$?

ג. מי מבין האומדים עדיף אם $P=0.1$?

**4)** מספר השריפות המתרחשות בארץ בחודש אוקטובר מתפלג פואסונית עם תוחלת $\lambda$. נלקח מדגם של 10 חודשי אוקטובר. להלן שני אומדים אפשריים:
$\hat{\lambda}_1=\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i}{10}$ ו- $\hat{\lambda}_2=\frac{2\cdot\sum_{i=1}^{5}X_i+2\cdot\sum_{i=6}^{10}X_i}{10}$.
כאשר: $X_i$ = מספר השריפות בחודש אוקטובר ה-$i$.
איזה מהאומדים עדיף, לצורך אמידת הפרמטר $\lambda$?

**5)** הוכח ש: $E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2=V\left(\hat{\theta}\right)+\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** שלוש תצפיות.

**2)** א. $2x$. ב. אומד מוטה. ג. סעיף ב.

**3)** א. $T_1$. ב. $T_2$. ג. $T_1$.

**4)** $\hat{\lambda}_1$.

**5)** שאלת הוכחה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אומד עקיב:

## רקע:

יהי $\hat{\theta}_n$ אומד לפרמטר $\theta$, המתבסס על $n$ תצפיות.

אומד זה יקרא אומד עקיב, אם יתקיים ש: $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

אם $\hat{\theta}_n$ אומד חסר הטיה לפרמטר $\theta$ ומתקיים ש: $\lim_{n\to\infty} V\left(\hat{\theta}_n\right)=0$,

אזי $\hat{\theta}_n$ אומד עקיב ל-$\theta$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

הסבר מדוע $\overline{X}$ אומד עקיב ל-$\mu$.

אם $\hat{\theta}_n$ אומד נראות מקסימלית לפרמטר $\theta$, מתקיים ש: $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

כלומר, $\hat{\theta}_n$ אומד עקיב ל-$\theta$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

הסבר מדוע בהתפלגות גיאומטרית $\frac{1}{\overline{X}}$, אומד עקיב לפרמטר $P$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נתון כי: $X_i \sim U(0,\theta)$ , כאשר: $i=1,2...,n$ .

$2\bar{X}$ מוצע להיות האומד ל-$\theta$ .

א. הראה שאומד זה הוא חסר הטיה.

ב. הסבר מדוע האומד הינו עקיב.

**2)** נתון ש-$X \sim B(n,p)$ . כמו כן, נתון ש: $\hat{p}=\frac{X}{n}$ הינו אומד ל-$p$ .

הוכח שאומד זה הינו אומד עקיב ל-$p$ .

**3)** אורך חיי נורה מתפלג מעריכית עם קצב $\lambda$ לשנה.

נגדיר את: $W_1,W_2,...,W_n$ כסדרת זמנים (בשנים) של $n$ נורות בלתי תלויות.

א. מהו אומד הנראות המקסימלי עבור $\lambda$ ? האם האומד עקיב?

ב. מצא אומד עקיב לסיכוי שנורה כלשהי תישרף תוך פחות משנתיים.

**4)** נפח החלב בקרטון חלב מתפלג נורמלית עם תוחלת $\mu$ ושונות $\sigma^2$ .

מצא אומד עקיב לפרמטר $\sigma^2$, המתבסס על $n$ תצפיות בלתי תלויות.

## תשובות סופיות:

**1)** א. שאלת הוכחה. ב. ראה סרטון.

**2)** שאלת הוכחה.

**3)** א. $\frac{1}{\bar{W}}$ . ב. $1-e^{-\frac{2}{\bar{W}}}$ .

**4)** $\frac{\sum_i (X_i-\bar{X})^2}{n}$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית:

אומד חסר הטיה יעיל ביותר – MVUE (Minimum-variance unbiased estimator).

## רקע:

$T$ יהיה MVUE, אם מתקיים ש- $T$ אומד חסר הטיה ל- $\theta$, ובנוסף מתקיים ש:
$V(T)\le V\left(\hat{\theta}\right)$, לכל $\hat{\theta}$ חסר הטיה אחר.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

לרשת חנויות ישנם שני סניפים. מספר הלקוחות הנכנסים לכל סניף ביום מתפלג פואסונית עם קצב של $\lambda$ בסניף A וקצב של $2\lambda$ בסניף B.
נדגמו $n$ ימים מכל סניף, ונבדק בכל יום:
$X_i$ - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף A ביום $i$.
$Y_j$ - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף B ביום $j$.
על מנת לאמוד את $\lambda$, מוצע האומד: $\alpha\bar{X}+\beta\bar{Y}$.

א. מה התנאי, שצריך להתקיים על $\alpha$ ו- $\beta$, כדי שהאומד יהיה חסר הטיה?

ב. מה צריכים להיות $\alpha$ו- $\beta$ כדי שהאומד יהיה גם בעל שונות מינימלית?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** $T_1$ ו- $T_2$ הינם אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר $\theta$.

כמו כן, נגדיר: $T = aT_1 + bT_2$.

א. מה צריך להיות התנאי על $a$ ו- $b$, כדי ש- $T$ יהיה אומד חסר הטיה?

ב. $\sigma_1^2$ ו- $\sigma_2^2$ הם השונויות של $T_1$ ו- $T_2$, בהתאמה.

מצאו $a$ ו- $b$, כך ש- $T$ יהיה אומד חסר הטיה ל- $\theta$, ובעל שונות מינימלית.

**2)** במפעל 3 מכונות המייצרות את אותו חלק.

תוחלת הקוטר של החלקים המיוצרים בכל מכונה זהה.

השונויות של כל מכונה שונות, ומקיימות: $\sigma_2^2 = 2\sigma_1^2$ , $\sigma_3^2 = 3\sigma_1^2$.

הוחלט לדגום $n$ חלקים מכל מכונה, ולחשב את ממוצע הקוטר המתקבל.

$\overline{X}_i$ - יהיה הממוצע המתקבל במכונה $i$.

יהי: $W = \sum_{i=1}^{3} a_i \overline{X}_i$ האומד לתוחלת קוטר החלקים המיוצרים על ידי מכונה כלשהי.

א. מה התנאי שצריך להתקיים על המשקלים $a_i$, כדי שהאומד המוצע יהיה בלתי-מוטה?

ב. נניח ש- $a_1 = a_2$.

מה במקרה זה המשקלים המביאים את האומד להיות MVUE?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $a+b=1$.

ב. $a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ , $b = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

**2)** א. $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$.

ב. $a_1 = a_2 = 0.4$, $a_3 = 0.2$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# שאלות מסכמות:

## שאלות:

**1)** במפעל מייצרים מוצרים בשלוש מכונות שונות ובלתי תלויות.
במכונה הראשונה הסיכוי שמוצר יהיה תקין הוא $P$ , במכונה השנייה ההסתברות שמוצר יהיה תקין הוא $P^2$ ובמכונה השלישית הסיכוי הוא $2P$ .
דוגמים 20 מוצרים מכל מכונה.
נסמן ב- $X$ את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה הראשונה,
ב- $Y$ את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השנייה
וב- $Z$ את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השלישית.

א. מהם הערכים האפשריים של הפרמטר $P$ ?

ב. מצאו אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר $P$ , על סמך $X$ ו- $Z$ .

ג. אם התקבל ש- $Y=3$ , $X=6$ , מהו אומדן נראות מקסימלית ל- $P$ ?

**2)** מספר תאונות הדרכים בקטע כביש א' מתפלג פואסונית עם קצב של $\lambda$ תאונות בחודש, ומספר תאונות הדרכים בקטע כביש ב' מתפלג פואסונית עם קצב של $2\lambda$ תאונות בחודש.
הוחלט לספור את כמות התאונות בחודש בכל אחד מקטעי הכביש.
נסמן ב- $X$ את מספר התאונות בחודש בקטע א' וב- $Y$ בקטע ב'.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטר $\lambda$, על סמך $X$ ו- $Y$ .

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית, לסיכוי שבקטע כביש א תהיה לפחות תאונה אחת בחודש.

ג. האם האומד שמצאת בסעיף א הוא חסר הטיה ל- $\lambda$ ?

**3)** זמן הייצור של מוצר מסוים בתהליך ייצור מתפלג נורמאלית, עם תוחלת ושונות שאינן ידועות.

א. הציעו אומדים חסרי הטיה לתוחלת והשונות של זמן הייצור של המוצר.

ב. הציעו אומדי נראות מקסימלית לתוחלת ולשונות של זמן הייצור של המוצר.

ג. הציעו אומד נראות מקסימלית לריבוע התוחלת של זמן הייצור.

ד. האם האומד מהסעיף הקודם הוא גם חסר הטיה?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** בקזינו משחק, ובו 4 תאים ממוספרים מ-1 עד 4.
מפעיל המשחק שם כסף באחד מארבעת התאים והאדם המשתתף צריך לנחש באיזה תא הכסף מוחבא. מפעיל הקזינו מודיע שהסיכוי להחביא את הכסף בכל אחד משלושת התאים הראשונים שווה, אך לא בהכרח שווה לסיכוי להחביא אותו בתא הרביעי.
יש לאמוד את הסיכוי להחביא את הכסף בתא הראשון: $P$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפרמטר $P$.

יעל שיחקה את המשחק 3 פעמים וקיבלה שפעם אחת הכסף הוחבא בתא מספר 1 ובפעמים האחרות בתא מספר 2.

ב. מצאו אומדן ל-$P$ על סמך התוצאות הללו בשיטת הנראות המקסימלית.

ג. מצאו אומד חסר הטיה ל-$P$. מהו האומדן לפי התוצאות של יעל?

ד. מצאו אומדן חסר הטיה ונראות מקסימלית לסיכוי שהכסף יוחבא בתא מספר 4 על סמך התוצאות של יעל.

**5)** יהי: $X_1, X_2, \ldots X_n$ מדגם מקרי מתוך ההתפלגות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\theta-1} & 0<x<\lambda,\ \theta>0\\ 0 & else\end{cases}$$

א. מצא אח"ה ל-$\lambda$ (כאשר $\theta$ קבוע ידוע).

ב. מצא אנ"מ ל-$\theta$ (כאשר $\lambda$ קבוע ידוע).

ג. מצא אנ"מ ל-$\lambda$ (כאשר $\theta$ קבוע ידוע).

**6)** $X$ - משך זמן הפרסומות בערוץ 2 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0,\theta)$.

$Y$ - משך זמן הפרסומות בערוץ 10 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0,2\theta)$.

א. מצא אומד חסר הטיה ל-$\theta$, המשתמש במשך זמן אקראי של פרסומת בודדת בערוץ 2 ופרסומת בודדת בערוץ 10.

ב. מוצע האומד: $T_2=X+0.5Y$. האם האומד הנ"ל הוא חסר הטיה?

ג. איזה אומד יותר עדיף זה של סעיף א או זה של סעיף ב'?

ד. מצא אומד נראות מקסימלית ל-$\theta$ על סמך $X$ ו-$Y$.

**7)** נדגמו 2 תצפיות, $X_1, X_2$, בלתי תלויות מהתפלגויות אחידות רציפות התלויות בפרמטר $\theta$.
ידוע כי: $X_1 \sim U(0,\theta)$ , $X_2 \sim U(0,a\theta)$ (כאשר $a$ קבוע ידוע וחיובי).

א. מצא אנ"מ ל-$\theta$, על סמך 2 התצפיות הנ"ל.

ב. חשב את תוחלת ושונות האנ"מ מסעיף א'. האם האנ"מ מוטה?

ג. מצא אח"ה ל-$\theta$ על סמך סכומן של 2 התצפיות הנ"ל. מהי שונותו?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. $0 \le P \le 0.5$. ב. $\hat{p} = \frac{x+z}{60}$. ג. 0.345.

**2)** א. $\frac{x+y}{3}$. ב. $1-e^{-\frac{x+y}{3}}$. ג. כן.

**3)** א. מאחר ולא התבקשתם לפתח, הרי שהאומד זהה לנוסחה הכללית (ראו נספח).
ב. כנ"ל. ג. כנ"ל (ראו הפרק על אומד נראות מקסמילי). ד. לא.

**4)** א. $0 \le P \le \frac{1}{3}$. ב. $\frac{1}{3}$. ג. 0.389. ד. -0.167.

**5)** א. אח"ה יהיה: $\hat{\lambda} = \frac{\theta+1}{\theta}\bar{x}$. ב. $\hat{\theta} = \frac{n}{n\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$.
ג. $\hat{\lambda} = X_{\max}$.

**6)** א. $T_1 = (x+y)\frac{2}{3}$. ב. כן. ג. ב'. ד. $\hat{\theta} = \max\left\{x, \frac{1}{2}y\right\}$.

**7)** א. $\hat{\theta} = \max\left(X_1, \frac{X_2}{a}\right)$. ב. $E(\hat{\theta}) = \frac{2}{3}\theta$ , $V(\hat{\theta}) = \frac{1}{18}\theta^2$.
ג. $\tilde{\theta} = \left(\frac{2}{1+a}\right)(X_1 + X_2)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**נספח: אומדי נראות מקסימלית ואומדים חסרי הטיה בהתפלגויות השונות:**

**מודל בינומי**

נתון מדגם של משתנה בינומי: $X \sim B(n,p)$.

א.נ.מ עבור $p$ הוא: $\hat{p} = \frac{X}{n}$, והוא גם א.ח.ה.

**מודל אחיד (בדיד)**

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים אחידים: $X_i \sim U(1,N)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור $N$ הוא: $\hat{N} = \max\{X_1, ..., X_n\}$, ואינו א.ח.ה.

**מודל פואסוני**

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים פואסוניים: $X_i \sim P(\lambda)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור $\lambda$ הוא: $\hat{\lambda} = \overline{X}$ וגם א.ח.ה.

**מודל גיאומטרי**

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים גיאומטריים: $X_i \sim G(p)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור $p$ הוא $\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$, אינו א.ח.ה. א.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{p}$, הוא $\overline{X}$ והינו א.ח.ה.

**מודל נורמלי**

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים נורמליים: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור $\mu$, הוא: $\hat{\mu} = \overline{X}$.

כאשר $\mu$ ידוע, א.נ.מ עבור $\sigma^2$ הוא: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ (אומד חסר-הטיה).

כאשר $\mu$ לא-ידוע, א.נ.מ עבור $\sigma^2$ הוא: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ (אומד מוטה!!!).

אומד חסר-הטיה עבור $\sigma^2$:

כאשר $\mu$ ידוע: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$.

כאשר $\mu$ לא-ידוע: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**מודל מעריכי**

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים מעריכיים: $X_i \sim \exp(\theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור $\theta$ הוא: $\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$ - מהווה אומד מוטה, וא.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{\theta}$ הוא $\overline{X}$ א.ח.ה.

**מודל אחיד (רציף)**

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים אחידים: $X_i \sim U(0,\theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור $\theta$ הוא: $\hat{\theta} = \max\{X_1, ..., X_n\}$ אינו א.ח.ה.

**בכל התפלגות:**

א.ח.ה עבור $\mu$ הוא: $\hat{\mu} = \overline{X}$.

אומד חסר-הטיה עבור $\sigma^2$:

כאשר $\mu$ ידוע: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$.

כאשר $\mu$ לא-ידוע: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אומד נראות מקסימלית דו-ממדי (לשני פרמטרים):

## רקע:

בהינתן פונקציית הסתברות למשתנה בדיד או פונקציית צפיפות למשתנה רציף, אשר תלויות בשני פרמטרים שאינם ידועים, נרצה למצוא אומד נראות מקסימלית דו-ממדי. כלומר, אומד נראות מקסימלית לשני הפרמטרים שאינם ידועים.

## דוגמה:

בעוגייה המיוצרת על ידי חברת "עוגית" יש סוכריות כחולות וצהובות.
מספר הסוכריות הכחולות בעוגייה של החברה מתפלג פואסונית עם תוחלת $\alpha$
ומספר הסוכריות הצהובות מתפלג פואסונית עם תוחלת $\alpha+\beta$.
אין תלות בין מספר הסוכריות הכחולות למספר הסוכריות הצהובות בכל עוגייה, וכמו כן אין תלות בין מספר הסוכריות בעוגייה אחת למספרן בעוגייה אחרת.
דגמו באקראי 4 עוגיות וספרו את מספר הסוכריות הכחולות ומספר הסוכריות הצהובות בכל אחת מהן. להלן התוצאות שהתקבלו:

| # עוגייה | מספר הסוכריות הכחולות | מספר הסוכריות הצהובות |
|---|---|---|
| 1 | 15 | 20 |
| 2 | 17 | 24 |
| 3 | 15 | 26 |
| 4 | 17 | 22 |

- מה הם הפרמטרים שאינם ידועים?

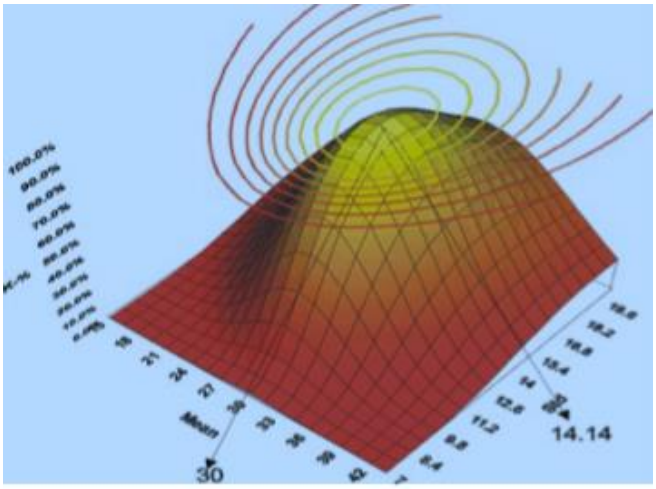
בדומה למציאת אומד נראות מקסימלית לפרמטר אחד, גם במקרה זה נרצה לבנות פונקציית הסתברות משותפת, כשמדובר במשתנה מקרי בדיד, או פונקציית צפיפות משותפת, כשמדובר במשתנה מקרי רציף. אחרי שנציב את תוצאות המדגם בפונקציה, נקבל את פונקציית הנראות.

## בהמשך לדוגמה:

- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.
- הציבו את תוצאות המדגם ומצאו את פונקציית הנראות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אומד הנראות המקסימלית (אנ"מ) יהיה שני הערכים של הפרמטרים הלא ידועים המביאים את פונקציית הנראות לקבל ערך מקסימלי. בשרטוט שלפניכם דוגמה לפונקציית נראות לשני פרמטרים לא ידועים שהתקבלה בבעיה כלשהי:




כדי למצוא את נקודת המקסימום, יש להיזכר כיצד מוצאים נקודת מקסימום מקומית לפונקציה בשני משתנים:

<u>שלב א</u> - נתונה $f(x,y)$ שיש לה קיצון מקומי. נפתור את מערכת המשוואה הבאה: $f_y=0$ , $f_x=0$. נקבל נקודה $(x_0,y_0)$ החשודה כקיצון מקומי.

<u>שלב ב</u> - $f(x,y)$ היא בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני סביב הנקודה החשודה $(x_0,y_0)$.

נסמן: $\Delta = f_{xx}(x_0,y_0)\,f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^{\,2}(x_0,y_0)$.

(א) אם: $\Delta>0$ ו- $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ או: $f_{YY}(x_0,y_0)>0$ , אז ל- $f$ יש מינימום מקומי ב- $(x_0,y_0)$.

(ב) אם: $\Delta>0$ ו- $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ או $f_{YY}(x_0,y_0)<0$ , אז ל- $f$ יש מקסימום מקומי ב- $(x_0,y_0)$.

(ג) אם: $\Delta<0$ , אז ל- $f$ יש נקודת אוכף ב- $(x_0,y_0)$.

(ד) אם: $\Delta=0$ , מבחן זה אינו מספק מידע על $(x_0,y_0)$.

**הערה:** אם לפונקציה בשני משתנים יש מקסימום מקומי יחיד בתחום מסוים, אז בתחום זה המקסימום המקומי יהיה המקסימום המוחלט. אם לפונקציה בשני משתנים אין מקסימום מקומי בתחום מסוים, המקסימום המוחלט יהיה בקצוות של הפונקציה.

**בהמשך לדוגמה:**

- מצאו אומדן נראות מקסימלית לפרמטרים $\alpha$ ו- $\beta$ על סמך תוצאות המדגם.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** זמן ההמתנה לקו אוטובוס 33 מתפלג מעריכית עם פרמטר $\lambda$.
זמן ההמתנה לקו אוטובוס 44 מתפלג מעריכית עם פרמטר $\beta-\lambda$.
זמן ההמתנה לקו אוטובוס 33 אינו תלוי בזמן ההמתנה לקו אוטובוס 44.
יוסי המתין 8 דקות לקו אוטובוס 33. לקו אוטובוס 44 הוא המתין 3 דקות.
מצאו אומדן נראות מקסימלית לפרמטרים $\beta$ ו- $\lambda$.

**2)** בהגרלה אפשר לזכות ב-20, 50 או 100 ₪, לפי פונקציית ההסתברות הבאה:

| $X$ | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|
| $P(X)$ | $p$ | $Q$ | $1-p-q$ |

כדי לאמוד את הפרמטרים $p$ ו- $q$, השתתפו בהגרלה 6 פעמים וקיבלו את התוצאות הבאות:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | 20 | 50 | 20 | 20 | 100 | 50 |

מצאו אנ"מ דו-ממדי לפרמטרים $p$ ו- $q$.

**3)** נתון ש- $X_i \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, כאשר: $i=1,2...,n$. שני הפרמטרים, $\mu$ ו- $\sigma^2$, אינם ידועים.
מצאו אומד נראות מקסימלית לשני הפרמטרים הלא ידועים, על סמך מדגם מקרי בגודל $n$.

**4)** נתונה אוכלוסייה בעלת התפלגות אחידה רציפה עם הפרמטרים $\alpha$ ו- $\beta$.
שאינם ידועים. מצאו אנ"מ דו-ממדי לשני הפרמטרים על סמך מדגם מקרי של $n$ תצפיות מהאוכלוסייה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** במודל רגרסיה ליניארית פשוטה מגדירים את הקשר: $Y_i = \beta \cdot X_i + \alpha + \varepsilon_i$,
כאשר $X_i$ הוא משתנה בלתי תלוי ו-$Y_i$ הוא משתנה שתלוי בו.
כמו כן, נתון ש-$\varepsilon_i \sim N\left(0,\sigma^2\right)$.

הרעיון במודל הוא שלכל $X_i$ ידוע, אפשר לקבל התפלגות של $Y_i$.

א. בטאו את התוחלת של $Y_1$ עבור $X_1$ ידוע באמצעות הפרמטרים: $\alpha$, $\beta$ ו-$\sigma^2$.

ב. מהי ההתפלגות של $Y_1$ עבור $X_1$ ידוע?

ג. מבצעים מדגם בגודל $n$, שבו מקבלים זוגות בלתי תלויים $\left(X_i,Y_i\right)$
לכל: $i=1,2,...,n$. בנו את פונקציית הנראות.

ד. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטרים $\alpha$ ו-$\beta$, בהנחה שהפרמטר $\sigma^2$ ידוע.

**6)** במודל רגרסיה ליניארית פשוטה, ללא חותך, מגדירים את הקשר: $Y_i = \beta \cdot X_i + \varepsilon_i$,
כאשר $X_i$ הוא משתנה בלתי תלוי ו-$Y_i$ הוא משתנה שתלוי בו.
כמו כן, נתון ש-$\varepsilon_i \sim N\left(0,\sigma^2\right)$.

הרעיון במודל הוא, שלכל $X_i$ ידוע אפשר לקבל התפלגות של $Y_i$.

א. בטאו את התוחלת של $Y_1$ עבור $X_1$ ידוע באמצעות $X_1$ והפרמטרים $\beta$ ו-$\sigma^2$.

ב. מהי ההתפלגות של $Y_1$ עבור $X_1$ ידוע?

ג. מבצעים מדגם מקרי בגודל $n$, שבו מקבלים זוגות בלתי תלויים $\left(X_i,Y_i\right)$
לכל: $i=1,2,...,n$.
בנו את פונקציית הנראות.

ד. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטרים $\beta$ ו-$\sigma^2$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) $\hat{\beta}=\frac{11}{24}$ , $\hat{\lambda}=\frac{1}{8}$.

2) $\hat{q}=\frac{1}{3}$ , $\hat{p}=\frac{1}{2}$.

3) $\hat{\mu}=\bar{X}$ , $S^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n}$.

4) $\hat{\beta}=X_{\max}$ , $\hat{\alpha}=X_{\min}$.

5) א. $E\left(Y_1\right)=\beta\cdot X_1+\alpha$.

ב. $Y_1\left|X=X_1\right.\sim N\left(\beta X_1+\alpha,\sigma^2\right)$.

ג. $L\left(\alpha,\beta\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\cdot e^{-\frac{\left(Y_1\beta X_1-\alpha\right)^2+\left(Y_2\beta X_2-\alpha\right)^2+\ldots}{2\sigma^2}}$.

ד. $\hat{\beta}=\frac{\operatorname{cov}\left(x,y\right)}{S_x^2}$ , $\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\cdot\bar{X}$.

6) א. $E\left(Y_1\right)=\beta\cdot X_1$.

ב. $Y_1\sim N\left(\beta X_1,\sigma^2\right)$.

ג. $L\left(\beta,\sigma^2\right)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}n}\cdot e^{-\frac{\left(Y_1-\beta X_1\right)^2+\left(Y_2-\beta X_2\right)^2+\ldots}{2\sigma^2}}$.

ד. $\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iY_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$ , $\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(Y_i-\hat{\beta}X_i\right)^2}{n}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 6 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

### תוכן העניינים

1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה ..... 63
2. קביעת גודל מדגם ..... 69
3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה ..... 71

# רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

## רקע:

ממוצע המדגם הוא אומד לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי.
מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.
נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר $\mu$ ייכלל בתוכו הוא: $1-\alpha$.
$1-\alpha$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש: $P(A\le\mu\le B)=1-\alpha$.
$A$ - גבול התחתון של רווח הסמך.
$B$ - הגבול העליון של רווח הסמך.
$L=B-A$ - אורך רווח הסמך.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590.
רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?
4. מהו רווח הסמך?
5. מה אורך רווח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת ($\mu$) במקרה ש-$\sigma^2$ (שונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד: $\mu$.

אומד נקודתי: $\bar{x}$.

תנאים לבניית רווח הסמך: $X \sim N$ או $n \geq 30$.

$\sigma^2$ (שונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך: $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית: $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$\varepsilon$ - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$.
- ככל שמספר התצפיות ($n$) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון $(1-\alpha)$ גבוהה יותר, כך: $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.

א. מי האוכלוסייה במחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?

ד. מה רווח הסמך לפרמטר?

ה. מהי רמת הסמך לפרמטר?

ו. מה אורך רווח הסמך?

ז. מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?

**2)** מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.

**3)** מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.

ג. הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.

**4)** דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.

ב. מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?

ג. מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?

ד. אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:

א. ממוצע המדגם.

ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.

ג. רמת הסמך.

**6)** זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.

א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.

ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.

ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.

**7)** חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $82 < \mu < 92$.
נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.

א. מהו ממוצע המדגם?

ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?

ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?

**8)** חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.

א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.

ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.

ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.

ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**9)** חוקר בנה רווח סמך ל- $\mu$ וקיבל: $48 < \mu < 54$. מה נכון בהכרח:

א. $\mu = 51$.

ב. $\overline{X} = 6$.

ג. $\overline{X} = 51$.

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

**10)** איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

**11)** חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $63 < \mu < 83$.
נתון שסטיית התקן בהתפלגות הייתה ידועה לו ושהמדגם התבסס על 40 תצפיות.

א. אם החוקר היה רוצה לבנות רווח סמך באורך 10.
כמה תצפיות עליו היה לדגום?

ב. רווח הסמך שנבנה על ידי החוקר היה ברמת סמך של 95%.
בנו את רווח הסמך שהיה מתקבל ברמת סמך של 98%.

**12)** נתון משתנה מקרי רציף מתפלג אחיד: $X_i \sim U(\mu - 0.5, \mu + 0.5)$.
נרצה לאמוד את $\mu$. מצאו רווח סמך ל- $\mu$ ברמת-בטחון של 0.95 אם במדגם של 45 תצפיות התקבל: $\bar{x} = 74$.

(תזכורת על השונות בהתפלגות אחידה רציפה: $Var(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$).


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. העובדים במשק. ב. שכר ב-₪. ג. $\mu$. ד. $9200 < \mu < 9800$.
ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

**2)** $4920.6 < \mu < 4979.4$.

**3)** א. $223.42 < \mu < 236.58$. ב. $222.16 < \mu < 237.84$.
ג. ראה סרטון.

**4)** א. $9284 < \mu < 10,116$. ב. הסטיה המירבית בין $\bar{x}$ ל- $\mu$ היא 416 ₪ בביטחון של 95%.
ג. 800. ד. לא.

**5)** א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

**6)** א. $83.5 < \mu < 4.42$. ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

**7)** א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

**8)** ב'.

**9)** ג'.

**10)** ד'.

**11)** א. 160. ב. $61.13 < \mu < 84.87$.

**12)** $74 \pm 0.084$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# קביעת גודל מדגם:

## רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה: $\sigma$ ברמת סמך של $1-\alpha$ ושגיאת אמידה שלא תעלה על $\varepsilon$ מסוים, נציב בנוסחה הבאה: $n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$.

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12.
מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?

**2)** מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא.
מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5.
נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.

א. כמה מתגייסים יש לדגום?

ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?

**3)** יהי $X$ משתנה מקרי עם ממוצע $\mu$ וסטיית תקן $\sigma$. חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- $\mu$ ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה $0.5\sigma$.
מהו גודל המדגם הנדרש?

## תשובות סופיות:

**1)** 780.

**2)** א. 139. ב. הדבר יקטין את $\varepsilon$ פי 2.

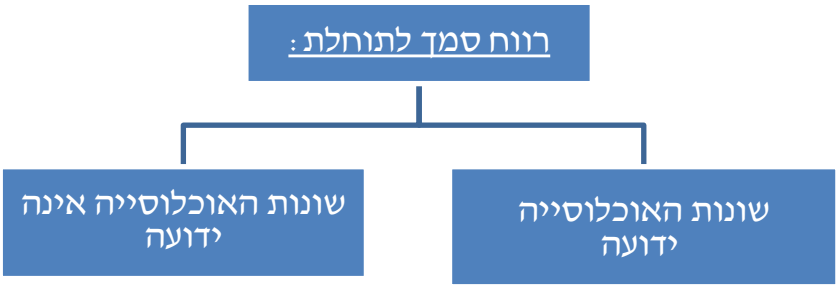
**3)** $n=62$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

## רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

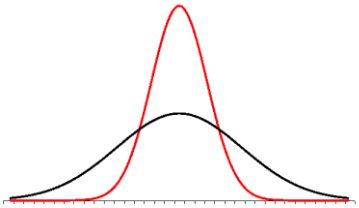



בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה $\left(\sigma^2\right)$ אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

**התנאי:** $X \sim N$ או שהמדגם גדול.

**רווח סמך:** $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ .



**האומד לשונות:** $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i - n\bar{X}^2}{n-1}$ .

**התפלגות T:**

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן: $df = n-1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.
במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות שהתקבלו בדקות: 5.3, 4.6, 5.2, 4.7.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב.
ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89.
הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.

ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?

ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?

**2)** במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן: $S=13$ ס"מ.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?

**3)** אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.

א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?

**4)** ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.

א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.

ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.

ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.

**5)** נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$ , $\sum_{i=1}^{60} X^2_i = 643.19$.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו: $S=2$ , $\bar{x}=13.8$.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.

**7)** שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר $\mu$.
לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10.
שניהם קבעו אותה רמת סמך.
סטטיסטיקאי א: הניח $\sigma=20$ 2.
סטטיסטיקאי ב: חישב לפי המדגם וקיבל $S=20$.
למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?

א. סטטיסטיקאי א.

ב. סטטיסטיקאי ב.

ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.

ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.

**8)** נתון ש: $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10.
אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $79.88 < \mu < 89.72$ ב. כן. ג. הוא היה גדל.

**2)** ראה בסרטון.

**3)** א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.

**4)** א. $96.63 < \mu < 107.37$. ב. $96.90< \mu <107.10$. ג. ראה בסרטון.

**5)** $3.149< \mu < 3.351$.

**6)** $13.42< \mu < 14.18$.

**7)** ב'.

**8)** 90%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 7 - רווח סמך לפרופורציה

### תוכן העניינים

1. רווח הסמך לפרופורציה ..... 74
2. קביעת גודל מדגם ..... 77

# רווח הסמך לפרופורציה:

## רקע:

המטרה היא לאמוד את $P$ – פרופורציה באוכלוסייה.

**האומד הנקודתי:**

$\hat{p}=\frac{y}{n}$ ( $Y$ - מספר ההצלחות שבמדגם).

רווח הסמך ל- $p$ : $\hat{p}\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ .

**תנאי לבניית רווח הסמך:**

מדגם של לפחות 30 תצפיות (לעיתים נותנים תנאי של מספר הצלחות ומספר כשלונות לפחות 5 או לפחות 10).

**האומד לטעות התקן:** $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

**מתקיים ש:** $\hat{P}=\frac{A+B}{2}$ , $L=2\varepsilon$ .

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים, מתוכם התקבל ש-24 היו מובטלים.

א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסייה ברמת סמך של 95%.

ב. מהו האומד לטעות התקן?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נדגמו 200 דירות בעיר חיפה. 48 מתוכן נמצאו כבעלות ממ"ד.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז הדירות בחיפה עם ממ"ד.

ב. על סמך סעיף א' מה ניתן לומר על שגיאת האמידה המקסימאלית?

ג. בהנחה ובחיפה 80 אלף דירות, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% למספר הדירות בחיפה עם ממ"ד בפועל.

**2)** במדגם של 300 אנשי היי-טק התקבל ש-180 מהם אקדמאים.

א. בנו רווח סמך לפרופורציית אקדמאים ברמת סמך של 95% (בקרב אנשי הייטק).

ב. כיצד רווח הסמך של סעיף א' היה משתנה אם היינו מקטינים את רמת הסמך?

ג. כיצד רווח הסמך היה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?

**3)** במדגם של 400 נהגים התקבל רווח סמך לפרופורציית הנהגים החדשים: $0.08 < p < 0.18$.

א. כמה נהגים במדגם היו נהגים חדשים?

ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?

**4)** במסגרת מערכת הבחירות בארה"ב נשאלו 840 אנשים עבור איזה מועמד יצביעו. 510 אנשים ענו כי יצביעו בעד ברק אובמה. בסקר פורסם שתתכן סטייה של $\pm 3\%$ מתוצאות האמת. באיזו רמת ביטחון הסקר השתמש?

**5)** במדגם של 300 נשים בגילאי 35-40 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.

א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסייה הנחקרת.

ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לסיכוי שבאוכלוסייה הנחקרת תמצא אישה לא נשואה?

**6)** ביצעו מדגם באוכלוסייה. שיעור ההצלחות במדגם היה 10% ורווח הסמך ניבנה ברמת סמך של 95%. אורכו הינו 8.3156%. מהו גודל המדגם שנלקח?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) א. $18.1\% < p < 29.9\%$.
ב. בביטחון של 95% שגיאת האמידה היא לכל היותר 0.059.
ג. $14,480 < \mu < 23,920$.

2) א. $0.545 \le p \le 0.655$. ב. האורך שלו היה קטן. ג. לא ניתן לדעת.

3) א. 52. ב. 0.997.

4) 0.925.

5) א. $22.5\% < p < 30.9\%$. ב. $45.91\% < p < 60.72\%$.

6) 200.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# קביעת גודל מדגם:

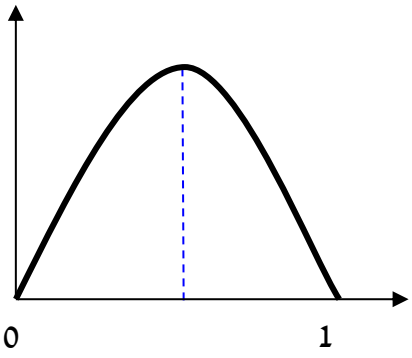
## רקע:

בפרק זה נדון איך קובעים גודל מדגם שבאים לאמוד פרופורציה באוכלוסייה מסוימת:
החוקר קובע מראש את רמת הסמך הרצויה: $1-\alpha$.
החוקר קובע מראש את הטעות הסטטיסטית המרבית שבה הוא מעוניין: $\varepsilon$
(או את אורך רווח הסמך).

$L=2\varepsilon$ - אורך רווח הסמך.
$\varepsilon$ - טעות אמידה מרבית: המרחק המקסימאלי (הסטייה) בין הפרמטר ( $p$ ) לאומד ( $\hat{p}$ ).

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ויתעניין לדעת מהו גודל המדגם הרצוי לשם כך.




נקבל ש: $n \geq \left( \frac{2 \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{L} \right)^2$.

הבעיה שאין אנו יודעים את $\hat{p}$.
נתבונן בביטוי: $\hat{p}(1-\hat{p})$.

כיוון שאין לנו ידע מוקדם על $\hat{p}$ נציב את המקרה השמרני ביותר שממקסם את הביטוי עבור: $\hat{p}=0.5$.

$$n \geq \left( \frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.5 \cdot 0.5}}{L} \right) \Rightarrow n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{L} \right)$$

אך אם תהיה לנו אינפורמציה מוקדמת על הפרופורציה נציב את הערך הקרוב ביותר ל-0.5 האפשרי.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לאמוד את שיעור האבטלה במשק. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.

א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת?
ב. חזור לסעיף א' אם ידוע שהאבטלה לא אמורה לעלות על 20%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** הממשלה אומדת מדי חודש את אחוז התמיכה בה.
מהו גודל המדגם אשר יש לקחת אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמתי באוכלוסייה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?

**2)** משרד התקשורת מעוניין לדעת מה שיעור בתי האב עם אינטרנט.
א. כמה בתי אב יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 90% אורך רווח הסמך לא יעלה על 8%?
ב. חזרו על סעיף א' אם ידעו שלפני חמש שנים ל-80% מבתי האב היה אינטרנט וכיום יש להניח שיש ליותר אינטרנט.

**3)** ערוץ טלוויזיה מעוניין לאמוד את הרייטינג של הערוץ בפריים טיים.
המטרה שבביטחון של 95% הסטייה המרבית בין האומד לרייטינג האמתי לא תעלה על 4%.
א. כמה מכשירי PEOPLE METER יש להתקין לצורך האמידה?
ב. לפי הערכה מוקדמת הרייטינג של הערוץ לא יכול לעלות על 20%. בהנחה ומכשיר כזה עולה 500 ₪ ליחידה מה החיסכון הכספי מאינפורמציה זאת?

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. כמה אזרחים יש לדגום כדי לאמוד את אחוז התמיכה בממשלה עם אורך רווח הסמך שלא עולה על 9% ברמת סמך של 90%?
ב. בהנחה ובוצע מדגם שאת גודלו חישבתם בסעיף א והתקבל שאחוז התמיכה בממשלה במדגם הנו 42%. בנו רווח סמך לאחוז התמיכה בממשלה ברמת סמך של 95%.
ג. על סמך סעיף ב', האם תקבלו את הטענה שמיעוט האוכלוסייה תומך הממשלה?

**5)** משרד הבריאות מתכנן לבצע מדגם שמטרתו לבדוק את הסיכוי לחלות בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת. הוא מעוניין שבסיכוי של 98% טעות האמידה לא תעלה על 3%.
א. כמה מחוסנים יש לדגום?
ב. משרד הבריאות ביצע את המדגם שאת גודלו חישבת בסעיף הקודם וקיבל ש-15% מבין אלה שקיבלו חיסון נגד שפעת בכל זאת חלו במשך החורף בשפעת. בנו ברמת סמך של 98% את הסיכוי לחלות בחורף בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת.
ג. בהמשך לסעיף הקודם. מהי טעות האמידה המרבית בביטחון של 98%? מדוע הוא קטן מ-3%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** .1068

**2)** א. .423 ב. .271

**3)** א. .601 ב. ₪108,000.

**4)** א. .335 ב. $0.367 < p < 0.473$.
ג. בביטחון של 0.95 ניתן להגיד שמיעוט באוכלוסייה תומך בממשלה.

**5)** א. .1509 ב. $0.15 \pm 0.02$ ג. ראה סרטון.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 8 - רווח סמך להפרש פרופורציות

### תוכן העניינים

1. רווח סמך להפרש פרופורציות ..... 80

# רווח סמך להפרש פרופורציות:

## רקע:

**המטרה:** לאמוד את $p_1 - p_2$ : הפרש פרופורציות בין שתי אוכלוסיות שונות.

**האומד הנקודתי:** $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ .

**התנאי לבניית רווח הסמך:** כל מדגם מעל 30 או לבדוק שמספר ההצלחות ומספר הכישלונות בכל מדגם לפחות 5 בכל מדגם (יש כאלה שבודקים לפחות 10).

**רווח סמך:** $\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{n_2}}$ .

רק שאפס נופל בתחומי רווח הסמך להפרש הפרופורציה נאמר שלא ניתן לקבוע שקיים הבדל מובהק בין הפרופורציות באוכלוסיות.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

במטרה להשוות בין שתי תרופות נדגמו 200 איש שלקחו תרופה $X$ , מתוכם 180 טענו שהתרופה עזרה להם. כמו כן, נלקחו 300 איש שלקחו את תרופה $Y$ . מתוכם 150 טענו שהתרופה עזרה להם. בנו רווח סמך להפרש אחוזי ההצלחה של התרופות ברמת סמך של 95%. מה ניתן לומר על סמך רווח הסמך על ההבדלים בין התרופות?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מתוך 150 נשים שנדגמו באקראי 30% תמכו בהצעת חוק מסוימת.
מתוך 200 גברים שנדגמו באקראי 25% תמכו בהצעת החוק.

א. בנו רווח סמך לפער בין אחוזי התמיכה של הנשים לעומת הגברים ברמת סמך של 96%.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז התמיכה בהצעת החוק .

**2)** במחקר רפואי השתתפו 200 אנשים הסובלים מכאבים כרוניים. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות שוות בגודלן. קבוצה 1 קיבלה את תרופה A וקבוצה שנייה קיבלה את תרופה B. בקרב לוקחי תרופה A 90 טענו שמצבם השתפר. בקרב לוקחי תרופה B 70 טענו שמצבם השתפר.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין שיעורי ההצלחה של שתי התרופות.

ב. האם על סמך סעיף א' ניתן לקבוע שקיים הבדל בין התרופות מבחינת שיעורי ההצלחה?

**3)** נדגמו 200 משפחות מגוש דן. ל-70% מתוכן מכשיר DVD בבית.
נדגמו 300 משפחות מאזור הצפון ל-65% מתוכן מכשיר DVD בבית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 98% לפרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD בבית.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין פרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD לבין פרופורציות המשפחות בצפון עם DVD.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $-4.9\% < P_F - P_M < 14.9\%$.

ב. $22.5\% < p < 31.8\%$.

**2)** א. $0.093 < P_A - P_B < 0.307$.

ב. כן.

**3)** $0.625 < p < 0.7754$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 9 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים

### תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסיה ידועות ..... 82
2. כששונויות האוכלוסיה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות ..... 84

# בששונויות האוכלוסייה ידועות:

## רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. $\sigma^2_1$ , $\sigma^2_2$ ידועות.
2. $X_1$ , $X_2 \sim N$ או $n_1, n_2 > 30$.
3. שני מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך: $\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 100 תושבים מאזור A והמשכורת הממוצעת הייתה שם 9200 ₪.
כמו כן נדגמו 120 תושבים מאזור B וממוצע המשכורות שהתקבל שם 8700 ₪.
לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורות באוכלוסיית שני האזורים היא 1800 ₪. אמדו ברמת סמך של 90% את הפרש השכר הממוצע בין אזור A לאזור B.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508.
בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?

**2)** ציוני IQ מתוכננים כך שיתפלגו נורמאלית עם סטיית תקן של 15. במדגם של 20 נבחנים ישראלים התקבל ממוצע ציונים 104. במדגם של 23 נבחנים אמריקאיים התקבל ממוצע ציונים 99.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער בין ישראל לארה"ב בממוצע הציונים במבחן ה-IQ.

ב. האם קיים הבדל בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים?

**3)** חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. ידוע שרמת הקשיות של ברגים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של 4 יחידות. במדגם של 15 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות ובמדגם של 12 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25.
עבור אילו רמות בטחון יקבע שאין הבדל בין שני סוגי הברגים מבחינת ממוצע רמת הקשיות שלהם?

## תשובות סופיות:

**1)** (-20,90).

**2)** א. $-3.99 < \mu_1 - \mu_2 < 13.99$.

ב. לא נוכל לטעון בביטחון של 95% שקיים הבדל בין ישראל לארה"ב.

**3)** רמות בטחון הגבוהות מ-0.9476.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

## רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

**האומד נקודתי:** $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

**התנאים לבניית רווח הסמך:**

1. $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$.
2. $X_1, X_2 \sim N$.
3. מדגמים בלתי תלויים.

**השונות המשוקללת:** כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי הנוסחה הבאה: $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

דרגות החופש: $d.f = n_1 + n_2 - 2$.

רווח סמך: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t^{n_1+n_2-2}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2_p}{n_1} + \frac{S^2_p}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים.להלן תוצאות המדגם שנעשה:

| | תל אביב | באר שבע |
|---|---|---|
| **מספר האקדמאים** | 20 | 10 |
| **ממוצע הכנסות של אקדמאים** | 11,000 | 9500 |
| **סטיית התקן של הכנסות אקדמאים** | 200 | 250 |

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים.
הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ.
להלן תוצאות המדגם:

| המדינה | ישראל | ארה"ב |
|---|---|---|
| **גודל המדגם** | 15 | 15 |
| **סכום הציונים** | 1560 | 1470 |
| **סכום ריבועי הציונים** | 165,390 | 147,560 |

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

**2)** להלן 4 תצפיות על משתנה $X$ שמתפלג: $N\left(\mu_x,\sigma^2\right)$, ומשתנה $Y$ שמתפלג: $N\left(\mu_y,\sigma^2\right)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 22 | 20 | 21 | 25 |
| Y | 18 | 25 | 17 | 12 |

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y-\mu_x$ ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

## תשובות סופיות:

**1)** הנחות:
1. השונות שווה.
2. שהציונים מתפלגים נורמלית.
3. המדגמים אינם תלויים זה בזה.

$-5.52<\mu_1-\mu_2<17.52$.

**2)** $-9.6<\mu_y-\mu_x<1.6$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 10 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים

### תוכן העניינים

1. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים ..... 86

# רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים:

## רקע:

**מדגם מזווג:** מדגם אחד שבו יש $n$ צמדים. כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים: $X$ ו- $Y$.
ניצור משתנה חדש: $D = x - y$.

הפרמטר שנרצה לאמוד: $\mu_D$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. $x, y \sim N$.
2. המדגם מזווג.

נוסחת רווח הסמך: $\bar{D} \pm t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$.

כאשר דרגות החופש: $df = n-1$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב.
לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

| הקובץ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| הזמן בתוכנה הראשונה | 25 | 48 | 49 | 46 | 38 |
| הזמן בתוכנה השנייה | 27 | 46 | 42 | 40 | 48 |

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית.
מִצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.
להלן הציונים בסמסטר א' ו-ב':

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **סמסטר א'** | 74 | 68 | 90 | 75 | 82 |
| **סמסטר ב'** | 80 | 84 | 87 | 76 | 100 |

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?

ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?

**2)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה.
להלן התוצאות:

| **חברה/ מדינה** | **ארה"ב** | **קנדה** | **הולנד** | **פולין** | **מצרים** | **סין** | **יפן** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **בזק -** $X$ | 1.5 | 2.1 | 2.2 | 3 | 3.5 | 3.2 | 4.2 |
| **קווי זהב -** $Y$ | 1.4 | 2 | 1.9 | 3.1 | 3.3 | 3.2 | 4.2 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה,
בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $-19 < \mu_0 < 38$. ב. בביטחון של 95% לא קיים הבדל.
ג. ראה הסבר בסרטון.

**2)** $-0.013 < \mu < 0.185$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 11 - שאלות מסכמות על רווחי סמך

### תוכן העניינים

1. שאלות מסכמות על רווחי סמך ..... 88

# שאלות מסכמות על רווחי סמך:

## שאלות:

**2)** 200 אנשים נשאלו כמה פעמים ביום הם שותים כוס קפה.
להלן התפלגות התשובות:

| **מספר פעמים** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **מספר אנשים** | 86 | 34 | 28 | 22 | 20 | 10 |

א. תנו רווח סמך לממוצע מספר כוסות הקפה שאנשים נוהגים לשתות ביום. $\alpha = 0.05$.

ב. אדם השותה לפחות 4 כוסות קפה ביום נקרא "מכור לקפה". בנו רווח סמך לאחוז "המכורים לקפה". $\alpha = 0.1$.

**3)** חוקר בנה רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת בשנה.
רווח הסמך שהתקבל הוא: $81 < p < 91$. רווח הסמך הנ"ל התבסס על מדגם של 500 איש.

א. כמה אנשים במדגם טענו שכלל לא התקררו השנה?

ב. באיזו רמת סמך נבנה רווח הסמך?

ג. בנו רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת השנה ברמת סמך של 96% על סמך תוצאות המדגם.

**4)** ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם תוחלת 100. במדגם של 20 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 210740 \text{ , } \sum_{i=1}^{20} x_i = 2040 .$$

א. אמדו ברמת ביטחון של 90% את ממוצע ציוני בחינת ה-IQ בישראל – מהי ההנחה הדרושה לפתרון?

ב. על סמך רווח הסמך של סעיף א' האם תקבלו את הטענה שבישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב?

ג. מה היה קורה לרווח הסמך אם היינו מגדילים את רמת הסמך שלו?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** להלן תוצאות מדגם שבדק עבור כל משפחה האם יש לה בבית מכשיר טאבלט:

| אזור מגורים | גוש דן | שאר הארץ |
|---|---|---|
| **גודל המדגם** | 200 | 240 |
| **מספר משפחות בעלי טאבלט** | 160 | 168 |

א. בנו רווח סמך להבדל בין אחוז המשפחות עם טאבלט בגוש דן ואחוז המשפחות בעלי טאבלט בשאר חלקי הארץ. ברמת סמך של 98%.

ב. בנו רווח סמך לפרופורציות משפחות בעלות טאבלט בכלל הארץ ברמת סמך של 95%.

**7)** בנק מתלבט האם לפתוח סניף באזור A או באזור B. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורת באזור A היא 1200 ובאזור B 1500. הבנק דגם 50 אנשים מאזור A, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,800 ₪. כמו כן, נדגמו 40 אנשים מאזור B, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,600 ₪.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש הממוצעים של המשכורות בשני האזורים. האם על סמך רווח הסמך ניתן להמליץ לבנק היכן לפתוח את הסניף. אם כן, היכן?

ב. בנו רווח סמך לתוחלת המשכורת באזור A ברמת סמך של 95%.

**8)** להלן מדגם של שכר הדירה ב-₪ של 5 דירות שלושה חדרים בשכונת בבלי בתל אביב:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **שנת 2012** | 8000 | 7500 | 7000 | 6500 | 7500 |
| **שנת 2013** | 8000 | 8200 | 7800 | 6800 | 7700 |

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת עליית שכר הדירה משנת 2012 לשנת 2013 בשכונת בבלי. ניתן להניח ששכר הדירה בשכונה מתפלג נורמלית.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**2)** א. $1.21 \le \mu \le 1.65$. ב. $10.85\% \le p \le 19.15\%$.

**3)** א. 70. ב. 0.9988. ג. $83\% < p < 89\%$.

**4)** א. $97.4 \le \mu \le 106.6$. ב. לא. ג. יגדל.

**5)** א. $0.5\% \le p_1 - p_2 \le 19.5\%$. ב. $0.704 \le p \le 0.786$.

**7)** א. $-372 \le \mu_A - \mu_B \le 772$, לא. ב. $6467 \le \mu_A \le 7133$.

**8)** $-21 \le \mu_D \le 821$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 12 - בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן)

### תוכן העניינים

1. בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן) ..... 91

# בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן):

## רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.
בתהליך זה ישנן שתי השערות שנבדקות:

1. השערת האפס: המסומנת ב- $H_0$.
2. השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר): המסומנת ב- $H_1$.

בדרך כלל השערת האפס מסמנת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה הנורמה ואילו ההשערה האלטרנטיבית את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה.

**דוגמה:**

ישנה תרופה קיימת למחלה A אשר גורמת ל-10% מהמשתמשים בה לתופעות לוואי. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שיעילה באותה מידה, אך מקטינה את הסיכוי לתופעות הלוואי. לכן יש לבצע מחקר שעל סמך תוצאותיו ננסה להכריע איזה השערה נקבל:

$H_0$: התרופה החדשה הנה קונבנציונאלית וגורמת ל-10% תופעות לוואי.

$H_1$: התרופה החדשה מקטינה את אחוז הסובלים מתופעות לוואי מתחת ל-10%.

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים:

1. אזור דחייה: דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה).
2. אזור קבלה: קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה.
המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם.
אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת, אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

| | | הכרעה | |
|---|---|---|---|
| | | $H_0$ | $H_1$ |
| **מציאות** | $H_0$ | אין טעות | טעות מסוג 1 |
| | $H_1$ | טעות מסוג 2 | אין טעות |

**הגדרת הטעויות:**

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את $H_0$ למרות שבמציאות $H_0$ נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את $H_0$ למרות שבמציאות $H_1$ נכונה.

**הגדרת הסתברויות:**

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):
(לדחות $H_0$ | $H_0$ נכונה) $= P_{H_0}$ (לדחות את $H_0$) $= \alpha$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:
(לקבל $H_0$ | $H_1$ נכונה) $= P_{H_1}$ (לקבל את $H_0$) $= \beta$.

רמת בטחון:
(לקבל $H_0$ | $H_0$ נכונה) $= P_{H_0}$ (לקבל את $H_0$) $= (\alpha - 1)$.

עוצמה:
(לקבל $H_0$ | $H_1$ נכונה) $= P_{H_1}$ (לדחות את $H_0$) $= (\beta - 1) = \pi$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

בכד יש 10 כדורים. יתכן ש-5 מהם לבנים והיתר שחורים (כד א' – השערת האפס)
או ש-7 מהם לבנים והיתר שחורים (כד ב' – השערה אלטרנטיבית).
כדי להחליט איזה מהכדים ברשותנו, הוחלט להוציא כדור ולהשתמש בכלל
ההחלטה הבא: אם הכדור שהוצא הוא לבן שזהו כד ב' $H_1$.

א. חשבו את רמת המובהקות ואת רמת הביטחון של המבחן המוצע.

ב. חשבו את הסיכוי לטעות מסוג שני והעוצמה של המבחן המוצע.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** אדם חשוד בביצוע פשע. מהן הטעויות האפשריות בהכרעת הדין?

**2)** ילד קנה שקית סוכריות אטומה שבה ציפה ל-10 סוכריות תות ו-5 לימון.
ישנה שקית אחרת אותה הוא לא רצה בה 6 סוכריות תות ו-9 לימון.
הוא החליט להוציא באקראי סוכרייה, אם היא תהיה לימון הוא יחזיר את השקית לחנות. מה הסיכויים לכל סוג של טעות בהכרעתו?

**3)** יהי $X$ מספר שלם הנבחר באקראי מבין המספרים השלמים. הסיכוי ש- $X$ יקבל ערך כלשהו נתון על ידי הנוסחה: $p(X=k)=\frac{1}{n}$ עבור $k=1,2,.....,n$.
נתונות ההשערות הבאות לגבי התפלגות של $X$: $H_1: n=6$ , $H_0: n=4$.
כמו כן נתון כלל ההכרעה הבא: נדחה את השערת האפס אם: $X>3$.
חשבו את הסיכוי לטעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני ואת העוצמה?

**4)** איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד.
להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

| מפעל / איכות | מצוין | טוב | בינוני | ירוד |
|---|---|---|---|---|
| **"היוצר"** | 0.6 | 0.2 | 0.2 | 0 |
| **"שמשון"** | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע.
על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).

א. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "טוב" נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?

ב. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "בנוני" או גרוע מכך נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מה מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?

ג. איזה כלל החלטה עדיף? נמקו!

**5)** במטרה לבדוק האם מטבע תקין הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל-7 כולל יוחלט שהמטבע תקין, אחרת נחליט שהמטבע מזויף.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה ההסתברות לטעות מסוג ראשון?

ג. מהי עצמת המבחן אם במציאות אכן המטבע אינו תקין כי הסיכוי לעץ בו הוא 20%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** להלן השערות:

$H_0 : X \sim t(5)$ - התפלגות T עם חמש דרגות חופש.

$H_1 : X \sim Z$ - התפלגות נורמלית.

כלל החלטה: נדחה את השערת האפס אם $X$ גדול מ-2.015.

א. מהי רמת המובהקות של כלל ההחלטה?
ב. מהי העוצמה של כלל ההחלטה?

**7)** במפעל מסוים נפלטים לאוויר חומרים רעילים. במצב שיגרה העוצמה הממוצעת של החומר הרעיל אמורה להיות 6,000 יחידות עם סטיית תקן 900. במצב חירום העוצמה הממוצעת היא 7,000 עם סטיית תקן 900. במפעל מערכת התראה נתמכת על ידי 9 חיישנים. אם ממוצע העוצמה של החומר הרעיל לפי תשעת החיישנים עולה על 6,600 יחידות מופעלת מערכת ההתראה. נתון שעוצמת הזיהום מתפלגת נורמאלית.

א. מה הסיכוי להתראת שווא? (באיזה סוג טעות מדובר)?
ב. מה הסיכוי שבמצב חירום מערכת ההתראה לא תפעל? (באיזה סוג טעות מדובר)?
ג. מה ההסתברות שאם המצב הוא מצב חירום מערכת ההתראה תפעל? (איך קוראים להסתברות זו)?
ד. בסעיפים הבאים נשנה בכל סעיף נתון מסוים. כל סעיף עומד בפני עצמו, כיצד השינוי ישנה את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני?
   i. המפעל יקנה עוד 4 חיישנים.
   ii. מצב חרום מוגדר כעת בתוחלת של 7,500 יחידות.
   iii. מערכת ההתראה תופעל אם ממוצע של תשעת החיישנים יהיה מעל 6,700.

**8)** במטרה לבדוק האם במקום עבודה מסוים פרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות נדגמו באקראי 10 עובדים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 2 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות.

א. מה רמת המובהקות של כלל ההכרעה הנ"ל?
ב. מהי העצמה בהנחה ובחברה 30% בנים?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**9)** זמן ההשפעה של משכך הכאבים "אופטלנוס" מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 40 דקות וסטיית תקן של 12 דקות. חברת התרופות המייצרת את התרופה מנסה לשפר את התרופה כך שתוחלת הזמן עד להשפעה תתקצר. לצורך כך, דגמו 25 מטופלים שיקבלו את התרופה "אופטלנוס פורטה", ממוצע זמן התגובה של המטופלים היה 34.5 דקות. חברת התרופות החליטה מראש שאם ממוצע הזמן עד להשפעה יהיה נמוך מ-35 דקות, היא תמשיך בתהליך שיווק "אופטלנוס פורטה".

א. מהי רמת המובהקות של המבחן המוצע?

ב. על סמך תוצאות המדגם, מהי המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. מהי עצמת המבחן המוצע אם במציאות התרופה "אופטלנוס פורטה" מפחיתה את התוחלת לכדי 32 דקות?

ד. כיצד תשתנה התשובה לסעיף ג' אם החברה הייתה מחליטה שהיא תמשיך בתהליך שיווק התרופה החדשה כאשר ממוצע המדגם יהיה נמוך מ-36 דקות?

**10)** ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 120.
מכון טוען שלימודים אצלו מעלים את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. נלקחו 20 שלמדו במכון ו-20 שניגשו לבחינה בלמידה עצמית. הוחלט במשרד פרסום לקבל את טענת המכון רק אם במדגם ממוצע הציונים של אלה שלמדו במכון יהיה גבוהה בלפחות 50 נקודות מאלה שלא היו.

א. מהי רמת המובהקות של המחקר?

ב. מה הסיכוי לעשות טעות מסוג שני II בהנחה שהמכון מעלה את ממוצע הציונים ב-60 נקודות?

ג. כיצד התשובות לסעיף א ו ב' היו משתנות אם מסתבר שסטיית התקן בציוני הפסיכומטרי הינה 100. הסבירו ללא חישוב.

**11)** קו ייצור נחשב תקין אם יש בו לכל היותר 4% פגומים, ונחשב שאינו תקין אחרת. מנהל האיכות דוגם בכל יום מקו הייצור 500 מוצרים. אם במדגם יהיה לפחות 30 מוצרים פגומים יפסיקו באותו היום את קו הייצור.

א. מה ההסתברות להפסיק את קו הייצור כשהוא תקין. איך קוראים להסתברות זאת?

ב. מה ההסתברות להמשיך ביום מסוים את קו הייצור למרות שאינו תקין כי היו 8% פגומים בקו הייצור. איך קוראים להסתברות זאת?

**12)** מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**13)** מספר המכוניות הנכנסות לחניון "עזרים" מתפלג פואסונית. בשנה שעברה המכוניות נכנסו לחניון בקצב של 2 מכוניות לדקה. בעקבות תלונות על עומס יתר בכניסה לחניון מעוניין מנהל החניון לבדוק האם קצב כניסת המכוניות לחניון גדל השנה. מנהל החניון החליט לספור את מספר המכוניות שיכנסו לחניון בדקה אקראית. אם מספר המכוניות שיספרו יהיה לפחות 4 יפתח מנהל החניון שער נוסף לחניון.

א. רשמו את השערות מנהל החניון ואת כלל ההחלטה שלו. האם כלל ההכרעה הגיוני?

ב. מהי רמת המובהקות של כלל ההכרעה?

ג. מהי העוצמה של כלל ההחלטה, אם כיום קצב כניסת המכוניות לחניון גדל ל-4 מכוניות בדקה?

**14)** עודד עובד במפעל שבו מתחילים לעבוד בשעה 8:00. עודד בדרך כלל מאחר לעבודה והמנהל החליט לרשום את שעת הגעתו. המנהל טוען שמשך האיחור של עודד (בדקות), $X$, הוא משתנה אחיד $U(0,60)$. עודד טוען שהוא לא מגיע באיחור כה גדול, אלא שהתפלגות $X$ היא בעלת התפלגות מעריכית עם תוחלת איחור של 20 דקות.

לבדיקת טענת המנהל ($H_0$) כנגד טענת עודד ($H_1$), המבוסס על משך האיחור של חגי ביום אחד. מוצאים שני ככלי הכרעה:

כלל 1: דחה את השערת האפס אם משך האיחור יהיה לפחות 40 דקות.

כלל 2: דחה את השערת האפס אם משך האיחור יהיה לכל היותר 20 דקות.

חשבו את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני לכל אחת מכללי ההכרעה. מי עדיף?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** ראה סרטון וידאו.

**2)** $\alpha=\frac{1}{3}$ , $\beta=\frac{2}{5}$.

**3)** $\alpha=0.25$ , $\beta=0.5$.

**4)** א. $\alpha=0.2$ , $\beta=0.8$. ב. $\alpha=0.2$ , $\beta=0.3$. ג. כלל ב'.

**5)** א. השערות: $H_0$ -מטבע תקין. ב. 0.00781250. ג. 0.1678.
$H_1$ -מטבע לא תקין.

**6)** א. 0.05. ב. 0.022.

**7)** א. 0.0228. ב. 0.0918. ג. 0.9082.
ד. i. $\alpha,\beta$ יקטנו. ד. ii. $\alpha$ לא משתנה, $\beta$ קטנה.
ד. iii. $\alpha$ קטנה, $\beta$ גדלה.

**8)** א. 0.055. ב. 0.383.

**9)** א. 0.0188. ב. טעות מסוג I. ג. 0.8944.
ד. העוצמה תגדל.

**10)** א. 0.2981. ב. 0.3974. ג. קטן.

**11)** א. 0.0113. ב. 0.0495.

**12)** חוקר א'.

**13)** א. ראה סרטון וידאו. ב. 0.1428. ג. 0.566.

**14)** להלן טבלת טעויות, ממנה ניתן להסיק שכלל 2 עדיף.

| כלל | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| **1** | $\frac{1}{3}$ | 0.865 |
| **2** | $\frac{1}{3}$ | 0.368 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 13 - הלמה של ניימן פירסון

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 98

# הלמה של ניימן פירסון:

## רקע:

שיטה זו עוזרת לנו לבנות מבחנים בעלי עוצמה מקסימאלית עבור $\alpha$ נתונה.
הלמה של ניימן פירסון אומרת שמבחן בעל עוצמה מקסימלית מתקבל כאשר אזור הדחיה שלו כולל את התוצאות שעבורן יחס הנראות הוא הגבוה ביותר.

נגדיר את יחס הנראות: $x_1, x_2, ..., x_n$ - תוצאות הניסוי.

ההשערות: $H_1 : x_i \sim p_1$ , $H_0 : x_i \sim p_0$.

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{p_{H1}(x_1, x_2, ..., x_n)}{p_{H0}(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

המשמעות של יחס הנראות היא פי כמה $H_1$ יותר סבירה מ- $H_0$.

### עבור משתנים שמתפלגים בדיד:

**שלב א:** עבור כל תוצאות המדגם האפשריים מחשבים את הסיכויים בהנחת השערת האפס ובהנחת ההשערה האלטרנטיבית.

**שלב ב:** מחלקים את הסיכויים באופן הבא: $\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{p_{H1}(x_1, x_2, ..., x_n)}{p_{H0}(x_1, x_2, ..., x_n)}$.

ומקבלים את יחס הנראות.

**שלב ג:** מסדרים את תוצאות הניסוי על פי סדר יורד מהתוצאה שמניבה את ערך יחס הנראות הגבוה ביותר עד התוצאה שמניבה את ערך יחס הנראות הנמוך ביותר.

**שלב ד:** מכניסים את התוצאה שמניבה את יחס הנראות הגבוה ביותר לאזור הדחיה ובודקים תחת השערת האפס מהי רמת המובהקות המתקבלת . צוברים את התוצאות לפי העיקרון שהוצג עד שרמת המובהקות לא תעלה על ה- $\alpha$ הרצויה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (הפתרון בהקלטה):**

איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד.
להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

| מפעל / איכות | מצוין | טוב | בינוני | ירוד |
|---|---|---|---|---|
| **"היוצר"** | 0.6 | 0.15 | 0.25 | 0 |
| **"שמשון"** | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית). צרו כלל הכרעה לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא תעלה על 20%.

**עבור משתנים שמתפלגים רציף:**

**שלב א:** בונים את פונקציית הצפיפות המשותפת בהנחת השערת האפס ובהנחת ההשערה האלטרנטיבית.

**שלב ב:** מחלקים את שלב א באופן הבא: $\lambda(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{f_{H1}(x_1,x_2,...,x_n)}{f_{H0}(x_1,x_2,...,x_n)}$.

ומקבלים את פונקציית יחס הנראות.

**שלב ג:** מזהים את האזור עבורו יחס הנראות הוא הגבוה ביותר.

**שלב ד:** לפי ההתפלגות של השערת האפס מוצאים את הערכים הקריטיים באזור שנקבע בסעיף הקודם כך שרמת המובהקות תהיה ה- $\alpha$ שנקבעה מראש.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

נתון: $X\sim\exp(\lambda)$.

ההשערות הן: $H_1:\lambda=2$ , $H_0:\lambda=1$.

מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות של 5% על סמך תצפית בודדת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** איכות של מוצר מסווגת ל-5 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני, ירוד ופסול.
להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

| מפעל / איכות | מצוין | טוב | בינוני | ירוד | פסול |
|---|---|---|---|---|---|
| **"היוצר"** | 0.4 | 0.2 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| **"שמשון"** | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0 |

בוחרים משלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע.
על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).

א. חשבו את יחס הנראות עבור כל תוצאות המדגם האפשריים.

ב. צרו כלל הכרעה לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא תעלה על 25%.

ג. מהי עוצמת המבחן שיצרת בסעיף הקודם?

**2)** מטבע הוטל 3 פעמים ומתבוננים במספר הפעמים שהתקבלה התוצאה ראש.
נסמן ב- $p$ את הסיכוי בהטלה בודדת לקבל את התוצאה ראש.
ההשערות הן: $H_1: p=0.25$ , $H_0: p=0.5$.
מצאו מבחן ברמת מובהקות שלא תעלה על 30% עם עוצמה מקסימלית.
מהי העוצמה?

**3)** בכד א' 7 כדורים לבנים ו-8 שחורים. בכד ב' 8 כדורים לבנים ו-7 שחורים.
אדם בוחר כד וממנו מוציא באקראי 4 כדורים ללא החזרה. הוא מתבוננן במספר הכדורים הלבנים שהוצאו ומודיע לך את המספר המתקבל.
יש לבנות כלל הכרעה על סמך המספר המתקבל שיכריע האם מדובר בהוצאה מכד א' (השערת האפס) או מכד ב' (השערה אלטרנטיבית).

א. בנו כלל הכרעה בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות שלא תעלה על 10%.

ב. מהי רמת המובהקות של כלל ההכרעה שבנית בסעיף הקודם?

ג. מה הסיכוי לטעות מסוג שני של כלל ההכרעה שבנית?

**4)** בצרור מפתחות 5 מפתחות שרק אחד פותח את הדלת. על סמך מספר הניסיונות לפתיחת הדלת יש להחליט האם הניסיונות נעשו ללא החזרה (השערת האפס) או עם החזרה (השערה אלטרנטיבית) של המפתחות לצרור.
מצאו מבחן לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא עולה על 0.25.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** מספר תאונות הדרכים בכביש 4 מתפלג פואסונית עם קצב של תאונה ביממה.
לאחרונה התעורר החשד שתוחלת מספר התאונות בכביש עלתה לקצב של שתי תאונות ביממה. דגמו 4 ימים אקראיים וקיבלו את מספר התאונות הבאות לימים: 1, 0, 3, 3.

א. נסחו את הבעיה ובנו מבחן MP עם $\alpha \le 0.1$.

ב. מהי מסקנתך ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. מה הסיכוי להכריע שכיום קצב תאונות הדרכים בכביש מספר 4 עלה לשתי תאונות ביממה שאכן כך הדבר באמת?
פתרו על סמך המבחן של סעיף א'.

**6)** התפלגות זמן ההמתנה לקופה בסופרמרקט מתפלג מעריכית.
בעל הסופרמרקט טוען שתוחלת זמן ההמתנה היא 5 דקות אך הלקוחות חושדים שהתוחלת גבוהה יותר ושווה ל-10 דקות.

א. רשמו את השערות המחקר וחשבו את פונקציית יחס הנראות על סמך זמן המתנה של לקוח אקראי לקופה.

ב. מה כיוון אזור הדחייה של השערת האפס?

ג. מצאו את אזור הדחייה עבור רמת מובהקות של 5%.

ד. בהמשך לסעיף הקודם, מה הסיכוי להכריע לטובת בעל הסופרמרקט בטעות?

**7)** יהי $X$ תצפית בודדת מפונקציית הצפיפות הבאה, כאשר $\theta$ פרמטר חיובי:

$$f_\theta(x)=\begin{cases}2\theta X+1-\theta & 0\le x\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ההשערות הן: $H_1:\theta=1$ , $H_0:\theta=0$.

א. הוכיחו שמבחן MP (עוצמה מקסימלית) עם רמת מובהקות $\alpha$ יהיה: $C=\{X>1-\alpha\}$.

ב. הוכיחו שהעוצמה של המבחן שנמצאה היא: $2\alpha-\alpha^2$.

ג. מצאו את כלל ההכרעה והעוצמה עבור: $\alpha=0.05$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**8)** מחשב חניון "אתרים" רושם את זמן כניסת כל מכונית לחניון. ישנו חשד שעקב תקלה המחשב מבצע את הרישום לכל מכונית שניה. נסמן ב- $X$ את הזמן בדקות בין רישום לרישום.

אם הרישום הוא תקין, ההתפלגות היא מעריכית: $f_0(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}$.

אם הרישום הוא לפי החשד, פונקציית הצפיפות היא: $f_1(x)=\lambda^2\cdot x\cdot e^{-\lambda x}$.

כאשר מדובר באותו פרמטר $\lambda$.

א. רשמו את ההשערות.

ב. מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית כדי לבדוק את ההשערות.

ג. פתרו עבור רמת מובהקות של 5% ו- $\lambda=1$.

ד. רשמו את איזו הדחייה עבור שתי תצפיות אקראיות של $X$.

**9)** יהי $X_1,...,X_n$ מדגם מקרי מהתפלגות בעלת פונקציית הצפיפות הבאה, כאשר $\theta$ פרמטר חיובי:

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\theta e^{1-\theta x} & x\geq\frac{1}{\theta}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

א. מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימאלית לבדיקת ההשערות: $H_0:\theta=1$

כנגד: $H_1:\theta=2$, על סמך תצפית בודדת (ברמת מובהקות 5%).

ב. מהי עוצמת המבחן שמצאת?

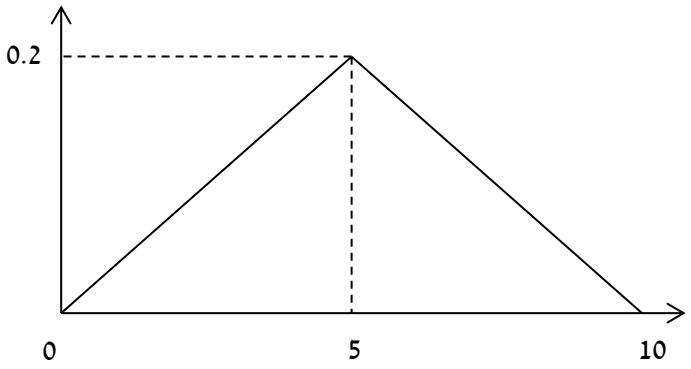
ג. כעת נשנה את הערך תחת האלטרנטיבה ל-3 במקום 2.
בחרו בתשובה הנכונה ונמקו:

i. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תגדל.

ii. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תקטן.

iii. יש לחשב כדי להחליט.

**10)** נתונה פונקציית הצפיפות הבאה שנסמנה ב- $f_1(x)$:





© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

כמו כן נתון ש: $f_0(x)=\begin{cases}0.1 & 0\le x\le 10\\ 0 & else\end{cases}$.

א. עבור השערות: $H_0: f=f_0$ כנגד: $H_1: f=f_1$, מצאו את צורת אזור הדחיה של מבחן בעל עצמה מקסימלית, על סמך תצפית בודדת.

ב. בהינתן: $\alpha=0.05$, מצאו את כלל הכרעה מתאים בעל עוצמה מקסימלית.

**11)** $X$ הוא משתנה רציף המוגדר בין 0 ל-20.

להלן השערות מחקר: $H_1: f(X)=\frac{e^{-\frac{X}{4}}}{4\left(1-e^{-5}\right)}$ , $H_0: X\sim U(0,20)$.

יש לבנות מבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות של 10% על סמך הממוצע 100 תצפיות אקראיות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. להלן טבלה: ב. ראה סרטון. ג. 0.7.

| המפעל | ירוד | בינוני | טוב | מצוין | פסול |
|---|---|---|---|---|---|
| $H_0$ | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.2 |
| $H_1$ | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0 |
| $\gamma(x)$ | 4 | 3 | 1 | 0.25 | 0 |

**2)** $C=\{X=0\}$, עוצמה $\frac{27}{64}$.

**3)** א. $C=\{X=4\}$. ב. 0.0256. ג. 0.9487.

**4)** $C=\{X=1 \ or \ X\geq 6\}$.

**5)** א. נדחה את השערת האפס אם מספר התאונות הכולל ב-4 הימים יהיה לפחות 8 תאונות. ב. נקבל את השערת האפס (טעות מסוג שני). ג. 0.5471.

**6)** א. $H_0$: התוחלת של זמן ההמתנה 5 דקות.

$H_1$: התוחלת של זמן המתנה 10 דקות.

פונקציית יחס הנראות: $0.5e^{0.1x}$.

ב. $c=\{x\geq k\}$. ג. $c=\{x\geq 14.98\}$. ד. 0.776.

**7)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $c=\{x>0.95\}$, 0.0975.

**8)** א. השערת האפס: שומר הלילה רושם כל מבקר אשר ניכנס לבניין.
ההשערה האלטרנטיבית: שומר הלילה מדלג ברישום על מבקר, רושם אחד כן ואחד לא.

ב. אזור הדחייה יהיה היכן שיחס הנראות הינו גבוה לכן הוא יהיה מאינסוף ועד ערך $k$ מסוים.

ג. נדחה את השערת האפס אם: $x>2.996$. ד. $x_1\cdot x_2>k$.

**9)** א. נדחה את $H_0$ עבור: $\frac{1}{2}\leq x\leq 1.0513$. ב. חישוב עוצמת המבחן: 0.668.

ג. i. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תגדל.

**10)** א. $c=\{|x-5|\leq a\}$. ב. $c=\{4.75\leq x\leq 5.25\}$.

**11)** כלל ההכרעה הוא נדחה את השערת האפס אם: $\bar{D}\leq 9.26$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 14 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

### תוכן העניינים

1. הקדמה ..... 105
2. סוגי טעויות ..... 109

# הקדמה:

## רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.
בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

**שלב א:** נזהה את הפרמטר הנחקר.

**שלב ב:** נרשום את השערות המחקר.
השערת האפס המסומנת ב- $H_0$.
בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.
השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- $H_1$.
ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

**שלב ג:** נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

**שלב ד:** נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. **אזור דחייה:**
   דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. **אזור קבלה:**
   קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחיה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- $\alpha$.

**שלב ה:** בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

**שלב ו:** להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם.
משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$n=20$ , $\overline{X}=3120$ , $S=280$.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:**

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

**1)** ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים.
משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.

**2)** לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

**3)** במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22.
מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.

**4)** בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. נבחנים בבגרות באנגלית.
ב. ציון.
ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=72 \\ H_1:\mu>72 \end{matrix}$.

**2)** א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
ב. נפח משקה בסמ"ק.
ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=500 \\ H_1:\mu<500 \end{matrix}$.

**3)** א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
ג. אחוז הקבלה.
ד. $\begin{matrix} H_0:p=0.25 \\ H_1:p<0.25 \end{matrix}$.

**4)** א. אזרחים בוגרים במשק.
ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
ג. אחוז האבטלה כיום.
ד. $\begin{matrix} H_0:p=0.08 \\ H_1:p\neq 0.08 \end{matrix}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# סוגי טעויות:

## רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי .
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.
לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

| | | הכרעה | |
|---|---|---|---|
| | | $H_0$ | $H_1$ |
| **מציאות** | $H_0$ | אין טעות | טעות מסוג 1 |
| | $H_1$ | טעות מסוג 2 | אין טעות |

### הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את $H_0$ למרות שבמציאות $H_0$ נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את $H_0$ למרות שבמציאות $H_1$ נכונה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה מסקנת המחקר?

ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?

**2)** במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.

א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?

ב. מה סוג הטעות האפשרית?

**3)** לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מה השערות המחקר?

ה. מה מסקנת המחקר?

ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\begin{matrix} H_0:\mu=500 \\ H_1:\mu<500 \end{matrix}$. ב. לא דחינו את $H_0$. ג. טעות מסוג שני.

**2)** א. לא ניתן לדעת. ב. טעות מסוג ראשון.

**3)** א. משפחות כיום. ב. מס' הילדים.

ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום. ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=2.3 \\ H_1:\mu<2.3 \end{matrix}$.

ה. לא לדחות את $H_0$. ו. טעות מסוג שני.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

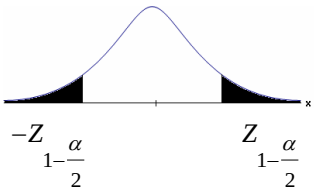
## פרק 15 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

### תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה ..... 111
2. סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסיה ידועה) ..... 115
3. קביעת גודל מדגם (ששונות האוכלוסיה ידועה) ..... 121
4. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה) ..... 124
5. בדיקת השערות על תוחלת ( ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה ..... 129
6. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה) ..... 133
7. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) ..... 136

# בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

## רקע:

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבה: | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu\neq\mu_0$ | $H_0:\mu\geq\mu_0$<br>$H_1:\mu<\mu_0$ | $H_0:\mu\leq\mu_0$<br>$H_1:\mu>\mu_0$ |
|---|---|---|---|
| תנאים: | 1. $\sigma$ ידועה<br>2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$: | $Z_{\bar{x}}<-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}}>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>  <br>$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>דוחים את $H_0$ | $Z_{\bar{x}}<-Z_{1-\alpha}$<br>  <br>$-Z_{1-\alpha}$<br>דוחים את $H_0$ | $Z_{\bar{x}}>Z_{1-\alpha}$<br>  <br>$Z_{1-\alpha}$<br>דוחים את $H_0$ |

**סטטיסטי המבחן:** $Z_{\bar{x}}=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

| נדחה $H_0$ אם מתקיים: | $\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |
|---|---|---|---|


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה:**

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

**פיתרון:**

<u>אוכלוסייה</u>: עגבניות.

<u>המשתנה</u>: $X$ = יבול העגבניות בטון לעונה.

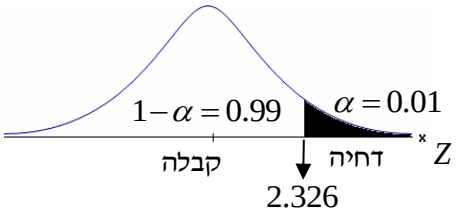
<u>הפרמטר</u>: $\mu$ = תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

<u>השערות</u>: $H_0 : \mu = 10$
$H_1 : \mu > 10$

<u>תנאים</u>:

1. $X \sim N$.
2. $\sigma = 2.5$.

<u>כלל הכרעה</u>:




נדחה את $H_0$ אם $Z_{\bar{x}} > 2.326$

<u>תוצאות</u>: $n = 4$ , $\bar{x} = 12.5$

<u>סטטיסטי המבחן</u>: $Z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

<u>נציב</u>: $Z_{\bar{X}} = \dfrac{1.25 - 10}{\dfrac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

<u>מסקנה</u>:

לא נדחה $H_0$ (נקבל $H_0$).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

**2)** לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ״ק וסטיית תקן 20 סמ״ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ״ק במדגם בגודל 25.

א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?

**3)** מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס״מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס״מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס״מ.
מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

**4)** המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק״ג, עם סטיית תקן 8 ק״ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק״ג.
יש לבדוק בר״מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.

**5)** לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ״מ עם סטיית תקן של 0.2 מ״מ.
במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ״מ.
קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט.
הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ״מ.

**6)** במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון?
בחרו בתשובה הנכונה.

א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.

ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.

ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**7)** חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של $\alpha$ והחליט לדחות את השערת האפס.
אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

א. השערת האפס הייתה נדחית.
ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

**8)** שני סטטיסטיקאים בדקו השערות: $H_0:\mu=\mu_0$ כנגד $H_1:\mu>\mu_0$,
עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.
שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

א. אם חוקר א' החליט לדחות את $H_0$, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את $H_0$, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

## תשובות סופיות:

**1)** נקבל $H_0$, ברי"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.

**2)** א. נדחה $H_0$, ברי"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.
ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של $H_0$ והמסקנה לא תשתנה.

**3)** נדחה $H_0$, ברי"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.

**4)** נדחה $H_0$, ברי"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.

**5)** נקבל $H_0$, ברי"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.

**6)** א'.

**7)** ג'.

**8)** א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסייה ידועה):

## רקע:

| | | הכרעה | |
|---|---|---|---|
| | | $H_0$ | $H_1$ |
| **מציאות** | $H_0$ | אין טעות | טעות מסוג 1 |
| | $H_1$ | טעות מסוג 2 | אין טעות |

**הגדרת הסתברויות:**

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

(לדחות $H_0$) $= P_{H_0}$ (נכונה $H_0$ | לדחות את $H_0$) $= P(H_0$ את לדחות$) = \alpha$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

(לקבל $H_0$) $= P_{H_1}$ (נכונה $H_1$ | לקבל את $H_0$) $= P(H_0$ את לקבל$) = \beta$.

רמת בטחון:

(לקבל $H_0$) $= P_{H_0}$ (נכונה $H_0$ | לקבל את $H_0$) $= P(H_0$ את לקבל$) = (\alpha - 1)$.

עוצמה:

(לדחות $H_0$) $= P_{H_1}$ (נכונה $H_1$ | לדחות את $H_0$) $= P(H_0$ את לדחות$) = \pi = (\beta - 1)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבה: | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu\neq\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu<\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu>\mu_0$ |
|---|---|---|---|
| תנאים: | 1. $\sigma$ ידועה<br>2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$: | $\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$<br>או<br>$\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |
| חישוב $\beta$: | $P_{\mu_1}\left(\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{X}<\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ | $P_{\mu_1}\left(\bar{X}>\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ | $P_{\mu_1}\left(\bar{X}<\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ |

**התפלגות ממוצע המדגם:** $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

**התקנון:** $Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

**דוגמה:**

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**פתרון:**

א. <u>אוכלוסייה</u>: משלמי חשבון טלפון סלולאר כיום.

<u>המשתנה</u>: $X$ = חשבון הטלפון החודשי בשקלים.

<u>הפרמטר</u>: $\mu$.

<u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0: \mu = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{matrix}$.

<u>תנאים</u>:

1. $\mu = 200$.

2. $n = 36$.

$K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\alpha = 0.05$$
$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

נציב: שקלים $K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07$.

<u>כלל ההכרעה</u>: דחה את $H_0$ אם שקלים $\bar{X} < 178.07$.

ב. ברמת מובהקות של 5% נכריע שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

ג. <u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0: \mu_0 = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{matrix}$.

<u>כלל ההכרעה</u>: נדחה את $H_0$ אם $\bar{X} < 178.07$.

$H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right)$.

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1}\left(\begin{matrix}\text{לקבל את} \\ H_0\end{matrix}\right) = P_{H_1}\left(\bar{X} > 178.07\right) = 1 - \phi(136) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת $\alpha$ מגדילה את $\beta$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נתון ש: $X \sim N\left(\mu, \sigma^2 = 1\right)$.

להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר $\mu$: $H_1: \mu = 7$ , $H_0: \mu = 5$.

מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.

א. עבור אילו ערכים של $X$ שידגם נדחית השערת $H_0$?

ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ג. אם במדגם התקבל ש-$X = 6.9$ מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

**2)** לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות.
במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 5%.

ב. בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

**3)** להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$n = 225$ , $\sigma = 30$ , $H_1: \mu \neq 200$ , $H_0: \mu = 200$.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.

ב. בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?

ג. הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

**4)** מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומודדים את קוטרם, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.

א. רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.

ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?

ג. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.

ד. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** להלן השערות של מחקר: $H_1:\mu=58$ , $H_0:\mu=50$.
מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.

א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%.
מהי רמת המובהקות?

ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?

i. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.

ii. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

**השאלות שלהלן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:**

**6)** אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.

ב. העוצמה של המבחן גדלה.

ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.

ד. תשובות א' ו-ב' נכונות.

**7)** חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

**8)** מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

| $\alpha$ | $1-\beta$ |
|---|---|
| א. גדולה | גדולה |
| ב. גדולה | קטנה |
| ג. קטנה | גדולה |
| ד. קטנה | קטנה |

**9)** נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית $H_0$ קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:

א. הן $\alpha$, והן $1-\beta$, יקטנו.

ב. $\alpha$ יישאר ללא שינוי ואילו $1-\beta$ יגדל.

ג. $\alpha$ יגדל ואילו $1-\beta$ יקטן.

ד. הן $\alpha$ והן $1-\beta$ יגדלו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**10)** ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר.
מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

א. טעות מסוג ראשון.

ב. טעות מסוג שני.

ג. טעות מסוג שלישי.

ד. אין טעות במסקנתו.

## תשובות סופיות:

**1)** א. מעל 6.645. ב. 0.3594.

ג. דחינו את $H_0$, תתכן טעות מסוג ראשון.

**2)** א. נדחה $H_0$ אם $\bar{X} < 2.24$. ב. נדחה $H_0$. ג. 1.

**3)** א. נדחה $H_0$ אם $\bar{X} > 203.29$ או $\bar{X} < 196.71$. ב. 0.8051. ג. תקטן.

**4)** א. נדחה $H_0$ אם $\bar{X} < 48.9$. ב. 0.0885. ג. תקטן. ד. תקטן.

**5)** א. 0.0033. ב. i. רמת המובהקות הייתה קטנה.

ב. ii. רמת המובהקות הייתה גדלה.

**6)** ד'.

**7)** ג'.

**8)** ג'.

**9)** א'.

**10)** ב'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# קביעת גודל מדגם (ששונות האוכלוסייה ידועה):

## רקע:

השערות המחקר הן: $H_1:\mu=\mu_1$ , $H_0:\mu=\mu_0$.

סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה $\sigma$ ומעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על $\alpha$ והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על $\beta$.

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי: $n\geq\left(\frac{\left(Z_{1-\alpha}+Z_{1-\beta}\right)\times\sigma}{\mu_0-\mu_1}\right)^2$.

**דוגמה:**

משרד החינוך מפעיל בגן חובה שיטת חינוך שפותחה בשנת 1995. לפי שיטת חינוך זו תוחלת הציון במבחן אוצר מילים לגיל הרך הוא 70. אנשי חינוך החליטו לבדוק שיטת חינוך שפותחה בהולנד הנותנת שם תוחלת ציון אוצר מילים של 80.
נניח שציוני מבחן זה מתפלגים נורמאלית עם $\sigma=17$.
כדי לבדוק האם גם בישראל הפעלת שיטת החינוך ההולנדית תעבוד בגנים, רוצים לבנות מחקר ברמת מובהקות של 5%. כמו כן, מעוניינים שאם בהפעלת השיטה ההולנדית תוחלת הציונים תעלה לכדי 80, המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90%.
כמה ילדי גן חובה דרושים למחקר?

**פתרון:**

<u>האוכלוסייה</u>: ילדי גן חובה.

<u>המשתנה</u>: $X$ = ציון במבחן אוצר מילים.

<u>הפרמטר</u>: $\mu$.

<u>השערות</u>: $\begin{matrix}H_0:\mu=70\\H_1:\mu=80\end{matrix}$.

$X\sim N\left(\mu,\sigma^2=17^2\right)$.

אם בהפעלת השיטה ההולנדית התוחלת תעלה ל80, נגלה זאת בסיכוי 90%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$$n \geq \left( \frac{\left( Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta} \right) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

$$\alpha = 0.05$$

$$1-\beta = 0.9$$

$$\mu_0 = 70$$

$$\mu_1 = 80$$

$$\sigma = 17$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$
$$Z_{1-\beta} = Z_{0.9} = 1.282$$

**נציב:** $n \geq \left( \frac{(1.645+1.282) \times 17}{70-80} \right)^2 = 24.76$

**לכן,** $n_{\min} = 25$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** במבחן אינטליגנציה הציונים מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 8 וממוצע 100. פסיכולוג מעוניין לבדוק את הטענה שבאוכלוסיות במצב סוציו אקונומי נמוך תוחלת הציונים היא 95.
אם מעוניינים לגלות את הטענה בהסתברות של לפחות 99% כשרמת המובהקות היא 5% מהו גודל המדגם הדרוש?

**2)** משרד התקשורת טוענים שאדם מדבר בממוצע 180 דקות בחודש בטלפון הסלולרי. חברות הטלפון הסלולרי טוענות שאינפורמציה זו אינה נכונה ואדם מדבר בממוצע פחות: כ-160 דקות. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של זמן השיחה החודשי ידוע ושווה ל-60 דקות. כמה אנשים יש לדגום כך שאם טענת משרד התקשורת נכונה נדחה אותה בסיכוי של 5% (איך קוראים להסתברות זאת?) כמו כן אם טענת חברות הטלפון הסלולרית נכונה המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90% (איך קוראים להסתברות זאת?).

**3)** השערות המחקר הן: $H_1:\mu=\mu_1$ , $H_0:\mu=\mu_0$.
כמו כן נתון שהמשתנה מתפלג נורמלית עם סטיית התקן ידועה $\sigma$ מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על $\alpha$ והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על $\beta$. הוכיחו שגודל המדגם הרצוי לכך יהיה: $n\geq\left(\frac{\left(Z_{1-\alpha}+Z_{1-\beta}\right)\times\sigma}{\mu_0-\mu_1}\right)^2$.

## תשובות סופיות:

**1)** 41.

**2)** 78.

**3)** שאלת הוכחה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

## רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- $p_v$.

את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$, דוחים את $H_0$.

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

| **השערת האפס:**<br>**השערה אלטרנטיבה:** | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu\neq\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu<\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu>\mu_0$ |
|---|---|---|---|
| **תנאים:** | 1. $\sigma$ ידועה<br>2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| **p-value** | אם $\bar{x}>\mu_0 \Rightarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X}\ge\bar{x}\right)$<br>אם $\bar{x}<\mu_0 \Rightarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X}\le\bar{x}\right)$ | $P_{H_0}(\bar{X}\le\bar{x})$ | $P_{H_0}(\bar{X}\ge\bar{x})$ |

**כאשר בהנחת השערת האפס:** $\bar{X}\sim N\left(\mu_0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ , $Z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה:**

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

**פתרון:**

א. <u>אוכלוסייה</u>: המתגייסים לצבא כיום.

<u>משתנה</u>: $X$ = משקל בק"ג.

<u>פרמטר</u>: $\mu$.

<u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0:\mu=65 \\ H_1:\mu>65 \end{matrix}$.

<u>תנאים</u>:

1. $X\sim N$.
2. $\sigma=12$.

<u>תוצאות מדגם</u>:

$n=16$

$\bar{X}=71$

$$P_V=P_{H_0}\left(\begin{matrix}\text{לתוצאות}\\ \text{המדגם}\\ \text{וקיצוני}\end{matrix}\right)=P_{H_0}\left(\bar{X}\geq 71\right)=1-\phi\left(2\right)=1-0.9772=0.0228$$

$$Z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{71-65}{\frac{12}{\sqrt{16}}}=2$$

$\alpha_{\min}=0.0228$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** להלן השערות של מחקר: $H_0:\mu=70$ , $H_1:\mu>70$.
המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20.
במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $\bar{x}=74$ , $n=100$.
מהי מובהקות התוצאה?

**2)** השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?

**3)** אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם.
חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה.
לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?

ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?

ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**4)** מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמאלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?

ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?

ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.

**5)** אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** בבדיקת השערות התקבל שה- $p-value=0.02$ .
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?
בחרו בתשובה הנכונה.

א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.

ב. ידחה את השערת האפס מקרה.

ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.

ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

**7)** מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.

ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.

ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.

ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

**8)** בבדיקת השערות מסוימת התקבל: $p\ value=0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):

א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את $H_0$ .

ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את $H_0$ .

ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את $H_0$ .

ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את $H_0$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** 0.0228.

**2)** עבור כל רמת מובהקות סבירה.

**3)** א. $\begin{matrix} H_0:\mu=100 \\ H_1:\mu<100 \end{matrix}$. ב. 0.1056. ג. 0.1056.

ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.

**4)** א. 0.0006. ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיול.

**5)** נכון.

**6)** א'.

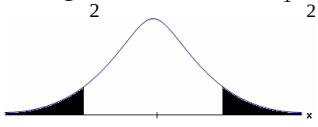
**7)** א'.

**8)** ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

## רקע:

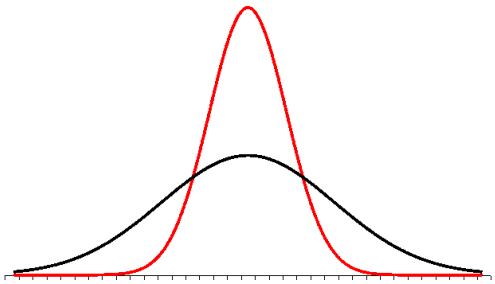
| השערת האפס: השערה אלטרנטיבה: | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu\neq\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu<\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu>\mu_0$ |
|---|---|---|---|
| תנאים: | 1. $\sigma$ אינה ידועה<br>2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$: | $t_{\bar{x}}>t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{x}}<-t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>  <br>$-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$<br>■ - דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}}<-t^{(n-1)}_{1-\alpha}$<br>  <br>$-t_{1-\alpha,n-1}$<br>■ - דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}}>t^{(n-1)}_{1-\alpha}$<br>  <br>$t_{1-\alpha,n-1}$<br>■ - דוחים את $H_0$ |
| חלופה לכלל הכרעה: נדחה $H_0$ אם מתקיים: | $\bar{X}>\mu_0+t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$<br>או<br>$\bar{X}<\mu_0-t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}<\mu_0-t^{n-1}_{1-\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}>\mu_0+t^{n-1}_{1-\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ |

סטטיסטי המבחן: $t_{\bar{x}}=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$.

$S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i-n\bar{X}^2}{n-1}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**התפלגות T:**



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס״מ.

כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס״מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 125, 80, 100, 95, 90 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

**2)** משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע.
במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$
$$\bar{x} = 3120$$
$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

**3)** ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

**4)** באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$
$$\sum_{i=1}^{10} \left( X_i - \bar{X} \right)^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.
בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80 .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה.
כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
ליאור השתמש בטבלה של התפלגות $Z$.
רוני השתמשה בטבלה של התפלגות $t$.
מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.

ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.

ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.

ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

**6)** נתון ש: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $\begin{matrix} H_0:\mu=\mu_0 \\ H_1:\mu<\mu_0 \end{matrix}$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
$\sigma^2$ לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
בחר בתשובה הנכונה:

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

## תשובות סופיות:

**1)** נדחה $H_0$.

**2)** נדחה $H_0$.

**3)** נקבל $H_0$.

**4)** נקבל $H_0$.

**5)** ב'.

**6)** ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

## רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$ דוחים את $H_0$.

מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

| השערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבה: | $H_0 : \mu = \mu_0$<br>$H_1 : \mu \ne \mu_0$ | $H_0 : \mu = \mu_0$<br>$H_1 : \mu < \mu_0$ | $H_0 : \mu = \mu_0$<br>$H_1 : \mu > \mu_0$ |
|---|---|---|---|
| תנאים: | 1. $\sigma$ אינה ידועה<br>או<br>2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$ | | |
| p-value | אם $\bar{x} > \mu_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$<br>אם $\bar{x} < \mu_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$ | $P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$ | $P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$ |

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה:**

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 27, 32, 30, 40, 34.
הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**פתרון:**

<u>אוכלוסייה</u>: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

<u>משתנה</u>: $X$ = זמן נסיעה בדקות.

<u>תנאים</u>: $X \sim N$.

<u>פרמטר</u>: $\mu$.

א. <u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0: \mu = 40 \\ H_1: \mu < 40 \end{matrix}$.

ב. <u>תוצאות המדגם</u>:

$$n=5\ ,\ \bar{X}\ \frac{\sum X_i}{n}=\frac{34+40+...}{5}=32.6$$

$$S^2=\frac{\sum X_i{}^2-n\cdot\bar{X}^2}{n-1}=\frac{34^2+40^2-...-5\cdot 32.6^2}{5-1}=23.4$$

$$S=\sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}}=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{32.6-40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}}=-3.39$$

$$P_V=P_{H_0}=\left(\bar{X}\le 32.6\right)=P\left(t\le -3.39\right)$$

$$d.f=5-1=4$$

$$1\%<P_V<2.5\%$$

$P_V<\alpha=0.05$, לכן דוחים את $H_0$.

<u>מסקנה</u>: ברי"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים:
997, 996, 1005, 1008, 1024.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**2)** חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות.
מהי ה- $\alpha$ המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

**3)** הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:
$\sum(x_i-\bar{x})^2=2832$ , $\bar{x}=176.2$.
מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק.
מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $H_0:\mu=1000$ , $H_1:\mu\neq1000$. ב. $20\%\le P_v\le 50\%$.

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

**2)** 10%.

**3)** 1.01, נקבל את $H_0$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע):

## רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות $\alpha$ על $\mu$ :

$H_1:\mu\neq\mu_0$ , $H_0:\mu=\mu_0$ .

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- $\mu$ :

אם $\mu_0$ נופל ברווח ← נקבל את $H_0$ .

אם $\mu_0$ לא נופל ברווח ← נדחה את $H_0$ .

**דוגמה:**

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו:

$H_1:\mu\neq 80$ , $\alpha=5\%$ , $H_0:\mu=80$ .

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל: $79<\mu<84$ .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

**פתרון (פתרון מלא בהקלטה):**

רווח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רווח הסמך יגדל ויכיל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% נקבל $H_0$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות: $H_1:\mu\neq 90$ , $H_0:\mu=90$.
החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: $(87,97)$.
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.

**2)** חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.

א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.

ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.

**3)** יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצלין היא 200 מ"ג לקפסולה.משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצלין בקפסולה מתפלגת נורמלית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצלין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

## תשובות סופיות:

**1)** נקבל השערת.

**2)** א. $112.87\leq\mu\leq 118.13$.

ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.

**3)** א. $191.8\leq\mu\leq 200.2$. ב. נכריע שיש אמת בפרסום.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

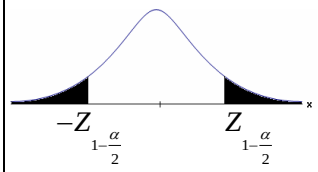
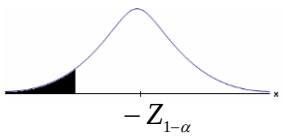
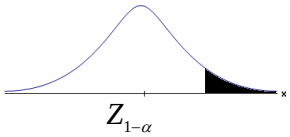
## פרק 16 - בדיקת השערות על פרופורציה

### תוכן העניינים

1. התהליך ..... 138
2. סיכוי לטעויות ועוצמה ..... 141
3. קביעת גודל מדגם ..... 145
4. מובהקות התוצאה - אלפא מינימלית ..... 147

# התהליך:

## רקע:

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | $H_0: p = p_0$<br>$H_1: p \neq p_0$ | $H_0: p = p_0$<br>$H_1: p < p_0$ | $H_0: p = p_0$<br>$H_1: p > p_0$ |
|---|---|---|---|
| **תנאים:** | $np_0 \geq 5 \;\&\; n(1-p_0) \geq 5$ | | |
| **כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$:** | $Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>  <br><br>■-דוחים את $H_0$ | $Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$<br>  <br><br>■-דוחים את $H_0$ | $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$<br>  <br><br>■-דוחים את $H_0$ |

**סטטיסטי המבחן:** $Z_{\hat{p}} = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

| **כלל ההכרעה – אזור הדחייה של $H_0$:** | | |
|---|---|---|
| $\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$<br>$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$ | $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$ | $\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$ |

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22.
ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?

**2)** במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת.
לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק?
בדקו ברמת מובהקות של 10%.

**3)** הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ.
האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?

**4)** קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.

א. רשמו את ההשערות.

ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.

ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?

**5)** חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.

א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.

**6)** שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות: $H_0: p = p_0$ , $H_1: p > p_0$.
חוקר א' השתמש ברמת מובהקות $\alpha_1$ וחוקר ב' ברמת מובהקות $\alpha_2$ החוקר הראשון דחה את $H_0$ ואילו החוקר השני קיבל את $H_0$.
שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם. בחר בתשובה הנכונה:

א. $\alpha_1 = \alpha_2$.

ב. $\alpha_1 > \alpha_2$.

ג. $\alpha_1 < \alpha_2$.

ד. המצב המתואר לא אפשרי.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) נדחה $H_0$.

2) נדחה $H_0$.

3) נקבל $H_0$.

4) א. $\begin{matrix} H_0 : p = 0.2 \\ H_1 : p \neq 0.2 \end{matrix}$ . ב. נקבל $H_0$. ג. המסקנה לא תשתנה.

5) א. נדחה $H_0$. ב. המסקנה לא תשתנה.

6) ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# סיכוי לטעויות ועוצמה:

## רקע:

### הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):
(לדחות $H_0$) $= P_{H_0}$ ($H_0$ נכונה $\mid$ לדחות את $H_0$) $= P(H_0$ לדחות את $\mid H_0$ נכונה$) = \alpha$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:
(לקבל $H_0$) $= P_{H_1}$ ($H_1$ נכונה $\mid$ לקבל את $H_0$) $= P(H_0$ לקבל את $\mid H_0$ נכונה$) = \beta$.

רמת בטחון:
(לקבל $H_0$) $= P_{H_0}$ ($H_0$ נכונה $\mid$ לקבל את $H_0$) $= P(H_0$ לקבל את $\mid H_0$ נכונה$) = (1-\alpha)$.

עוצמה:
(לדחות $H_0$) $= P_{H_1}$ ($H_1$ נכונה $\mid$ לדחות את $H_0$) $= P(H_0$ לדחות את $\mid H_0$ נכונה$) = \pi = (1-\beta)$.

| | הכרעה | | |
|---|---|---|---|
| | | $H_0$ | $H_1$ |
| **מציאות** | $H_0$ | אין טעות | טעות מסוג 1 |
| | $H_1$ | טעות מסוג 2 | אין טעות |

### התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

| **השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:** | $H_0: p = p_0$<br>$H_1: p \neq p_0$ | $H_0: p = p_0$<br>$H_1: p < p_0$ | $H_0: p = p_0$<br>$H_1: p > p_0$ |
|---|---|---|---|
| **תנאים:** | $np_0 \geq 5 \;\&\; n(1-p_0) \geq 5$ | | |
| **כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$:** | $\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$<br>או<br>$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ | $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ | $\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

| חישוב $\beta$ : |
|---|
| $P_{H_1}\left(\hat{p} < p_0 + Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$ |
| $P_{H_1}\left(p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < \hat{p} < p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$ |
| $P_{H_1}\left(\hat{p} > p_0 - Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$ |

כאשר: $\hat{P} \sim N\left(p\ , \frac{p(1-p)}{n}\right)$.

והתקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

רופאי שיניים טוענים שיותר ממחצית האוכלוסייה הבוגרת בארץ אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע, כנדרש. כדי לבדוק טענה זו, נערך סקר בקרב 150 אנשים בוגרים.

א. רשמו את ההשערות וכלל הכרעה ברמת מובהקות של 10%.

ב. מהי עוצמת המבחן אם מסתבר ש 60% מהאוכלוסייה אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** משרד הבריאות פרסם ש-10% מתושבי המדינה סובלים ממחלת האסטמה. מחקר דורש לבדוק האם בחיפה, בגלל זיהום האוויר, שיעור הסובלים מאסטמה גבוה יותר. לצורך המחקר נבדקו 260 מתושבי חיפה.

א. רשמו את השערות המחקר, וצרו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקתן.

ב. מהי עצמת המבחן של סעיף א' בהנחה ובחיפה 16% מהתושבים סובלים מאסטמה?

ג. כיצד תשנה התשובה לסעיף ב' אם מסתבר שבחיפה 18% סובלים מאסטמה?

ד. בהמשך לסעיף א' האם נכון לומר שבהסתברות של 5% ההשערה שבחיפה 10% מהתושבים סובלים מאסטמה אינה נכונה?

**2)** אחוז הסובלים מתופעות הלוואי מתרופה מסוימת הוא 15%. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שאמורה לצמצם את אחוז הסובלים מתופעות לוואי. לצורך בדיקת הטענה הוחלט לבצע מחקר שיכלול 120 חולים שיקבלו את התרופה הנבדקת.
נניח שהתרופה נבדקת אכן מורידה את פרופורציות הסובלים מתופעות הלוואי ל-10%, מהי עצמת המבחן עבור רמת מובהקות של 5%?

**3)** בעיר מסוימת היו 20% אקדמאים. בעקבות פתיחת מכללה בעיר לפני כמה שנים מעוניינים לבדוק האם אחוז האקדמאים גדל. מעוניינים שהמחקר יכלול 200 אנשים והוא יהיה ברמת מובהקות של 5%.

א. חשבו את הסיכוי לבצע טעות מסוג שני בהנחה והיום יש 28% אקדמאים.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?

**4)** מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?

**5)** חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן (בחרו בתשובה הנכונה):

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

**6)** קבעו אם הטענה הבאה נכונה: בבדיקת השערות לא ניתן לבצע בו זמנית טעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\begin{matrix} H_0 : p = 0.1 \\ H_1 : p > 0.1 \end{matrix}$ . ב. 0.9015. ג. תגדל. ד. טענה לא נכונה.

**2)** 0.4404.

**3)** א. 0.1446 ב. תקטן.

**4)** חוקר א'.

**5)** ג'.

**6)** נכונה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# קביעת גודל מדגם:

## רקע:

השערות המחקר הן: $H_0 : p = p_0$ , $H_1 : p = p_1$

מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על $\alpha$ והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על $\beta$.

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי: $n \geq \left( \frac{Z_{1-\alpha}\sqrt{p_0 q_0} + Z_{1-\beta}\sqrt{p_1 q_1}}{p_0 - p_1} \right)^2$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

רוצים לבדוק האם אחוז האנשים השוהים בשמש ללא הגנה ירד בעקבות הפרסומת על נזקי השמש.
בעבר 60% מהאוכלוסייה שהתה בשמש ללא הגנה. מה גודל המדגם המינימלי שיש לקחת כדי לבדוק שהאחוז הנ"ל ירד ל-48% אם מעוניינים שהסיכוי לטעות מסוג ראשון יהיה 5% והסיכוי לטעות מסוג שני יהיה 1%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** משרד התמ"ת פרסם שאחוז האבטלה במשק היום עומד על 8%.
לעומתו, משרד הפנים טוען שחלה עלייה בשיעור האבטלה עד לכדי 11%.
כדי לבדוק מי מבניהם צודק, מה צריך להיות גודל המדגם שיענה על שני התנאים הבאים:

א. אם משרד התמ"ת צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 10%.

ב. אם משרד הפנים צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 4%.

**2)** מפעיל קזינו מפרסם שהסיכוי לזכות במכונת מזל הינו 0.42.
אדם טוען שהסיכויים לזכות במשחק נמוכים יותר.
כמה פעמים יש לשחק את המשחק כדי שאם טענת מפעיל הקזינו נכונה נקבל את טענת האדם בסיכוי של 1% ואם במציאות הסיכוי לזכות במכונה הוא 0.3 נקבל את מפעיל הקזינו בסיכוי של 8%?

## תשובות סופיות:

**1)** .891

**2)** .224


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מובהקות התוצאה – אלפא מינימלית:

## רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:
באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- $p_v$.
את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.
המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

אם $p_v \le \alpha$ דוחים את $H_0$.

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.
לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:
לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | $H_0 : p = p_0$<br>$H_1 : p \ne p_0$ | $H_0 : p = p_0$<br>$H_1 : p < p_0$ | $H_0 : p = p_0$<br>$H_1 : p > p_0$ |
|---|---|---|---|
| תנאים: | $np_0 \ge 5 \& n(1-p_0) \ge 5$ | | |
| p-value | אם $\hat{p} > p_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \ge \hat{p})$<br>אם $\hat{p} < p_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \le \hat{p})$ | $P_{H_0}(\hat{P} \le \hat{p})$ | $P_{H_0}(\hat{P} \ge \hat{p})$ |

כאשר בהנחת השערת האפס: $\hat{P} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$.

התקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

ישנה טענה שיש הבדל בין אחוז הבנים ואחוז הבנות הפונים ללמוד להנדסאי מחשבים. לשם כך נלקח מדגם מקרי של 200 תלמידים הלומדים מחשבים והתברר כי 112 מהם בנים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?

**2)** נהוג לחשוב ש-60% מהילדים בגיל שלוש קמים מהמיטה במהלך הלילה לפחות פעם אחת. ישנה טענה שללא שנת צהריים פחות מ-60% מהילדים בגיל זה יקומו לפחות פעם אחת במהלך הלילה. נדגמו 80 ילדים בגיל 3 אשר אינם ישנים בצהריים מתוכם התקבל ש-41 קמו במהלך הלילה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה תתקבל הטענה במחקר?

ב. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה לא תתקבל טענת המחקר?

ג. עבור אילו רמות מובהקות נקבל את טענת המחקר?

ד. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 6%?

**3)** במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן מטילים אותו 80 פעמים. התקבל ש-60 מההטלות הראו עץ. רשמו את השערות המחקר, חשבו את מובהקות התוצאה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.

**4)** בבדיקת השערות על פרופורציה התקבל שה- $p\text{-}value = 0.02$ .
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 5% :
(בחרו בתשובה הנכונה)

א. יקבל את השערת האפס

ב. ידחה את השערת האפס.

ג. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

**5)** קבעו אם הטענה הבאה נכונה :
"במבחן לבדיקת השערות חד-צדדי התקבל ערך $p-value$ של 3%,
לכן אם היינו מבצעים מבחן דו-צדדי (כאשר יתר הנתונים ללא שינוי),
היינו מקבלים ערך $p-value$ של 6%".

**6)** במפעל 10% מהעובדים נפגעים לפחות פעם אחת בשנה מתאונות עבודה.
לאור זאת, המפעל החליט לצאת בתוכנית לצמצום שיעור הנפגעים. תכנית זו נוסתה על 100 עובדים. מתוכם 12 נפגעו בתאונות עבודה במשך השנה.
מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוחלט שהתכנית יעילה?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. 0.0455.

ב. ברמת מובהקות של 1% : לא דוחים את $H_0$.

ברמת מובהקות של 5% : נדחה את $H_0$.

**2)** א. 0.0548. ב.0.0548. ג. מעל 0.0548.

ד. נכריע לטובת טענת המחקר.

**3)** $p_v = 0$ , נדחה את $H_0$.

**4)** ב'.

**5)** הטענה נכונה.

**6)** 0.7486.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 17 - בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 151

# בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

## רקע

| | | | |
|---|---|---|---|
| **השערת האפס :**<br>**השערה אלטרנטיבית:** | $H_0: p_1 - p_2 = 0$<br>$H_1: p_1 - p_2 \neq 0$ | $H_0: p_1 - p_2 = 0$<br>$H_1: p_1 - p_2 < 0$ | $H_0: p_1 - p_2 = 0$<br>$H_1: p_1 - p_2 > 0$ |
| **תנאים:** | 1.מדגמים בלתי תלויים | 2. מדגמים גדולים | |
| **כלל ההכרעה:**<br>אזור הדחייה של : | $Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>  <br>$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>$H_0$ דוחים את - ■ | $Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} < -Z_{1-\alpha}$<br>  <br>$-Z_{1-\alpha}$<br>$H_0$ דוחים את - ■ | $Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} > Z_{1-\alpha}$<br>  <br>$Z_{1-\alpha}$<br>$H_0$ דוחים את - ■ |

**סטטיסטי המבחן:** $$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} \underset{H_0}{=} \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

כאשר הפרופורציה המשוקללת : $$\hat{p} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

| **כלל ההכרעה:** אזור הדחייה של $H_0$ | |
|---|---|
| $\hat{p}_1-\hat{p}_2>0+Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_2}}$<br>או $\hat{p}_1-\hat{p}_2<0-Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_2}}$ | $\hat{p}_1-\hat{p}_2<0-Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_2}}$ |
| $\hat{p}_1-\hat{p}_2>0+Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_2}}$ | |

**התפלגות** של $\hat{p}_1-\hat{p}_2$ :

$$\hat{p}_1-\hat{p}_2\sim N(p_1-p_2,\frac{p_1\cdot q_1}{n_1}+\frac{p_2\cdot q_2}{n_2})$$

**תקנון:**

$$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}}$$

$$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\underset{H_0}{=}\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

נדגמו 80 סטודנטים שנבחנו במיקרו-כלכלה. מתוכם 60 עברו את הבחינה.
נדגמו 100 סטודנטים שנבחנו בסטטיסטיקה א'. מתוכם 82 עברו את הבחינה.
האם שיעור העוברים את הבחינה בסטטיסטיקה גבוה מאשר מהבחינה במיקרו כלכלה? בדקו ברמת מבוהקות של 10%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** במדגם של 200 גברים, 8% היו מובטלים. במדגם של 180 נשים, 10% מהן היו מובטלות.
האם קיים הבדל מובהק בין פרופורציית המובטלים לפרופורציית המובטלות?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.

**2)** אחוז בעלי רישיון נהיגה בקרב האוכלוסייה הבוגרת הינו 60%. במדגם של 300 בוגרים מתל אביב 204 היו בעלי רישיון נהיגה.
במדגם של 220 בוגרים מירושלים 100 היו בעלי רישיון נהיגה.

א. ברמת מובהקות של 5% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון בתל אביב גבוה מהאחוז הארצי?

ב. ברמת מובהקות של 10% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון נהיגה בתל אביב גבוה מאחוז בעלי רישיון הנהיגה בירושלים?

**3)** נדגמו 500 בוגרים מתוכם 200 גברים והיתר נשים. במדגם התקבל: מתוך הגברים ל-48% תעודת בגרות. מתוך הנשים ל-58% תעודת בגרות. מטרת המחקר היא לבדוק האם שיעור הזכאיות לבגרות גבוה משיעור הזכאים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?

**4)** במדגם שנערך על 100 פרות מחוות בדרום הארץ התקבל כי 20 פרות נושאות וירוס מסוים. במדגם שנערך על 200 פרות מחוות בצפון הארץ התקבל כי 10 מתוכן נושאות וירוס גם כן.

א. בנו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקת הטענה כי הוויורוס תקף את פרות הדרום באופן משמעותי יותר מאשר את הפרות בצפון הארץ.

ב. מהי המסקנה לבדיקת הטענה של סעיף א ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. מהי עוצמת המבחן אם שיעור הפרות בדרום עם הוויורוס גבוה ב-10% משיעור הפרות בצפון עם הוויורוס?

ד. כיצד העוצמה תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** לא נדחה את $H_0$.

**2)** א. נדחה $H_0$. ב. נדחה $H_0$.

**3)** א. 0.0139 ב. נדחה $H_0$.

**4)** א. ראה סרטון. ב. נדחה $H_0$. ג. 0.8238

ד. תגדל.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

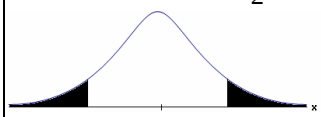
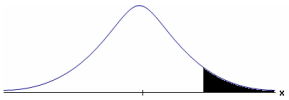
## פרק 18 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסייה ידועות ..... 155
2. כששוניויות האוכלוסיה לא ידועות ומניחים שהן שוות ..... 159

# בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

## כשהשונויות של האוכלוסייה ידועות – רקע

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | $H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$<br>$H_1 \quad \mu_1-\mu_2\neq c$ | $H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$<br>$H_1 \quad \mu_1-\mu_2<c$ | $H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$<br>$H_1 \quad \mu_1-\mu_2>c$ |
|---|---|---|---|
| **תנאים:** | מדגמים בלתי תלויים<br>ידועות $\sigma_1,\sigma_2$<br>$X_1,X_2 \sim N$<br>או מדגמים מספיק גדולים | | |
| **כלל ההכרעה:**<br>אזור הדחייה של $H_0$: | $Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>  <br>$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>$H_0$ דוחים את ■ | $Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$<br>  <br>$-Z_{1-\alpha}$<br>$H_0$ דוחים את ■ | $Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$<br>  <br>$Z_{1-\alpha}$<br>$H_0$ דוחים את ■ |

**סטטיסטי המבחן:** $$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

| נדחה $H_0$ אם מתקיים: | |
|---|---|
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ **או** $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ | $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ |
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ | |

**התפלגות הפרש הממוצעים:** $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

**התקנון:** $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

בשנת 2004 הפער בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000₪ לטובת הגברים.
מעוניינים לבדוק האם כיום הצטמצם הפער בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע.
נדגמו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072₪. נדגמו 80 עובדות, שכרן הממוצע היה 7809₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ושוות ל-2000₪ באוכלוסיית הנשים ו-3000₪ באוכלוסיית הגברים.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלה נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה.
במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות.
במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות.
לצורך פתרון הניחו שבכל אזור, סטיית התקן היא שעה 1 ביום.
בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.

**2)** ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות.
במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508.
במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.

**3)** במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים.

א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקה האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית.

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?

**4)** במחקר מקיף שנעשה באירופה נקבע שגברים גבוהים מנשים ב-8 ס״מ בממוצע. מחקר ישראלי מתעניין לבדוק האם בישראל הפער גדול יותר. לצורך המחקר נדגמו 40 גברים ו 40 נשים באקראי. כמו כן, נניח שסטיות התקן של הגברים והנשים ידועות ושוות ל-6 ס״מ אצל הנשים ו-12 ס״מ אצל הגברים.

א. מהן השערות המחקר ומהו כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 10%?

ב. אם בישראל הפער בין גברים לנשים מבחינת הגובה הממוצע הוא 11 ס״מ, מה ההסתברות שהמחקר לא יגלה זאת? איך קוראים להסתברות הזאת?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** נדחה $H_0$.

**2)** לא נדחה את $H_0$.

**3)** א. 0 ב. נדחה את $H_0$.

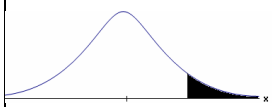
**4)** א. נדחה את $H_0$, אם במדגם הגברים יהיו גבוהים בממוצע מהנשים ביותרמ-10.72 ס״מ.

ב. 0.6331


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

## כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | $H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$<br>$H_1 \quad \mu_1-\mu_2\neq c$ | $H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$<br>$H_1 \quad \mu_1-\mu_2<c$ | $H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$<br>$H_1 \quad \mu_1-\mu_2>c$ |
|---|---|---|---|
| **תנאים:** | 1. מדגמים בלתי תלויים<br>2. $\sigma_1, \sigma_2$ לא ידועות אך שוות<br>3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית | | |
| **אזור הדחייה של $H_0$:** | $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$<br>  <br>$-t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$<br>$H_0$ דוחים את | $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$<br>  <br>$-t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$<br>$H_0$ דוחים את | $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$<br>  <br>$t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$<br>$H_0$ דוחים את |

**סטטיסטי המבחן:**

$$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-c}{\sqrt{\frac{{S_p}^2}{n_1}+\frac{{S_p}^2}{n_2}}}$$

**השונות המשוקללת:**

$${S_p}^2=\frac{(n_1-1){S_1}^2+(n_2-1){S_2}^2}{n_1+n_2-2}$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

| נדחה $H_0$ אם מתקיים: | |
|---|---|
| $\bar{x}_1-\bar{x}_2 > c+t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$ **או** $\bar{x}_1-\bar{x}_2 < c-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$ | $\bar{x}_1-\bar{x}_2 < c-t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$ |
| $\bar{x}_1-\bar{x}_2 > c+t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$ | |

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשתמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2=200$.

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2=260$.

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2012** | 120 | 95 | 130 | 90 | 94 | 120 | |
| **2013** | 100 | 82 | 91 | 105 | 74 | 69 | |

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

**2)** נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

| המדינה | ישראל | ארה"ב |
|---|---|---|
| גודל המדגם | 15 | 15 |
| סכום הציונים | 1560 | 1470 |
| סכום ריבועי הציונים | 165,390 | 147,560 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

**3)** להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

| הקבוצה | 60W | 100W |
|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 1007 | 956 |
| $S$ | 80 | 72 |
| $n$ | 13 | 15 |

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.

ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W 60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?

ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W 60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** נדחה את $H_0$.

**2)** הנחות:

1. סטיות התקן שוות.
2. המשתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את $H_0$.

**3)** א. נדחה את $H_0$. ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.

ג. לא נדחה את $H_0$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

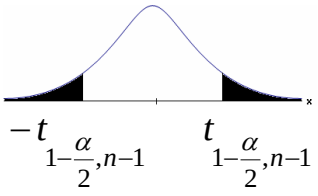
## פרק 19 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים ..... 163

# בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

## בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D \neq C$ | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D < C$ | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D > C$ |
|---|---|---|---|
| **תנאים:** | 1. $\sigma_D$ אינה ידועה<br>2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| **כלל ההכרעה:** אזור הדחייה של $H_0$: | $t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>  <br><br>■ - דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\alpha}$<br>  <br><br>■ - דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\alpha}$<br>  <br><br>■ - דוחים את $H_0$ |
| **חלופה לכלל הכרעה:** נדחה $H_0$ אם מתקיים: | $\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$<br>או<br>$\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ | $\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ | $\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ |

**סטטיסטי המבחן:** $t_{\bar{D}} = \dfrac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$ , $S_D^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחיריה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל".
לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות.
להלן המחירים:

| המוצר / רשת | מגה בעיר | שופרסל |
|---|---|---|
| שמפו | 17 | 18 |
| ג'ל כביסה | 48 | 57 |
| עוגת גבינה | 35 | 35 |
| לחם | 12 | 10 |
| קפה נמס | 49 | 47 |
| בקבוק יין | 113 | 142 |
| גבינה בולגרית | 20 | 26 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת $X$ לחברת $Y$ מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

| חברה/ מדינה | ארה"ב | קנדה | הולנד | פולין | מצרים | סין | יפן |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 1.5 | 2.1 | 2.2 | 3 | 3.5 | 3.2 | 4.2 |
| $Y$ | 1.4 | 2 | 1.9 | 3.1 | 3.2 | 3.2 | 4.2 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים בממוצע?

**2)** מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| לפני | 506 | 470 | 420 | 640 | 670 | 390 | 500 | 590 |
| אחרי | 570 | 540 | 430 | 610 | 680 | 510 | 520 | 580 |

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

**3)** נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| סטטיסטיקה א' | 74 | 68 | 90 | 75 | 82 |
| סטטיסטיקה ב' | 80 | 84 | 87 | 76 | 100 |

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ 5 נקודות?

ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ- 5 נקודות?

ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

**4)** לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן $Z$ למדגם יחיד.

ב. מבחן $T$ למדגם יחיד.

ג. מבחן $T$ למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן $T$ למדגמים מזווגים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| משקל במכשיר 1 | 4.5 | 9.6 | 0.7 | 2.5 |
| משקל במכשיר 2 | 3.5 | 6.9 | 1.7 | 0.5 |

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

**6)** כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

## תשובות סופיות

**1)** לא נדחה $H_0$.

**2)** לא נדחה $H_0$.

**3)** א. $0.25 \le pv \le 0.5$ ב. 0.5 ג. לא נדחה $H_0$.

**4)** ד'.

**5)** ד'.

**6)** ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 20 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות

### תוכן העניינים

1. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות ..... 167

# הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות

## רקע

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות $\alpha$ על $\mu_1-\mu_2$ :

$H_0:\mu_1-\mu_2=C,\qquad H_1:\mu_1-\mu_2\neq C$ .

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- $\mu_1-\mu_2$ :

אם $C$ נופל ברווח ← נקבל את $H_0$ .

אם $C$ לא נופל ברווח ← נדחה את $H_0$ .

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג.

להלן השערותיו : $\alpha=5\%$ $\qquad H_1:\mu_D\neq 80,\qquad H_0:\mu_D=80,$ .

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%, $78<\mu_D<83$ .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.
להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב':

| סמסטר א | סמסטר ב |
|---|---|
| 74 | 80 |
| 68 | 84 |
| 90 | 87 |
| 75 | 76 |
| 82 | 100 |

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א'. האם יש אמת בפרסום?

**2)** הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה $X$ ואצל מרצה $Y$. נבחרו באקראי 6 סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה $X$ ו-3 סטודנטים של מרצה $Y$, עבורם התקבלו הציונים הבאים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| מרצה $X$ | 82 | 90 | 68 |
| מרצה $Y$ | 68 | 81 | 64 |

א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.

ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

### שאלות רב-ברירה:

**3)** סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.
הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$.
אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות:
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ ; $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ברמת מובהקות 0.05, מסקנתו תהיה:

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05 .

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו : $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ , רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
לכן מסקנת המחקר היא :

א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.

ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.

ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של $D$.

## תשובות סופיות

**1)** א. $-3.8 \le \mu_D \le 19$ ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

**2)** א. $-8.5 \le \mu_X - \mu_Y \le 26.5$ ב. נכריע שאין הבדל.

**3)** ג.

**4)** א.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

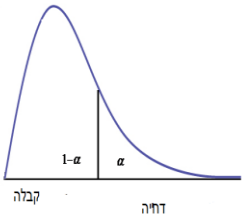
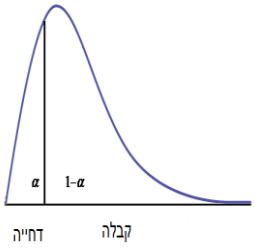
## פרק 21 - בדיקת השערות על שונויות

### תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על שונות וסטיית תקן ..... 170
2. בדיקת השערות על שתי שונויות ..... 175

# בדיקת השערות על שונויות

## בדיקת השערות על שונות האוכלוסייה כאשר התוחלת לא ידועה – רקע

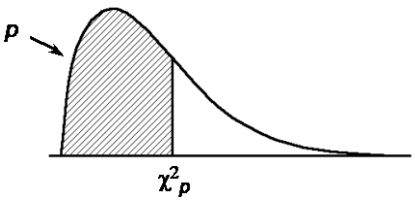
| השערת האפס: | $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ | $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ | $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ |
|---|---|---|---|
| השערה אלטרנטיבית: | $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$ | $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$ | $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$ |
| תנאים: | $X\sim N$ | | |
| נדחה את השערת האפס אם: |  או $\chi^2<\chi^{2(n-1)}_{\frac{\alpha}{2}}$ $\chi^2>\chi^{2(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ |  $\chi^2<\chi^{2(n-1)}_{\alpha}$ |  $\chi^2>\chi^{2(n-1)}_{1-\alpha}$ |

**סטטיסטי המבחן:** $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

**התפלגות חי בריבוע:**

אם $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$, והפרמטר $\mu$ אינו ידוע, מתקיים ש: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^{2(n-1)}$.

התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף.
התפלגות זו תלויה בדרגות החופש.
אם $\mu$ אינו ידוע, אז: $d.f=n-1$.





© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה:**

ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמאלית עם $\sigma = 15$. מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאמריקה.

במדגם של 20 ישראלים התקבל: $\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 3420$.

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**פתרון:**

<u>האוכלוסיה:</u> נבחנים ישראלים במבחן I.Q

<u>המשתנה:</u> $X$ = ציון I.Q

<u>פרמטר:</u> $\sigma^2$

<u>השערות:</u>
$$H_0: \sigma^2 = 15^2 = 225$$
$$H_1: \sigma^2 \neq 225$$

<u>הנחה:</u> $X \sim N$

<u>כלל הכרעה:</u> $d.f = n-1 = 20-1 = 19$

נדחה את $H_0$ אם $X^2 > 32.9$ או $X^2 < 8.91$

<u>תוצאות המדגם:</u> $n = 20$

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 3420$$

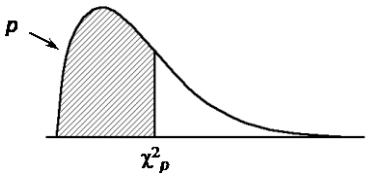
$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{3420}{20-1} = 180$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 180}{225} = 15.2$$

<u>מסקנה:</u> לא נדחה את $H_0$, לא נסיק ששונות הציונים של נבחנים ישראלים במבחן I.Q שונה מזו של אמריקאים. ($\alpha = 5\%$)


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה $\chi^2 p$




| df | p .005 | .01 | .025 | .05 | .10 | .25 | .50 | .75 | .90 | .95 | .975 | .99 | .995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0.0^4393$ | $0.0^3157$ | $0.0^3982$ | $0.0^2393$ | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 0.211 | 0.575 | 1.39 | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3 | 0.0717 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 1.21 | 2.37 | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.06 | 1.92 | 3.36 | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.15 | 1.61 | 2.67 | 4.35 | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.45 | 5.35 | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7 | 0.989 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 4.25 | 6.35 | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 5.07 | 7.34 | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.90 | 8.34 | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.74 | 9.34 | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 7.58 | 10.3 | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 8.44 | 11.3 | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 9.30 | 12.3 | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 10.2 | 13.3 | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 11.0 | 14.3 | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.9 | 15.3 | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.1 | 12.8 | 16.3 | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.9 | 13.7 | 17.3 | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.1 | 11.7 | 14.6 | 18.3 | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.9 | 12.4 | 15.5 | 19.3 | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.3 | 11.6 | 13.2 | 16.3 | 20.3 | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 11.0 | 12.3 | 14.0 | 17.2 | 21.3 | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26 | 10.2 | 11.7 | 13.1 | 14.8 | 18.1 | 22.3 | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89 | 10.9 | 12.4 | 13.8 | 15.7 | 19.0 | 23.3 | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5 | 11.5 | 13.1 | 14.6 | 16.5 | 19.9 | 24.3 | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2 | 12.2 | 13.8 | 15.4 | 17.3 | 20.8 | 25.3 | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8 | 12.9 | 14.6 | 16.2 | 18.1 | 21.7 | 26.3 | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5 | 13.6 | 15.3 | 16.9 | 18.9 | 22.7 | 27.3 | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1 | 14.3 | 16.0 | 17.7 | 19.8 | 23.6 | 28.3 | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8 | 15.0 | 16.8 | 18.5 | 20.6 | 24.5 | 29.3 | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** חברה אורזת סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באריזה מתפלג נורמאלית. החברה החליפה את מכונות האריזה במטרה לדייק יותר במשקל הנארז. (רוצים שסטיית התקן תהיה קטנה יותר).
לצורך בדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן (בגרם): 997, 996, 1005, 1024, 1008.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**2)** זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו: 38, 50, 72, 90, 110.

א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א', אם נגדיל את רמת המובהקות?

ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נקטין את רמת המובהקות?

ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נוסיף תצפית שערכה 70?

**3)** הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5%, האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה, בבחירת המבחן המתאים הסתמך על המסקנה מסעיף א'.

**4)** השערות המחקר הן: $H_o:\sigma^2=100 \quad H_1:\sigma^2>100$
מתכננים לבצע מדגם בגודל 10 תצפיות. רמת המובהקות היא 5%.

א. מה תהיה עוצמת המבחן אם $\sigma_1^2=150$?

ב. איזו השערה אלטרנטיבית תיתן עוצמה של 90%?

**5)** השערות המחקר הן: $H_o:\sigma=2$ , $H_1:\sigma<2$.
במדגם של 21 תצפיות התקבל סטיית תקן 1.143.
תנו הערכה למובהקות התוצאה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

1) לא נדחה $H_o$.

2) א. נדחה את $H_o$. ב. לא תשתנה. ג. לא ניתן לדעת.
ד. לא תשתנה.

3) א. נדחה את $H_o$. ב. לא נדחה את $H_o$.

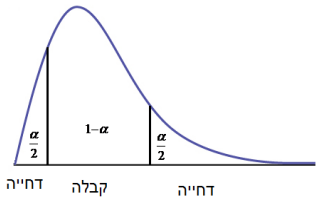
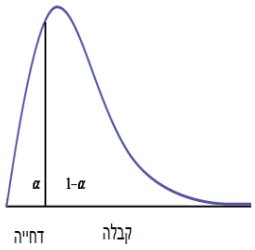
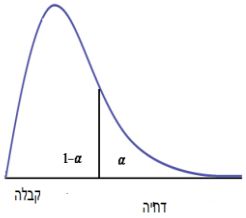
4) א. בין 25% ל-50%. ב. 405.3.

5) $0 < P_v < 0.005$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# בדיקת השערות על שונויות

## בדיקת השערות על שונות האוכלוסייה כאשר התוחלת לא ידועה – רקע

| | | | |
|---|---|---|---|
| **השערת האפס:**<br>**השערה אלטרנטיבית:** | $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$<br>$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$ | $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$<br>$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$ | $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$<br>$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$ |
| **תנאים:** | $X\sim N$ | | |
| **נדחה את השערת האפס אם:** |  <br>$\chi^2<\chi^{2(n-1)}_{\frac{\alpha}{2}}$ או<br>$\chi^2>\chi^{2(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ |  <br>$\chi^2<\chi^{2(n-1)}_{\alpha}$ |  <br>$\chi^2>\chi^{2(n-1)}_{1-\alpha}$ |

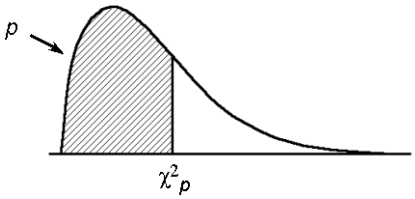
**סטטיסטי המבחן:** $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

**התפלגות חי בריבוע:**

אם $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$, והפרמטר $\mu$ אינו ידוע, מתקיים ש: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^{2(n-1)}$.

התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף. התפלגות זו תלויה בדרגות החופש.

אם $\mu$ אינו ידוע, אז: $d.f=n-1$.




**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

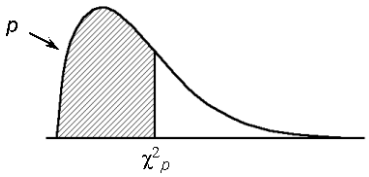
ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמאלית עם $\sigma=15$. מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאמריקה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

במדגם של 20 ישראלים התקבל: $\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=3420$.

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל




## טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה $\chi^2 p$

| | $p$ | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| df | .005 | .01 | .025 | .05 | .10 | .25 | .50 | .75 | .90 | .95 | .975 | .99 | .995 |
| 1 | $0.0^4393$ | $0.0^3157$ | $0.0^3982$ | $0.0^2393$ | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 0.211 | 0.575 | 1.39 | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3 | 0.0717 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 1.21 | 2.37 | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.06 | 1.92 | 3.36 | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.15 | 1.61 | 2.67 | 4.35 | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.45 | 5.35 | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7 | 0.989 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 4.25 | 6.35 | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 5.07 | 7.34 | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.90 | 8.34 | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.74 | 9.34 | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 7.58 | 10.3 | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 8.44 | 11.3 | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 9.30 | 12.3 | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 10.2 | 13.3 | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 11.0 | 14.3 | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.9 | 15.3 | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.1 | 12.8 | 16.3 | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.9 | 13.7 | 17.3 | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.1 | 11.7 | 14.6 | 18.3 | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.9 | 12.4 | 15.5 | 19.3 | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.3 | 11.6 | 13.2 | 16.3 | 20.3 | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 11.0 | 12.3 | 14.0 | 17.2 | 21.3 | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26 | 10.2 | 11.7 | 13.1 | 14.8 | 18.1 | 22.3 | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89 | 10.9 | 12.4 | 13.8 | 15.7 | 19.0 | 23.3 | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5 | 11.5 | 13.1 | 14.6 | 16.5 | 19.9 | 24.3 | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2 | 12.2 | 13.8 | 15.4 | 17.3 | 20.8 | 25.3 | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8 | 12.9 | 14.6 | 16.2 | 18.1 | 21.7 | 26.3 | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5 | 13.6 | 15.3 | 16.9 | 18.9 | 22.7 | 27.3 | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1 | 14.3 | 16.0 | 17.7 | 19.8 | 23.6 | 28.3 | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8 | 15.0 | 16.8 | 18.5 | 20.6 | 24.5 | 29.3 | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** חברה אורזת סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באריזה מתפלג נורמאלית. החברה החליפה את מכונות האריזה במטרה לדייק יותר במשקל הנארז. (רוצים שסטיית התקן תהיה קטנה יותר).
לצורך בדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן (בגרם): 997, 996, 1005, 1024, 1008.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**2)** זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו: 38, 50, 72, 90, 110.
א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית?
ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א',אם נגדיל את רמת המובהקות?
ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נקטין את רמת המובהקות?
ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נוסיף תצפית שערכה 70?

**3)** הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.
א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5%, האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה, בבחירת המבחן המתאים הסתמך על המסקנה מסעיף א'.

**4)** השערות המחקר הן: $H_o:\sigma^2=100$ $H_1:\sigma^2>100$
מתכננים לבצע מדגם בגודל 10 תצפיות. רמת המובהקות היא 5%.

א. מה תהיה עוצמת המבחן אם $\sigma_1^2=150$?

ב. איזו השערה אלטרנטיבית תיתן עוצמה של 90%?

**5)** השערות המחקר הן: $H_o:\sigma=2$ , $H_1:\sigma<2$.
במדגם של 21 תצפיות התקבל סטיית תקן 1.143.
תנו הערכה למובהקות התוצאה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

1) לא נדחה $H_o$.

2) א. נדחה את $H_o$. ב. לא תשתנה. ג. לא ניתן לדעת.
ד. לא תשתנה.

3) א. נדחה את $H_o$. ב. לא נדחה את $H_o$.

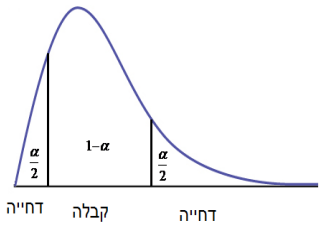
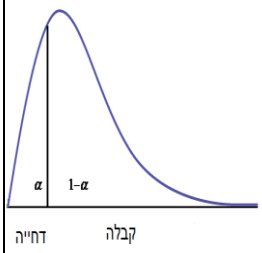
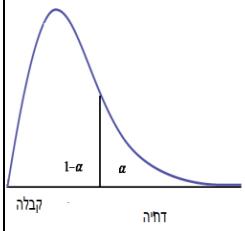
4) א. בין 25% ל-50%. ב. 405.3.

5) $0 < P_v < 0.005$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# בדיקת השערות על שונויות

## בדיקת השערות על שתי שונויות - רקע

| השערת האפס: | $H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$ | $H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$ | $H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$ |
|---|---|---|---|
| השערה אלטרנטיבית: | $H_1:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\neq 1$ | $H_1:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1$ | $H_1:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}>1$ |
| תנאים: | 1.מדגמים בלתי תלויים | 2. $X_1, X_2 \sim N$ | |
| נדחה את השערת האפס אם: |  או $F \geq f_{1-\alpha/2}^{(n_1-1,n_2-1)}$ <br> $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha/2}^{(n_2-1,n_1-1)}}$ |  <br> $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}^{(n_2-1,n_1-1)}}$ |  <br> $F \geq f_{1-\alpha}^{(n_1-1,n_2-1)}$ |

**סטטיסטי המבחן:** $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$

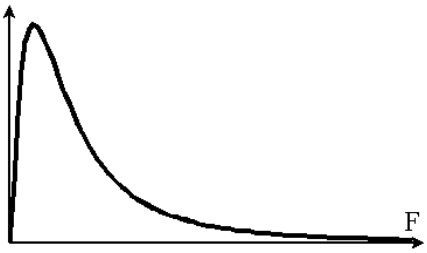
### התפלגות F:

אם $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma^2)$ ו- $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma^2)$ אזי: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$.

התפלגות F הינה התפלגות אסימטרית חיובית התלויה בדרגות חופש של המונה ושל המכנה.

כמו כן בהתפלגות F מתקיימת התכונה הבאה: $F_\alpha(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{1-\alpha}^{(n_2-1,n_1-1)}}$.

$df_1 = n_1 - 1$
$df_2 = n_2 - 1$





© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמני ביצוע המשימה: $\sum(y_i-\bar{y})^2=204$.

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות: $\sum(x_i-\bar{x})^2=200$.

בדקו ברמת מובהקות של 2% האם קיים הבדל בין השונויות? מה יש להניח?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## טבלת התפלגות $F$

ערכי החלוקה $F_p$ של התפלגות $F(m,n)$

$m$ — דרגות חופש המונה; $n$ — דרגות חופש המכנה

| | | $m$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | | | | | | | | | | | | |
| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | |
| 15 | 20 | 30 | 60 | 120 | ∞ | | | | | | | |
| .95 | 1 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 | |
| 244 | 246 | 248 | 250 | 252 | 253 | 254 | | | | | | |
| .975 | | 648 | 800 | 864 | 900 | 922 | 937 | 948 | 957 | 963 | 969 | |
| 977 | 985 | 993 | 1001 | 1010 | 1014 | 1018 | | | | | | |
| .99 | | 4052 | 5000 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5981 | 6022 | 6056 | 6 |
| 106 | 6157 | 6209 | 6261 | 6313 | 6339 | 6366 | | | | | | |
| .995 | | 16211 | 20000 | 21615 | 22500 | 23056 | 23437 | 23715 | 23925 | 24091 | 24224 | 24 |
| 426 | 24630 | 24836 | 25044 | 25253 | 25359 | 25464 | | | | | | |
| .95 | 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.40 | |
| 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.46 | 19.48 | 19.49 | 19.50 | | | | | | |
| .975 | | 38.51 | 39.00 | 39.17 | 39.25 | 39.30 | 39.33 | 39.36 | 39.37 | 39.39 | 39.40 | |
| 39.41 | 39.43 | 39.45 | 39.46 | 39.48 | 39.49 | 39.50 | | | | | | |
| .99 | | 98.50 | 99.00 | 99.16 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.38 | 99.39 | 99.40 | |
| 99.42 | 99.43 | 99.45 | 99.47 | 99.48 | 99.49 | 99.50 | | | | | | |
| .995 | | 198.50 | 199.01 | 199.16 | 199.24 | 199.30 | 199.33 | 199.36 | 199.38 | 199.39 | 199.39 | |
| 199.42 | 199.43 | 199.45 | 199.48 | 199.48 | 199.49 | 199.51 | | | | | | |
| .95 | 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 | |
| 8.74 | 8.70 | 8.66 | 8.62 | 8.57 | 8.55 | 8.53 | | | | | | |
| .975 | | 17.44 | 16.04 | 15.44 | 15.10 | 14.88 | 14.73 | 14.62 | 14.54 | 14.47 | 14.42 | |
| 14.34 | 14.25 | 14.17 | 14.08 | 13.99 | 13.95 | 13.90 | | | | | | |
| .99 | | 34.12 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.34 | 27.23 | |
| 27.05 | 26.87 | 26.69 | 26.50 | 26.32 | 26.22 | 26.13 | | | | | | |
| .995 | | 55.55 | 49.80 | 47.47 | 46.20 | 45.39 | 44.84 | 44.43 | 44.13 | 43.88 | 43.68 | |
| 43.39 | 43.08 | 42.78 | 42.47 | 42.15 | 41.99 | 41.83 | | | | | | |
| .95 | 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | |
| 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.75 | 5.69 | 5.66 | 5.63 | | | | | | |
| .975 | | 12.22 | 10.65 | 9.98 | 9.60 | 9.36 | 9.20 | 9.07 | 8.98 | 8.90 | 8.84 | |
| 8.75 | 8.66 | 8.56 | 8.46 | 8.36 | 8.31 | 8.26 | | | | | | |
| .99 | | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 | 14.55 | 14. |
| 3714. | 2014.02 | 13.84 | 13.65 | 13.56 | 13.46 | | | | | | | |
| .995 | | 31.33 | 26.28 | 24.26 | 23.15 | 22.46 | 21.98 | 21.62 | 21.35 | 21.14 | 20.97 | 20. |
| 7020. | 4420.17 | 19.89 | 19.61 | 19.47 | 19.32 | | | | | | | |
| .95 | 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | |
| 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.50 | 4.43 | 4.40 | 4.37 | | | | | | |
| .975 | | 10.01 | 8.43 | 7.76 | 7.39 | 7.15 | 6.98 | 6.85 | 6.76 | 6.68 | 6.62 | |
| 6.52 | 6.43 | 6.33 | 6.23 | 6.12 | 6.07 | 6.02 | | | | | | |
| .99 | | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.46 | 10.29 | 10.16 | 10.05 | |
| 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.38 | 9.20 | 9.11 | 9.02 | | | | | | |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .995 | | 22.78 | 18.31 | 16.53 | 15.56 | 14.94 | 14.51 | 14.20 | 13.96 | 13.77 | 13.62 | 13. |
| 3813.15 | 12.90 | 12.66 | 12.40 | 12.27 | 12.14 | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| .95 | 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | |
| 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.81 | 3.74 | 3.70 | 3.67 | | | | | | |
| .975 | | 8.81 | 7.26 | 6.60 | 6.23 | 5.99 | 5.82 | 5.70 | 5.60 | 5.52 | 5.46 | |
| 5.37 | 5.27 | 5.17 | 5.07 | 4.96 | 4.90 | 4.85 | | | | | | |
| .99 | | 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 | |
| 7.72 | 7.56 | 7.40 | 7.23 | 7.06 | 6.97 | 6.88 | | | | | | |
| .995 | | 18.63 | 14.54 | 12.92 | 12.03 | 11.46 | 11.07 | 10.79 | 10.57 | 10.39 | 10.25 | 10. |
| 039.81 | 9.59 | 9.36 | 9.12 | 9.00 | 8.88 | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| .95 | 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | |
| 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.38 | 3.30 | 3.27 | 3.23 | | | | | | |
| .975 | | 8.07 | 6.54 | 5.89 | 5.52 | 5.29 | 5.12 | 4.99 | 4.90 | 4.82 | 4.76 | |
| 4.67 | 4.57 | 4.47 | 4.36 | 4.25 | 4.20 | 4.14 | | | | | | |
| .99 | | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 | |
| 6.47 | 6.31 | 6.16 | 5.99 | 5.82 | 5.74 | 5.65 | | | | | | |
| .995 | | 16.24 | 12.40 | 10.88 | 10.05 | 9.52 | 9.16 | 8.89 | 8.68 | 8.51 | 8.38 | |
| 8.18 | 7.97 | 7.75 | 7.53 | 7.31 | 7.19 | 7.08 | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| .95 | 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | |
| 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.08 | 3.01 | 2.97 | 2.93 | | | | | | |
| .975 | | 7.57 | 6.06 | 5.42 | 5.05 | 4.82 | 4.65 | 4.53 | 4.43 | 4.36 | 4.30 | |
| 4.20 | 4.10 | 4.00 | 3.89 | 3.78 | 3.73 | 3.67 | | | | | | |
| .990 | | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.81 | |
| 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.20 | 5.03 | 4.95 | 4.86 | | | | | | |
| .995 | | 14.69 | 11.04 | 9.60 | 8.81 | 8.30 | 7.95 | 7.69 | 7.50 | 7.34 | 7.21 | |
| 7.01 | 6.81 | 6.61 | 6.40 | 6.18 | 6.06 | 5.95 | | | | | | |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$m$

| $p$ | $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1215 | 20 | 30 | 60 | 120 | ∞ | | | | | | |
| .95 | 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 |
| 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.86 | 2.79 | 2.75 | 2.71 | | | | | |
| .975 | | 7.21 | 5.71 | 5.08 | 4.72 | 4.48 | 4.32 | 4.20 | 4.10 | 4.03 | 3.96 |
| 3.87 | 3.77 | 3.67 | 3.56 | 3.45 | 3.39 | 3.33 | | | | | |
| .99 | | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 |
| 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.65 | 4.48 | 4.40 | 4.31 | | | | | |
| .995 | | 13.61 | 10.11 | 8.72 | 7.96 | 7.47 | 7.13 | 6.88 | 6.69 | 6.54 | 6.42 |
| 6.23 | 6.03 | 5.83 | 5.62 | 5.41 | 5.30 | 5.19 | | | | | |
| .95 | 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 |
| 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.70 | 2.62 | 2.58 | 2.54 | | | | | |
| .975 | | 6.94 | 5.46 | 4.83 | 4.47 | 4.24 | 4.07 | 3.95 | 3.85 | 3.78 | 3.72 |
| 3.62 | 3.52 | 3.42 | 3.31 | 3.20 | 3.14 | 3.08 | | | | | |
| .99 | | 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 |
| 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.25 | 4.08 | 4.00 | 3.91 | | | | | |
| .995 | | 12.83 | 9.43 | 8.08 | 7.34 | 6.87 | 6.54 | 6.30 | 6.12 | 5.97 | 5.85 |
| 5.66 | 5.47 | 5.27 | 5.07 | 4.86 | 4.75 | 4.64 | | | | | |
| .95 | 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 |
| 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.47 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | | | | | |
| .975 | | 6.55 | 5.10 | 4.47 | 4.12 | 3.89 | 3.73 | 3.61 | 3.51 | 3.44 | 3.37 |
| 3.28 | 3.18 | 3.07 | 2.96 | 2.85 | 2.79 | 2.72 | | | | | |
| .99 | | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 | 4.30 |
| 4.16 | 4.01 | 3.86 | 3.70 | 3.54 | 3.45 | 3.36 | | | | | |
| .995 | | 11.75 | 8.51 | 7.23 | 6.52 | 6.07 | 5.76 | 5.52 | 5.35 | 5.20 | 5.09 |
| 4.91 | 4.72 | 4.53 | 4.33 | 4.12 | 4.01 | 3.90 | | | | | |
| .95 | 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 |
| 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.25 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | | | | | |
| .975 | | 6.20 | 4.77 | 4.15 | 3.80 | 3.58 | 3.41 | 3.29 | 3.20 | 3.12 | 3.06 |
| 2.96 | 2.86 | 2.76 | 2.64 | 2.52 | 2.46 | 2.40 | | | | | |
| .99 | | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 |
| 3.67 | 3.52 | 3.37 | 3.21 | 3.05 | 2.96 | 2.87 | | | | | |
| .995 | | 10.80 | 7.70 | 6.48 | 5.80 | 5.37 | 5.07 | 4.85 | 4.67 | 4.54 | 4.42 |
| 4.25 | 4.07 | 3.88 | 3.69 | 3.48 | 3.37 | 3.26 | | | | | |
| .95 | 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 |
| 2.28 | 2.20 | 2.12 | 2.04 | 1.95 | 1.90 | 1.84 | | | | | |
| .975 | | 5.87 | 4.46 | 3.86 | 3.51 | 3.29 | 3.13 | 3.01 | 2.91 | 2.84 | 2.77 |
| 2.68 | 2.57 | 2.46 | 2.35 | 2.22 | 2.16 | 2.09 | | | | | |
| .99 | | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 |
| 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.78 | 2.61 | 2.52 | 2.42 | | | | | |
| .995 | | 9.94 | 6.99 | 5.82 | 5.17 | 4.76 | 4.47 | 4.26 | 4.09 | 3.96 | 3.85 |
| 3.68 | 3.50 | 3.32 | 3.12 | 2.92 | 2.81 | 2.69 | | | | | |
| .95 | 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 |
| 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.84 | 1.74 | 1.68 | 1.62 | | | | | |
| .975 | | 5.57 | 4.18 | 3.59 | 3.25 | 3.03 | 2.87 | 2.75 | 2.65 | 2.57 | 2.51 |
| 2.41 | 2.31 | 2.20 | 2.07 | 1.94 | 1.87 | 1.79 | | | | | |
| .99 | | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 |
| 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.39 | 2.21 | 2.11 | 2.01 | | | | | |
| .995 | | 9.18 | 6.35 | 5.24 | 4.62 | 4.23 | 3.95 | 3.74 | 3.58 | 3.45 | 3.34 |
| 3.18 | 3.01 | 2.82 | 2.63 | 2.42 | 2.30 | 2.18 | | | | | |
| .95 | 60 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 |
| 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.65 | 1.53 | 1.47 | 1.39 | | | | | |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .975 | | 5.29 | 3.93 | 3.34 | 3.01 | 2.79 | 2.63 | 2.51 | 2.41 | 2.33 | 2.27 |
| 2.17 | 2.06 | 1.94 | 1.82 | 1.67 | 1.58 | 1.48 | | | | | |
| .99 | | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 |
| 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.03 | 1.84 | 1.73 | 1.60 | | | | | |
| .995 | | 8.49 | 5.79 | 4.73 | 4.14 | 3.76 | 3.49 | 3.29 | 3.13 | 3.01 | 2.90 |
| 2.74 | 2.57 | 2.39 | 2.19 | 1.96 | 1.83 | 1.69 | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| .95 | 120 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.96 | 1.91 |
| 1.83 | 1.75 | 1.66 | 1.55 | 1.43 | 1.35 | 1.25 | | | | | |
| .975 | | 5.15 | 3.80 | 3.23 | 2.89 | 2.67 | 2.52 | 2.39 | 2.30 | 2.22 | 2.16 |
| 2.05 | 1.94 | 1.82 | 1.69 | 1.53 | 1.43 | 1.31 | | | | | |
| .99 | | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 3.48 | 3.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.47 |
| 2.34 | 2.19 | 2.03 | 1.86 | 1.66 | 1.53 | 1.38 | | | | | |
| .995 | | 8.18 | 5.54 | 4.50 | 3.92 | 3.55 | 3.28 | 3.09 | 2.93 | 2.81 | 2.71 |
| 2.54 | 2.37 | 2.19 | 1.98 | 1.75 | 1.61 | 1.43 | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| .95 | ∞ | | | | | | | | | | |
| 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.75 | 1.67 |
| 1.57 | 1.46 | 1.32 | 1.22 | 1.00 | | | | | | | |
| .975 | | 5.02 | 3.69 | 3.12 | 2.79 | 2.57 | 2.41 | 2.29 | 2.19 | 2.11 | 2.05 |
| 1.94 | 1.83 | 1.71 | 1.57 | 1.39 | 1.27 | 1.00 | | | | | |
| .99 | | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 |
| 2.18 | 2.04 | 1.88 | 1.70 | 1.47 | 1.32 | 1.00 | | | | | |
| .995 | | 7.88 | 5.30 | 4.28 | 3.72 | 3.35 | 3.09 | 2.90 | 2.74 | 2.62 | 2.52 |
| 2.36 | 2.19 | 2.00 | 1.79 | 1.53 | 1.36 | 1.00 | | | | | |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** להלן נתונים על שטחי דירות במ״ר עבור דירות חדשות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013:

| 2012 | 120 | 94 | 90 | 130 | 95 | 112 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2013 | 100 | 82 | 91 | 105 | 74 | 69 | |

א. בדקו ברמת מובהקות של 10% את ההשערה ששונויות שטחי הדירות החדשות בשנת 2012 ובשנת 2013 שוות. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע הבדיקה?

ב. האם וכיצד הייתה משתנה המסקנה מהסעיף הקודם אם מסתבר שחלה טעות ברישום ויש להפחית 10 מ״ר מכל הדירות שמופיעות במדגם?

**2)** בתחום הבינוי משתמשים בשני סוגי מתכות: מתכת A ומתכת B. מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין שני סוגי המתכות מבחינת החוזק שלהן. דגמו מספר יחידות מתכת מכל סוג והתקבלו התוצאות הבאות:

| סוג המתכת | A | B |
|---|---|---|
| $n$ | 8 | 10 |
| $\sum X_i$ | 16 | 30 |
| $\sum X_i^2$ | 60 | 198 |

יש להניח שרמת החוזק של המתכות מתפלגת נורמאלית.

א. האם קיים הבדל בין שונויות החוזק של מתכות?

ב. האם קיים הבדל בין תוחלות החוזק של מתכות? בכל סעיף רמת מובהקות של 10% .

**3)** מחקר סוציולוגי מעוניין לחקור את הרגלי הבילויים בקבוצות גיל שונות. ידוע כי בקרב האוכלוסייה הבוגרת (מעל 18) ההוצאה החודשית על בילויים מתפלגת נורמאלית עם תוחלת של 500₪ וסטיית תקן של 300₪.
במדגם שנעשה על סטודנטים בגילאי 21-26 התקבל אומד חוסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 10,000₪. כמות הסטודנטים שנדגמה 16.
במדגם שנעשה על 11 מבוגרים בשנות השלושים התקבל אומד חסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 490,000₪.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ההוצאה על בילויים בקרב סטודנטים בקבוצת גילאי 21-26 נמוכה מהשונות אצל כלל המבוגרים.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 1% האם הפיזור של ההוצאה החודשית לבילויים גדולה יותר בקבוצת גיל ה-30 מאשר בקבוצת גיל 21-26.

**4)** נתון $X_i \sim N(\mu_x, \sigma^2)$ , וכמו כן $Y_i \sim N(\mu_y, \sigma^2)$ .
מאוכלוסייה $X$ נדגמו 7 תצפיות ומאוכלוסיה $Y$ נדגמו 13 תצפיות.

א. כיצד $\frac{S_x^2}{S_Y^2}$ מתפלג?

ב. מה ההסתברות ש-$S_x^2$ גדולה ביותר מפי 3 מאשר $S_Y^2$ ?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** א. לא נדחה את $H_0$.
ב. מסקנה לא תשתנה.

**2)** א. לא נדחה את $H_0$.
ב. לא נדחה את $H_0$.

**3)** א. נדחה את $H_0$.
ב. נדחה את $H_0$.

**4)** א. $F(6,12)$
ב. 5%


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 22 - מבחני חי בריבוע

### תוכן העניינים

1. מבחן טיב התאמה ..... 188
2. מבחן טיב התאמה והקשר שלו לבדיקת השערות על פרופורציה אחת ..... 193
3. מבחן לאי תלות ..... 195

## מבחן טיב התאמה – רקע

מבחן זה בא לבדוק האם אוכלוסייה מסוימת מתפלגת לפי התפלגות נתונה.
המשתנה הנחקר מחולק למספר קטגוריות ויש לבדוק האם תוצאות המדגם תואמות להתפלגות הנתונה.

**מבנה המבחן:**

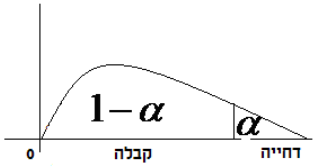
**השערות:**

המשתנה מתפלג לפי התפלגות מסוימת - $H_0$.

אחרת - $H_1$.

**כלל הכרעה:**

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש. $d.f = K-1$, כאשר $K$ - מספר הקטגוריות.




הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha,K-1}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $K-1$.

אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,K-1}$, דוחים את השערת האפס.

סטטיסטי המבחן: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$.

$O_i$ - השכיחות שנצפתה במדגם בקטגוריה $i$.

$p_i$ - הסתברות לקטגוריה i לפי השערת האפס.

$E_i = np_i$ - שכיחות צפויה במדגם לקטגוריה $i$ בהנחת השערת האפס.

**הערה:**

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל $i$. במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

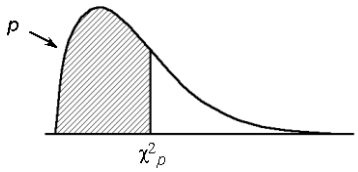

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

במדינה מסוימת שלוש מפלגות. בפרלמנט הנוכחי התפלגות מספר המושבים היא 30% למפלגה A, 60% למפלגה B ו-10% למפלגה C.
לקראת הבחירות המתוכננות בשבוע הבא נעשה סקר שכלל 300 אזרחים.
בסקר התקבל ש40% יצביעו למפלגה A, 50% למפלגה B ו-10% למפלגה C.
האם תוצאות הסקר תואמות להתפלגות המושבים בפרלמנט הנוכחי?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה




| | $p$ | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| df | .005 | .01 | .025 | .05 | .10 | .25 | .50 | .75 | .90 | .95 | .975 | .99 | .995 |
| 1 | $0.0^4393$ | $0.0^3157$ | $0.0^3982$ | $0.0^2393$ | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 0.211 | 0.575 | 1.39 | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3 | 0.0717 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 1.21 | 2.37 | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.06 | 1.92 | 3.36 | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.15 | 1.61 | 2.67 | 4.35 | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.45 | 5.35 | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7 | 0.989 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 4.25 | 6.35 | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 5.07 | 7.34 | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.90 | 8.34 | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.74 | 9.34 | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 7.58 | 10.3 | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 8.44 | 11.3 | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 9.30 | 12.3 | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 10.2 | 13.3 | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 11.0 | 14.3 | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.9 | 15.3 | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.1 | 12.8 | 16.3 | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.9 | 13.7 | 17.3 | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.1 | 11.7 | 14.6 | 18.3 | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.9 | 12.4 | 15.5 | 19.3 | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.3 | 11.6 | 13.2 | 16.3 | 20.3 | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 11.0 | 12.3 | 14.0 | 17.2 | 21.3 | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26 | 10.2 | 11.7 | 13.1 | 14.8 | 18.1 | 22.3 | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89 | 10.9 | 12.4 | 13.8 | 15.7 | 19.0 | 23.3 | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5 | 11.5 | 13.1 | 14.6 | 16.5 | 19.9 | 24.3 | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2 | 12.2 | 13.8 | 15.4 | 17.3 | 20.8 | 25.3 | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8 | 12.9 | 14.6 | 16.2 | 18.1 | 21.7 | 26.3 | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5 | 13.6 | 15.3 | 16.9 | 18.9 | 22.7 | 27.3 | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1 | 14.3 | 16.0 | 17.7 | 19.8 | 23.6 | 28.3 | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8 | 15.0 | 16.8 | 18.5 | 20.6 | 24.5 | 29.3 | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** במטרה לבדוק האם קובייה הוגנת, מטילים אותה 120 פעמים.
התקבל 17 פעמים 1, 23 פעמים 2, 20 פעמים 3, 25 פעמים 4, 18 פעמים 5 ו-17 פעמים 6. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

**2)** מפעל מייצר סוכריות בצבעים כחול, אדום, ירוק וכתום. מעוניינים לבדוק שפרופורציית הסוכריות הכחולות גדולה פי 2 מכל צבע אחר. לצורך כך נדגמו באקראי 200 סוכריות והתקבל: 70 כחולות, 50 אדומות, 40 ירוקות והיתר כתומות.
מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

**3)** משרד החינוך טוען שבקרב השכירים במשק היחס בין השכירים בעלי השכלה נמוכה, תיכונית ואקדמאית הוא 1:2:1 בהתאמה. במדגם של 200 שכירים התקבלו 56 אנשים בעלי השכלה נמוכה, 105 בעלי השכלה תיכונית והיתר בעלי השכלה גבוהה.

א. על סמך תוצאות המדגם, האם התפלגות ההשכלה היא כמו שמשרד החינוך מפרסם? בדוק ברמת מובהקות של 5%.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפרופורציית השכירים במשק בעלי השכלה אקדמאית.

**4)** 200 איש נתבקשו לבחור ספרה באקראי והנה התוצאות שהתקבלו:
18 איש בחרו בספרה 0, 24 איש בחרו בספרה 1, 17 איש בחרו בספרה 2, 19 איש בחרו בספרה 3, 20 איש בחרו בספרה 4, 18 איש בחרו בספרה 5, 22 איש בחרו בספרה 6 והיתר בחרו בספרות 7-9.

א. על סמך התוצאות הללו האם בחירת הספרות אקראית? בדקו ברמת מובהקות של 2.5%.

ב. תנו הערכה למובהקות התוצאה.

ג. אם נגדיל את גודל המדגם פי 2 ונשמור על אותם יחסים של כמות האנשים במדגם שבחרו בספרות, כיצד הדבר ישפיע על ערכו של הסטטיסטי $\chi^2$? מה תהיה המסקנה במקרה זה?

**5)** מעוניינים לבדוק האם קובייה היא הוגנת. הטילו את הקובייה פעמיים והתבוננו בסכום הוצאות. חזרו על התהליך 72 פעמים.
להלן התוצאות שהתקבלו במדגם:
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

| סכום התוצאות | מספר הטלות |
|---|---|
| 2-5 | 20 |
| 6-8 | 17 |
| 9-10 | 20 |
| 11-12 | 15 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** בפנס יש 4 סוללות. בבדיקה שנערכה ב-400 פנסים נמצאו סוללות פגומות לפי השכיחויות הבאות:

| מספר הסוללות הפגומות | 0 | 1 | 2 | 3 ומעלה |
|---|---|---|---|---|
| שכיחות | 276 | 104 | 12 | 8 |

מעוניינים לבדוק על סמך תוצאות מדגם אלה האם הסיכוי לסוללה פגומה הוא 20%. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהסיכוי לסוללה פגומה אינו 20%?

**7)** מטילים מטבע עד שלראשונה מתקבל "ראש". חוזרים על התהליך 120 פעמים. נסמן ב- $X$ את מספר ההטלות עד קבלת הראש. להלן התוצאות שהתקבלו:

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| מספר החזרות על התהליך | 54 | 20 | 16 | 22 | 6 | 2 |

א. בהנחה והמטבע הוגן, מהי ההתפלגות של $X$?

ב. בדקו האם המטבע הוגן, על סמך תוצאות המדגם ברמת מובהקות של 5%.

**8)** להלן השערות מחקר: $H_1 : else$ , $H_0 : X \sim N(40, 2^2)$.

תוצאות המדגם הן:

| $X$ | מתחת 36 | 36-40 | 40-44 | מעל 44 |
|---|---|---|---|---|
| מספר הדגימות | 3A | 50A | 45A | 2A |

מהו ערכו המקסימלי של A עבורו נקבל את $H_0$ ברמת מובהקות של 5%?

## תשובות סופיות

**1)** לא נדחה $H_0$.

**2)** לא נדחה $H_0$.

**3)** א. לא נדחה $H_0$. ב. $(0.14,0.25)$.

**4)** א. לא נדחה $H_0$. ב. בין 0.95 ל-0.975

ג. יגדל פי 2; המסקנה לא תשתנה.

**5)** נכריע שהקובייה אינה הוגנת.

**6)** 0.005.

**7)** א. $X \sim G(0.5)$ ב. נסיק שהמטבע לא הוגן.

**8)** 14.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## הקשר בין מבחן טיב התאמה לבדיקת השערות על הפרופורציה – רקע

אם אנו רוצים לבצע מבחן טיב התאמה על משתנה שיש לו שתי קטגוריות בלבד (משתנה דיכוטומי), הדבר זהה לתהליך של בדיקת השערות דו צדדית על פרופורציה בודדת.

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

הטילו מטבע 80 פעמים וקיבלו 48 פעמים את התוצאה "ראש".
בדקו האם המטבע הוא הוגן ברמת מובהקות של 5%.

א. באמצעות מבחן טיב התאמה.

ב. באמצעות מבחן Z לפרופורציה בודדת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** בסקר שנעשה על 320 נשאלים, 43.75% טענו שהחיה המועדפת עליהם היא כלב. עד היום היה נהוג לחשוב ש40% מהאנשים מעדיפים כלבים.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסקר יישנה את הסברה שהייתה נהוגה עד היום לגבי העדפת כלב.

א. באמצעות מבחן טיב התאמה.

ב. באמצעות מבחן על פרופורציה.

**2)** לסוכנות מכוניות שלושה סניפים ברחבי הארץ. המכוניות נמכרות בסניפים השונים. מתוך 100 מכוניות נמצא ש-65 נמכרו בסניף תל-אביב, 23 בסניף ירושלים והיתר בסניף חיפה.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שיעור המכוניות שנמכרות בסניף ת"א גדול פי 2 מכל סניף אחר.

ב. בדקו באמצעות מבחן טיב התאמה האם 60% מהמכוניות נהוגות להימכר בסניף תל אביב. האם יש דרך אחרת לבדוק את ההשערה?

**3)** בתחרות ריצה בית ספרית שלושה מסלולי ריצה.
ב-50 תחרויות בדקו באיזה מסלול היה הניצחון.
התוצאות שהתקבלו מסוכמות בטבלה הבאה:

| המסלול | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| מספר הניצחונות | 20 | 15 | 15 |

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש מסלול מועדף לניצחון.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסיכוי לנצח במסלול מספר 1 גבוה מ-$\frac{1}{3}$.

## תשובות סופיות

**1)** לא נדחה $H_0$.

**2)** א. נדחה $H_0$. ב. לא נדחה $H_0$.

**3)** א. לא נדחה $H_0$. ב. לא נדחה $H_0$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## מבחן חי בריבוע לאי תלות בין משתנים – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים.
שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

**מבנה המבחן:**

**השערות:**

אין תלות בין המשתנים $H_0$.

יש תלות בין המשתנים $H_1$.

**כלל הכרעה:**

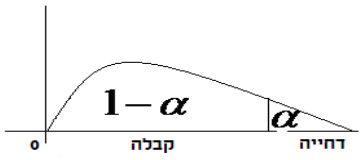
הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש $d.f=(r-1)(c-1)$.

כאשר: $r$ - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות.

$c$ - מספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $(r-1)(c-1)$. אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}$ אז דוחים את השערת האפס.

סטטיסטי המבחן: $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$.




כאשר:

$O_i$ - השכיחות נצפית במדגם בתא $i$.

$E_i$ - שכיחות צפויה במדגם בתא $i$ בהנחת השערת האפס.

$$E_i=\frac{f(x)\cdot f(y)}{n}$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**הערה:**

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל $i$. במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.
תנאי חלופי: אין $E$ קטן מ-1 וגם אין ביותר מ 20% מהתאים $E$ קטן מ-5.

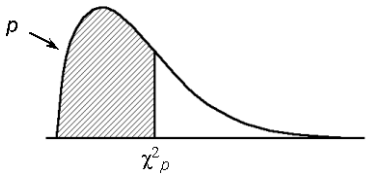
**דוגמה (הפתרון בהקלטה):**

האם יש תלות בין המגדר לבין דעה מסוימת?
יש לבדוק ברמת מובהקות של 5% על סמך תוצאות הסקר:

| המגדר / דעה | בעד | נגד | נמנע | סה"כ |
|---|---|---|---|---|
| גברים | 50 | 40 | 10 | |
| נשים | 20 | 60 | 20 | |
| סה"כ | | | | |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה $\chi^2 p$




| df | $p$ .005 | .01 | .025 | .05 | .10 | .25 | .50 | .75 | .90 | .95 | .975 | .99 | .995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0.0^4393$ | $0.0^3157$ | $0.0^3982$ | $0.0^2393$ | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 0.211 | 0.575 | 1.39 | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3 | 0.0717 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 1.21 | 2.37 | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.06 | 1.92 | 3.36 | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.15 | 1.61 | 2.67 | 4.35 | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.45 | 5.35 | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7 | 0.989 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 4.25 | 6.35 | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 5.07 | 7.34 | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.90 | 8.34 | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.74 | 9.34 | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 7.58 | 10.3 | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 8.44 | 11.3 | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 9.30 | 12.3 | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 10.2 | 13.3 | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 11.0 | 14.3 | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.9 | 15.3 | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.1 | 12.8 | 16.3 | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.9 | 13.7 | 17.3 | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.1 | 11.7 | 14.6 | 18.3 | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.9 | 12.4 | 15.5 | 19.3 | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.3 | 11.6 | 13.2 | 16.3 | 20.3 | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 11.0 | 12.3 | 14.0 | 17.2 | 21.3 | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26 | 10.2 | 11.7 | 13.1 | 14.8 | 18.1 | 22.3 | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89 | 10.9 | 12.4 | 13.8 | 15.7 | 19.0 | 23.3 | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5 | 11.5 | 13.1 | 14.6 | 16.5 | 19.9 | 24.3 | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2 | 12.2 | 13.8 | 15.4 | 17.3 | 20.8 | 25.3 | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8 | 12.9 | 14.6 | 16.2 | 18.1 | 21.7 | 26.3 | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5 | 13.6 | 15.3 | 16.9 | 18.9 | 22.7 | 27.3 | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1 | 14.3 | 16.0 | 17.7 | 19.8 | 23.6 | 28.3 | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8 | 15.0 | 16.8 | 18.5 | 20.6 | 24.5 | 29.3 | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** נבדקה התלות בין גודל הארגון לבין שביעות הרצון של העובדים.
להלן התוצאות:

| שביעות רצון גודל המפעל | נמוכה | בינונית | גבוהה | סה"כ |
|---|---|---|---|---|
| גדול | 182 | 203 | 215 | 600 |
| קטן | 154 | 110 | 136 | 400 |
| סה"כ | 336 | 313 | 351 | 1000 |

מה המסקנה ברמת מובהקות של 2.5%?

**2)** מפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מן המשמרות לפי מדגם שנעשה:

| | יום | ערב | לילה |
|---|---|---|---|
| פגומים | 50 | 60 | 70 |
| תקינים | 600 | 700 | 800 |

האם יש הבדל בין שיעורי הפגומים במשמרות השונות?
הסיקו עבור רמת מובהקות $\alpha = 0.05$.

**3)** נדגמו 50 מוצרים ממפעל מסוים מתוך 30 מוצרים שיוצרו ביום 17 נבחרו לייצוא מתוך המוצרים שיוצרו בלילה 10 נבחרו לייצוא.
האם יש קשר בין היות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר?
בדקו ברמת בטחון של 95%.

**4)** במטרה לבדוק האם השתנו דפוסי ההצבעה למפלגות השונות בין שבוע שעבר לשבוע נלקחו שני סקרים אחד מהשבוע שעבר והאחר מהשבוע.
להלן דפוסי ההצבעה שהתקבלו בסקרים אלה.

א. מהי רמת המובהקות המינמלית עבורה ניתן להחליט שהשתנו דפוסי ההצבעה משבוע שעבר לשבוע באופן מובהק?

ב. כיצד הייתה התשובה לסעיף א משתנה אם כל השכיחויות בטבלה של תוצאות המדגם היו מוכפלות פי 2?

ג. בנו רווח סמך לשיעור המצביעים למפלגה א השבוע ברמת סמך של 95%.

| | מפלגה א | מפלגה ב | מפלגות אחרות | סה"כ |
|---|---|---|---|---|
| שבוע שעבר | | | | |
| השבוע | 143 | | 253 | 550 |
| סה"כ | 243 | 314 | | 1050 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** בחנות בגדים A בדקו את התפלגות הצבעים של הבגדים הנמכרים ביום מסוים. כמו כן בדקו את התפלגות הצבעים בחנות שכנה B:

| מספר פריטים / צבע | שחור | לבן | אדום | כחול |
|---|---|---|---|---|
| חנות A | 15 | 20 | 15 | 50 |
| חנות B | 60 | 20 | 10 | 20 |

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם התפלגות הצבעים בחנות A היא ביחס של 3:1:1:1 לטובת הכחול.

ב. בדוק ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים הבדל בין החניות מבחינת התפלגות הצבעים של הפריטים הנמכרים.

**6)** סטודנט קיבל בבדיקת השערות ערך $\chi^2$ (chi-square) השוו לאפס.
הסטודנט הסיק כי לא קיימת תלות בין שני המשתנים שבדק, בכל רמת מובהקות. נכון / לא נכון? נמקו.

**7)** להלן טבלת O של שני משתנים שהתקבל במדגם כלשהו:

| $f(x)$ | $Y_4$ | $Y_3$ | $Y_2$ | $Y_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 200 | | | | | $X_1$ |
| 200 | | | | | $X_2$ |
| | 160 | 120 | 60 | 60 | $f(y)$ |

מה צריכות להיות השכיחויות בתוך הטבלה כדי שמובהקות התוצאה (PV) תהיה 100%?

## תשובות סופיות

**1)** נסיק שיש קשר בין גודל הארגון לשביעות הרצון של העובדים.

**2)** נסיק שאין הבדל מובהק בין שיעור הפגומים במשמרות השונות.

**3)** נסיק שאין קשר בין היות מוצא לייצוא למועד שבו הוא יוצר.

**4)** א. 10% ב. קטן ג. (0.223,0.297)

**5)** א. נסיק שהתפלגות הצבעים בחנות היא כמו שמצוין.
ב. נסיק שיש הבדל בין החנויות מבחינת התפלגות הצבעים.

**6)** נכון

**7)** להלן טבלה:

| $f(x)$ | $Y_4$ | $Y_3$ | $Y_2$ | $Y_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 80 | 60 | 30 | 30 | $X_1$ |
| 200 | -8 | 60 | 30 | 30 | $X_2$ |
| 400 | 160 | 120 | 60 | 60 | $f(y)$ |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 23 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות

### תוכן העניינים

1. שאלות פתוחות מסכמות ..... 200

# שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים

## שאלות

**1)** שני חוקרים נתבקשו לבדוק את ההשערות הבאות: $H_1:\mu>520$, $H_0:\mu=520$.
כל חוקר בדק מדגם של 225 נחקרים. ידוע ש- $\sigma=20$.
חוקר א' קבע את כלל ההכרעה לפי $\alpha=0.05$.
חוקר ב' מחליט לדחות $H_0$ אם $\bar{X}>522$.

א. למי מהחוקרים הסתברות לטעות מסוג ראשון קטנה יותר?

ב. מהי ההסתברות לטעות מסוג שני של חוקר ב' עבור $\mu_1=525$.

ג. הסבר ללא חישוב נוסף, האם ההסתברות לטעות מסוג שני עבור $\mu_1=525$, של חוקר א' שווה/קטנה/גדולה לזו של חוקר ב'.

ד. חוקר א' קיבל במדגם שלו $\bar{X}=523$. מהי מסקנתו?

**2)** ידוע כי תוחלת מספר הלייקים היומי של דנה היא 12 עם סטיית תקן 5.
דני טוען שהוא יותר פופולארי מדנה בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום. על-מנת לבדוק זאת ספר דני כמה לייקים הוא קיבל בכל יום במהלך 7 שבועות (כלומר, ב $49$ ימים) וקיבל סך-הכול 637 לייקים. נניח כי סטיית התקן של מספר הלייקים שדני מקבל ביום זהה לסטיית התקן של דנה.

א. מהי רמת המובהקות שכדאי לדני לדרוש, כדי שדנה תשתכנע בצדקת טענתו (שדני פופולרי יותר בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום).

ב. אם דני משער שתוחלת מספר ה"לייק"ים שהוא מקבל ביום היא 14 וקובע רמת מובהקות 2.5%, מהי עוצמת המבחן של דני?

**3)** ברצוננו להשוות בין רשתות A לבין B. לשם כך בחרנו 4 מוצרים, ובדקנו את מחיריהם בשתי הרשתות. להלן התוצאות:

| מוצר / רשת | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 4 | 5 |
| 3 | 5 | 3 |
| 4 | 7 | 4 |

הניחו כי המחירים מתפלגים נורמלית.
אם יש הנחות נוספות כדי לבצע את המבחן הפרמטרי רשמו אותן.

א. בדקו האם קיים הבדל בין הרשתות מבחינת תוחלת המחירים. רמת מובהקות של 5%.

ב. חזרו על הסעיף הקודם בהנחה ונבחרו בכל רשת מוצרים באקראי ולא בהכרח אותם מוצרים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** במדגם של 10 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$$n=10,\quad \sum X_i=1020,\quad \sum X_i^2=105120$$

במדגם של 14 אמריקאים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$$n=14,\quad \sum X_i=1386,\quad \sum X_i^2=138644$$

נתון שציוני הבחינה מתפלגים נורמלית בכל מדינה.

א. בדקו ברמת מובהקות של 10% האם קיים שוויון שונויות בין אוכלוסיית אמריקה לאוכלוסיית ישראל?

ב. בדקו האם קיים הבדל בממוצע הציונים בבחינת ה-IQ בין ישראל לארה"ב. ברמת מובהקות של 5%?

**5)** במטרה לבדוק האם סטודנטים הלומדים במכללות משקיעים יותר זמן ללימודים מאשר סטודנטים באוניברסיטאות נדגמו 12 סטודנטים ובדקו לכל סטודנט את הזמן שהוא משקיע ביום ללימודים. הזמנים נמדדו בדקות:

| סטודנטים באוניברסיטאות | 176 | 156 | 189 | 171 | 140 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| סטודנטים במכללות | 180 | 190 | 191 | 186 | 204 | 150 |

א. נסחו את ההשערות ובדוק אותן ברמת מובהקות של 5%. רשום את כלל ההכרעה ואת ההנחות הדרושות לביצוע המבחן הפרמטרי.

ב. חשבו את p-value.

ג. ישנה טענה שממוצע זמן ההשקעה בלימודים במכללות הוא 3.5 שעות ביום. בדוק את הטענה כאשר רמת המובהקות הינה 5%.

**6)** במדינת טרפפו המשכורות במשק מתפלגות נורמלית עם ממוצע של 1 אלף דולר וסטיית תקן של 0.2 אלף דולר. בוצע מדגם מקרי בו השתתפו 5 נשים ו 5 גברים במדינת שומקום שבה המשכורות מתפלגות נורמאלית גם כן. להלן משכורותיהם באלפי דולר:

| גברים | 2 | 0.9 | 0.7 | 1.2 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|
| נשים | 1.4 | 1.1 | 1.9 | 1.8 | 1.2 |

א. בדקו את הטענה שממוצע משכורותיהם של אזרחי שומקום גבוה מאשר ממוצע משכורותיהם של אזרחי טרפפו ברמת מובהקות של 5%. בהנחה שסטיית התקן זהה בשתי המדינות.

ב. חזרו על הסעיף הקודם ללא ההנחה הנ"ל.

ג. ישנה טענה שסטיית התקן במדינת שומקום גבוהה מזו של טרפפו. בדקו ברמת מובהקות של 5%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**7)** במטרה להשוות בין אחוזי הצפייה של גברים ונשים בתוכנית טלוויזיה מסוימת בוצע סקר ובו התקבלו תוצאות הבאות:

| | צופים | לא צופים |
|---|---|---|
| נשים | 320 | 42 |
| גברים | 72 | 120 |

א. האם יש הבדל בין אחוזי הצפייה של גברים ונשים ברמת מובהקות של 1%?

ב. עבור רמת מובהקות של 5% בדוק טענה שמבין הצופים בתוכנית הטלוויזיה אחוז הנשים גדול פי 2 מאחוז הגברים.

**8)** בשנת 2000 ל-60% היה מדיח כלים בבית. מחקר רוצה לבדוק האם כיום פרופורציית המשפחות עם מדיח כלים עלה. הוחלט לבצע מדגם אקראי של 150 משפחות.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה היא מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5% אם במדגם ל-102 משפחות היה מדיח כלים.

ג. מהי הטעות האפשרית במסקנה מהסעיף הקודם.
האם ניתן לדעת את הסתברותה?

**9)** נערך מחקר על הקשר בין עישון ויתר לחץ דם. נבדק מדגם מקרי של 200 מעשנים ונמצא כי 30 סבלו מיתר לחץ דם.
ידוע שבאוכלוסייה 18% סובלים מיתר לחץ דם.

א. בדקו ברמת מובהקות 0.1 את ההשערה כי אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שאחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.

ג. מהי עצמת המבחן, אם אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב אוכלוסיית המעשנים היא בפועל 25%.

**10)** להלן התפלגות מספר הנסיעות לחופשה השנתית במדגם של משפחות ישראליות. בדקו ברמת מובהקות של 5%:

| מספר הנסיעות | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| מספר המשפחות | 84 | 102 | 26 | 20 | 12 |

א. באיטליה משפחות נוסעות בממוצע פעמיים בשנה לחופשה. האם בישראל משפחות נוסעות פחות מאשר באיטליה?

ב. בהולנד 80% מהמשפחות נוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה, האם בישראל אחוז המשפחות שנוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה נמוך מאשר בהולנד?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**11)** נתון כי: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$.
מעוניינים לבדוק את ההשערות: $H_1: \mu > 40, \quad H_0: \mu = 40$.
דגמו 25 תצפיות מהאוכלוסייה והתקבל $\bar{X} = 45$.
א. חשבו את p-value (מובהקות התוצאה).
ב. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu < 40$
ג. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu \neq 40$

**12)** ציוני בחינת הבגרות במתמטיקה מתפלגים נורמלית עם שונות 150. במדגם של 16 נבחנים מתל אביב התקבלה שונות מדגמית-190. במדגם של 25 ירושלמים התקבלה שונות מדגמית 118.
א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם שונות הציונים במתמטיקה בקרב נבחני תל אביב גבוהה מהשונות בכלל הארץ.
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ציונים במתמטיקה בקרב תלמידי תל אביב גבוהה מאשר בקרב תלמידי ירושלים.

## תשובות סופיות

**1)** א. חוקר א' ב. 0.0122 ג. גדלה. ד. נדחה $H_0$.
**2)** א. לפחות 0.0808 ב. 0.7995.
**3)** א. לא נדחה $H_0$. ב. לא נדחה $H_0$.
**4)** א. לא נדחה $H_0$. ב. לא נדחה $H_0$.
**5)** א. לא נדחה $H_0$. ב. בין 5% ל-10%. ג. נדחה $H_0$.
**6)** א. נדחה $H_0$. ב. נדחה $H_0$. ג. נדחה $H_0$.
**7)** א. נדחה $H_0$. ב. נדחה $H_0$.
**8)** א. $H_0: p = 0.6$, $H_1: p > 0.6$ ב. נדחה $H_0$. ג. טעות מסוג ראשון בסיכוי של 0.05.
**9)** א. לא נדחה $H_0$. ב. 0.8643 ג. 0.8749.
**10)** א. נדחה $H_0$. ב. נדחה $H_0$.
**11)** א. 0.0062 ב. 0.9938 ג. 0.0124.
**12)** א. לא נדחה $H_0$. ב. לא נדחה $H_0$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 24 - מבחנים אפרמטריים למדגם יחיד

### תוכן העניינים

1. מבחן הבינום ..... 204
2. חישוב רמת מובהקות ועוצמת מבחן במבחן הבינום ..... 209

# מבחנים אפרמטריים למדגם יחיד

## מבחן הבינום – רקע

מבחן הבינום הינו מבחן סטטיסטי על הפרמטר $p$ . הפרמטר $p$ מייצג את פרופורציית ההצלחות באוכלוסייה כלומר, הסיכוי בניסוי בודד להצליח.
ההשערות האפשריות על הפרמטר הן :

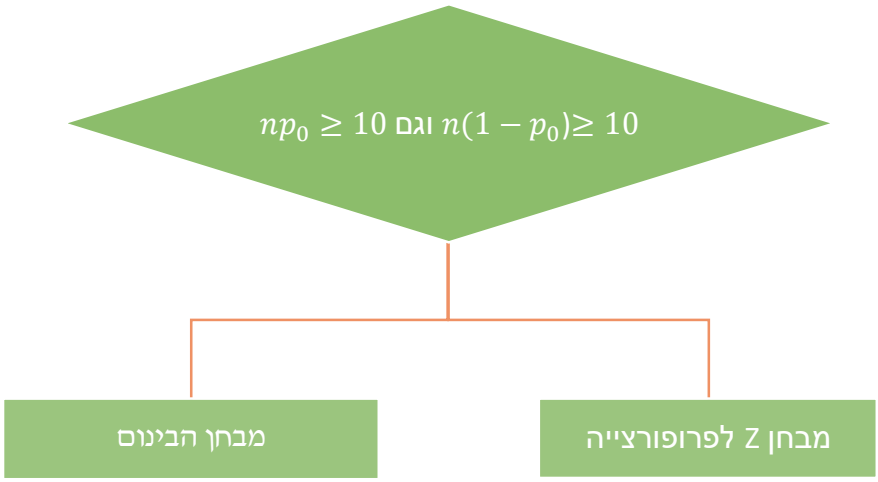
| **השערת האפס:** | $H_0 : p = p_0$ | $H_0 : p = p_0$ | $H_0 : p = p_0$ |
|---|---|---|---|
| **השערה אלטרנטיבית:** | $H_1 : p \neq p_0$ | $H_1 : p < p_0$ | $H_1 : p > p_0$ |

**דוגמה:**

במדינה אירופאית התנהל לפני 4 שנים משאל עם בדבר לגליזציה של הקנאביס.
במשאל העם 40% מהאזרחים היו בעד לגליזציה של הקנאביס ובשל כך חוק הלגליזציה לא עבר באותה המדינה. במדגם שנעשה כיום בו השתתפו 15 אזרחים מהמדינה 10 ענו שהם תומכים בלגליזציה של הקנאביס במדינה.
פרלמנטר מהמדינה חוקר האם כיום אחוז התומכים בלגליזציה של הקנאביס במדינה עלה יחסית לאחוז שהתקבל במשאל העם במדינה לפני 4 שנים.
רשמו את השערות המחקר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

במבחן הבינום מבצעים מדגם אקראי בגודל $n$ ומתבוננים במספר ההצלחות שהתקבלו במדגם, אותן נסמן ב- $Y$. בהנחה והתצפיות במדגם בלתי תלויות זו בזו אנו אומרים ש: $Y \sim B(n, p)$.
מבחן הבינום נכנס לקטגוריה של מבחנים אפרמטרים והוא בא כחלופה למבחן הפרמטרי על פרופורציה אחת כאשר התנאים לקירוב הנורמלי אינם מתקיימים.




**דוגמה:**

מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.

הטכניקה הנוחה ביותר למבחן הבינום היא לחשב את מובהקות התוצאה ולדחות את השערת האפס אם $\alpha \geq PV$. מובהקות התוצאה היא הסיכוי לתוצאות של המדגם וקיצוני יותר בהנחת השערת האפס.
כזכור, פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא:

$$P(Y=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\ldots,n$$

כאשר התוחלת של ההתפלגות הבינומית היא: $E(Y)=np$.
בעמוד הבא מצורפת טבלה של התפלגות בינומית מצטברת.
זו טבלה שיכולה לעזור בתהליך החישוב.

**דוגמה:**

חשבו את מובהקות התוצאה. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל




## טבלת התפלגות בינומית מצטברת

| | | $p$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $x$ | 0.10 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 |
| 5 | 0 | 0.5905 | 0.3277 | 0.2373 | 0.1681 | 0.0778 | 0.0312 | 0.0102 | 0.0024 | 0.0003 | 0.0000 |
| | 1 | 0.9185 | 0.7373 | 0.6328 | 0.5282 | 0.3370 | 0.1875 | 0.0870 | 0.0308 | 0.0067 | 0.0005 |
| | 2 | 0.9914 | 0.9421 | 0.8965 | 0.8369 | 0.6826 | 0.5000 | 0.3174 | 0.1631 | 0.0579 | 0.0086 |
| | 3 | 0.9995 | 0.9933 | 0.9844 | 0.9692 | 0.9130 | 0.8125 | 0.6630 | 0.4718 | 0.2627 | 0.0815 |
| | 4 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9976 | 0.9898 | 0.9688 | 0.9222 | 0.8319 | 0.6723 | 0.4095 |
| | 5 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 10 | 0 | 0.3487 | 0.1074 | 0.0563 | 0.0282 | 0.0060 | 0.0010 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.7361 | 0.3758 | 0.2440 | 0.1493 | 0.0464 | 0.0107 | 0.0017 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9298 | 0.6778 | 0.5256 | 0.3828 | 0.1673 | 0.0547 | 0.0123 | 0.0016 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9872 | 0.8791 | 0.7759 | 0.6496 | 0.3823 | 0.1719 | 0.0548 | 0.0106 | 0.0009 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9984 | 0.9672 | 0.9219 | 0.8497 | 0.6331 | 0.3770 | 0.1662 | 0.0474 | 0.0064 | 0.0002 |
| | 5 | 0.9999 | 0.9936 | 0.9803 | 0.9527 | 0.8338 | 0.6230 | 0.3669 | 0.1503 | 0.0328 | 0.0016 |
| | 6 | 1.0000 | 0.9991 | 0.9965 | 0.9894 | 0.9452 | 0.8281 | 0.6177 | 0.3504 | 0.1209 | 0.0128 |
| | 7 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9877 | 0.9453 | 0.8327 | 0.6172 | 0.3222 | 0.0702 |
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9983 | 0.9893 | 0.9536 | 0.8507 | 0.6242 | 0.2639 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9990 | 0.9940 | 0.9718 | 0.8926 | 0.6513 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 15 | 0 | 0.2059 | 0.0352 | 0.0134 | 0.0047 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.5490 | 0.1671 | 0.0802 | 0.0353 | 0.0052 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.8159 | 0.3980 | 0.2361 | 0.1268 | 0.0271 | 0.0037 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9444 | 0.6482 | 0.4613 | 0.2969 | 0.0905 | 0.0176 | 0.0019 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9873 | 0.8358 | 0.6865 | 0.5155 | 0.2173 | 0.0592 | 0.0094 | 0.0007 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 0.9978 | 0.9389 | 0.8516 | 0.7216 | 0.4032 | 0.1509 | 0.0338 | 0.0037 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 6 | 0.9997 | 0.9819 | 0.9434 | 0.8689 | 0.6098 | 0.3036 | 0.0951 | 0.0152 | 0.0008 | 0.0000 |
| | 7 | 1.0000 | 0.9958 | 0.9827 | 0.9500 | 0.7869 | 0.5000 | 0.2131 | 0.0500 | 0.0042 | 0.0000 |
| | 8 | 1.0000 | 0.9992 | 0.9958 | 0.9848 | 0.9050 | 0.6964 | 0.3902 | 0.1311 | 0.0181 | 0.0003 |
| | 9 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9963 | 0.9662 | 0.8491 | 0.5968 | 0.2784 | 0.0611 | 0.0023 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9907 | 0.9408 | 0.7827 | 0.4845 | 0.1642 | 0.0127 |
| | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9981 | 0.9824 | 0.9095 | 0.7031 | 0.3518 | 0.0556 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9963 | 0.9729 | 0.8732 | 0.6020 | 0.1841 |
| | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9948 | 0.9647 | 0.8329 | 0.4510 |
| | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9953 | 0.9648 | 0.7941 |
| | 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 20 | 0 | 0.1216 | 0.0115 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.3917 | 0.0692 | 0.0243 | 0.0076 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.6769 | 0.2061 | 0.0913 | 0.0355 | 0.0036 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.8670 | 0.4114 | 0.2252 | 0.1071 | 0.0160 | 0.0013 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9568 | 0.6296 | 0.4148 | 0.2375 | 0.0510 | 0.0059 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 0.9887 | 0.8042 | 0.6172 | 0.4164 | 0.1256 | 0.0207 | 0.0016 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 6 | 0.9976 | 0.9133 | 0.7858 | 0.6080 | 0.2500 | 0.0577 | 0.0065 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 7 | 0.9996 | 0.9679 | 0.8982 | 0.7723 | 0.4159 | 0.1316 | 0.0210 | 0.0013 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 8 | 0.9999 | 0.9900 | 0.9591 | 0.8867 | 0.5956 | 0.2517 | 0.0565 | 0.0051 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 9 | 1.0000 | 0.9974 | 0.9861 | 0.9520 | 0.7553 | 0.4119 | 0.1275 | 0.0171 | 0.0006 | 0.0000 |
| | 10 | 1.0000 | 0.9994 | 0.9961 | 0.9829 | 0.8725 | 0.5881 | 0.2447 | 0.0480 | 0.0026 | 0.0000 |
| | 11 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9949 | 0.9435 | 0.7483 | 0.4044 | 0.1133 | 0.0100 | 0.0001 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9987 | 0.9790 | 0.8684 | 0.5841 | 0.2277 | 0.0321 | 0.0004 |
| | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9935 | 0.9423 | 0.7500 | 0.3920 | 0.0867 | 0.0024 |
| | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9984 | 0.9793 | 0.8744 | 0.5836 | 0.1958 | 0.0113 |
| | 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9941 | 0.9490 | 0.7625 | 0.3704 | 0.0432 |
| | 16 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9987 | 0.9840 | 0.8929 | 0.5886 | 0.1330 |
| | 17 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9964 | 0.9645 | 0.7939 | 0.3231 |
| | 18 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9924 | 0.9308 | 0.6083 |
| | 19 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9992 | 0.9885 | 0.8784 |
| | 20 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** אחוז האנשים שאוכלים גלידות בחודשי החורף הינו 30%, קיים חשש בקרב מיצרי הגלידות כי השנה פחת אחוז אוכלי הגלידות בחודשי החורף. לשם כך נדגמו 12 אנשים אשר מתוכם 2 טענו שהם אוכלים גלידה בחודשי החורף.

א. רשמו את השערות המוצגות בשאלה זו וציינו מהו המבחן הסטטיסטי המתאים.

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

ג. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות גדולה יותר מ- 10%?

**2)** מטבע הוטל 15 פעמים במטרה לבדוק האם המטבע סימטרי.
בסך הכול התקבלו בהטלות 3 פעמים עץ.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם המטבע הוא סימטרי.

ב. עבור אילו רמות מובהקות נוכל להסיק שהמטבע אינו סימטרי?

**3)** אחוז המובטלים במשק לפני 5 שנים היה 10%. מעוניינים לבדוק האם כיום אחוז המובטלים קטן לעומת זה שהיה לפני 5 שנים. במדגם של 20 אנשים התקבל מובטל אחד ויחיד.

א. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוסק שכיום אחוז האבטלה נמוך מאשר לפני 5 שנים?

ב. מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

**4)** נניח ש 40% מהאוכלוסייה מכירה את המוצרים של חברת "רמקס". החברה מתכננת לצאת בקמפיין פרסום שמטרתו להעלות את המודעות לקיומם של המוצרים של החברה באוכלוסייה. בזמן הקמפיין נדגמו 20 אנשים אקראיים מתוכם 70% טענו שהם מכירים את המוצרים של חברת "רמקס".

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. כיצד מובהקות התוצאה הייתה משתנה אם במדגם 80% היו טוענים שהם מכירים את המוצרים של חברת "רמקס"?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** חברה לתוספי מזון דיווחה שנטילת מולטי ויטמין מקטינה את הסיכוי לחלות במחלות חורף במהלך החורף. לפי משרד הבריאות 70% מהאוכלוסייה חולים במחלות חורף במהלך החורף. במחקר השתתפו 20 אנשים אשר נטלו במהלך שנה מולטי ויטמין. במהלך החורף נמצא ש 12 מתוכם חלו במחלות חורף במהלך החורף. את המחקר יש לבצע ברמת מובהקות של 5%.
נסמן ב: PV את מובהקות התוצאה של המחקר.

א. האם המשפט הבא נכון?
"אם כלל האוכלוסייה הייתה נוטלת מולטי ויטמין אז בסיכוי של 5% ניתן להגיד ש-70% מהאוכלוסייה הייתה חולה במחלת חורף".

ב. האם המשפט הבא נכון?
"אם כלל האוכלוסייה הייתה נוטלת מולטי ויטמין אז בסיכוי של PV 70% מהאוכלוסייה הייתה חולה במחלת חורף".

ג. חשבו את PV.

## תשובות סופיות

**1)** א. מבחן הבינום.
$H_0: p = 0.3$
$H_1: p < 0.3$
ב. לא נדחה את $H_0$ .
ג. לא ניתן לדעת.

**2)** א. נדחה את $H_0$ .
ב. לפחות 0.0352

**3)** א. 0.3917
ב. לא נדחה את $H_0$ .

**4)** א. 0.0065
ב. תקטן.

**5)** א. לא נכון.
ב. לא נכון.
ג. 0.2277.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## חישוב הסתברויות לטעויות ועוצמת המבחן במבחן הבינום – רקע

מבחן הבינום הינו מבחן סטטיסטי על הפרמטר $p$ .
הפרמטר $p$ מייצג את פרופורציית ההצלחות באוכלוסייה כלומר, הסיכוי בניסוי בודד להצליח. ההשערות האפשריות על הפרמטר הן :

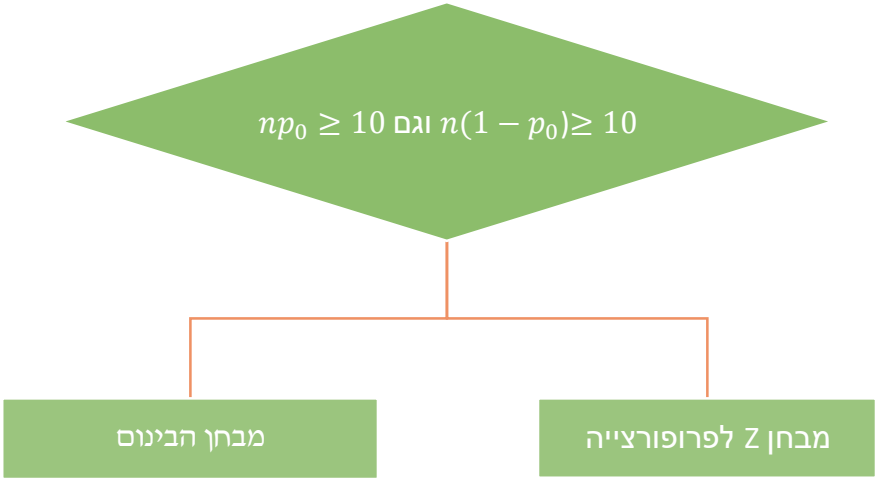
| השערת האפס :<br>השערה אלטרנטיבית : | $H_0 : p = p_0$<br>$H_1 : p \neq p_0$ | $H_0 : p = p_0$<br>$H_1 : p < p_0$ | $H_0 : p = p_0$<br>$H_1 : p > p_0$ |
|---|---|---|---|

**דוגמה :**

בחברת פז 40% מעובדי החברה מאחרים לעבודה. מנכ"ל החברה מעוניין לצמצם את אחוז העובדים המאחרים בחברה. לצורך כך, בוחר המנכ"ל מחלקה אקראית במטרה לבדוק עליה שיטת תמריצים שאמורה לצמצם את אחוז המאחרים.
במחלקה שנבחרה 10 עובדים והופעלה עליה שיטת התמריצים הנבדקת.
הוסכם שאם מספר המאחרים במחלקה יהיה לכל היותר עובד אחד לאחר הפעלת שיטת התמריצים, תופעל שיטת התמריצים על כלל החברה.

- מהן השערות המחקר?

במבחן הבינום מבצעים מדגם אקראי בגודל $n$ ומתבוננים במספר ההצלחות שהתקבלו במדגם, אותן נסמן ב- $Y$ . בהנחה והתצפיות במדגם בלתי תלויות זו בזו אנו אומרים ש : $Y \sim B(n, p)$ .
מבחן הבינום נכנס לקטגוריה של מבחנים אפרמטריים והוא בא כחלופה למבחן הפרמטרי על פרופורציה אחת כאשר התנאים לקירוב הנורמלי אינם מתקיימים.




**דוגמה :**


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.

כזכור, פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא:

$$P(Y=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\ldots,n$$ .

בעמוד הבא מצורפת טבלה של התפלגות בינומית מצטברת. זו טבלה שיכולה לעזור בתהליך החישוב.
נזכיר את המצבים האפשריים בבדיקת השערות:

| | הכרעה | | |
|---|---|---|---|
| | | H0 | H1 |
| **מציאות** | H0 | אין טעות | טעות מסוג 1 |
| | H1 | טעות מסוג 2 | אין טעות |

**הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):**

$\alpha$=P(לדחות את $H_0$ | $H_0$ נכונה)= $P_{H_0}$(לדחות $H_0$)

**הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:**

$\beta$ =P(לקבל את $H_0$ | $H_1$ נכונה)=$P_{H_1}$(לקבל $H_0$)

**רמת בטחון:**

**1-$\alpha$**=P(לקבל את $H_0$ | $H_0$ נכונה)= $P_{H_0}$(לקבל$H_0$)

**עוצמה:**

$\pi$**=1-**$\beta$ =P(לדחות את $H_0$ | $H_1$ נכונה) = $P_{H_1}$(לדחות $H_0$)

**דוגמה:**

- מהי רמת המובהקות של המחקר המוצע?
- אם בשיטת התמריצים, הסיכוי לאחר הוא 10%, מה ההסתברות שהמחקר יגלה זאת?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# טבלת הסתברות בינומית (מצטברת) עבור p -ים שונים

| | | $p$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $x$ | 0.10 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 |
| 5 | 0 | 0.5905 | 0.3277 | 0.2373 | 0.1681 | 0.0778 | 0.0312 | 0.0102 | 0.0024 | 0.0003 | 0.0000 |
| | 1 | 0.9185 | 0.7373 | 0.6328 | 0.5282 | 0.3370 | 0.1875 | 0.0870 | 0.0308 | 0.0067 | 0.0005 |
| | 2 | 0.9914 | 0.9421 | 0.8965 | 0.8369 | 0.6826 | 0.5000 | 0.3174 | 0.1631 | 0.0579 | 0.0086 |
| | 3 | 0.9995 | 0.9933 | 0.9844 | 0.9692 | 0.9130 | 0.8125 | 0.6630 | 0.4718 | 0.2627 | 0.0815 |
| | 4 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9976 | 0.9898 | 0.9688 | 0.9222 | 0.8319 | 0.6723 | 0.4095 |
| | 5 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 10 | 0 | 0.3487 | 0.1074 | 0.0563 | 0.0282 | 0.0060 | 0.0010 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.7361 | 0.3758 | 0.2440 | 0.1493 | 0.0464 | 0.0107 | 0.0017 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9298 | 0.6778 | 0.5256 | 0.3828 | 0.1673 | 0.0547 | 0.0123 | 0.0016 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9872 | 0.8791 | 0.7759 | 0.6496 | 0.3823 | 0.1719 | 0.0548 | 0.0106 | 0.0009 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9984 | 0.9672 | 0.9219 | 0.8497 | 0.6331 | 0.3770 | 0.1662 | 0.0474 | 0.0064 | 0.0002 |
| | 5 | 0.9999 | 0.9936 | 0.9803 | 0.9527 | 0.8338 | 0.6230 | 0.3669 | 0.1503 | 0.0328 | 0.0016 |
| | 6 | 1.0000 | 0.9991 | 0.9965 | 0.9894 | 0.9452 | 0.8281 | 0.6177 | 0.3504 | 0.1209 | 0.0128 |
| | 7 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9877 | 0.9453 | 0.8327 | 0.6172 | 0.3222 | 0.0702 |
| | 8 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9983 | 0.9893 | 0.9536 | 0.8507 | 0.6242 | 0.2639 |
| | 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9990 | 0.9940 | 0.9718 | 0.8926 | 0.6513 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 15 | 0 | 0.2059 | 0.0352 | 0.0134 | 0.0047 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.5490 | 0.1671 | 0.0802 | 0.0353 | 0.0052 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.8159 | 0.3980 | 0.2361 | 0.1268 | 0.0271 | 0.0037 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.9444 | 0.6482 | 0.4613 | 0.2969 | 0.0905 | 0.0176 | 0.0019 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9873 | 0.8358 | 0.6865 | 0.5155 | 0.2173 | 0.0592 | 0.0094 | 0.0007 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 0.9978 | 0.9389 | 0.8516 | 0.7216 | 0.4032 | 0.1509 | 0.0338 | 0.0037 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 6 | 0.9997 | 0.9819 | 0.9434 | 0.8689 | 0.6098 | 0.3036 | 0.0951 | 0.0152 | 0.0008 | 0.0000 |
| | 7 | 1.0000 | 0.9958 | 0.9827 | 0.9500 | 0.7869 | 0.5000 | 0.2131 | 0.0500 | 0.0042 | 0.0000 |
| | 8 | 1.0000 | 0.9992 | 0.9958 | 0.9848 | 0.9050 | 0.6964 | 0.3902 | 0.1311 | 0.0181 | 0.0003 |
| | 9 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9963 | 0.9662 | 0.8491 | 0.5968 | 0.2784 | 0.0611 | 0.0023 |
| | 10 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9907 | 0.9408 | 0.7827 | 0.4845 | 0.1642 | 0.0127 |
| | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9981 | 0.9824 | 0.9095 | 0.7031 | 0.3518 | 0.0556 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9963 | 0.9729 | 0.8732 | 0.6020 | 0.1841 |
| | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9948 | 0.9647 | 0.8329 | 0.4510 |
| | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9953 | 0.9648 | 0.7941 |
| | 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 20 | 0 | 0.1216 | 0.0115 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.3917 | 0.0692 | 0.0243 | 0.0076 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 2 | 0.6769 | 0.2061 | 0.0913 | 0.0355 | 0.0036 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 3 | 0.8670 | 0.4114 | 0.2252 | 0.1071 | 0.0160 | 0.0013 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9568 | 0.6296 | 0.4148 | 0.2375 | 0.0510 | 0.0059 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 0.9887 | 0.8042 | 0.6172 | 0.4164 | 0.1256 | 0.0207 | 0.0016 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 6 | 0.9976 | 0.9133 | 0.7858 | 0.6080 | 0.2500 | 0.0577 | 0.0065 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 7 | 0.9996 | 0.9679 | 0.8982 | 0.7723 | 0.4159 | 0.1316 | 0.0210 | 0.0013 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 8 | 0.9999 | 0.9900 | 0.9591 | 0.8867 | 0.5956 | 0.2517 | 0.0565 | 0.0051 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 9 | 1.0000 | 0.9974 | 0.9861 | 0.9520 | 0.7553 | 0.4119 | 0.1275 | 0.0171 | 0.0006 | 0.0000 |
| | 10 | 1.0000 | 0.9994 | 0.9961 | 0.9829 | 0.8725 | 0.5881 | 0.2447 | 0.0480 | 0.0026 | 0.0000 |
| | 11 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9949 | 0.9435 | 0.7483 | 0.4044 | 0.1133 | 0.0100 | 0.0001 |
| | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9987 | 0.9790 | 0.8684 | 0.5841 | 0.2277 | 0.0321 | 0.0004 |
| | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9935 | 0.9423 | 0.7500 | 0.3920 | 0.0867 | 0.0024 |
| | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9984 | 0.9793 | 0.8744 | 0.5836 | 0.1958 | 0.0113 |
| | 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9941 | 0.9490 | 0.7625 | 0.3704 | 0.0432 |
| | 16 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9987 | 0.9840 | 0.8929 | 0.5886 | 0.1330 |
| | 17 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9964 | 0.9645 | 0.7939 | 0.3231 |
| | 18 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9924 | 0.9308 | 0.6083 |
| | 19 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9992 | 0.9885 | 0.8784 |
| | 20 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** במטרה לבדוק האם במוסד לימוד מסוים פרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות נדגמו באקראי 10 תלמידים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 2 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות.

א. מהי רמת המובהקות במבחן המוצע?

ב. מהי העוצמה במבחן המוצע בהנחה ובמוסד 30% בנים?

ג. כיצד התשובות לסעיפים הקודמים ישתנו אם ישנו את המבחן כך שיוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 3 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות?
הסבירו ללא חישוב מחדש.

**2)** הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 70%. מעוניינים לבדוק האם שיטת משחק מסוימת מעלה את סיכויי הזכייה לצורך כך מחליטים לשחק את המשחק 20 פעמים תוך שימוש בשיטה הנבדקת. מחליטים שאם מספר הזכיות במדגם יהיה לפחות 18 נקבל את הטענה שאכן השיטה עובדת והיא מעלה את סיכויי ההצלחה להיות 90%.
מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון ומה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני במבחן שהוצע?

**3)** במטרה לבדוק האם מטבע הוא סימטרי הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל 7 כולל, יוחלט שהמטבע הוגן, אחרת נחליט שהמטבע לא הוגן.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה ההסתברות להחליט שהמטבע אינו סימטרי למרות שבפועל המטבע הינו סימטרי?

ג. מהי ההסתברות שאם במטבע הסיכוי לעץ הוא 20%, אכן נגלה זאת?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם הסיכוי לעץ במטבע אף נמוך מ-20%?

**4)** נתון ש- $X \sim B(15, p)$ ההשערות של המחקר הן: $H_1 : p > 0.3 \quad H_0 : p = 0.3$ .
כלל ההכרעה הוא: נדחה את השערת האפס אם $X \geq 8$ .

א. מהי רמת המובהקות במחקר זה?

ב. מה יקרה לרמת המובהקות אם כלל ההכרעה יהיה: נדחה את השערת האפס אם $X \geq 7$ ? הסבירו ללא חישוב.

ג. מה יקרה לרמת המובהקות אם השערות המחקר יהיו $H_1 : p \neq 0.3 \quad H_0 : p = 0.3$ אבל כלל ההכרעה לא ישתנה?
הסבירו ללא חישוב.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** א. 0.0547 ב. 0.3828 ג. תגדלנה.

**2)** $\beta = 0.3231$ $\alpha = 0.0355$.

**3)** א. $H_0 : p = 0.5$ $H_1 : p \neq 0.5$ ב. 0.0078 ג. 0.1678

ד. העוצמה תגדל.

**4)** א. 0.05 ב. תגדל. ג. לא תשתנה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 25 - מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים

### תוכן העניינים

1. מבחן הסימן ..... 214
2. מבחן הסימן - על ידי שימוש בטבלה בינומית ..... 217
3. מבחן הסימן - על ידי שימוש בקירוב הנורמלי ..... 221
4. מבחן ווילקוקוסון ..... 225
5. מבחן ווילקוקסון - על ידי שימוש בטבלה לערכים קריטיים ..... 228
6. מבחן ווילקוקסון - על ידי שימוש בקירוב הנורמלי ..... 232
7. תרגול בזיהוי מבחנים ..... 235

# מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים

## מבחן הסימן – רקע

מבחן הסימן הוא מבחן שמשתמשים בו כאשר לפנינו מדגם מזווג ולא ניתן להניח שהמשתנה הנחקר מתפלג נורמלית.

גם אם המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית ניתן לבצע את מבחן הסימן אבל מבחן T למדגמים מזווגים יהיה מבחן עם עוצמה גבוהה יותר ולכן יש לבצע אותו.

מבחן הסימן נחשב למבחן אפרמטרי – מבחנים אפרמטרים הינם כל המבחנים שאינם דורשים שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית.

מבחן הסימן נקרא כך כיוון שהוא דורש הגדרת סימן לכל תצפית:

$(+)$ – אם מצב $X$ גבוה ממצב $Y$.

$(-)$ – אם מצב $Y$ גבוה ממצב $X$.

$(0)$ – אין הבדל בין המצבים.

במבחן הסימן נתעלם מהפרשים שהם 0, ולכן נסמן את מספר ההפרשים האפקטיביים (השונים מאפס) ב- $n^*$.

תחת השערת האפס נאמר שהסיכוי לקבל הפרש חיובי $(p+)$ שווה לסיכוי לקבל הפרש שלילי $(p-)$.

**השערות המבחן:**

$$H_0: P_+ = 0.5 \quad H_1: P_+ \neq,<,> 0.5 \quad \text{או} \quad H_0: P_- = 0.5 \quad H_1: P_- \neq,<,> 0.5$$

נסמן ב $n(+)$ או ב $S_+$ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (+), ובאופן דומה:

נסמן ב $n(-)$ או ב $S_-$ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (–).

ניתן לומר שבהנחת השערת האפס: $n(+) \setminus n(-) \sim B(n^*, 0.5)$.

נחשב את PV על סמך תוצאות המדגם בעזרת ההתפלגות הבינומית כך שאם $PV \leq \alpha$ נדחה את השערת האפס.

במבחן הסימן אין התייחסות לגודל הפער בתצפיות אלא רק את כיוון ההבדל.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר מברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת:

בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

| שם התרופה | קופת חולים | פארם |
|---|---|---|
| אדוויל | 1.2 | 1.5 |
| אקמול | 2.6 | 2.6 |
| אופטלגין | 0.9 | 1.4 |
| פוסטינור | 3.5 | 3.2 |
| סטרפסיל | 1.1 | 1.4 |
| נורפן | 1.7 | 1.8 |
| לורסטין | 0.8 | 1.1 |
| קולדקס | 1.5 | 2 |
| אלרגיז | 2 | 2.8 |
| נוסידקס | 2 | 2.5 |
| קורמיר | 3 | 3.3 |

## שאלות

**1)** רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב.
עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב.
להלן התוצאות שהתקבלו:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| א | 62 | 74 | 68 | 94 | 82 | 67 | 65 | 84 | 78 | 80 |
| ב | 70 | 80 | 70 | 90 | 77 | 67 | 80 | 86 | 79 | 82 |

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

**2)** מעוניינים לבדוק האם ההוצאות על "ג'אנק פוד" בקרב הסטודנטים רבות יותר בזמן הלימודים לעומת ימי החופשה.
נדגמו 15 סטודנטים מקריים, אצל 13 ההוצאות בתקופת הלימודים היו גבוהות יותר מימיי החופשה ואצל 2 נמוכות יותר.
מה מסקנתך בר"מ של 0.05?

**3)** מעוניינים לבדוק האם סם מסוים משפיע על לחץ הדם. נלקחו 24 אנשים אשר נמדד להם לחץ הדם לאחר מכן ניתן להם הסם ושוב מדדו להם את לחץ הדם.
לחמישה אנשים לחץ הדם לא השתנה ל 15 אנשים לחץ הדם עלה וליתר לחץ הדם ירד אחרי לקיחת הסם. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** במדגם שנעשה על 15 משפחות השוו את רמת הביטחון העצמי של הבכור במשפחה לעומת הצעיר שבמשפחה. תוצאות המדגם הראו שאצל 7 משפחות רמת הביטחון העצמי של הבכור הייתה גבוהה יותר, אצל 3 משפחות רמת הביטחון העצמי של הצעיר הייתה גבוהה יותר ואצל 5 משפחות לא נמצא הבדל בין האחים מבחינת רמת הביטחון העצמי. טענת החוקר הייתה שבמשפחות לבכור ביטחון עצמי גבוה מזה של הצעיר במשפחה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה יוחלט לקבל את טענת החוקר?

ב. רמת הביטחון הוערכה על ידי פסיכולוג זוטר. פסיכולוג בכיר ביצע הערכה מחודשת וקבע שלמשפחה אחת במדגם הייתה הערכה שגויה: הפסיכולוג הזוטר קבע שלצעיר במשפחה יש ביטחון עצמי יותר גבוה למרות שלאח הבכור יש ביטחון עצמי יותר גבוה במשפחה הזו. מה יקרה לרמת המובהקות המינימלית שחושבה בשאלה הקודמת?

**5)** איזה מהטענות הבאות נכונות?

א. $n(+)+n(-)=n^*$

ב. $n(+)+n(-)=n$

ג. $n(+)=n(-)$

ד. $n(+)-n(-)=n^*$

## תשובות סופיות

**1)** א. לא נדחה את $H_o$. ב. לא תשתנה המסקנה.

**2)** נדחה את $H_o$.

**3)** נדחה את $H_o$.

**4)** א. 0.172 ב. תקטן.

**5)** א'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## מבחן הסימן (שימוש בטבלה של התפלגות בינומית) – רקע

מבחן הסימן הוא מבחן שמשתמשים בו כאשר לפנינו מדגם מזווג ולא ניתן להניח שהמשתנה הנחקר מתפלג נורמלית.

גם אם המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית ניתן לבצע את מבחן הסימן אבל מבחן T למדגמים מזווגים יהיה מבחן עם עוצמה גבוהה יותר ולכן יש לבצע אותו.

מבחן הסימן נחשב למבחן אפרמטרי - מבחנים אפרמטרים הינם כל המבחנים שאינם דורשים שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית.

מבחן הסימן נקרא כך כיוון שהוא דורש הגדרת סימן לכל תצפית:

$(+)$ – אם מצב $X$ גבוה ממצב $Y$.

$(-)$ – אם מצב $Y$ גבוה ממצב $X$.

$(0)$ – אין הבדל בין המצבים.

במבחן הסימן נתעלם מהפרשים שהם 0, ולכן נסמן את מספר ההפרשים האפקטיביים (השונים מאפס) ב- $n^*$.

תחת השערת האפס נאמר שהסיכוי לקבל הפרש חיובי $(+p)$ שווה לסיכוי לקבל הפרש שלילי $(-p)$.

**השערות המבחן:**

$$H_0: P_+ = 0.5 \quad H_1: P_+ \neq,<,> 0.5 \quad \text{או} \quad H_0: P_- = 0.5 \quad H_1: P_- \neq,<,> 0.5$$

נסמן ב $n(+)$ או ב $S_+$ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (+), ובאופן דומה:

נסמן ב $n(-)$ או ב $S_-$ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (–).

ניתן לומר שבהנחת השערת האפס: $n(+) \setminus n(-) \sim B(n^*, 0.5)$.

נחשב את PV על סמך תוצאות המדגם בעזרת ההתפלגות הבינומית כך שאם $PV \leq \alpha$ נדחה את השערת האפס.

במבחן הסימן אין התייחסות לגודל הפער בתצפיות אלא רק את כיוון ההבדל.

במקום להציב בפונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומי.

נשתמש בטבלה של פונקציית הסתברות המצטברת של ההתפלגות הבינומית עבור סיכוי של 0.5 להצלחה.

באמצעות הטבלה הבאה נוכל לחשב את PV.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## טבלת הסתברות בינומית (מצטברת) עבור p=0.5

| n \ X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 031 | 188 | 500 | 812 | 969 | † | | | | | | | | | | |
| 6 | 016 | 109 | 344 | 656 | 891 | 984 | † | | | | | | | | | |
| 7 | 008 | 062 | 227 | 500 | 773 | 938 | 992 | † | | | | | | | | |
| 8 | 004 | 035 | 145 | 363 | 637 | 855 | 965 | 996 | † | | | | | | | |
| 9 | 002 | 020 | 090 | 254 | 500 | 746 | 910 | 980 | 998 | † | | | | | | |
| 10 | 001 | 011 | 055 | 172 | 377 | 623 | 828 | 945 | 989 | 999 | † | | | | | |
| 11 | | 006 | 033 | 113 | 274 | 500 | 726 | 887 | 967 | 994 | † | † | | | | |
| 12 | | 003 | 019 | 073 | 194 | 387 | 613 | 806 | 927 | 981 | 997 | † | † | | | |
| 13 | | 002 | 011 | 046 | 133 | 291 | 500 | 709 | 867 | 954 | 989 | 998 | † | † | | |
| 14 | | 001 | 006 | 029 | 090 | 212 | 395 | 605 | 788 | 910 | 971 | 991 | 999 | † | † | |
| 15 | | | 004 | 018 | 059 | 151 | 304 | 500 | 696 | 849 | 941 | 982 | 996 | † | † | † |
| 16 | | | 002 | 011 | 038 | 105 | 227 | 402 | 598 | 773 | 895 | 962 | 989 | 998 | † | † |
| 17 | | | 001 | 006 | 025 | 072 | 166 | 315 | 500 | 685 | 834 | 928 | 975 | 994 | 999 | † |
| 18 | | | 001 | 004 | 015 | 048 | 119 | 240 | 407 | 593 | 760 | 881 | 952 | 985 | 996 | 999 |
| 19 | | | | 002 | 010 | 032 | 084 | 180 | 324 | 500 | 676 | 820 | 916 | 968 | 990 | 998 |
| 20 | | | | 001 | 006 | 021 | 058 | 132 | 252 | 412 | 588 | 748 | 868 | 942 | 979 | 994 |
| 21 | | | | 001 | 004 | 013 | 039 | 095 | 192 | 332 | 500 | 668 | 808 | 905 | 961 | 987 |
| 22 | | | | | 002 | 008 | 026 | 067 | 143 | 262 | 416 | 584 | 738 | 857 | 933 | 974 |
| 23 | | | | | 001 | 005 | 017 | 047 | 105 | 202 | 339 | 500 | 661 | 798 | 895 | 953 |
| 24 | | | | | 001 | 003 | 011 | 032 | 076 | 154 | 271 | 419 | 581 | 729 | 846 | 924 |
| 25 | | | | | | 002 | 007 | 022 | 054 | 115 | 212 | 345 | 500 | 655 | 788 | 885 |

**דוגמה: (פתרון בהקלטה)**

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר מברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

| שם התרופה | קופת חולים | פארם |
|---|---|---|
| אדוויל | 1.2 | 1.5 |
| אקמול | 2.6 | 2.6 |
| אופטלגין | 0.9 | 1.4 |
| פוסטינור | 3.5 | 3.2 |
| סטרפסיל | 1.1 | 1.4 |
| נורפן | 1.7 | 1.8 |
| לורסטין | 0.8 | 1.1 |
| קולדקס | 1.5 | 2 |
| אלרגיז | 2 | 2.8 |
| נוסידקס | 2 | 2.5 |
| קורמיר | 3 | 3.3 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן התוצאות שהתקבלו:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| א | 62 | 74 | 68 | 94 | 82 | 67 | 65 | 84 | 78 | 80 |
| ב | 70 | 80 | 70 | 90 | 77 | 67 | 80 | 86 | 79 | 82 |

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

**2)** מעוניינים לבדוק האם ההוצאות על "ג'אנק פוד" בקרב הסטודנטים רבות יותר בזמן הלימודים לעומת ימי החופשה. נדגמו 15 סטודנטים מקריים, אצל 13 ההוצאות בתקופת הלימודים היו גבוהות יותר מימיי החופשה ואצל 2 נמוכות יותר. מה מסקנתך בר"מ של 0.05?

**3)** מעוניינים לבדוק האם סם מסוים משפיע על לחץ הדם. נלקחו 24 אנשים אשר נמדד להם לחץ הדם לאחר מכן ניתן להם הסם ושוב מדדו להם את לחץ הדם. לחמישה אנשים לחץ הדם לא השתנה ל 15 אנשים לחץ הדם עלה וליתר לחץ הדם ירד אחרי לקיחת הסם. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

**4)** במדגם שנעשה על 15 משפחות השוו את רמת הביטחון העצמי של הבכור במשפחה לעומת הצעיר שבמשפחה. תוצאות המדגם הראו שאצל 7 משפחות רמת הביטחון העצמי של הבכור הייתה גבוהה יותר, אצל 3 משפחות רמת הביטחון העצמי של הצעיר הייתה גבוהה יותר ואצל 5 משפחות לא נמצא הבדל בין האחים מבחינת רמת הביטחון העצמי. טענת החוקר הייתה שבמשפחות לבכור ביטחון עצמי גבוה מזה של הצעיר במשפחה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה יוחלט לקבל את טענת החוקר?

ב. רמת הביטחון הוערכה על ידי פסיכולוג זוטר. פסיכולוג בכיר ביצע הערכה מחודשת וקבע שלמשפחה אחת במדגם הייתה הערכה שגויה: הפסיכולוג הזוטר קבע שלצעיר במשפחה יש ביטחון עצמי יותר גבוה למרות שלאח הבכור יש ביטחון עצמי יותר גבוה במשפחה הזו. מה יקרה לרמת המובהקות המינימלית שחושבה בשאלה הקודמת?

**5)** איזה מהטענות הבאות נכונות?

א. $n(+)+n(-)=n^*$

ב. $n(+)+n(-)=\mathrm{n}$

ג. $n(+)=n(-)$

ד. $n(+)-n(-)=n^*$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

1) א. לא נדחה $H_0$. ב. לא תשתנה המסקנה.
2) נדחה $H_0$.
3) נדחה $H_0$.
4) א. 0.172 ב. תקטן.
5) א'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## מבחן הסימן (שימוש בקירוב הנורמלי) – רקע

מבחן הסימן הוא מבחן שמשתמשים בו כאשר לפנינו מדגם מזווג ולא ניתן להניח שהמשתנה הנחקר מתפלג נורמלית.

גם אם המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית ניתן לבצע את מבחן הסימן אבל מבחן T למדגמים מזווגים יהיה מבחן עם עוצמה גבוהה יותר ולכן יש לבצע אותו.

מבחן הסימן נחשב למבחן אפרמטרי – מבחנים אפרמטרים הינם כל המבחנים שאינם דורשים שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית.

מבחן הסימן נקרא כך כיוון שהוא דורש הגדרת סימן לכל תצפית:

$(+)$ – אם מצב $X$ גבוה ממצב $Y$.

$(-)$ – אם מצב $Y$ גבוה ממצב $X$.

$(0)$ – אין הבדל בין המצבים.

במבחן הסימן נתעלם מהפרשים שהם 0, ולכן נסמן את מספר ההפרשים האפקטיביים (השונים מאפס) ב- $n^*$.

תחת השערת האפס נאמר שהסיכוי לקבל הפרש חיובי $(p+)$ שווה לסיכוי לקבל הפרש שלילי $(p-)$.

**השערות המבחן:**

$$H_0: P_+ = 0.5 \quad H_1: P_+ \neq,<,> 0.5 \quad \textbf{או} \quad H_0: P_- = 0.5 \quad H_1: P_- \neq,<,> 0.5$$

נסמן ב $n(+)$ או ב $S_+$ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (+), ובאופן דומה:

נסמן ב $n(-)$ או ב $S_-$ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (–).

ניתן לומר שבהנחת השערת האפס: $n(+) \setminus n(-) \sim B(n^*, 0.5)$.

נחשב את PV על סמך תוצאות המדגם בעזרת ההתפלגות הבינומית כך שאם $PV \leq \alpha$ נדחה את השערת האפס.

במבחן הסימן אין התייחסות לגודל הפער בתצפיות אלא רק את כיוון ההבדל.

אם התנאים לקירוב נורמלי מתקיימים ניתן להמיר את ההתפלגות הבינומית להתפלגות נורמלית:

אם: $n^* \cdot 0.5 \geq 5$

אז: $S_\pm \sim N\left(n^* \cdot \frac{1}{2}, n^* \cdot \frac{1}{4}\right)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר מברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

| שם התרופה | קופת חולים | פארם |
|---|---|---|
| אדוויל | 1.2 | 1.5 |
| אקמול | 2.6 | 2.6 |
| אופטלגין | 0.9 | 1.4 |
| פוסטינור | 3.5 | 3.2 |
| סטרפסיל | 1.1 | 1.4 |
| נורפן | 1.7 | 1.8 |
| לורסטין | 0.8 | 1.1 |
| קולדקס | 1.5 | 2 |
| אלרגיז | 2 | 2.8 |
| נוסידקס | 2 | 2.5 |
| קורמיר | 3 | 3.3 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן התוצאות שהתקבלו:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| א | 62 | 74 | 68 | 94 | 82 | 67 | 65 | 84 | 78 | 80 |
| ב | 70 | 80 | 70 | 90 | 77 | 67 | 80 | 86 | 79 | 82 |

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

**2)** מעוניינים לבדוק האם ההוצאות על "ג'אנק פוד" בקרב הסטודנטים רבות יותר בזמן הלימודים לעומת ימי החופשה. נדגמו 15 סטודנטים מקריים, אצל 13 ההוצאות בתקופת הלימודים היו גבוהות יותר מימיי החופשה ואצל 2 נמוכות יותר. מה מסקנתך בר"מ של 0.05?

**3)** מעוניינים לבדוק האם סם מסוים משפיע על לחץ הדם. נלקחו 24 אנשים אשר נמדד להם לחץ הדם לאחר מכן ניתן להם הסם ושוב מדדו להם את לחץ הדם. לחמישה אנשים לחץ הדם לא השתנה ל 15 אנשים לחץ הדם עלה וליתר לחץ הדם ירד אחרי לקיחת הסם. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

**4)** במדגם שנעשה על 15 משפחות השוו את רמת הביטחון העצמי של הבכור במשפחה לעומת הצעיר שבמשפחה. תוצאות המדגם הראו שאצל 7 משפחות רמת הביטחון העצמי של הבכור הייתה גבוהה יותר, אצל 3 משפחות רמת הביטחון העצמי של הצעיר הייתה גבוהה יותר ואצל 5 משפחות לא נמצא הבדל בין האחים מבחינת רמת הביטחון העצמי. טענת החוקר הייתה שבמשפחות לבכור ביטחון עצמי גבוה מזה של הצעיר במשפחה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה יוחלט לקבל את טענת החוקר?

ב. רמת הביטחון הוערכה על ידי פסיכולוג זוטר. פסיכולוג בכיר ביצע הערכה מחודשת וקבע שלמשפחה אחת במדגם הייתה הערכה שגויה: הפסיכולוג הזוטר קבע שלצעיר במשפחה יש ביטחון עצמי יותר גבוה למרות שלאח הבכור יש ביטחון עצמי יותר גבוה במשפחה הזו. מה יקרה לרמת המובהקות המינימלית שחושבה בשאלה הקודמת?

**5)** איזה מהטענות הבאות נכונות?

א. $n(+)+n(-)=n^*$.

ב. $n(+)+n(-)=n$.

ג. $n(+)=n(-)$.

ד. $n(+)-n(-)=n^*$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

1) א. לא נדחה $H_0$. ב. לא תשתנה המסקנה.
2) נדחה $H_0$.
3) נדחה $H_0$.
4) א. 0.172 ב. תקטן.
5) א'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## מבחן ווילקוקסון למדגמים מזווגים לפי שיטת המנייה – רקע

**מתי נשתמש במבחן זה?**

מבחן זה לא דורש הנחה של התפלגות נורמלית, אולם דורש ערכים מספריים המאפשרים חישוב הפרש בין ערכי $X$ לערכי $Y$. מבחן זה הוא הגרסה הלא פרמטרית למבחן T למדגמים מזווג. נשתמש במבחן זה שיש משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או שיש משתנה מסולם סדר והמדגם הוא מזווג.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

שני קונדיטורים מתחרים על מקום עבודה. נתנו לשניהם להכין 8 מאפים שונים כאשר כל אחד מהמאפים נאפה על ידי שניהם. בסופו של דבר בעל הקונדיטוריה נתן ציון לכל אחד מהאופים בעבור כל אחד מהמאפים. להלן הציונים שהתקבלו, ורוצים לבדוק האם אופה א טוב יותר מאופה ב.

| אופה א | אופה ב |
|---|---|
| 10 | 9 |
| 9 | 8 |
| 7 | 7 |
| 8 | 9 |
| 9 | 6 |
| 10 | 6 |
| 7 | 5 |
| 8 | 4 |

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

ב. מהן השערות המחקר?

**חישוב סטטיסטי המבחן:**

1. נחשב את ההפרשים $D_i$ לכל תצפית.
2. נוציא מהמדגם את כל התצפיות עם ההפרשים ששווים ל-0.
3. נדרג את ההפרשים הנותרים מהקטן אל הגדול בלי להתייחס לסימן ההפרש, כלומר מדרגים את הערכים המוחלטים של ההפרשים. הפרשים זהים מקבלים דרגה זהה שהיא הדרגה הממוצעת של המקומות שהם תופסים.
4. מסכמים את הדרגות של ההפרשים החיוביים $(W+)$ ואת הדרגות של ההפרשים השליליים $(W-)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

חשבו את $W$ על סמך תוצאות המדגם.

| אופה א | אופה ב |
|---|---|
| 10 | 9 |
| 9 | 8 |
| 7 | 7 |
| 8 | 9 |
| 9 | 6 |
| 10 | 6 |
| 7 | 5 |
| 8 | 4 |

**חישוב מובהקות התוצאה:**

כדי לחשב את מובהקות התוצאה נצטרך לדון בהתפלגות של $W$ בהנחת השערת האפס. אם השערת האפס נכונה, לכל $D_i$ יש את אותו סיכוי לקבל ערך חיובי או ערך שלילי כלומר 2 אפשרויות. ל $n^*$ דרגות יש $2n^*$ אפשרויות שוות, שוות הסתברות. לפי רעיון זה ניתן יהיה לחשב את מובהקות התוצאה.

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

## שאלות

**1)** נדגמו 8 לקוחות שקיבלו שירות ממוקד טלפוני. לקוחות אלה נתבקשו לתת הערכה על יעלות השירות ועל האדיבות שבשירות.
הציונים ניתנו בסקאלה מ-1 (הערכה הנמוכה) עד 10 (הערכה הגבוהה ביותר).
להלן התוצאות שהתקבלו:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | הערכה על יעילות השירות | 7 | 8 | 4 | 3 | 2 | 5 | 7 | 5 |
| $Y$ | הערכה על אדיבות השירות | 8 | 7 | 7 | 6 | 8 | 10 | 7 | 4 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הערכה על יעילות השירות להערכה על אדיבות השירות?

**2)** רוצים לבדוק האם תרופה חדשה להקלת כאבי ראש יעילה יותר מתרופה מוכרת. לצורך כך נלקח מדגם בן 9 אנשים, שנתבקשו להשתמש בתרופה החדשה ובתרופה המוכרת, ולהשוות את יעילותה של התרופה החדשה ליעילות התרופה המוכרת. האנשים במחקר היו צריכים לתת הערכה של יעילות בסקלה של מ-1 עד 100.
התוצאות שקיבל היו:

| הנבדק | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| תרופה חדשה | 95 | 90 | 100 | 80 | 75 | 81 | 69 | 100 | 86 |
| תרופה מוכרת | 80 | 76 | 65 | 49 | 75 | 70 | 50 | 60 | 60 |

האם התרופה החדשה משפרת את היעילות ביותר מ 10 נקודות?
בדקו ברמת מובהקות של 1%.

## תשובות סופיות

**1)** לא נדחה $H_0$.

**2)** לא נדחה $H_0$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## מבחן ווילקוקסון למדגמים מזווגים (על ידי שימוש בטבלה של ערכים קריטיים) – רקע

**מתי נשתמש במבחן זה?**

מבחן זה לא דורש הנחה של התפלגות נורמלית, אולם דורש ערכים מספריים המאפשרים חישוב הפרש בין ערכי $X$ לערכי $Y$. מבחן זה הוא הגרסה הלא פרמטרית למבחן T למדגמים מזווג. נשתמש במבחן זה שיש משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או שיש משתנה מסולם סדר על מדגם מזווג.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

שני קונדיטורים מתחרים על מקום עבודה. נתנו לשניהם להכין 8 מאפים שונים כאשר כל אחד מהמאפים נאפה על ידי שניהם. בסופו של דבר בעל הקונדיטוריה נתן ציון לכל אחד מהאופים בעבור כל אחד מהמאפים.
להלן הציונים שהתקבלו, ורוצים לבדוק שאופה א טוב יותר מאופה ב.

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

ב. מהן השערות המחקר?

| אופה א | אופה ב |
|---|---|
| 10 | 9 |
| 9 | 8 |
| 7 | 7 |
| 8 | 9 |
| 9 | 6 |
| 10 | 6 |
| 7 | 5 |
| 8 | 4 |

**חישוב סטטיסטי המבחן:**

**1)** נחשב את ההפרשים Di לכל תצפית.

**2)** נוציא מהמדגם את כל התצפיות עם ההפרשים ששווים ל-0.

**3)** נדרג את ההפרשים הנותרים מהקטן אל הגדול בלי להתייחס לסימן ההפרש, כלומר מדרגים את הערכים המוחלטים של ההפרשים. הפרשים זהים מקבלים דרגה זהה שהיא הדרגה הממוצעת של המקומות שהם תופסים.

**4)** מסכמים את הדרגות של ההפרשים החיוביים ($W+$) ואת הדרגות של ההפרשים השליליים ($W-$).

**5)** $W$ יהיה $W+$ או $W-$, זה שאמור להיות יותר קטן לפי השערת המחקר או הקטן מבניהם אם ההשערה היא דו צדדית.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

חשבו את $W$ על סמך תוצאות המדגם.

| אופה א | אופה ב |
|---|---|
| 10 | 9 |
| 9 | 8 |
| 7 | 7 |
| 8 | 9 |
| 9 | 6 |
| 10 | 6 |
| 7 | 5 |
| 8 | 4 |

**כלל הכרעה:**

במבחן ווילקוקסון זה כלל ההכרעה הוא: נדחה את $H_0$ אם $W \le W_c$.

כאשר, $W_c$ - הערך הקריטי ; $W$ - הסטטיסטי.

את הערכים הקריטיים נחלץ מתוך טבלה מתאימה:

| $n_1$ | חד-צדדי $\alpha = 0.01$<br>דו-צדדי $\alpha = 0.02$ | חד-צדדי $\alpha = 0.025$<br>דו-צדדי $\alpha = 0.05$ | חד-צדדי $\alpha = 0.05$<br>דו-צדדי $\alpha = 0.10$ |
|---|---|---|---|
| 5 | | | 1 |
| 6 | | 1 | 2 |
| 7 | 0 | 2 | 4 |
| 8 | 2 | 4 | 6 |
| 9 | 3 | 6 | 8 |
| 10 | 5 | 8 | 11 |
| 11 | 7 | 11 | 14 |
| 12 | 10 | 14 | 17 |
| 13 | 13 | 17 | 21 |
| 14 | 16 | 21 | 26 |
| 15 | 20 | 25 | 30 |
| 16 | 24 | 30 | 36 |
| 17 | 28 | 35 | 41 |
| 18 | 33 | 40 | 47 |
| 19 | 38 | 46 | 54 |
| 20 | 43 | 52 | 60 |
| 21 | 49 | 59 | 68 |
| 22 | 56 | 66 | 75 |
| 23 | 62 | 73 | 83 |
| 24 | 69 | 81 | 92 |
| 25 | 77 | 90 | 101 |
| 26 | 85 | 98 | 110 |
| 27 | 93 | 107 | 120 |
| 28 | 102 | 117 | 130 |
| 29 | 111 | 127 | 141 |
| 30 | 120 | 137 | 152 |

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

א. רשמו את כלל ההכרעה המתאים ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** נדגמו 8 לקוחות שקיבלו שירות ממוקד טלפוני. לקוחות אלה נתבקשו לתת הערכה על יעלות השירות ועל האדיבות שבשירות. הציונים ניתנו בסקאלה מ-1 (הערכה הנמוכה) עד 10 (הערכה הגבוהה ביותר). להלן התוצאות שהתקבלו:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | הערכה על יעילות השירות | 7 | 8 | 4 | 3 | 2 | 5 | 7 | 5 |
| Y | הערכה על אדיבות השירות | 8 | 7 | 7 | 6 | 8 | 10 | 7 | 4 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הערכה על יעילות השירות להערכה על אדיבות השירות?

**2)** סטודנטים נתבקשו לתת חוות דעתם על רמת הקושי של הקורס (סקאלה של 1-5 כאשר 5=קשה ביותר) ועל רמת הקושי של הבחינות באותה סקאלה. הסטודנטים טוענים שהבחינה הייתה ברמה גבוהה יותר מהרמה של הקורס. להלן תוצאות המדגם:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-קושי קורס | 4 | 3 | 2 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5 | 4 |
| 2-קושי בחינה | 4 | 4 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 3 | 2 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת הסטודנטים.

**3)** רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן התוצאות שהתקבלו:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| א | 62 | 74 | 68 | 94 | 82 | 67 | 65 | 84 | 78 | 80 |
| ב | 70 | 80 | 80 | 90 | 77 | 67 | 80 | 86 | 79 | 82 |

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן ווילקוקסון.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

ג. כיצד הייתה משתנה התשובה אם מסתבר שנפלה טעות ועבור הסטודנט הראשון ברשימה יש להחליף בנתונים את הציון של סטטיסטיקה ב עם סטטיסטיקה א?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** רוצים לבדוק האם תרופה חדשה להקלת כאבי ראש יעילה יותר מתרופה מוכרת. לצורך כך נלקח מדגם בן 9 אנשים, שנתבקשו להשתמש בתרופה החדשה ובתרופה המוכרת, ולהשוות את יעילותה של התרופה החדשה ליעילות התרופה המוכרת.
האנשים במחקר היו צריכים לתת הערכה של יעילות בסקלה של מ-1 עד 100.
התוצאות שקיבל היו:

| הנבדק | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| תרופה חדשה | 95 | 90 | 100 | 80 | 75 | 81 | 69 | 100 | 86 |
| תרופה מוכרת | 80 | 76 | 65 | 49 | 75 | 70 | 50 | 60 | 60 |

האם התרופה החדשה משפרת את היעילות ביותר מ 10 נקודות? בדקות ברמת מובהקות של 1%.

## תשובות סופיות

**1)** לא נדחה $H_0$.

**2)** לא נדחה $H_0$.

**3)** א. לא נדחה $H_0$. ב. לא משתנה. ג. לא משתנה.

**4)** לא נדחה $H_0$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## מבחן ווילקוקסון למדגמים מזווגים (על ידי שימוש בקירוב הנורמלי) – רקע

**מתי נשתמש במבחן זה?**

מבחן זה לא דורש הנחה של התפלגות נורמלית, אולם דורש ערכים מספריים המאפשרים חישוב הפרש בין ערכי $X$ לערכי $Y$. מבחן זה הוא הגרסה הלא פרמטרית למבחן T למדגמים מזווג. נשתמש במבחן זה שיש משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או שיש משתנה מסולם סדר במדגם מזווג.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

שני קונדיטורים מתחרים על מקום עבודה. נתנו לשניהם להכין 8 מאפים שונים כאשר כל אחד מהמאפים נאפה על ידי שניהם. בסופו של דבר בעל הקונדיטוריה נתן ציון לכל אחד מהאופים בעבור כל אחד מהמאפים.
להלן הציונים שהתקבלו, ורוצים לבדוק את הטענה שאופה א טוב יותר מאופה ב.

| אופה א | אופה ב |
|---|---|
| 10 | 9 |
| 9 | 8 |
| 7 | 7 |
| 8 | 9 |
| 9 | 6 |
| 10 | 6 |
| 7 | 5 |
| 8 | 4 |

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

ב. מהן השערות המחקר?

**חישוב סטטיסטי המבחן:**

1. נחשב את ההפרשים $D_i$ לכל תצפית.
2. נוציא מהמדגם את כל התצפיות עם ההפרשים ששווים ל-0.
3. נדרג את ההפרשים הנותרים מהקטן אל הגדול בלי להתייחס לסימן ההפרש, כלומר מדרגים את הערכים המוחלטים של ההפרשים. הפרשים זהים מקבלים דרגה זהה שהיא הדרגה הממוצעת של המקומות שהם תופסים.
4. מסכמים את הדרגות של ההפרשים החיוביים $(R+)$ ואת הדרגות של ההפרשים השליליים $(R-)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

חשבו את $W$ על סמך תוצאות המדגם.

| אופה א | אופה ב |
|---|---|
| 10 | 9 |
| 9 | 8 |
| 7 | 7 |
| 8 | 9 |
| 9 | 6 |
| 10 | 6 |
| 7 | 5 |
| 8 | 4 |

מתקיים תמיד ש : $R_+ + R_- = \frac{n^*(n^*+1)}{2}$ .

כמו כן, ניתן להגיד שהתוחלת והשונות של הסטטיסטיים הללו הם :

$$\mu_{R_\pm} = \frac{n^*(n^*+1)}{4} \qquad \sigma^2_{R_\pm} = \frac{n^*(n^*+1)(2n^*+1)}{24}$$

אם המדגם מספיק גדול, ניתן לבצע קירוב נורמלי לסטטיסטיים אלה באופן הבא :

$$R_\pm \sim N\left(\frac{n^*(n^*+1)}{4}, \frac{n^*(n^*+1)(2n^*+1)}{24}\right) \qquad Z_\pm = \frac{R_\pm - \mu_{R_\pm}}{\sqrt{\sigma^2_{R_\pm}}} \sim N(0,1)$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

א. מהי מובהקות התוצאה של מבחן זה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** נדגמו 8 לקוחות שקיבלו שירות ממוקד טלפוני. לקוחות אלה נתבקשו לתת הערכה על יעלות השירות ועל האדיבות שבשירות. הציונים ניתנו בסקאלה מ-1 (הערכה הנמוכה) עד 10 (הערכה הגבוהה ביותר). להלן התוצאות שהתקבלו:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | הערכה על יעילות השירות | 7 | 8 | 4 | 3 | 2 | 5 | 7 | 5 |
| Y | הערכה על אדיבות השירות | 8 | 7 | 7 | 6 | 8 | 10 | 7 | 4 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הערכה על יעילות השירות להערכה על אדיבות השירות?

**2)** סטודנטים נתבקשו לתת חוות דעתם על רמת הקושי של הקורס (סקאלה של 1-5 כאשר 5=קשה ביותר) ועל רמת הקושי של הבחינות באותה סקאלה. הסטודנטים טוענים שהבחינה הייתה ברמה גבוהה יותר מהרמה של הקורס. להלן תוצאות המדגם:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-קושי קורס | 4 | 3 | 2 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5 | 4 |
| 2-קושי בחינה | 4 | 4 | 5 | 3 | 5 | 5 | 5 | 3 | 2 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת הסטודנטים.

**3)** רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן התוצאות שהתקבלו:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| א | 62 | 74 | 68 | 94 | 82 | 67 | 65 | 84 | 78 | 80 |
| ב | 70 | 80 | 80 | 90 | 77 | 67 | 80 | 86 | 79 | 82 |

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן ווילקוקסון.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

ג. כיצד הייתה משתנה התשובה אם מסתבר שנפלה טעות ועבור הסטודנט הראשון ברשימה יש להחליף בנתונים את הציון של סטטיסטיקה ב עם סטטיסטיקה א?

## תשובות סופיות

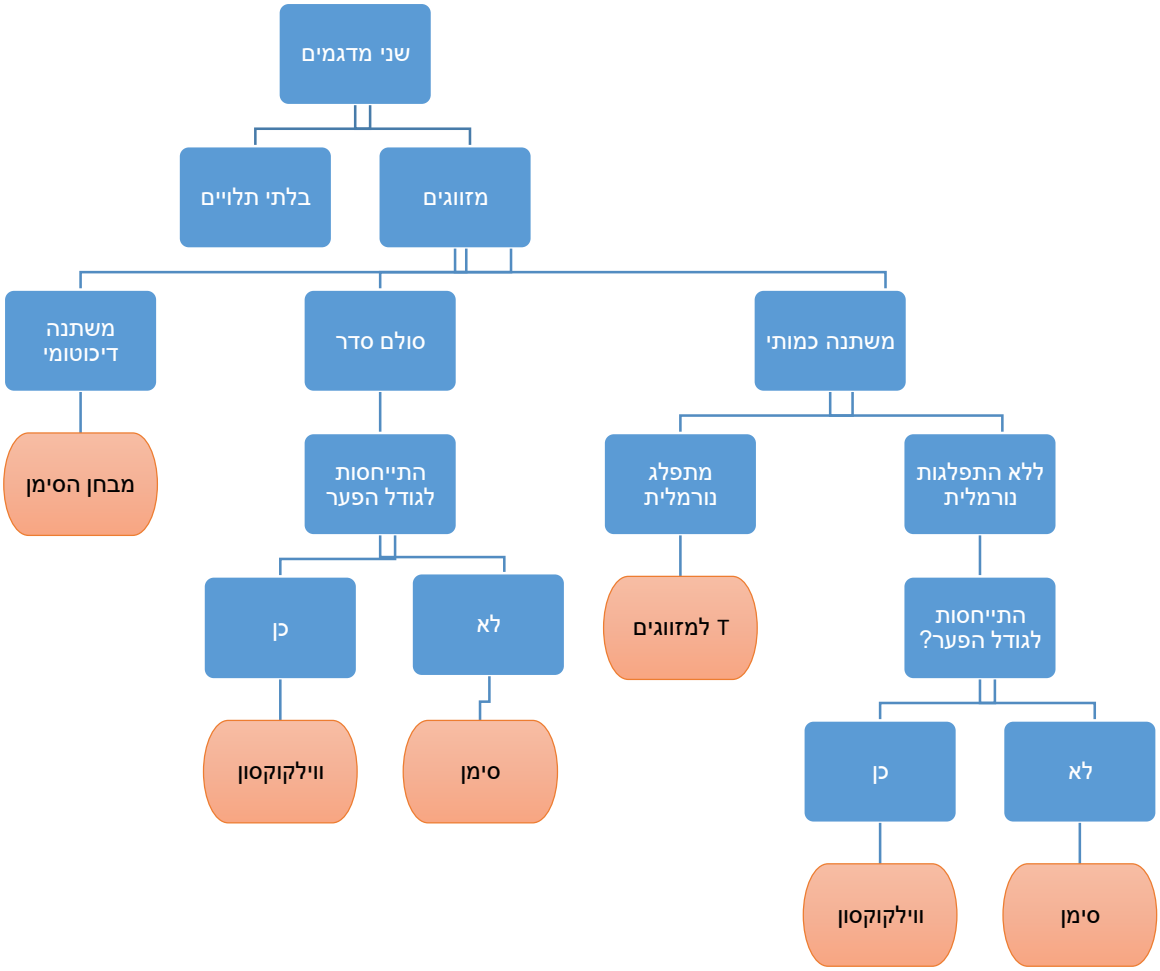
**1)** לא נדחה $H_0$.

**2)** לא נדחה $H_0$.

**3)** א. לא נדחה $H_0$. ב. לא משתנה. ג. לא משתנה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## זיהוי מבחנים סטטיסטיים – רקע





© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** במטרה להשוות את רמת האפייה של שני קונדיטורים בחרו 9 מאפים שונים (קרואסון, בראוני וכדומה) ונתנו לכל אחד משני הקונדיטורים לאפות את 9 המאפים השונים. 18 המאפים שנאפו ניתנו למומחה שנתן ציון למאפים השונים. הציון שניתן הוא בין 1 ל-5 לפי ניסיונו וטעמו האישי של המומחה.
מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

א. מבחן ווילקוקוסון.

ב. מבחן הסימן.

ג. מבחן T למזווגים.

ד. מבחן למדגמים בלתי תלויים.

**2)** שני מוסיקאים מפורסמים נתנו ציון בסולם של 1-10 לקולם של 8 מתמודדים בתוכנית ראליטי ידועה. ציון 10 ניתן לקול שמצא חן ביותר בעיני המוסיקאי. מפיק התוכנית רצה לבדוק האם יש הבדל בין המוסיקאים מבחינת הטעם.
בטבלה הבאה נתונים הציונים של כל אחד מהמוסיקאים את שמונת המתמודדים:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| מוסיקאי א' | 6 | 5 | 7 | 4 | 3 | 1 | 1 | 4 |
| מוסיקאי ב' | 5 | 7 | 5 | 2 | 3 | 3 | 2 | 7 |

מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

א. מבחן ווילקוקוסון.

ב. מבחן הסימן.

ג. מבחן T למזווגים.

ד. מבחן למדגמים בלתי תלויים.

**3)** במחקר בדקו לאנשים את רמת הסוכר בבוקר ואת רמת הסוכר בערב.
מתוך 26 אנשים ל-3 רמת הסוכר הייתה זהה.
ל-14 רמת הסוכר הייתה גבוהה יותר בשעות הערב.
וליתר רמת הסוכר הייתה גבוהה יותר בשעות הבוקר.
רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 6% האם קיים הבדל בין רמת הסוכר בבוקר לרמת הסוכר בערב אצל האנשים. מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

א. מבחן ווילקוקוסון.

ב. מבחן הסימן.

ג. מבחן T למזווגים.

ד. מבחן למדגמים בלתי תלויים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) חוקר מעוניין לבדוק את התפתחות היכולת לדחות סיפוקים מיידיים בקרב ילדים. לשם כך, הוא משתמש במבחן לבדיקה של דחיית סיפוקים, ומעביר אותו בו זמנית ל-2 קבוצות גיל. מבחן זה מודד כמה זמן (בשניות) מסוגל הילד לדחות קבלה של תגמול מיידי קטן על מנת לקבל תגמול גדול יותר בעתיד. התוצאות שמתקבלות הן הזמנים של הנחקרים בכל קבוצת גיל.
מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

א. מבחן ווילקוקוסון.
ב. מבחן הסימן.
ג. מבחן T למזווגים.
ד. מבחן למדגמים בלתי תלויים.

5) חברת משקאות יצאה בקמפיין שנוי במחלוקת. החברה מעוניינת לבדוק האם הקמפיין השפיע על הרגלי הצריכה. במחקר השתתפו נשאלים האם הם נהגו לרכוש את המשקה לפני הקמפיין והאם הם רכשו אותו לאחר הקמפיין.
מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

א. מבחן ווילקוקוסון.
ב. מבחן הסימן.
ג. מבחן T למזווגים.
ד. מבחן למדגמים בלתי תלויים.

6) מחקר התעניין בדפוסי שיחות הטלפון, שמנהל הפרט בעקבות פרידה מבן זוגו. במחקר השתתפו גברים ו-נשים (כולם נפרדו מבן זוגם). המשתתפים דיווחו על משך השיחות (בדקות; לפני ואחר הפרידה). שאלת המחקר בחנה האם פרידה מבן הזוג קשורה למשך השיחות (משך השיחות הוא משתנה שנהוג להתייחס אליו כמתפלג נורמלית). מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

א. מבחן ווילקוקוסון.
ב. מבחן הסימן.
ג. מבחן T למזווגים.
ד. מבחן למדגמים בלתי תלויים.

## תשובות סופיות

1) א'.
2) א'.
3) ב'.
4) ד'.
5) ב'.
6) ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אמידה ובדיקת השערות

## פרק 26 - מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים

### תוכן העניינים

1. מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים ..... 238

## מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים – רקע

מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים נכנס לקטגוריות המבחנים האפרמטריים.
מבחן זה רלבנטי כאשר רוצים להשוות בין שתי אוכלוסיות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים.
המשתנה התלוי הוא משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או משתנה מסולם סדר.
מבחן זה הוא החלופה האפרמטרית למבחן הפרמטרי להשוואת תוחלות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים.

**דוגמה:**

מחקר חינוכי מעוניין להשוות בין 2 שיטות חינוך. המחקר רוצה לבדוק האם קיים הבדל ברמת ביטחון העצמי של הילדים בשיטות החינוך השונות. נבחרו באקראי 5 ילדים שחונכו בשיטת A. כמו כן נדגמו באקראי 5 ילדים שחונכו בשיטת חינוך B.
פסיכולוגים בחנו את 10 הילדים ונתנו ציון לביטחון העצמי בסקאלה של 1-20.
מהן ההשערות ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

| שיטה A | שיטה B |
|---|---|
| 16 | 14 |
| 17 | 14 |
| 20 | 19 |
| 10 | 9 |
| 18 | 8 |

כדי לבצע את המבחן יש לחשב על סמך תוצאות המדגם את סטטיסטי המבחן שנסמן באות U.

**השלבים לחישוב סטטיסטי המבחן:**

1. נסדר את כלל התצפיות של המחקר בסדר עולה מהנמוך ביותר לגבוה ביותר אך יש לדעת כל תצפית מאיזה מדגם היא באה.
2. נדרג את כלל התצפיות של המחקר (אם יש תצפיות עם ערכים זהים הדירוג שלהן יהיה ממוצע המקומות שהם תופסים)
3. נחשב את $W_1$ - סכום הדירוגים של התצפיות השייכות למדגם 1,

   ו-$W_2$ - סכום הדירוגים של התצפיות השייכות למדגם 2.
4. נחשב את הגדלים הבאים:

$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} \qquad U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

5. הסטטיסטי $U$: במבחן דו צדדי $U = \min(U_1, U_2)$ במבחן חד צדדי $U$ יהיה ה-$U_i$, שאמור להיות יותר קטן לפי השערת המחקר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

כדי להגיע למסקנה יש שני סוגים של טבלאות סטטיסטיות.
טבלה מהסוג הראשון: עוזרת לנו לחשב את מובהקות התוצאה לאחר שחישבנו את ה- $U$ הסטטיסטי.
טבלה מהסוג השני שקובעת מראש את הערך הקריטי של U שנסמן ב $Uc$.

| טבלה מהסוג הראשון | טבלה מהסוג השני |
|---|---|
| $n_1$ ו- $n_2 \le 8$ | $n_1$ או $n_2 \ge 9$ |
| עוזרת לחשב על סמך תוצאות המדגם את $Pv$<br>אם $Pv \le \alpha$ דוחים את $H_0$. | נותנת את הערך הקריטי $Uc$<br>כל הכרעה: נדחה את $H_0$ אם $U \le Uc$ |

**דוגמה:**

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# טבלאות למציאת מובהקות התוצאה במבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים

$n_2 = 3$

| u | $n_1$ | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0.250 | 0.100 | 0.050 |
| 12 | 0.500 | 0.200 | 0.100 |
| 3 | 0.750 | 0.400 | 0.200 |
| 4 | | 0.600 | 0.350 |
| 5 | | | 0.500 |
| | | | 0.650 |

$n_2 = 4$

| u | $n_1$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | 0.200 | 0.067 | 0.028 | 0.014 |
| 1 | 0.400 | 0.133 | 0.057 | 0.029 |
| 2 | 0.600 | 0.267 | 0.114 | 0.057 |
| 3 | | 0.400 | 0.200 | 0.100 |
| 4 | | 0.600 | 0.314 | 0.171 |
| 5 | | | 0.429 | 0.243 |
| 6 | | | 0.571 | 0.343 |
| 7 | | | | 0.443 |
| 8 | | | | 0.557 |

$n_2 = 5$

| u | $n_1$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 0.167 | 0.047 | 0.018 | 0.008 | 0.004 |
| 1 | 0.333 | 0.095 | 0.036 | 0.016 | 0.008 |
| 2 | 0.500 | 0.190 | 0.071 | 0.032 | 0.016 |
| 3 | 0.667 | 0.286 | 0.125 | 0.056 | 0.028 |
| 4 | | 0.429 | 0.196 | 0.095 | 0.048 |
| 5 | | 0.571 | 0.286 | 0.143 | 0.075 |
| 6 | | | 0.393 | 0.206 | 0.111 |
| 7 | | | 0.500 | 0.278 | 0.155 |
| 8 | | | 0.607 | 0.365 | 0.210 |
| 9 | | | | 0.452 | 0.274 |
| 10 | | | | 0.548 | 0.345 |
| 11 | | | | | 0.421 |
| 12 | | | | | 0.500 |
| 13 | | | | | 0.579 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$n_2 = 6$

| u | $n_1$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | 0.143 | 0.036 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 1 | 0.286 | 0.071 | 0.024 | 0.010 | 0.004 | 0.002 |
| 2 | 0.428 | 0.143 | 0.048 | 0.019 | 0.009 | 0.004 |
| 3 | 0.571 | 0.214 | 0.083 | 0.033 | 0.015 | 0.008 |
| 4 | | 0.321 | 0.131 | 0.057 | 0.026 | 0.013 |
| 5 | | 0.429 | 0.190 | 0.086 | 0.041 | 0.021 |
| 6 | | 0.571 | 0.274 | 0.129 | 0.063 | 0.032 |
| 7 | | | 0.357 | 0.176 | 0.089 | 0.047 |
| 8 | | | 0.452 | 0.238 | 0.123 | 0.066 |
| 9 | | | 0.548 | 0.305 | 0.165 | 0.090 |
| 10 | | | | 0.381 | 0.214 | 0.120 |
| 11 | | | | 0.457 | 0.268 | 0.155 |
| 12 | | | | 0.545 | 0.331 | 0.197 |
| 13 | | | | | 0.396 | 0.242 |
| 14 | | | | | 0.465 | 0.294 |
| 15 | | | | | 0.535 | 0.350 |
| 16 | | | | | | 0.409 |
| 17 | | | | | | 0.469 |
| 18 | | | | | | 0.531 |

$n_2 = 7$

| u | $n_1$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0 | 0.125 | 0.028 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 1 | 0.250 | 0.056 | 0.017 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.001 |
| 2 | 0.375 | 0.111 | 0.033 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 3 | 0.500 | 0.167 | 0.058 | 0.021 | 0.009 | 0.004 | 0.002 |
| 4 | 0.625 | 0.250 | 0.092 | 0.036 | 0.015 | 0.007 | 0.003 |
| 5 | | 0.333 | 0.133 | 0.055 | 0.024 | 0.011 | 0.006 |
| 6 | | 0.444 | 0.192 | 0.082 | 0.037 | 0.017 | 0.009 |
| 7 | | 0.556 | 0.258 | 0.115 | 0.053 | 0.026 | 0.013 |
| 8 | | | 0.333 | 0.158 | 0.074 | 0.037 | 0.019 |
| 9 | | | 0.417 | 0.206 | 0.101 | 0.051 | 0.027 |
| 10 | | | 0.500 | 0.264 | 0.134 | 0.069 | 0.036 |
| 11 | | | 0.583 | 0.324 | 0.172 | 0.090 | 0.049 |
| 12 | | | | 0.394 | 0.216 | 0.117 | 0.064 |
| 13 | | | | 0.464 | 0.265 | 0.147 | 0.082 |
| 14 | | | | 0.538 | 0.319 | 0.183 | 0.104 |
| 15 | | | | | 0.378 | 0.223 | 0.130 |
| 16 | | | | | 0.438 | 0.267 | 0.159 |
| 17 | | | | | 0.500 | 0.314 | 0.191 |
| 18 | | | | | 0.562 | 0.365 | 0.228 |
| 19 | | | | | | 0.418 | 0.267 |
| 20 | | | | | | 0.473 | 0.310 |
| 21 | | | | | | 0.527 | 0.355 |
| 22 | | | | | | | 0.402 |
| 23 | | | | | | | 0.451 |
| 24 | | | | | | | 0.500 |
| 25 | | | | | | | 0.549 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$n_2 = 8$

| u | $n_1$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 0.111 | 0.022 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1 | 0.222 | 0.044 | 0.012 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.333 | 0.089 | 0.024 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 3 | 0.444 | 0.133 | 0.042 | 0.014 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 4 | 0.556 | 0.200 | 0.067 | 0.024 | 0.009 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 5 | | 0.267 | 0.097 | 0.036 | 0.015 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 6 | | 0.356 | 0.139 | 0.055 | 0.023 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 7 | | 0.444 | 0.188 | 0.077 | 0.033 | 0.015 | 0.007 | 0.003 |
| 8 | | 0.556 | 0.248 | 0.107 | 0.047 | 0.021 | 0.010 | 0.005 |
| 9 | | | 0.315 | 0.141 | 0.064 | 0.030 | 0.014 | 0.007 |
| 10 | | | 0.387 | 0.184 | 0.085 | 0.041 | 0.020 | 0.010 |
| 11 | | | 0.461 | 0.230 | 0.111 | 0.054 | 0.027 | 0.014 |
| 12 | | | 0.539 | 0.285 | 0.142 | 0.071 | 0.036 | 0.019 |
| 13 | | | | 0.341 | 0.177 | 0.091 | 0.047 | 0.025 |
| 14 | | | | 0.404 | 0.217 | 0.114 | 0.060 | 0.032 |
| 15 | | | | 0.467 | 0.262 | 0.141 | 0.076 | 0.041 |
| 16 | | | | 0.533 | 0.311 | 0.172 | 0.095 | 0.052 |
| 17 | | | | | 0.362 | 0.207 | 0.116 | 0.065 |
| 18 | | | | | 0.416 | 0.245 | 0.140 | 0.080 |
| 19 | | | | | 0.472 | 0.286 | 0.168 | 0.097 |
| 20 | | | | | 0.528 | 0.331 | 0.198 | 0.117 |
| 21 | | | | | | 0.377 | 0.232 | 0.139 |
| 22 | | | | | | 0.426 | 0.268 | 0.164 |
| 23 | | | | | | 0.475 | 0.306 | 0.101 |
| 24 | | | | | | 0.525 | 0.347 | 0.221 |
| 25 | | | | | | | 0.389 | 0.253 |
| 26 | | | | | | | 0.433 | 0.287 |
| 27 | | | | | | | 0.478 | 0.323 |
| 28 | | | | | | | 0.522 | 0.360 |
| 29 | | | | | | | | 0.399 |
| 30 | | | | | | | | 0.439 |
| 31 | | | | | | | | 0.480 |
| 32 | | | | | | | | 0.520 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## טבלה למציאת $U_c$

**ברמת מובהקות של 5% למבחן חד צדדי או ברמת מובהקות של 10% למבחן דו צדדי במבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים.**

| $n_1$ | $n_2$ | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | | | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 |
| 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 5 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 25 |
| 6 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| 7 | 15 | 17 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28 | 30 | 33 | 35 | 37 | 39 |
| 8 | 18 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 39 | 41 | 44 | 47 |
| 9 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 51 | 54 |
| 10 | 24 | 27 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 48 | 51 | 55 | 58 | 62 |
| 11 | 27 | 31 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 57 | 61 | 65 | 69 |
| 12 | 30 | 34 | 38 | 42 | 47 | 51 | 55 | 60 | 64 | 68 | 72 | 77 |
| 13 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 | 65 | 70 | 75 | 80 | 84 |
| 14 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 77 | 82 | 87 | 92 |
| 15 | 39 | 44 | 50 | 55 | 61 | 66 | 72 | 77 | 83 | 88 | 94 | 100 |
| 16 | 42 | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 77 | 83 | 89 | 95 | 101 | 107 |
| 17 | 45 | 51 | 57 | 64 | 70 | 77 | 83 | 89 | 96 | 102 | 109 | 115 |
| 18 | 48 | 55 | 61 | 68 | 75 | 82 | 88 | 95 | 102 | 109 | 116 | 123 |
| 19 | 51 | 58 | 65 | 72 | 80 | 87 | 94 | 101 | 109 | 116 | 123 | 130 |
| 20 | 54 | 62 | 69 | 77 | 84 | 92 | 100 | 107 | 115 | 123 | 130 | 138 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** מעוניינים להשוות בין שתי קבוצות כדורסל. נלקחו 5 משחקים מקבוצה א' ושישה משחקים מקבוצה ב'. נבדק בכל משחק ועבור כל קבוצה מספר הנקודות שצברה במשחק.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הקבוצות מבחינת הניקוד שצברה במשחק.

| קבוצה ב | קבוצה א |
|---|---|
| 82 | 68 |
| 74 | 82 |
| 82 | 78 |
| 64 | 94 |
| 67 | 87 |
| 65 | |

**2)** מעוניינים לבדוק האם קורס קיץ באנגלית משפר את יכולות האנגלית לתלמידי חטיבת ביניים. נלקחו 20 ילדים בגיל חטיבת הביניים ברמת אנגלית דומה. 12 מהם נשלחו לקורס קיץ והיתר לא. בסוף הקיץ כולם נבחנו במבחן באנגלית הציון הגבוה ביותר התקבל בקרב אחד שלא עשה את הקורס ושבעת הציונים הנמוכים ביותר היו גם בקרב תלמידים שלא עשו את הקורס.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**3)** במחקר לבדיקת יעילות ויטמין C נבחרו 15 מתנדבים מבין עובדי המפעל. תשעה מהם נבחרו מקרית וקיבלו טיפול שוטף בוויטמין C, ואילו שאר המתנדבים (קבוצת הביקורת) קבלו גלולת סוכר. במשך שלוש שנות המחקר היו מספר ימי ההיעדרות בגלל ההצטננות:
<u>קבוצת הטיפול</u>: 12,16, 8, 0, 4, 3, 9, 3, 1.
<u>קבוצת הביקורת</u>: 12, 23, 13, 19,7,28.
בדקו ברמת מובהקות של 5% שמספר ימי המחלה במשך שלוש שנים מצטמצם ביותר מ-4 ימים עם לקיחת ויטמין C.

## תשובות סופיות

**1)** לא נדחה את $H_0$.

**2)** נדחה את $H_0$.

**3)** לא נדחה את $H_0$.

\\


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל