

# אנליזה וקטורית



## תוכן העניינים

1	1. וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים
15	2. וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב
47	3. פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחים וגופים במרחב
68	4. גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים
75	5. נגזרת מכוונת וגרדיאנט
80	6. אינטגרלים כפולים
86	7. שימושי האינטגרל הכפול
89	8. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)
92	9. החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)
94	10. אינטגרלים משולשים ושימושיהם
97	11. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות
99	12. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)
100	13. אינטגרלים קוויים ושימושיהם
105	14. שדות משמרים - אי תלות במסלול
110	15. משפט גרין
113	16. אינטגרלים משטחיים ושימושיהם
116	17. משפט הדיברגנץ (גאוס)
118	18. משפט סטוקס (גרין במרחב)
120	19. אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

# אנליזה וקטורית

פרק 1 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

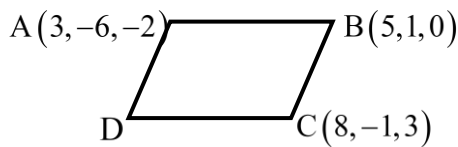
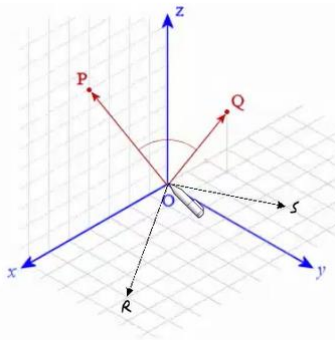
1. וקטורים..... 1
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת..... 6
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב..... 8
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי..... 9
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור..... 13

## וקטורים

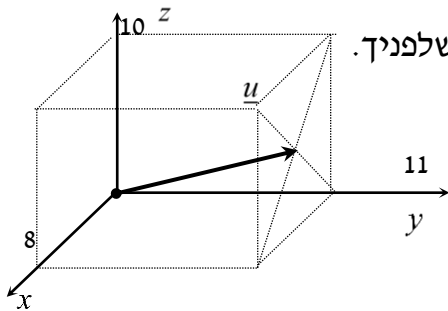
**הערת סימון:** אנו נסמן את הווקטור  $u$  כך  $\underline{u}$ . סימונים מקובלים נוספים הם:  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}$ .  
את גודל הווקטור  $\underline{u}$  נסמן כך  $|\underline{u}|$ . סימון מקובל נוסף הוא  $\|\underline{u}\|$ .  
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

### שאלות

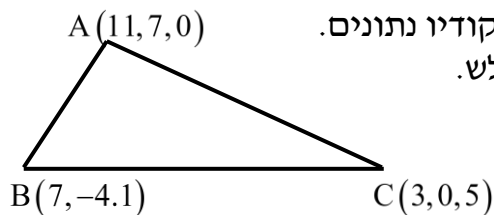
- (1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$  שבאיור. הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצא את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  על פי השרטוט.



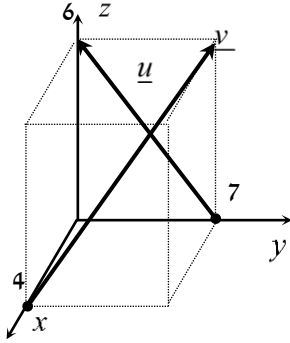
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצא את הווקטור  $\overline{EF}$  אם נתונות הנקודות  $E(2,0,-3)$  ו-  $F(7,-1,-3)$ .

ב. מצא את שיעורי הנקודה  $N$ , אם נתונה הנקודה  $M(0,-4,1)$

והווקטור  $\overline{MN} = (-1,-1,9)$ .



(6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$ .

(7) מצא את  $x$ ,  $y$  ו-  $z$ , אם נתון ש-  $\underline{u} = \underline{v}$  כאשר  $\underline{u} = (4, -1, 2)$ ,

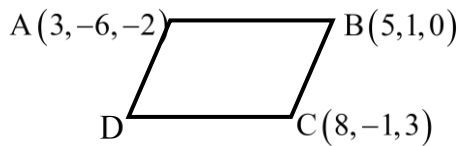
$\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$ .

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$ ,  $B(3,7,-4)$ ,  $C(6,9,0)$ ,  $D(7,4,10)$ ,  $E(9,11,4)$

א. הראה כי  $\overline{AB} = \overline{DE}$ .

ב. האם ניתן לומר גם כי  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

שיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצא את שיעורי הקדקוד  $D$ .

\* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים  $\underline{u} = (-3, 1, 4)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$  ו-  $\underline{w} = (2, 6, -5)$ .  
 \* בשאלות 13, 14, ו-16 הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשב:

א.  $2\underline{u}$       ב.  $-0.5\underline{v}$       ג.  $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשב:

א.  $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$       ב.  $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12)  $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13)  $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14)  $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15)  $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16)  $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$ ,  
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17)  $\overline{AC} + \overline{AB}$

(18)  $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$

(19)  $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$$A(-4, 2, 1), B(0, 2, -1), C(-3, -5, 0), D(-7, -5, 2)$$

הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

**(21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :  
 $A(1, 2, 0)$  ,  $B(-2, 5, 3)$  ,  $C(-1, 8, 4)$  ,  $D(4, 3, -1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**(22)** חשב את הזווית שבין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  :

א.  $\underline{u} = (-2, 2, 5)$  ,  $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב.  $\underline{u} = (6, -3, 1)$  ,  $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג.  $\underline{u} = (-2, 1, 3)$  ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$

**(23)** מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם :  
 $A(-3, 2, 1)$  ,  $B(0, 3, 2)$  ,  $C(5, -1, 0)$

**(24)** נתונים הווקטורים  $\underline{u} = (2, -1, 0)$  ,  $\underline{v} = (5, 0, 3)$

מצא וקטור  $\underline{w}$  שמכפלתו ב- $\underline{u}$  היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$  היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא  $\sqrt{70}$ .

**(25)** ענה על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכח כי  $|\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}| \Leftrightarrow \underline{u} \perp \underline{v}$ .

הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכח כי  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 \Leftrightarrow \underline{u} \perp \underline{v}$ .

הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

**(26)** הוכח :

א.  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ב.  $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ג.  $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$

ד.  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$

תן פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה.  $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

## תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left( \frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (25)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (26)$$

## מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

### שאלות

$$(1) \text{ נתון: } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

חשב:  $(u \times v) \times w$ .

$$(2) \text{ חשב את שטח המשולש שקדקודיו: } A = (8, 2, 3), B(4, -1, 2), C(-8, 0, 4)$$

(3) נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.

$$\text{ידוע כי: } |u| \neq 0, \quad u \cdot w = 0, \quad u \times v = 0,$$

$$\text{הוכח כי: } v \cdot w = 0.$$

(4) נתונים שני וקטורים  $u, v$  במרחב.

$$\text{ידוע כי: } |v| = 4, \quad |u| = 1, \quad u \perp v$$

$$\text{חשב: } |(u + v) \times (u - v)|$$

$$(5) \text{ נתון } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

חשב:

$$\text{ג. } (u \times v) \cdot w$$

$$\text{ב. } v \cdot (w \times u)$$

$$\text{א. } u \cdot (v \times w)$$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו  $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$ .

ב. חשב את נפח הפירמידה שקדקודה  $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$ .

(7) חשב את נפח הפירמידה שקדקודה  $A(2, 2, 5), B(1, -1, -4), C(3, 3, 10), D(8, 6, 3)$ .

8 נתון מקבילון הבנוי על וקטורים  $a, b, c$ .  
הוכח כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים  $a, a-b, a+b-4c$ ,  
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9 נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.  
הוכח כי  $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$ .

10 נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.

$$u \cdot (v \times w) = 4$$

חשב:

א.  $u \cdot (w \times v)$     ב.  $(v \times w) \cdot u$     ג.  $w \cdot (u \times v)$     ד.  $v \cdot (u \times w)$

11 נתונים שלושה וקטורים  $a, b, c$  במרחב.

מהי הנוסחה עבור  $a \times b \times c$ ?

### תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$S = 22.5 \quad (2)$$

שאלת הוכחה. (3)

$$8 \quad (4)$$

א. -3    ב. -3    ג. -3    (5)

א. 6    ב. 1    (6)

$$9 \frac{1}{3} \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

שאלת הוכחה. (9)

א. -4    ב. 4    ג. 4    ד. 4    (10)

אין לו נוסחה. (11)

## שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

### שאלות

(1) הוכח שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:  
 $A = (1, 2, 1)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C = (2, 1, 2)$ ,  $D(2, 2, 2)$

(2) מצא את מרחק הנקודה  $A(3, -2, 1)$  מהישר  $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$ .

(3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, z=3$$

- א. הוכח שהישרים מצטלבים.  
 ב. מצא את המרחק בין הישרים.

### תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2)  $\sqrt{26}$

(3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

## פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

### שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא את תחום ההגדרה של  $r(t)$  ואת הווקטור  $r(t_0)$ , כאשר  $r(t) = (\cos \pi t, -\ln t, \sqrt{t-2})$  ו- $t_0 = 4$ .
- ב. רשום את המשוואות הפרמטריות  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ ,  $z = \cos^2 t$  כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).
- ג. רשום את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה) הווקטורית  $r(t) = (t, t^2, t^3)$ .

(2) רשום את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א.  $9x^2 + 4y^2 = 36$  (במישור  $xy$ )      ב.  $\begin{cases} -x + y - z + 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$

ג.  $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$       ד.  $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = y + 2 \end{cases}$

ה.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x^2 \end{cases}$       ו.  $\begin{cases} z = x^2 + 4y^2 \\ z = 2x \end{cases}$

(3) נתונה פונקציה וקטורית  $r(t) = (21t^2, 21t^2 - 1, 10e^t)$ .

בסעיפים א-ג, חשב:

א.  $\lim_{t \rightarrow 1} r(t)$

ב.  $r'(t)$

ג.  $\int_0^1 r(t) dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t = 1$ ?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

(4) נתונה:  $r(t) = (\cos 4t, \sin 4t, t^4)$ .

א. חשב:  $\frac{dr}{dt}$ ,  $\left| \frac{dr}{dt} \right|$ ,  $\frac{d|r'|}{dt}$ .

ב. הוכח שהפונקציה מסעיף אי' חלקה.

(5) נתונה הפונקציה הווקטורית  $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$ .

א. גזור את הפונקציה.

ב. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה  $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$  ב- $t = 0$ .

ג. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה  $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$  בנקודה  $A(1,1,1)$ .

ד. מצא משיק יחידה לפונקציה הווקטורית  $r(t) = (\sin t, e^{2t}, t^2)$  ב- $t = 0$ .

(6) נתונה העקומה  $r(t) = (t^2, t, 5)$ .

א. מצא נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור

$$x - 6y + 4z - 3 = 0$$

ב. מצא משוואה של המישור, הניצב לעקומה  $r(t) = (3 \sin t, -2 \cos t, t)$ ,

$$t = 0.5\pi$$

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

(7) נתון  $r(t) = (3 \sin t, 3 \cos t, 4t)$ .

חשב את משיק היחידה (T), נורמל היחידה (N) והבינורמל (B) של  $r$ .

(8) תהי  $r(t)$  פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכח שאם  $|r(t)|$  קבוע לכל  $t$ , אז  $r(t) \cdot r'(t) = 0$ .

כלומר,  $r(t)$  ו- $r'(t)$  ניצבים זה לזה.

ב. הוכח שנורמל היחידה  $N(t)$ , ניצב למשיק היחידה  $T(t)$ .

(9) נתונה פונקציה וקטורית  $r(t) = (t, t^2, t^3)$ .

מצא את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק,

המתאימים ל- $t = 2$ .

10 נתון  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית, הוכח כי  $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ .

11 חלקיק נע לאורך עקום מרחבי  $x = t^3 + 2t$ ,  $y = -3e^{-2t}$ ,  $z = 2\sin 5t$

עבור החלקיק, בזמן  $t = 0$ , חשב את:

א. המהירות.

ב. גודל המהירות.

ג. התאוצה.

ד. גודל התאוצה.

ה. הזווית בין וקטורי המהירות והתאוצה.

12 נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן:  $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k}$

כאשר  $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$  המהירות ההתחלתית.

מצא את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13 חלקיק נע על העקומה  $x = 2\cos t$ ,  $y = 2\sin t$ .

א. חשב את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע  $t$ .

ב. שרטט את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע  $t = 0.25\pi$ , כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.

ג. הראה שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14 מהירות  $v(t)$  של חלקיק נתונה על ידי  $v(t) = (2, -1, -10t)$ .

ברגע  $t = 0$ , החלקיק נמצא בנקודה  $r(0) = (0, 0, 100)$ .

מצא את משוואת התנועה של החלקיק  $r = r(t)$ .

15 תאוצה  $a(t)$  של חלקיק, נתונה על ידי  $a(t) = (18\cos 3t, -18\sin 3t, 0)$ .

ברגע  $t = 0$  החלקיק נמצא בנקודה  $r(0) = (2, 0, 1)$  (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)

ובמהירות  $v(0) = (0, 2, 4)$ .

מצא את משוואת התנועה של החלקיק  $r = r(t)$ .

## תשובות סופיות

$$r(4) = (\cos 4\pi, -\ln 4, \sqrt{2}) \quad \text{א.א.} \quad 0 < t \leq 4 \quad \text{א.1} \quad (1)$$

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \quad \text{ג.} \quad r(t) = (\sin t, \cos t, \cos^2 t) \quad \text{ב.} \quad (2)$$

$$x = 2t - 0.5, y = 3t - 1.5, z = t \quad \text{ב.} \quad x = 2 \cos t, y = 3 \sin t$$

$$r(t) = (2t - 0.5, 3t - 1.5, t) \quad \text{ב.} \quad r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t) \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$x = t, y = \frac{t^2}{4} - 1, z = \frac{t^2}{4} + 1 \quad \text{ד.} \quad x = t, y = t^2, z = t^4 \quad \text{ג.}$$

$$r(t) = \left( t, \frac{t^2}{4} - 1, \frac{t^2}{4} + 1 \right) \quad \text{ד.} \quad r(t) = (t, t^2, t^4) \quad \text{ג.}$$

$$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 9 \cos^2 t \quad \text{ה.}$$

$$r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9 \cos^2 t) \quad \text{ה.}$$

$$(7, 6, 10e - 10) \quad \text{ג.} \quad (42t, 42t, 10e^t) \quad \text{ב.} \quad (21, 20, 10e) \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = (-4 \sin 4t, 4 \cos 4t, 4t^3), \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = 4\sqrt{1+t^6}, \quad \frac{d|r|}{dt} = \frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}} \quad \text{א.} \quad (4)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(4, 1, 0) \quad \text{ב.} \quad r'(t) = (4 \cos 4t, e^t + te^t, 4t^3) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \quad \text{ד.} \quad (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 2, 4) \quad \text{ג.}$$

$$2y + z = 0.5\pi \quad \text{ב.} \quad (9, 3, 5) \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$T(t) = \frac{1}{5}(3 \cos t, -3 \sin t, 4), \quad N(t) = (-\sin t, -\cos t, 0), \quad B(t) = \frac{1}{5}(4 \cos t, -4 \sin t, -3) \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

$$, 24x - 12y + 2z = 16 \quad \text{מישור הנישוק} \quad , x + 4y + 12z = 114 \quad \text{מישור הניצב} \quad (9)$$

$$\text{מישור היישור} \quad 76x + 143y - 54z = 292$$

שאלת הוכחה. (10)

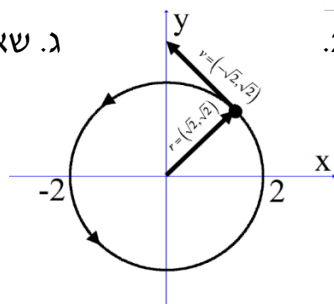
$$120.46^\circ \quad \text{ה.} \quad 12 \quad \text{ד.} \quad (0, -12, 0) \quad \text{ג.} \quad \sqrt{140} \quad \text{ב.} \quad (2, 6, 10) \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$v(t) = (v_{01}, v_{02}, v_{03} - gt), \quad |v(t)| = \sqrt{(v_{01})^2 + (v_{02})^2 + (v_{03} - gt)^2}, \quad a(t) = (0, 0, -g), \quad |a(t)| = g \quad (12)$$

$$v(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$|v(t)| = 2$$

ג. שאלת הוכחה.



$$r(t) = (2t, -t, -5t^2 + 100) \quad (14)$$

$$r(t) = (-2 \cos 3t + 4, 2 \sin 3t - 4t, 4t + 1) \quad (15)$$

## גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

### שאלות

(1) יהיו  $\mathbf{F}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{G}(x, y, z)$  שדות וקטורים כלליים. הוכח:

א.  $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב.  $\nabla(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla(\mathbf{F}) + \nabla(\mathbf{G})$

(2) יהי  $\mathbf{F}(x, y, z)$  שדה וקטורי, ותהי  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  פונקציה.

הוכח כי:  $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$ .

(3) יהי  $\mathbf{F}(x, y, z)$  שדה וקטורי ותהי  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  פונקציה.

א. הוכח כי  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$ . או בניסוח אחר  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ .

ב. הוכח כי  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$ . או בניסוח אחר  $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$ .

(4) יהיו  $\mathbf{F}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{G}(x, y, z)$  שדות וקטורים כללים

הוכח כי:  $\operatorname{curl}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{curl}(\mathbf{F}) + \operatorname{curl}(\mathbf{G})$ .

(5) יהי  $\mathbf{F}(x, y, z)$  שדה וקטורי.

הוכח כי  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ .

\* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

### הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ .

הגרדיאנט של  $\varphi$  המסומן  $\text{grad } \varphi$  מוגדר על ידי  $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ .

### הגדרה (דיברגנץ וקורל של שדה וקטורי)

יהי  $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$  מגדירים את הדיברגנץ של  $\mathbf{F}$  המסומן  $\text{div } \mathbf{F}$ , כך:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \text{div } \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f, g, h) \\ \text{div } \mathbf{F} &= f_x + g_y + h_z \end{aligned}$$

מגדירים את ה-curl של  $\mathbf{F}$  המסומן  $\text{curl } \mathbf{F}$ , על ידי:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f, g, h) \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{aligned}$$

הערה: יש הרושמים  $\text{rot } \mathbf{F}$  במקום  $\text{curl } \mathbf{F}$ .

# אנליזה וקטורית

## פרק 2 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

### תוכן העניינים

15	1. הצגה פרמטרית של ישר
18	2. מצב הדדי בין ישרים
20	3. הצגה פרמטרית של מישור
21	4. משוואת מישור
22	5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור
23	6. מישורים המקבילים לצירים
24	7. מצב הדדי בין ישר ומישור
25	8. מצב הדדי בין מישורים
26	9. ישר חיתוך בין מישורים
(ללא ספר)	10. חישובי זוויות שונות
27	11. זווית בין שני ישרים
28	12. זווית בין ישר ומישור
29	13. זווית בין שני מישורים
(ללא ספר)	14. חישובי מרחקים
30	15. מרחק בין שתי נקודות במרחב
31	16. מרחק בין נקודה לישר
32	17. מרחק בין נקודה למישור
33	18. מרחק בין ישרים מקבילים
34	19. מרחק בין ישר למישור
35	20. מרחק בין מישורים מקבילים
36	21. מרחק בין ישרים מצטלבים
(ללא ספר)	22. סיכום מרחקים
37	23. היטלים ונקודות סימטריה
38	24. שאלות מסכמות

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

## הצגה פרמטרית של ישר

### שאלות

- (1) האם הנקודה  $A(7,0,3)$  נמצאת על הישר  $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$  ?
- (2) האם הנקודה  $B(4,-2,-10)$  נמצאת על הישר  $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$  ?
- (3) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור, שעובר בנקודות  $A(-5,-2)$  ו-  $B(1,6)$ .
- (4) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב, שעובר בנקודות  $C(3,0,-2)$  ו-  $D(4,1,1)$ .
- (5) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה  $G(2,-7,1)$ , ומקביל לישר  $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$ .
- (6) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה  $(1,2,3)$ , ומאונך לישר  $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$ .
- (7) ענה על הסעיפים הבאים :
  - א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר :  $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$ . כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות  $x, y$  ו-  $z$ .
  - ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות :  $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$ . כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.
- (8) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה-  $y$  במרחב.
- (9) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה  $M(3,-1,4)$  ומקביל לציר ה-  $z$ .
- (10) מצא את נקודת החיתוך של הישר  $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$  עם המישור  $[xy]$ .

11) ישר עובר בנקודה  $(1, -1, 4)$  וכיוונו  $(4, 10, 2)$ .

מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א.  $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(4, 10, 2)$

ב.  $\underline{x} = (3, 4, 5) + t(4, 10, 2)$

ג.  $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 5, 1)$

ד.  $\underline{x} = (5, 9, 6) + t(8, 20, 4)$

ה. כל התשובות נכונות.

12) ישר עובר דרך הנקודות  $A(1, -1, 2)$  ו-  $B(4, 0, 1)$ .

תאר את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

13) הצג כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

$$א. \ell: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2t \\ z = 2 + 10t \end{cases}$$

$$ב. \ell: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 10t \end{cases}$$

$$ג. \ell: \frac{x-1}{2} = y+1 = z-4$$

$$ד. \ell: x-1 = y+10, z = 4$$

$$ה. \ell: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

## תשובות סופיות

(1) כן.

(2) לא.

(3)  $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$

(4)  $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$

(5)  $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$

(6)  $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$

(7) א.  $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$  ב.  $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$

(8)  $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$

(9)  $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$

(10)  $(7, -5, 0)$

(11) ה

(12) א.  $\ell : \underline{x} = (1, -1, 2) + t \cdot (3, 1, -1)$  ב.  $\ell : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

ג.  $\ell : \frac{x-1}{3} = y+1 = 2-z$  ד.  $\ell : \begin{cases} x - 3y = 4 \\ y + z = 1 \end{cases}$

(13) א.  $\underline{x} = (1, 0, 2) + t(-4, 2, 10)$  ב.  $\underline{x} = (1, 4, 0) + t(1, 0, 10)$

ג.  $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 1, 1)$  ד.  $(x, y, z) = (1, -10, 4) + t(1, 1, 0)$

ה.  $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(-2, -1, 1)$

## מצב ההדדי בין ישרים

### שאלות

- (1) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$ ,  $l_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$
- (2) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$ ,  $l_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$
- (3) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$ ,  $l_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$
- (4) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$ ,  $l_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$
- (5) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$ ,  $l_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$
- (6) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$ ,  $l_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$
- (7) מצא את ערכו של הפרמטר  $k$  שבעבורו הישרים הבאים:  
 $l_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$ ,  $l_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$   
 א. מקבילים.  
 ב. מתלכדים.
- (8) נתונות הנקודות:  $A(3, -1, 5)$ ,  $B(k, -1, 3)$ ,  $C(-6, 3, -1)$ ,  $D(-2, 3, k)$   
 הראה כי לכל ערך של  $k$  הישרים  $l_{AB}$  ו- $l_{CD}$  מצטלבים.

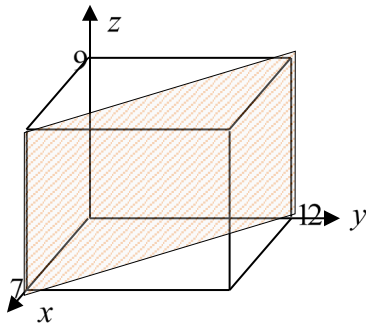
**תשובות סופיות**

- (1) מתלכדים.
- (2) מקבילים.
- (3) נחתכים,  $(1, 5, 0)$ .
- (4) מצטלבים.
- (5) מקבילים.
- (6) נחתכים,  $(1, 8, -1)$ .
- (7) א.  $k = 2$       ב.  $k = -2$
- (8) שאלת הוכחה.

## הצגה פרמטרית של מישור

### שאלות

- (1) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא :  
 $A(1, -4, 0)$  ,  $B(3, 6, 2)$  ,  $C(0, -3, 1)$
- (2) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה  $Q(6, 7, -1)$ ,  
 ומכיל את הישר  $l : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$
- (3) נתונים שני ישרים :  $l_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$  ,  $l_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$   
 הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.
- (4) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה  $D(5, -2, -1)$  ומכיל  
 את ציר ה- $x$ .
- (5) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור  $[xz]$ .



- (6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.

### תשובות סופיות

- (1)  $\pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1)$
- (2)  $\pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6)$
- (3)  $\pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6)$
- (4)  $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1)$
- (5)  $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)$
- (6)  $\pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 9) + s(-7, 12, 0)$

## משוואת מישור

---

### שאלות

- (1) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור  $\pi : 2x - y + 3z - 6 = 0$  :  
 א.  $D(5, 7, 1)$       ב.  $E(2, -1, 1)$
- (2) מצא את ערכו של  $k$  שבעבורו הנקודה  $A(1, k, -1)$  נמצאת על המישור :  $\pi : kx - 2y + (1+k)z + 7 = 0$ .
- (3) נתונה משוואת מישור :  $\pi : 3x + 2y - z - 9 = 0$ . מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.
- (4) נתונה משוואת מישור :  $\pi : 4x + y - 2z + 8 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור  $[yz]$ .

### תשובות סופיות

- (1) א. על המישור. ב. לא על המישור.
- (2)  $k = 3$
- (3)  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 4\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(0, 0, -9)$
- (4)  $\ell : \underline{x} = (0, -8, 0) + t(0, 2, 1)$

## מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

### שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור:  $\pi : 2x + 3z - 12 = 0$ . כתוב הצגה פרמטרית של המישור.
- (2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\pi : \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$ . מצא את משוואת המישור.
- (3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$ . מצא את משוואת המישור.
- (4) המישור  $\pi$  עובר בנקודות:  $A(1, 0, -3)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(4, -1, 0)$ . מצא את משוואת המישור.
- (5) ענה על הסעיפים הבאים:  
 א. לפניך הנקודות הבאות:  $(2, -5)$ ,  $(0, 1, -2)$ ,  $(1, 1, 0)$ .  
 1. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.  
 2. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.  
 ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.  
 ג. האם הנקודה  $(4, 2, 1)$  נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

### תשובות סופיות

- (1)  $\pi : \underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$
- (2)  $\pi : -2x + 3y + z + 19 = 0$
- (3)  $\pi : x - 3y + 8z = 0$
- (4)  $\pi : 3x + 6y - z - 6 = 0$
- (5) א. 1.  $\pi : \underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$ . 2.  $-2x + 3y + z - 1 = 0$ .  
 ב. למשל:  $(0, 0, 1)$ ,  $(-0.5, 0, 0)$ . ג. לא.

## מישורים המקבילים לצירים

---

### שאלות

(1) נתונה משוואת מישור:  $(k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$ .  
 לאיזה ערך של  $k$  המישור מקביל לציר ה- $y$  (ולא מכיל אותו)?

(2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  ו- $x+3y+2z-6=0$ . מצא את נפח הטטראדר.

### תשובות סופיות

(2) 6 יח"נ.

(1)  $k=3$

## מצב החדדי בין ישר ומישור

- (1) נתונים הישר והמישור הבאים:  
 $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$   
 קבע את המצב החדדי שביניהם.  
 אם הישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך.
- (2) נתונים הישר והמישור הבאים:  
 $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$   
 קבע את המצב החדדי שביניהם.  
 אם הישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך.
- (3) נתונים הישר והמישור הבאים:  
 $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$   
 קבע את המצב החדדי שביניהם.  
 אם הישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך.
- (4) נתונים הישר והמישור הבאים:  
 $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$   
 מצא את ערכי  $a$  ו- $b$  בעבורם הישר מוכל במישור.

### תשובות סופיות

- (1) הישר חותך,  $(1, -1, 3)$ .
- (2) מקבילים.
- (3) הישר מוכל.
- (4)  $a = 1$ ,  $b = -7$

## מצב ההדדי בין מישורים

---

### שאלות

(1) נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א.  $\pi_1 : 2x - y + 4z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב.  $\pi_3 : x + 3y - z + 1 = 0$ ,  $\pi_4 : 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג.  $\pi_5 : 5x - 2y - 2z + 3 = 0$ ,  $\pi_6 : 2x + 3y + z - 5 = 0$

(2) נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1 : 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$

מצא את ערכי  $k$  עבורם המישורים:

א. נחתכים                      ב. מקבילים                      ג. מתלכדים

### תשובות סופיות

(1) א. מתלכדים.                      ב. מקבילים.                      ג. נחתכים.

(2) א.  $k \neq 2, -3$                       ב.  $k = -3$                       ג.  $k = 2$

## ישר חיתוך בין מישורים

---

### שאלות

- (1) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$ ,  $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (2) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$ ,  $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (3) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$ ,  $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (4) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$ ,  $\pi_8 : z - 2 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (5) מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור  $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$  עם המישור  $[xz]$ .
- (6) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

### תשובות סופיות

- (1)  $\ell : \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12)$
- (2)  $\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4)$
- (3)  $\ell : \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right)$
- (4)  $\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0)$
- (5)  $\ell : \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18)$
- (6)  $\ell : \underline{x} = t(1, 9, 13)$

## זווית בין שני ישרים

### שאלות

- (1) מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:  
 א.  $\ell_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$  ,  $\ell_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$   
 ב.  $\ell_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$  ,  $\ell_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$
- (2) מצא את הזווית, שבין ישר העובר דרך הנקודות  $A(3, 4, 6)$  ,  $B(6, 0, -2)$  ,  
 וישר העובר דרך הנקודות:  $C(6, 5, 1)$  ,  $D(-1, 4, 2)$  ,  
 וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.
- (3) נתונות הנקודות  $A(1, -3, 0)$  ,  $B(4, 2, -1)$  ,  $C(3, -1, 2)$  .  
 א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב, העובר דרך הנקודות:  
 1. A ו-B.  
 2. B ו-C.  
 3. A ו-C.  
 ב. מי מבין הנקודות  $D(4, 2, -1)$  ו- $E(7, 7, -3)$  , נמצאת על הישר AB,  
 שמצאת בסעיף הקודם?  
 ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC.
- (4) נתון מישור שמשוואתו:  $3x - 4y + 6 = 0$  . הנקודות  $A(x, 6, 1)$  ,  $B(-2, y, -1)$  .  
 נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור  $[yz]$  ומקיימת:  $z_C = 11$  .  
 מצא את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים  
 AB ו-AC הוא:  $\sqrt{\frac{13}{76}}$  .

### תשובות סופיות

- (1) א.  $78.521^\circ$  ב.  $90^\circ$   
 (2)  $63.37^\circ$  . הישרים מצטלבים.  
 (3) א. 1.  $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$  א. 2.  $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$   
 א. 3.  $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$  ב. הנקודה D. ג.  $35.477^\circ$   
 (4) C(0, 2, 11) או C(0, 28.45, 11)

## זווית בין ישר ומישור

### שאלות

- (1) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:  
 $\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2)$  ,  $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$
- (2) נתונות הנקודות  $A(1, -1, 2)$  ,  $B(0, 2, -1)$  ,  $C(1, 2, 5)$  ,  $D(-7, 3, -1)$ .  
 מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.
- (3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה היא:  $2x + y - 2z - 6 = 0$ . קדקוד הפירמידה הוא  $S(3, 1, -2)$ .  
 מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,  
 אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים:  $x_B = z_B = -1$ .

### תשובות סופיות

14.9° (3)

44.83° (2)

18.87° (1)

## זווית בין שני מישורים

### שאלות

(1) מצא את הזווית שבין המישורים  $\pi_1 : 4x + 3y + z - 12 = 0$  ו- $\pi_2 : 4x - 7y + 5z + 3 = 0$ .

(2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקודקודה הם:  $A(0, 2, -5)$ ,  $B(3, -1, 1)$ ,  $C(7, -1, -5)$ ,  $D(3, 2, 0)$ . מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

(3) מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו  $3x + 5y - z + 4 = 0$  למישור  $[xz]$ .

### תשובות סופיות

(3)  $32.312^\circ$

(2)  $87.539^\circ$

(1)  $90^\circ$

## מרחק בין שתי נקודות במרחב

---

### שאלה

- (1) נתונות הנקודות:  $A(2, 4, -5)$ ,  $B(0, -2, 6)$  ו-  $C(k, -1, 13-k)$ . מצא ערכי  $k$  עבורם המשולש  $ABC$  יהיה שווה-שוקיים:  $AB = AC$ .

### תשובה

- (1)  $k = 8$  או  $k = 12$ .

## מרחק בין נקודה לישר

---

### שאלות

- (1) מצא את המרחק שבין הנקודה  $A(13, -1, -19)$  לישר  $\ell : \underline{x} = t(2, 0, -7)$ .
- (2) נתונות הנקודות  $A(1, 6, -1)$ ,  $B(2, -1, 0)$ ,  $C(6, -4, 0)$ .  
חשב את שטח המשולש  $ABC$ .
- (3) על הישר  $\ell : \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$  מונחת הצלע  $AB$  של ריבוע  $ABCD$ .  
אחד מקודקודי הריבוע הוא  $D(5, 4, 2)$ . מצא את שיעורי הקדקוד  $B$  (שתי אפשרויות).

### תשובות סופיות

- (1)  $\sqrt{54}$
- (2) 12.75 יח"ש.
- (3)  $B(5, -4, 2)$  או  $B(5, 4, -6)$ .

## מרחק בין נקודה למישור

---

### שאלות

- (1) מצא את מרחקו של המישור  $4x - 2y - 4z + 15 = 0$  מראשית הצירים.
- (2) מצא משוואת מישור המאונך לישר  $\ell : \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$  ונמצא במרחק  $\sqrt{14}$  מהנקודה  $A(4, 5, -9)$ .
- (3) נתונים ישר ומישור:  $\pi : 2x + 4y - 4z + 15 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$ . מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

### תשובות סופיות

- (1)  $2\frac{1}{2}$
- (2)  $\pi : 3x - 2y + z - 7 = 0$  או  $\pi : 3x - 2y + z + 21 = 0$
- (3)  $(4, 5, 1)$  או  $(1, -9, 5)$ .

## מרחק בין ישרים מקבילים

---

### שאלות

(1) נתונות הנקודות  $A(15,0,-4)$ ,  $B(12,-5,2)$ ,  $C(6,1,4)$ ,  $D(12,11,-8)$ .

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

(2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1), \quad l_2: \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2), \quad l_4: \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

### תשובות סופיות

(1) א. מקבילים. ב.  $\sqrt{76}$  יח"א.

(2) א. הוכחה. ב.  $\sqrt{824}$  יח"ש.

## מרחק בין ישר למישור

### שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור:  $4x - z + 6 = 0$ .
- א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- $y$  ובין המישור הנתון.  
 ב. מצא את המרחק בין ציר ה- $y$  ובין המישור הנתון.
- (2) נתונים ישר ומישור:  $\pi: 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$ ,  $l: \underline{x} = (1, k - 1, 5) + t(4, -2, -3)$ .
- א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.  
 ב. מצא את ערכו של הפרמטר  $k$  שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

### תשובות סופיות

(1) א. הישר מקביל למישור. ב.  $\frac{6}{\sqrt{17}}$

(2) א. הוכחה. ב.  $k = 2, 4$

## מרחק בין מישורים מקבילים

### שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור:  $\pi : 3x - 4y + 5z - 10 = 0$ . מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק  $\sqrt{8}$  ממנו.
- (2) נתונים שני מישורים מקבילים:  $\pi_1 : x - 2y - 2z + 6 = 0$ ,  $\pi_2 : x - 2y - 2z - 12 = 0$ . מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים, והנמצא במרחק שווה משניהם.
- (3) נתונים שישה מישורים:  
 $\pi_1 : 2x + y - 2z - 11 = 0$ ,  $\pi_2 : x + 2y + 2z + 5 = 0$ ,  $\pi_3 : 2x - 2y + z + 3 = 0$   
 $\pi_4 : 2x + y - 2z + 7 = 0$ ,  $\pi_5 : x + 2y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_6 : kx + qy + z + p = 0$   
 מצא את ערכי הפרמטרים  $k, q, p$ , שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה, שנפחה 60 יחידות נפח.
- (4) כדור, שמרכזו בנקודה  $O(3, 8, -1)$ , חסום בקובייה, שבסיסה התחתון מונח על מישור, שמשוואתו  $12x + 4y - 3z - 6 = 0$ . מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

### תשובות סופיות

- (1)  $\pi_1 : 3x - 4y + 5z + 10 = 0$ ,  $\pi_2 : 3x - 4y + 5z - 30 = 0$
- (2)  $\pi_3 : x - 2y - 2z - 3 = 0$
- (3)  $k = 2, q = -2, p = 18, -12$
- (4)  $12x + 4y - 3z - 136 = 0$

## מרחק בין ישרים מצטלבים

---

### שאלות

- (1) נתונים שני הישרים הבאים:  $\ell_1 : \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$  ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$ .  
 הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.
- (2) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים:  $\ell_1 : \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$  ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$ .  
 מצא את המרחק שביניהם.
- (3) מצא את מרחק הישר  $\ell : \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ , מציר ה- $z$ .

### תשובות סופיות

- (1)  $\frac{10}{\sqrt{6}}$  יח"א.
- (2) 1.567 יח"א.
- (3)  $\sqrt{2}$  יח"א.

## היטלים ונקודות סימטריה

### שאלות

- (1) נתונה נקודה  $A(1, -1, 3)$  ונתון הישר  $\ell: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ .
- א. מצא את היטל הנקודה  $A$  על הישר.  
 ב. מצא את הנקודה הסימטרית ל- $A$  ביחס לישר.
- (2) נתונה נקודה  $A(0, 0, 1)$  ונתון מישור  $7x + 7y - z = 8$ .
- א. מצא את היטל הנקודה  $A$  על המישור.  
 ב. מצא את הנקודה  $C$ , הסימטרית ל- $A$ , ביחס למישור.
- (3) ענה על הסעיפים הבאים:
- א. מצא את הנקודות הסימטריות לנקודה  $A(1, 3, 2)$  ביחס למישורי הצירים.  
 ב. מצא את הנקודות הסימטריות לנקודה  $A(x, y, z)$  ביחס למישורי הצירים.
- (4) נתונות 4 נקודות במרחב:  $A(0, 2, 4)$ ,  $B(-2, 6, 2)$ ,  $C(2, -4, 8)$ ,  $D(10, 2, 0)$ .  
 מצא את היטל הישר  $AD$  על המישור  $ABC$ .

### תשובות סופיות

- (1) א.  $B(0, 1.5, -1.5)$  ב.  $C(-1, 4, -6)$
- (2) א.  $B\left(\frac{7}{11}, \frac{7}{11}, \frac{10}{11}\right)$  ב.  $C\left(\frac{14}{11}, \frac{14}{11}, \frac{9}{11}\right)$
- (3) א.  $B_{xy}(1, 3, -2)$ ,  $C_{xz}(1, -3, 2)$ ,  $D_{yz}(-1, 3, 2)$   
 ב.  $B_{xy}(x, y, -z)$ ,  $C_{xz}(x, -y, z)$ ,  $D_{yz}(-x, y, z)$
- (4)  $\underline{x} = (0, 2, 4) + t(0, 1, 1)$

## שאלות מסכמות

- (1) נתונות הנקודות  $A(1,1,3)$ ,  $B(1,2,0)$ ,  $C(1,1,1)$ .
- מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C. הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.
  - חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.
  - מצא את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.
- (2) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
- במקרה בו הישרים נחתכים, מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
- במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצא גם את המרחק ביניהם.
- $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$ ,  $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
  - $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$ ,  $\underline{x} = (2,3,1) + s(12,-3,1)$
  - $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$ ,  $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
  - $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$ ,  $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- (3) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
- במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
- במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.
- $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ ,  $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
  - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ,  $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
  - $2x - 14y + 10z = -6$ ,  $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- (4) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים.
- במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם.
- במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- $x - 2y + 2z - 10 = 0$ ,  $2x + y + 2z - 4 = 0$
  - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ,  $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
  - $2x - 14y + 10z = -6$ ,  $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה  $ABCD A'B'C'D'$ , שנפחה הוא 8.  
 משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא:  $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$ .  
 משוואת המישור שעליו מונחת הפאה  $ABB'A'$  היא:  $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$ .  
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה  $A(4, 0, -1)$  נמצאת על כדור, שמרכזו  $O(1, 1, 2)$ .  
 מצא את משוואת המישור, המשיק לכדור בנקודה A.
- (7) נתונים מישור וישר:  $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (1, 5, 5) + t(1, 1, 0)$ .  
 מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- $z$ , הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$ .  
 מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור  $\pi_1$  ובמרחק 6 ממישור  $\pi_2$  (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור:  $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$ ,  $\ell_1 : \underline{x} = (0, -3, 0) + t(1, 1, -8)$ .  
 ישר נוסף,  $\ell_2$ , המקביל למישור  $\pi$ , עובר בנקודה  $P(1, 0, -4)$  וחותך את הישר  $\ell_1$  בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור  $\pi$ , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.  
 מצא את שטח המלבן PQQ'P'.  
 (הדרכה: הבע באמצעות  $t$  את וקטור הכיוון של  $\ell_2$ )
- (10) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$ .  
 $\ell_1$  הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.  
 המישור  $\pi_3$  מכיל את הישר  $\ell_1$  ויוצר זווית של  $60^\circ$  עם הישר  $\ell_2 : \underline{x} = (1, 3, -4) + t(1, 1, 0)$ .  
 מצא את משוואת המישור  $\pi_3$ .

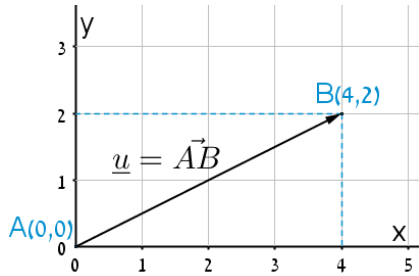
## תשובות סופיות

- (1) א.  $\underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$  ב.  $\sqrt{2}$  ג.  $y - z + 2 = 0$
- (2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07. ג. מתלכדים. ד. נחתכים בנקודה  $(1, -3, 4)$ . הזווית היא:  $47.6^\circ$ .
- (3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל. ג. חותך בנקודה  $(3.5, -0.5, -2)$ , הזווית היא:  $40.78^\circ$ .
- (4) א. נחתכים. ישר חיתוך:  $\underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$ , זווית:  $63.6^\circ$ . ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.
- (5)  $\ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75)$ ,  $\ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$
- (6)  $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$
- (7)  $(0, 0, 4)$  או  $(0, 0, 14\frac{4}{5})$
- (8)  $\ell: \underline{x} = (0, -14, -15\frac{3}{4}) + t(-14, 14, 21)$
- (9) 10.467 יח"ש.
- (10)  $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$  או  $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$

## סיכום כללי

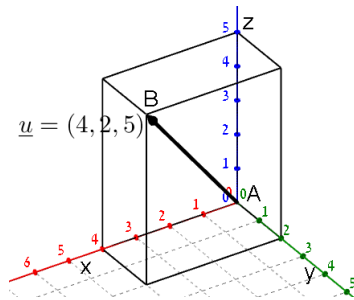
### הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים  $(0,0)$  וסופו בנקודה  $(x,y)$  במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא:  $\underline{u} = (x,y)$ .



דוגמאות:

- הוקטור  $\underline{u} = (4,2)$  נמצא במישור  $[xy]$ , מוצאו בנקודה  $A(0,0)$  וסופו בנקודה  $B(4,2)$ .



- הוקטור:  $\underline{u} = (4,2,5)$  נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים  $A(0,0,0)$  וסופו בנקודה:  $B(4,2,5)$ .

### וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

וקטור שמוצאו בנקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  וסופו בנקודה  $B(x_2, y_2, z_2)$  ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא:  $\underline{u} = \overline{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ .

### אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצותיו הם  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  הוא:  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$ .
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  ביחס של  $k:l$  הם:  $x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$ .

### מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

מכפלה סקלרית של שני וקטורים  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  תסומן:  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$  כאשר  $\alpha$  היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים:  $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$  תחושב באופן הבא:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ .

גודלו של וקטור  $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$  נתון ע"י:  $|\underline{u}| = \sqrt{u^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ .

### הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.

הווקטור  $\underline{a}$  נקרא **ווקטור ההעתקה**.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור  $\underline{u}$  נקרא **ווקטור הכיוון של הישר**.

זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

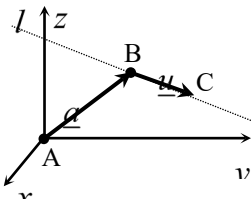
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י:  $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ .

כאשר  $t$  הוא מספר ממשי כלשהו ו-  $\underline{x}$  הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של  $t$  שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר  $l$ .

**דוגמא:** עבור הנקודות:  $A(0,0,0)$ ,  $B(5,3,1)$  ו-  $C(7,0,10)$  נקבל את הווקטורים

הבאים:  $\underline{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,3,1)$ ;  $\underline{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא:  $l: \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$ .



**\*הערות:**

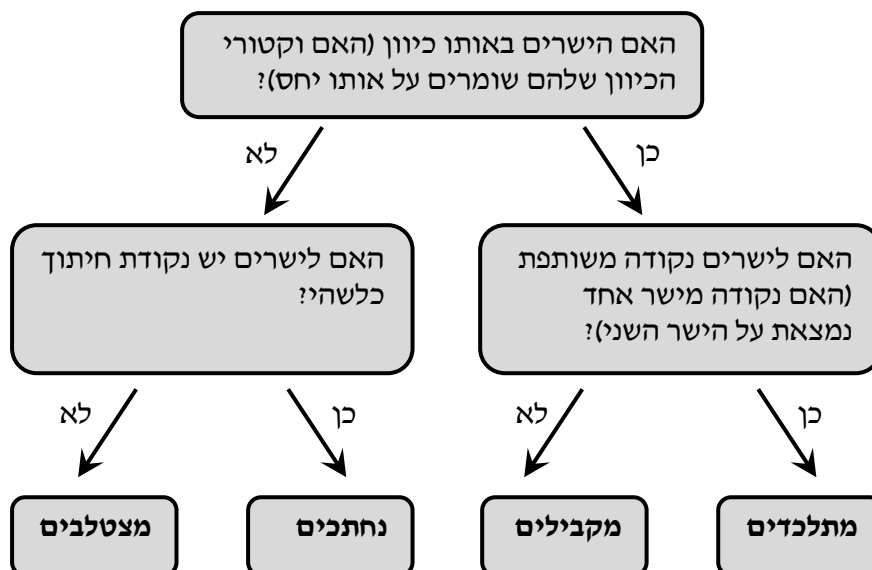
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא:  $l: \underline{x} = (7, 0, 10) + t(-6, 9, -27)$
- הווקטור  $\underline{x}$  המתקבל ע"י הצבת  $t_0$  בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת  $t_1$  בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור  $\underline{a}$  ומוצאו של הווקטור  $\underline{u}$ .
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור  $\underline{u}$  (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור  $\underline{a}$ .
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

**מצב הדדי בין ישרים**

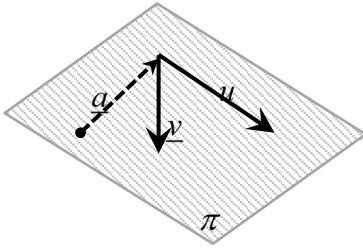
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



## הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.

הווקטור  $\underline{a}$  הוא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור

הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  הם וקטורי הכיוון של המישור.

אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י:  $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר  $t, s$  הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$  הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר

מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור  $\pi$ .

## משוואת מישור

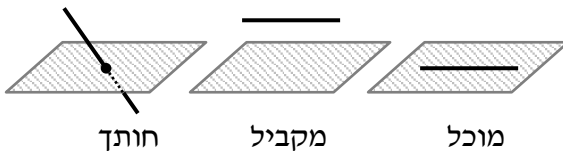
ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא:  $\pi : ax + by + cz + d = 0$ ,

כאשר:  $(x, y, z)$  היא נקודה על המישור והמקדמים  $a, b, c$  הם שיעורי ווקטור הנורמל

של המישור המסומן:  $\underline{h} = (a, b, c)$ .

## מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



• הישר חותך את המישור.

• הישר מקביל למישור.

• הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

• אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.

• אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.

• אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

## מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים:  $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  ו-  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
כל מצב אחר	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

## חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית  $\alpha$  בין שני וקטורים  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  תחושב ע"י:  $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$ .
- זווית חדה  $\alpha$  בין שני ישרים  $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$  ו-  $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$  תחושב:  $\cos \alpha = \frac{|\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2|}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|}$ .
- זווית חדה  $\alpha$  בין ישר  $l = \underline{a} + t\underline{u}$  ומישור  $\pi: ax + by + cz + d = 0$  תחושב ע"י הנוסחה הבאה:  $\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{h}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|}$ .
- זווית חדה  $\alpha$  בין שני מישורים:  $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  ו-  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  תחושב ע"י:  $\cos \alpha = \frac{|\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2|}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|}$ .

### חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  במרחב יחושב באופן הבא:  $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ .
2. מרחק בין נקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  לישר הנתון בהצגה פרמטרית:  $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$  יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.
3. מרחק בין נקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  למישור:  $\pi: ax + by + cz + d = 0$  יחושב ע"י:  $d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$ .
4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.
5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.
6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
  - א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
  - ב. שימוש בנוסחה:  $d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$ .
7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

# אנליזה וקטורית

פרק 3 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחים וגופים במרחב

## תוכן העניינים

47	1. קווים נפוצים במישור
51	2. מבוא לפונקציה של שני משתנים
53	3. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים
55	4. משטחים נפוצים במרחב
57	5. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים
58	6. גופים במרחב
61	7. הצגה פרמטרית של עקום
63	8. הצגה פולרית של עקום
65	9. הצגה פרמטרית של משטח

## קווים נפוצים במישור

### שאלות

1) שרטט במישור את התחומים הבאים :

א.  $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

2) שרטט במישור את התחומים הבאים :

א.  $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצא את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים :

א.  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב.  $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג.  $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטט אותו.

א.  $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב.  $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג.  $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד.  $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה.  $0 \leq x \leq 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

ו.  $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטט אותו.

א.  $y = 2 + \sqrt{1 - (x-3)^2}$

ב.  $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג.  $x \geq 3.5, x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

ה.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ו.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$

ז.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ח.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

8) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9 שרטט את התחומים הבאים במישור :

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

ה.  $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו.  $S = \{(x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\}$

10 נתונה המשוואה  $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$ .

- א. הוכח שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטט אותה.  
 ב. רשום את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.  
 ג. רשום את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.  
 ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?  
 ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11 שרטט את התחומים הבאים במישור :

א.  $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2\}$

12) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

13) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

## תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצא את תחום ההגדרה  $D$  של הפונקציה.

ב. שרטט סקיצה של הקבוצה  $D$ .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x + y}{x - y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x + 4y} + \sqrt{x - 4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x + 4y}} + \frac{1}{\sqrt{x - 4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y + 4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left( \frac{x - 4y}{x + 4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

$$f(x, y) = \tan \frac{y}{x} \quad (12)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

$$f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)} \quad (13)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

### תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

## קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו, ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטט מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטט את קו הגובה  $k$ :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

- א. שרטט את קו הגובה  $f(x, y) = 0$ .
- ב. לאילו ערכי  $C$  קו הגובה  $f(x, y) = C$  הוא קו רציף?  
 ציירו את קו הגובה במקרה זה.

### הערות

- \* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
- \*\* קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

### תשובות סופיות

- (1)  $x \neq 0$ , המישור ללא ציר ה- $y$ .
- (2)  $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4)  $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה.
- (5)  $y < x^2$
- (6)  $y \geq 0$ , חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## משטחים נפוצים במרחב

### שאלות

זהה ושרטט את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהה ושרטט את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהה כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

(6) מצא את החיתוך בין המשטח  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$  לבין המשטח  $z = 12$ .  
הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

(7) נתון המשטח  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$

א. זהה את המשטח.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר  $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$ .

(8) מצא את החיתוך בין המשטחים  $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$  ו-  $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ .  
הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

(9) נתון המשטח  $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$

א. זהה את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשום הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

- בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

### תשובות סופיות

- (1) אליפסואיד.
- (2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- (3) היפרבולואיד חד יריעתי.
- (4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0,0,1)$  ונפתח כלפי מעלה.  
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0,0,3)$  ונפתח כלפי מטה.
- (5) א. אליפסואיד.  
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(1,2,0)$  ונפתח כלפי מעלה.  
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה  $(0,0,10)$ .
- (6) החיתוך הוא מעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , שמרכזו בנקודה  $(0,0,12)$ .
- (7) א. ספירה שמרכזה  $(4,1,-10)$  ורדיוסה  $\sqrt{14}$ .  
נקודות החיתוך הן  $A(7,0,-12)$ ,  $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$ .
- (8) החיתוך הוא המעגל  $x^2 + y^2 = 15$ , שמרכזו בנקודה  $(0,0,7)$ .
- (9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- $y$ .  
ב.  $\ell_1 : (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$   $\ell_2 : (x, y, z) = (3, 2t, t)$

## משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

### שאלות

- (1) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - z$ . מצא את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטט אותו.
- (2) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$ . מצא את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטט אותו.
- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא את משטחי הרמה:  
 א.  $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$   
 ב.  $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$
- (4) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$ . מצא את משטחי הרמה של הפונקציה.
- (5) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$ . מצא את משטחי הרמה של הפונקציה.

### תשובות סופיות

- (1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה  $(0, 0, -2)$  ורדיוסה 2.
- (2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 4)$  ונפתח כלפי מטה.
- (3) א. מישורים.  
 ב. משטח רמה  $k$  הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה  $(0, 0, k)$  ונפתח כלפי מעלה.
- (4) עבור  $k < 0$  לא קיים משטח רמה  $k$ .  
 עבור  $k = 0$  נקודה  $(0, 0, 0)$ . עבור  $k = 1$  מישורים.  
 עבור  $k > 1$  חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $y$ .  
 עבור  $0 < k < 1$  חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $z$ .
- (5) עבור  $k < 0$  היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור  $k = 0$  חרוט אליפטי.  
 עבור  $k < 0$  היפרבולואיד דו-יריעתי.

## גופים במרחב

### שאלות

1) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו.  $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד.  $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה.  $V = \{(x, y, z) \mid 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\}$

3) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 4\}$

ה.  $V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$

4 שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5 שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב.  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

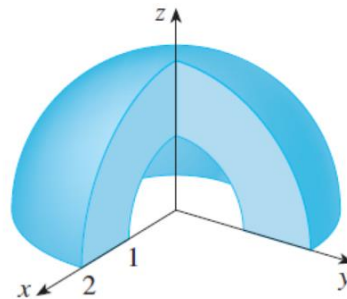
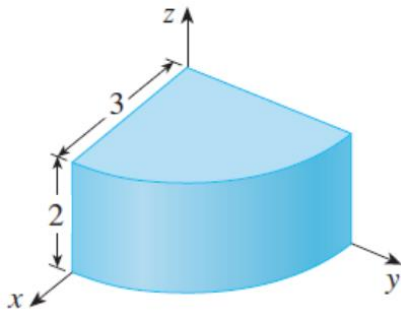
ה.  $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6 בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף  $V$  במרחב.

תאר במילים את הגוף וכתוב אותו לפי התבנית  $V = \{(x, y, z) \mid \dots\}$ .

א.

ב.



7 נתונים המשטחים  $z = x^2 + y^2$  ו-  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

א. זהה כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטט את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצא את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

8 נתונים שני משטחים:  $z = x^2 + y^2 + z^2$  ו-  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

א. זהה כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטט את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצא את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

### תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## הצגה פרמטרית של עקום

### שאלות

(1) עבור מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

$$t \geq 0 \quad \text{א.} \quad x = t^2 + 1, \quad y = t^2$$

$$0 \leq t \leq \pi \quad \text{ב.} \quad x = \sin t, \quad y = \cos^2 t$$

$$\pi \leq t \leq 2\pi \quad \text{ג.} \quad x = \cos t, \quad y = 4 \sin t$$

(2) עבור מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

$$1 \leq x \leq 4 \quad \text{א.} \quad y = x^4 + 1$$

$$-2 \leq x \leq 2 \quad \text{ב.} \quad y = -\sqrt{4-x^2}$$

$$-2 \leq x \leq 2 \quad \text{ג.} \quad y = +\sqrt{4-x^2}$$

(3) לפניך תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.

על ידי חילוץ של הפרמטר  $t$ , מצא משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים  $x$  ו- $y$  בלבד:

$$\text{א.} \quad x = t - 4, \quad y = t^2$$

$$\text{ב.} \quad x = -4 + \cos t, \quad y = 1 + 2 \sin t$$

$$\text{ג.} \quad x = 4 \cos^3 t, \quad y = 4 \sin^3 t$$

$$\text{ד.} \quad x = t(t+1) + 1, \quad y = t(0.5t+1) + 1$$

$$\text{ה.} \quad x = \frac{20t}{4+t^2}, \quad y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$$

$$\text{ו.} \quad x = ke^t + ke^{-t}, \quad y = ke^t - ke^{-t} \quad (k \text{ קבוע}).$$

$$(4) \quad \text{חשב את אורך העקום} \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad .0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(5) \quad \text{חשב את אורך העקום} \quad \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases} \quad .-\pi \leq t \leq 2\pi$$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad \text{ב. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{ג. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$$

$$(3) \quad \text{א. } y = (x + 4)^2 \quad \text{ב. } (x + 4)^2 + \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

$$(4) \quad 8$$

$$(5) \quad 6\pi\sqrt{29}$$

## הצגה פולרית של עקום

### שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את הנקודה הקוטבית  $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$  לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית  $(-1, -1)$  לנקודה קוטבית.

(2) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את הנקודה הקוטבית  $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$  לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית  $(0, -4)$  לנקודה קוטבית.

ג. המר את הנקודה הקרטזית  $(-2, 2)$  לנקודה קוטבית.

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה  $4x - x^2 = 1 + xy$  לקואורדינטות קוטביות.

ב. המר את המשוואה  $r = -4 \cos \theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה  $x^2 + y^2 = 4y$  לקואורדינטות פולריות.

ב. המר את המשוואה  $x = 10$  לקואורדינטות פולריות.

ג. המר את המשוואה  $y = 4$  לקואורדינטות פולריות.

(5) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה  $r = 4$  לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המר את המשוואה  $\theta = \pi/4$  לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המר את המשוואה  $r = 2 \cos \theta + 4 \sin \theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המר את המשוואה  $6r^3 \sin \theta = 4 - \cos \theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

## תשובות סופיות

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ ב.}$$

$$(2) \quad (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ב.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ ג.}$$

$$(3) \quad 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א.} \quad (x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב.}$$

$$(4) \quad r = 4 \sin \theta \text{ א.} \quad r \cos \theta = 10 \text{ ב.} \quad r \sin \theta = 4 \text{ ג.}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א.} \quad y = x \text{ ב.} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג.}$$

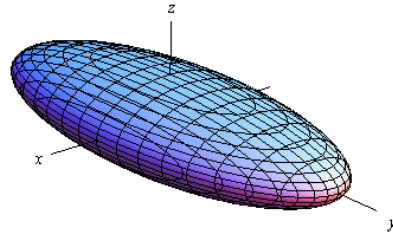
$$(6) \quad 6\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 \cdot y = 4\sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ד.}$$

## נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

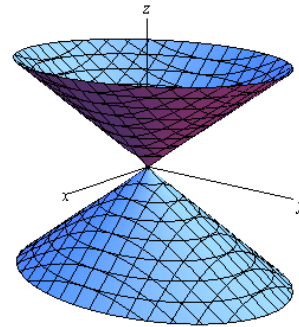
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם  $a=b=c$ , נקבל כדור עם רדיוס  $a$  והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

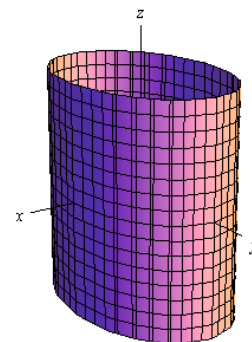
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. \* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא  $x^2 + y^2 = r^2$ , החתכים הנ"ל הם מעגלים. \* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

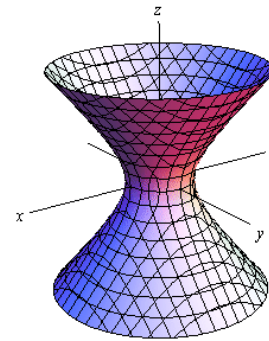


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

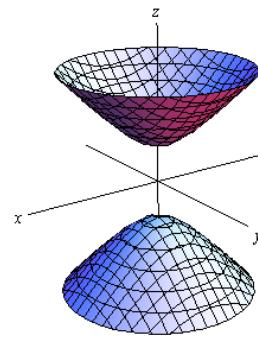
\* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 : \text{משוואה}$$

**תיאור:** למשטח זה אין חתך במישור  $xy$ ; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

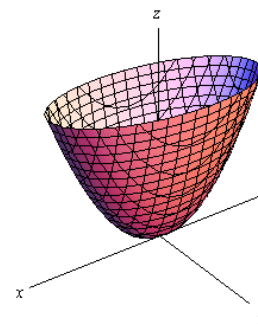
פרבולואיד אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

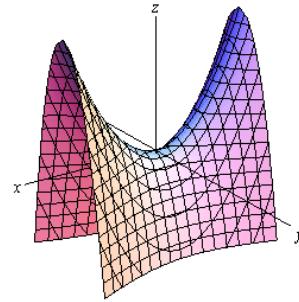
**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



### פרבולואיד היפרבולי



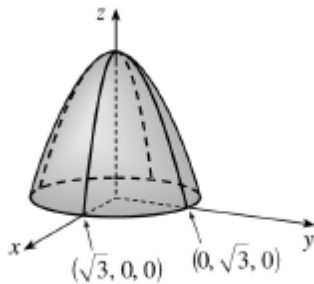
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם היפרבולות; אלו שמעל למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $x$  ואלו שמתחת למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ . החתכים במישור  $xz$  ו- $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

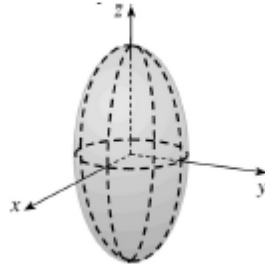
\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

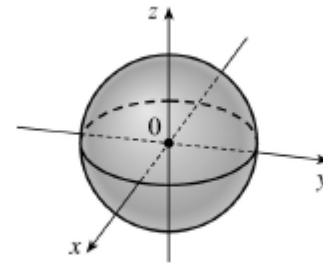
### דוגמאות שונות



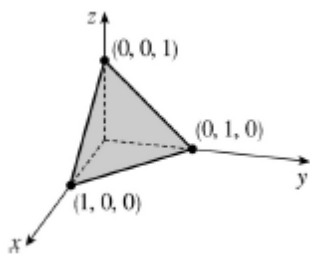
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



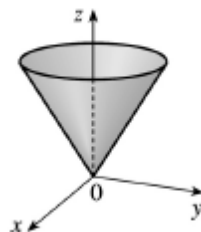
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



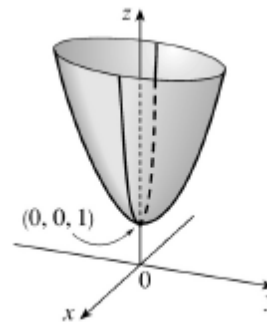
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

# אנליזה וקטורית

פרק 4 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. גבול של פונקציה של שני משתנים..... 68
2. רציפות של פונקציה של שני משתנים..... 71

## גבול של פונקציה של שני משתנים

### שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-9:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (9)$$

חשב את הגבולות בשאלות 10-17 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשב את הגבולות בשאלות 18-25 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

\* בשאלות 18, 20-23 ו-25 מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

(26) ענה על הסעיפים הבאים :

א. חשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$

ב. העזר בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ , וחשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$

ג. העזר בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ , וחשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$

ד. העזר בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$ , וחשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$

\* קחו בחשבון שייתכן שכותב השאלה לא ייתן את הגבול הידוע בגוף השאלה.

(27) הוכח לפי ההגדרה כי  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$

(28) הוכח לפי ההגדרה כי  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$

(29) הוכח לפי ההגדרה כי  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$

### תשובות סופיות

1 (1)

 $\frac{1}{12}$  (2)

1 (3)

0 (4)

אינסוף (5)

 $\frac{1}{2}$  (6)

2 (7)

5 (8)

0 (9)

(10) – (17) אין לפונקציה גבול.

0 (18)

0 (19)

0 (20)

0 (21)

3 (22)

0 (23)

0 (24)

0 (25)

0 א-ד. (26)

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

## רציפות של פונקציה של שני משתנים

### שאלות

בשאלות 1-3 בדוק את רציפות הפונקציות בנקודה  $(0,0)$ .  
 במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,  
 האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלות 4-5 בדוק את רציפות הפונקציות בנקודה  $(1,4)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \text{ נתון}$$

כאשר  $m$  קבוע.

עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?

7 נתונה פונקציה ממשית רציפה  $f = f(x)$ , שאינה פונקציה קבועה,

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הפונקציה  $g$  רציפה בנקודה  $(0, 0)$ ?

8 הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

אם  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y)$  לכל  $y$ ,

וגם  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0)$  לכל  $x$ ,

אז  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$ .

9 פונקציה  $f(x, y)$  מקיימת  $|f(x, y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$ , לכל  $(x, y)$ .

הוכח שהפונקציה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .

10 מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$  (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ k & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל המרחב?

11 נתון כי:

לכל  $x$  מתקיים  $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|$  (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה  $y$ ).

לכל  $y$  מתקיים  $|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq |x_2 - x_1|$  (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה  $x$ ).

הוכח כי  $f(x, y)$  רציפה בכל המישור.

12 הוכח או הפרך:

נתון כי  $f(x, y)$  רציפה בכל המישור.

$$z(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ידוע כי  $z(1, 14) < 0$ ,  $z(14, 1) > 0$ .

אז בתחום ההגדרה של  $z$  קיימת נקודה  $(c_1, c_2)$ , כך ש- $z(c_1, c_2) = 0$ .

**תשובות סופיות**

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר  $f(0,0) = 1$ , הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור  $m > 1$  הפונקציה רציפה, ועבור  $m \leq 1$  הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10)  $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

## נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	$e$	(from right) 1	$e$
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	$e$	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

# אנליזה וקטורית

פרק 5 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

75 ..... 1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט

## נגזרת מכוונת וגרדיאנט

### שאלות

(1) תהי  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

א. חשב את הגרדיאנט של  $f$  ואת אורכו בנקודה  $(3, 4)$ .  
 מהי משמעות התוצאה?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של  $f$ , העובר דרך  $(3, 4)$ .

(2) תהי  $f(x, y) = 3x^2y$ .

חשב את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון הווקטור  $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ .

(3) תהי  $f(x, y) = x - \sin(xy)$ .

חשב את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

בכיוון הווקטור  $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ .

(4) תהי  $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$ .

חשב את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של  $45^\circ$  עם החלק החיובי של ציר ה- $x$ .

(5) תהי  $f(x, y) = xy^2$ .

חשב את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, 3)$  בכיוון לנקודה  $(4, 5)$ .

(6) תהי  $f(x, y, z) = x^2y^2z$ .

חשב את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(2, 1, 4)$ ,

בכיוון הווקטור  $\vec{u} = 1\cdot\mathbf{i} + 2\cdot\mathbf{j} + 2\cdot\mathbf{k}$ .

(7) אם הפוטנציאל החשמלי  $V$  בנקודה  $(x, y)$ , נתון על ידי  $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ , מצא את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה  $(3, 4)$  בכיוון לנקודה  $(2, 6)$ .

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של  $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$  בנקודה  $(0, 0)$  היא מקסימלית, וחשב את ערכה.

9 מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה  $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$  בנקודה  $(1, 2, -1)$  היא מקסימלית, וחשב את ערכה.

10 אם הטמפרטורה נתונה על ידי  $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$ , ואני נמצא בנקודה  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$  ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11 נתונה הפונקציה  $f(x, y) = 4x^2y$ .

- א. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון וקטור היוצר זווית של  $30^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .
- ב. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון וקטור היוצר זווית של  $30^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $y$ .
- ג. מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12 נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = x^2yz^4$ .

- מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה  $(1, 2, -1)$ , בכיוון וקטור היוצר זווית של  $60^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ , ו- $60^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $z$ . הנח שהזווית עם ציר ה- $y$  חדה.

13 נתונה הפונקציה  $f(x, y) = xy^2 - x^2y^{-3}$  ונתונה הנקודה  $Q(1, 1)$ .

- א. חשב את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה  $Q$ , בכיוון וקטור שיוצר זווית של  $60^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

ב. מצא וקטור  $\vec{u}$ , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 0$ .

ג. האם קיים וקטור  $\vec{u}$ , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 6$ .

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + 4y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכח כי הפונקציה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .
- ב. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה  $(0, 0)$ .
- ג. חשב את  $\nabla f(0, 0)$ .
- ד. בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה  $(0, 0)$ .
- ה. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה  $f$  בנקודה  $(0, 0)$ , בכיוון הווקטור  $\vec{u} = (1, -1)$ .
- ו. הסבר מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

$$(15) \text{ הפונקציה } f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2, \text{ מתארת טמפרטורה בנקודה } (x, y, z)$$

- א. מהי הטמפרטורה בנקודה  $(2, 4, 1)$ ?
- ב. אוסף הנקודות  $(x, y, z)$ , בהן הטמפרטורה שווה  $20^\circ$ , מהווה משטח מפורסם. מהו?
- ג. נמלה שנמצאת בנקודה  $(2, 4, 1)$  רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר. באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?
- ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור  $z=1$ ), בנקודה  $(2, 4, 1)$ . כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר, אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן. באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

$$(16) \text{ גֵּלָה מוחזקת בנקודה } (2, 1, 14), \text{ שעל המשטח } z = 20 - x^2 - 2y^2$$

משחררים את הגֵּלָה והיא מתחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

- א. מהו המשטח הנתון?
- ב. מצא את הווקטור  $\vec{u} = (a, b, c)$ , המתאר את כיוון הנפילה של הגֵּלָה.

$$(17) \text{ תהי } f = f(x, y) \text{ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:}$$

$$1. \text{ לכל } x, f(x, x^2) = \frac{x^2}{2} + x^4$$

$$2. \text{ הנגזרת המכוונת של } f(x, y), \text{ בנקודה } (1, 1), \text{ בכיוון הווקטור } \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

שווה 1.

חשב את הגרדיאנט של  $f$  בנקודה  $(1, 1)$ .

18 נתונה  $f = f(x, y, z)$  דיפרנציאבילית, המקיימת  $f(x, y, x^2 + y^2) = 2x + y$ .

נתון כי  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 2, 4) = -\frac{5}{3}$ , כאשר  $\vec{u} = (-2, 1, 2)$ .  
חשב את  $\nabla f(0, 2, 4)$ .

19 נתונה הפונקציה  $f(x, y) = 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ .

א. חשב את  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8, 1)$  בכיוון הווקטור  $\vec{u} = (3, 4)$ .

ב. בדוק האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

ג. חשב  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ , בכיוון וקטור  $\vec{v}$ , היוצר זווית  $\alpha$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

ד. באיזה כיוון  $\alpha$ , הנגזרת המכוונת  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$  תהיה מקסימלית?

מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20 נתונה הפונקציה  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 20x + 21y & x \neq 0 \\ 21y & x = 0 \end{cases}$

א. עבור אלו ערכים של  $m$  מתקיים  $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) < m$ , לכל וקטור יחידה  $\hat{u}$ ?

ב. מצא וקטור יחידה  $\hat{u}$ , המקיים  $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) = 0$ .

### הערות סימון

1 במישור  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbf{i} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1)$ , ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$$\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \text{ או } \vec{u} = (x, y)$$

$$\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

במרחב  $\mathbb{R}^3$ :  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ ,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים:  $\vec{v} = (x, y, z)$ , או  $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

$$\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j} + 5 \cdot \mathbf{k}$$

2 יש המסמנים וקטור  $\vec{u}$  גם  $\underline{u}$  או  $\mathbf{u}$ .

3 וקטור יחידה יסומן  $\hat{u}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. הגרדיאנט  $(6, 8)$ . ב. אורך הגרדיאנט 10.
- (2)  $\frac{48}{5}$  (3)  $\frac{1}{2}$  (4)  $7.5\sqrt{2}$
- (5)  $3\sqrt{13}$  (6)  $\frac{88}{3}$  (7)  $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
- (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור  $(1, 1)$  ושווה ל- $\sqrt{2}$ .
- (9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור  $(12, 14, -12)$  ושווה ל-22.
- (10) בכיוון הווקטור  $(-2, 2, -2)$ .
- (11) א.  $8\sqrt{3} + 2$ . ב.  $8 + 2\sqrt{3}$ . ג.  $\ell: (1, 2, 4) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 + 2\sqrt{3}\right)$
- (12)  $\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$
- (13) א.  $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}$ . ב.  $\vec{u} = (5, 1)$  (יש עוד). ג. לא.
- (14) א. הוכחה. ב.  $f_x = 1, f_y = 0$ . ג.  $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$
- (15) א. 73 מעלות. ב. אליפטואיד. ג. בכיוון הווקטור  $(8, 32, 2)$ . ד. בכיוון הווקטור  $(8, 32)$ .
- (16) א. פרבולואיד. ב.  $\vec{u} = (4, 4, -32)$
- (17)  $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (18)  $\nabla f(0, 2, 4) = (2, -3, 1)$
- (19) א.  $\frac{67}{5}$ . ב. לא דיפרנציאבילית. ג.  $12(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)^{\frac{1}{3}}$
- ד.  $\text{Max} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = 12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}, \alpha = 54.73^\circ$
- (20) א.  $m > 29$ . ב.  $\hat{u} = (21/29, -20, 29)$  (יש אחרים).

# אנליזה וקטורית

פרק 6 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

80	.....	1. אינטגרלים כפולים
83	.....	2. החלפת סדר אינטגרציה

## אינטגרלים כפולים

## שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-3 :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr \quad (3)$$

באינטגרל  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(1,1), A(1,0), O(0,0) \quad (4)$$

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(-2,1), A(2,1), O(0,0) \quad (5)$$

$$D - \text{טרפז בעל הקודקודים : } C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0) \quad (6)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq 1 \quad (7)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq y \quad (8)$$

$$D = \{ (x, y) \mid y \leq 1, y \geq x^2 \} \quad (9)$$

$$D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} \quad (10)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 11-15:

$$(11) \iint_D xy^2 dx dy, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י הפרבולה } y^2 = 4x \text{ והישר } x = 1.$$

$$(12) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}}, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה } (2, 2).$$

$$(13) \iint_D |xy| dx dy, \text{ כאשר } D \text{ עיגול בעל הרדיוס } a, \text{ שמרכזו בראשית.}$$

$$(14) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ כאשר } D \text{ מקבילית בעלת הצלעות } y = 3a, y = a, y = x + a, y = x \text{ (} a > 0 \text{).}$$

$$(15) \iint_D \frac{\cos y}{y^2 + \pi^2} dA, \text{ כאשר } D \text{ התחום הכלוא בין } x = -1, y = 0, y = \pi, y = \pi\sqrt{x}.$$

## תשובות סופיות

1 (1)

$\frac{1}{40}$  (2)

$\frac{a^3}{3}\pi$  (3)

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$
 (4)

$$\int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$$
 (5)

$$\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx$$
 (6)

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$
 (7)

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$$
 (8)

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$
 (9)

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx +$$
 (10)

$$+ \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

$\frac{32}{21}$  (11)

$8 - \frac{16\sqrt{2}}{3}$  (12)

$\frac{a^4}{2}$  (13)

$14a^4$  (14)

0 (15)

## החלפת סדר אינטגרציה

### שאלות

החלף סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות 1-6:

$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}}^{2-x} f(x, y) dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx \quad (6)$$

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx \quad (5)$$

חשב את האינטגרלים הבאים (רמז: שנה את סדר האינטגרציה):

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy \quad (8)$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy \quad (7)$$

$$\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2) dy dx \quad (10)$$

$$(x, y \geq 0) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{-x^2} y dx dy \quad (9)$$

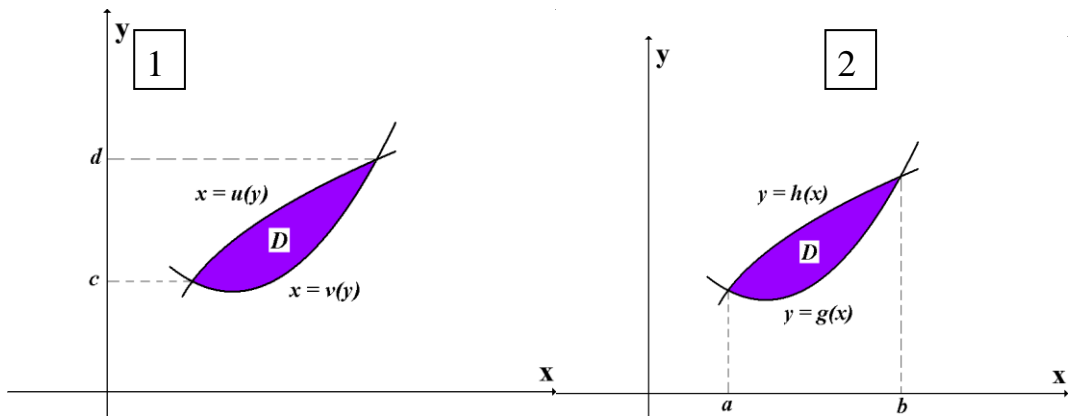
## הערות סימון

1

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dydx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dydx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

2

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



לתשומת ליבכם, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dx dy \quad \text{כך:} \quad \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל

הוא חילופי. כלומר הרישומים  $dx dy$  ו- $dy dx$  זהים.

## תשובות סופיות

$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx \quad (6)$$

$$\frac{1}{3}(e^8 - 1) \quad (7)$$

$$\frac{241}{60} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4}(e - 2) \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 16) \quad (10)$$

# אנליזה וקטורית

פרק 7 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

86 ..... 1. שימושי האינטגרל הכפול.

## שימושי האינטגרל הכפול

### שאלות

בשאלות 1-4 חשב את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים:

$$x + y = 2, \quad x^2 - 4y = 4 \quad (1)$$

$$(a > 0) \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (2)$$

$$y^2 = 9 - x, \quad y^2 = 9 - 9x \quad (3)$$

$$x + y = 3, \quad y^2 = 4x \quad (4)$$

בשאלות 5-10 חשב את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים:

$$z = 1 + x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (5)$$

$$z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = 1, \quad y = x^2 \quad (6)$$

$$(x > 0) \quad z = 0, \quad z = x^2 + y, \quad y = 0.5x, \quad y = 2x, \quad y = \frac{2}{x} \quad (7)$$

$$z = 0, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \quad 2y^2 = x \quad (8)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y \quad (9)$$

$$z = x + y, \quad z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (10)$$

**(11)** ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם  $(0,1)$ ,  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,

יש פונקציית צפיפות  $\delta(x, y) = xy$ .

א. חשב את מסת הלוח.

ב. חשב את מרכז הכובד של הלוח.

**(12)** ללוח דק בצורת מלבן  $R = \left\{ (x, y) \mid -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \right\}$ ,

יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).

חשב את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- $z$ .

בטא את תשובתך באמצעות המסה של הלוח,  $M$ .

**(13)** מצא את שטח הפנים של חלק הגליל  $x^2 + z^2 = 4$ , הנמצא מעל למלבן

$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}$ , שבמישור  $xy$ .

## תשובות סופיות

$$\frac{64}{3} \quad (1)$$

$$a^2 \left( \frac{15}{8} - 2 \ln 2 \right) \quad (2)$$

$$32 \quad (3)$$

$$\frac{64}{3} \quad (4)$$

$$\frac{5}{6} \quad (5)$$

$$\frac{88}{105} \quad (6)$$

$$\frac{17}{6} \quad (7)$$

$$16\frac{1}{5} \quad (8)$$

$$\frac{8}{3} \quad (9)$$

$$36 \quad (10)$$

$$\left( \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right) \text{ ב.} \quad \frac{1}{24} \text{ א.} \quad (11)$$

$$\frac{M(a^2 + b^2)}{12} \quad (12)$$

$$\frac{1}{6} \pi (5\sqrt{5} - 1) \quad (13)$$

# אנליזה וקטורית

פרק 8 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות..... 89

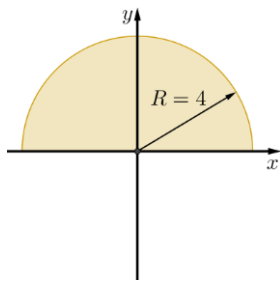
## אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

### שאלות

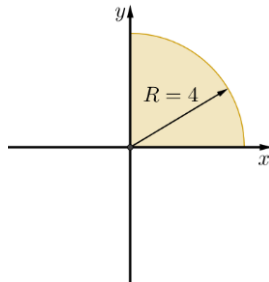
1) חשב  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$ , כאשר  $D$  התחום המתואר בשרטוט.

\* בסעיף ט אל תחשב את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

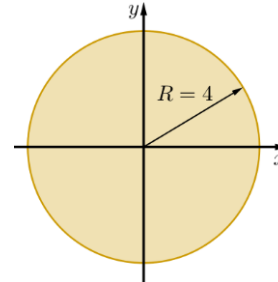
ג.



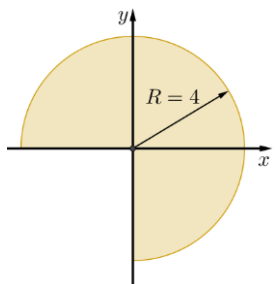
ב.



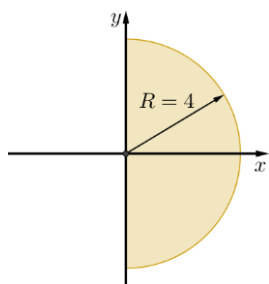
א.



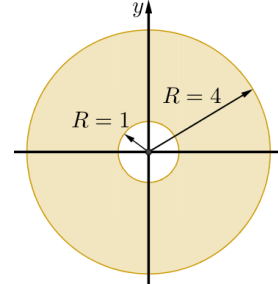
ו.



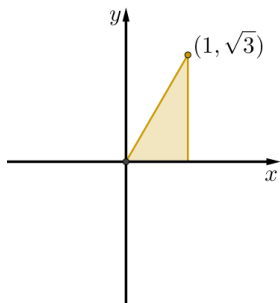
ה.



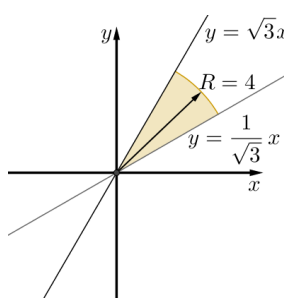
ד.



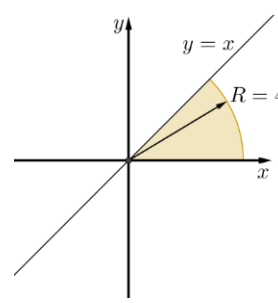
ט.



ח.



ז.



חשב את האינטגרלים בשאלות 2-17, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (7)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad (6)$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad (9)$$

$$\int_0^6 \int_0^y x dx dy \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (11)$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad (13)$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (12)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy \quad (15)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx \quad (17)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy \quad (16)$$

בשאלות 18-20 חשב את נפח הגוף המתואר:

(18) הגוף הכלוא בין פני הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  לבין הגליל  $x^2 + y^2 = 1$ .

(19) הגוף הכלוא בתוך הגליל  $x^2 + y^2 = 2y$ , בין החרוט  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  מלמעלה לבין המישור  $xy$  מלמטה.

(20) הגוף הכלוא בתוך הגליל  $x^2 + y^2 = x$ , בין הפרבולואיד  $z = 1 - x^2 - y^2$  מלמעלה לבין מישור  $xy$  מלמטה.

(21) חשב את שטח התחום החסום על ידי  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $y = 0$ ,  $y = x\sqrt{3}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $\frac{128\pi}{3}$     ב.  $\frac{32\pi}{3}$     ג.  $\frac{64\pi}{3}$     ד.  $42\pi$     ה.  $\frac{64\pi}{3}$
- ו.  $32\pi$     ז.  $\frac{16\pi}{3}$     ח.  $\frac{32\pi}{9}$     ט.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$
- (2) א.  $\frac{\pi}{2}$     ב.  $\pi$     ג.  $\frac{\pi}{8}$     ד.  $\frac{\pi}{2}$     ה.  $\frac{\pi}{2}$
- (3) א.  $\pi a^2$     ב.  $2\pi$     ג.  $36$     ד.  $\frac{4}{3}$     ה.  $\frac{4}{3}$
- (4) א.  $\pi \ln \frac{e}{2}$     ב.  $\pi(4-\pi)$     ג.  $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e}$     ד.  $\frac{\pi(e-1)}{4e}$     ה.  $\frac{\pi(e-1)}{4e}$
- (5) א.  $\frac{\pi}{2} + 1$     ב.  $-\frac{4}{5}$     ג.  $\pi \ln \frac{4}{e}$     ד.  $\pi$     ה.  $\pi$
- (6) א.  $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$     ב.  $\frac{32}{9}$     ג.  $\frac{5\pi}{32}$     ד.  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$     ה.  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

# אנליזה וקטורית

פרק 9 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרל כפול ..... 92

## החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

### שאלות

(1) חשב את האינטגרל הכפול  $\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$ , כאשר  $R$  הוא התחום המוגבל על ידי הישרים  $y=3-x$ ,  $y=1-x$ ,  $y=x-1$ ,  $y=x$ .

(2) חשב את האינטגרל הכפול  $\iint_R e^{xy} dA$ , כאשר  $R$  הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות  $y=x$ ,  $y=0.5x$ ,  $y=\frac{1}{x}$ ,  $y=\frac{2}{x}$ .

(3) חשב את האינטגרל הכפול  $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$ , כאשר  $R$  הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם  $A(0,0)$ ,  $B(2,0)$ ,  $C(1,1)$ .

(4) חשב את האינטגרל הכפול  $\iint_R (4x+8y) dA$ , כאשר  $R$  הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם:  $A(-1,3)$ ,  $B(1,-3)$ ,  $C(3,-1)$ ,  $D(1,5)$ .

(5) חשב את האינטגרל הכפול  $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2} dA$ , כאשר  $R$  הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

(6) חשב את האינטגרל הכפול  $\iint_R y^2 dA$ , כאשר  $R$  הוא התחום המוגבל על ידי העקומות  $y=\frac{1}{x}$ ,  $y=\frac{2}{x}$ ,  $xy^2=1$ ,  $xy^2=2$ .

(7) חשב את האינטגרל הכפול  $\iint_R e^{x+y} dA$ , כאשר  $R = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ .

**תשובות סופיות**

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(e^2 - e) \ln 2 \quad (2)$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin 2 \quad (3)$$

$$192 \quad (4)$$

$$96\pi \quad (5)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$e - \frac{1}{e} \quad (7)$$

# אנליזה וקטורית

פרק 10 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים ושימושיהם.....94

## אינטגרלים משולשים ושימושיהם

### שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-4:

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz dy dx dz \quad (1)$$

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dx dz dy \quad (2)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}, \iiint_B xyz^2 dV \quad (3)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq 1+x+y\}, \iiint_B 6xy dV \quad (4)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 5-8, על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4 \cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy dx dz \quad (6)$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz \quad (7)$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx \quad (8)$$

בשאלות 9-14 חשב את נפחי הגופים החסומים על ידי המשטחים:

$$z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0 \quad (9)$$

$$z = 0, z = x^2 + y^2, y = 1, y = x^2 \quad (10)$$

$$(x \geq 0) \quad z = 0, z = x^2 + y, y = 0.5x, y = 2x, y = \frac{2}{x} \quad (11)$$

$$z = 0, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, 2y^2 = x \quad (12)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = y \quad (13)$$

$$z = x + y, z = 6, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (14)$$

(15) חשב את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו  $h$  ורדיוס הבסיס שלו  $r$ . הנח שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל, כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה  $\delta(x, y, z) = kz$  ( $k > 0$ ).

(16) חשב את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$ . סביב ציר ה- $z$ . בטא את תשובתך באמצעות המסה של התיבה,  $M$ .

## תשובות סופיות

1 (1)

$\frac{1}{3}(e^3 - 1)$  (2)

$\frac{27}{4}$  (3)

$\frac{65}{28}$  (4)

$2 \sin 4$  (5)

$3e - 6$  (6)

4 (7)

$\frac{\sin^2 4}{2}$  (8)

$\frac{5}{6}$  (9)

$\frac{88}{100}$  (10)

$\frac{17}{6}$  (11)

$16\frac{1}{5}$  (12)

$\frac{8}{3}$  (13)

36 (14)

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{2h}{3}\right), M = \frac{1}{2}\pi kh^2 r^2$  (15)

$\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$  (16)

# אנליזה וקטורית

פרק 11 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות..... 97

## אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גלילות וכדוריות

### שאלות

בשאלות 1-4 חשב את האינטגרלים המשולשים:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dz dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx \quad (4)$$

(5) גוף כלוא בגליל  $x^2 + y^2 = 9$ , בין המישור  $xy$  מלמטה, לבין מחצית פני הכדור

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \text{ מלמעלה.}$$

חשב את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

(6) חשב את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

$$\text{מלמעלה, ועל ידי החרוט } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ מלמטה.}$$

(7) מצא את הנפח של התחום מעל המישור  $xy$ , החסום על ידי הפרבולואיד

$$z = x^2 + y^2 \text{ והגליל } x^2 + y^2 = a^2.$$

**תשובות סופיות**

**(1)** 4

**(2)**  $\frac{\pi}{3}$

**(3)**  $\frac{24\pi - 32}{9}$

**(4)**  $\frac{32\pi}{5}$

**(5)**  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1107 / 488), V = \frac{122}{3}\pi$

**(6)**  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1.5 / (2 - \sqrt{2})), V = \frac{64}{3}\pi(2 - \sqrt{2})$

**(7)**  $\frac{\pi}{2}a^4$

# אנליזה וקטורית

פרק 12 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים ..... 99

## החלפת משתנים באינטגרלים משולשיים (יעקוביאן)

### שאלות

(1) חשב את  $\iiint_G (z-y)^2 xy dV$ , כאשר  $G$  הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים

$$.xy=4, \quad xy=2, \quad z=y+1, \quad z=y, \quad x=3, \quad x=1$$

(2) חשב את הנפח של האליפסואיד  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(3) חשב את  $\iiint_G x^2 dV$ , כאשר  $G$  הוא האליפסואיד  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(4) חשב את נפח התחום המוגבל על ידי המשטחים:

$$.y=4z^2, \quad y=z^2, \quad y=4x-12, \quad y=4x, \quad y=2z, \quad y=z$$

(5) חשב את  $\iiint_G \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} dV$ , כאשר  $G$  הוא כדור

שמרכזו בנקודה  $(1,2,4)$  ורדיוסו 1.

### תשובות סופיות

$$2 \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \pi abc \quad (2)$$

$$\frac{4}{15} \pi a^3 bc \quad (3)$$

$$\frac{105}{32} \quad (4)$$

$$\pi \quad (5)$$

# אנליזה וקטורית

פרק 13 - אינטגרלים קוויים ושימושיהם

תוכן העניינים

100 ..... 1. אינטגרלים קוויים ושימושיהם

## אינטגרלים קויים ושימושיים

\* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

### שאלות

#### אינטגרל קוי מסוג I

בשאלות 1-4 חשב את האינטגרל  $\int_C f(x, y) ds$ , כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi ; f(x, y) = 1 - x^2 \quad (1)$$

$$C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq \pi ; f(x, y) = x \quad (2)$$

$$C: \text{קטע של ישר המחבר את } O(0,0) \text{ עם } A(1,2) ; f(x, y) = x + y \quad (3)$$

$$C: \text{היקפו של } \Delta OAB \text{ של } O(0,0), A(0,1), B(1,0) ; f(x, y) = x + y^2 \quad (4)$$

בשאלות 5-6 חשב את האינטגרל  $\int_C f(x, y, z) ds$ , כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, z = t \quad 0 \leq t \leq \pi ; f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

$$C: x = t, y = \frac{1}{\sqrt{2}} t^2, z = \frac{1}{3} t^3 \quad 0 \leq t \leq 3 ; f(x, y, z) = x^3 + 3z \quad (6)$$

$$(7) \text{ חשב את אורך העקום } x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

$$(8) \text{ סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי } x = \cos t, y = \sin t, z = 2t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

חשב את מסת הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא  $\delta(x, y, z) = kz \quad (k > 0)$ .

## אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות 9-10 חשב:

$$C: x = \cos t, y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy \quad (9)$$

$$C: x = t, y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 1; \int_C (2x + y) dx + (x^2 - y) dy \quad (10)$$

$$(11) \text{ חשב } \int_C y dx + x^2 dy, \text{ כאשר } C \text{ המסלול מנקודה } (0,0) \text{ לנקודה } (2,4),$$

ו- $C$  נתון ע"י המשוואה:

א.  $y = 2x$

ב.  $y = x^2$

$$(12) \text{ חשב } \int_{(1,1)}^{(4,2)} (x + y) dx + (y - x) dy, \text{ אם העקום נתון על ידי:}$$

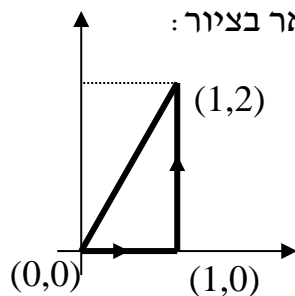
א. הפרבולה  $y^2 = x$ .

ב. קו ישר.

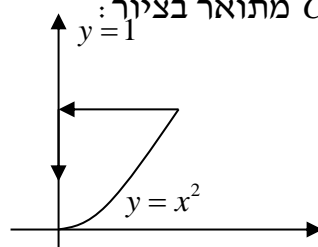
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$  ל- $(1,2)$  ומשם ל- $(4,2)$ .

ד. העקום:  $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ .

$$(13) \text{ חשב } \int_C x^2 y dx + x dy, \text{ כאשר המסלול } C \text{ מתואר בציור:}$$



$$(14) \text{ חשב } \int_C (x - y^2) dx + dy, \text{ כאשר המסלול } C \text{ מתואר בציור:}$$



$$(15) \text{ אם } \mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$$

חשב את האינטגרל הקווי  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , מ- $(0,0,0)$  ל- $(1,1,1)$ , לאורך המסלולים:

$$a. \quad x=t, y=t^2, z=t^3$$

b. הקוים הישרים מ- $(0,0,0)$  ל- $(0,0,1)$ , משם ל- $(0,1,1)$  ומשם ל- $(1,1,1)$ .

g. הישר המחבר את  $(0,0,0)$  ו- $(1,1,1)$ .

בשאלות 16-17 חשב את האינטגרל הקווי  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , כאשר:

$$(16) \quad \mathbf{F}(x, y) = (x^2 y^3, -y\sqrt{x}), \quad \mathbf{r}(t) = (t^2, -t^3), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(17) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz), \quad \mathbf{r}(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(18) \quad \text{נתון שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y) = x^3 y \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$$

a. חשב את העבודה שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה  $y = x^2$

מ- $(-2, 4)$  עד  $(1, 1)$ .

b. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1, 1)$  עד  $(-2, 4)$ ?

$$(19) \quad \text{חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

על חלקיק הנע לאורך העיקול  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 1$ )

### הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f, g, h) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f dx + g dy + h dz$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_1, A_2, A_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

## תשובות סופיות

- (1)  $\pi$
- (2)  $\frac{16}{3}$
- (3)  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
- (4)  $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$
- (5)  $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$
- (6)  $\frac{567}{2}$
- (7) 6
- (8)  $\sqrt{5}k\pi^2$
- (9)  $\frac{1}{3}$
- (10)  $\frac{4}{3}$
- (11) א.  $\frac{28}{3}$  ב.  $\frac{32}{3}$
- (12) א.  $\frac{34}{3}$  ב. 11 ג. 14 ד.  $\frac{32}{3}$
- (13)  $\frac{1}{2}$
- (14)  $\frac{4}{5}$
- (15) א. 2 ב. -3 ג.  $\frac{6}{5}$
- (16)  $-\frac{59}{105}$
- (17)  $\frac{6}{5} - \sin 1 - \cos 1$
- (18) א. 3 ב. -3
- (19) 1

## הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

דוגמה	הצגה פרמטרית	עקום
$y = x^2 (1 \leq x \leq 2)$ $\Downarrow$ $x = t, y = t^2 (1 \leq t \leq 2)$	$x = t, y = f(t) (a \leq t \leq b)$	$y = f(x) (a \leq x \leq b)$
$x = y^2 (1 \leq y \leq 2)$ $\Downarrow$ $y = t, x = t^2 (1 \leq t \leq 2)$	$y = t, x = f(t) (a \leq t \leq b)$	$x = f(y) (a \leq y \leq b)$
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = r \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">נגד כיוון השעון</p>	$x^2 + y^2 = r^2$ <p style="text-align: center;">מעגל</p>
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = -2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = -r \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">עם כיוון השעון</p>	$x^2 + y^2 = r^2$ <p style="text-align: center;">מעגל</p>
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">נגד כיוון השעון</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p style="text-align: center;">אליפסה</p>
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = -5 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = -b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">עם כיוון השעון</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p style="text-align: center;">אליפסה</p>
ישר פרמטרי מהנק' (1, 2) לנק' (3, 4) $x = 1 + 2t$ $y = 2 + 2t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במישור מהנק' $(x_0, y_0)$ לנק' $(x_1, y_1)$
ישר פרמטרי מ- (1, 2, 3) ל- (4, 7, 9) $x = 1 + 3t$ $y = 2 + 5t$ $z = 3 + 6t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $z = z_0 + t(z_1 - z_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במרחב מהנק' $(x_0, y_0, z_0)$ לנק' $(x_1, y_1, z_1)$

# אנליזה וקטורית

פרק 14 - שדות משמרים - אי תלות במסלול

תוכן העניינים

105 ..... 1. שדות משמרים - אי תלות במסלול

## שדות משמרים - אי-תלות במסלול

### שאלות

בשאלות 1-6 קבע האם  $\mathbf{F}$  הוא שדה משמר; אם כן, מצא פונקציה  $\phi$ , כך ש-  $\nabla\phi = \mathbf{F}$ .

$$\mathbf{F}(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y) \quad (1)$$

$$\mathbf{F}(x, y) = xe^y \mathbf{i} + ye^x \mathbf{j} \quad (2)$$

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y - y \cos x, -x^2 \sin y - \sin x) \quad (3)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 \mathbf{i} + e^{-y} \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k} \quad (4)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 3z^2) \mathbf{k} \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 2yz, y^2) \quad (6)$$

$$(7) \quad \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy \quad \text{נתון האינטגרל}$$

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את (1,2) ו-(3,4).  
 ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

$$(8) \quad \int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1 + 3x^2y^2) dy \quad \text{חשב את האינטגרל}$$

$$(9) \quad \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy \quad \text{חשב את האינטגרל}$$

(10) יהי  $\mathbf{F}(x, y) = e^y \mathbf{i} + xe^y \mathbf{j}$ . מצא את העבודה שמבצע השדה על חלקיק הנע על  $y = \sqrt{1-x^2}$ , מ- (1,0) ל- (-1,0).

11) חשב את האינטגרל  $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)} (2xz^3 + 6y)dx + (6x - 2yz)dy + (3x^2z^2 - y^2)dz$  תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

12) נתון שדה וקטורי  $\mathbf{F} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$ , ונתונים 3 מסלולים:

$$L_1: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

$$L_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{בכיוון השלילי (עם כיוון השעון).}$$

$$L_3: (x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

חשב:

$$\oint_{L_3} \mathbf{F} dr \quad \text{ג.} \quad \oint_{L_2} \mathbf{F} dr \quad \text{ב.} \quad \oint_{L_1} \mathbf{F} dr \quad \text{א.}$$

13) ענה על הסעיפים הבאים:

א. שרטט את השדה הווקטורי  $\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  ברביע הראשון.

ב. בתחום  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$  נסמן  $f = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ,  $g = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .

1. הוכח כי  $f_y = g_x$  בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכח שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום  $D$  (מסעיף ב).

ד. הוכח שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ ,

ומצא את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ ,

חשב  $\oint_C \mathbf{F} \cdot dr$ , כאשר  $C$  עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה  $(0, 0)$ .

$$(14) \text{ נתון השדה הווקטורי } \mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\text{בתחום } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

א. שרטט את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

$$\text{ב. נסמן } f = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad g = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

1. הוכח כי  $f_y = g_x$  בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכח שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

### הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\hat{x} + g(x, y, z)\hat{y} + h(x, y, z)\hat{z}$$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

## תשובות סופיות

$$\phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 \quad (1)$$

(2) השדה אינו משמר.

$$\phi(x, y) = x^2 \cos y - y \sin x \quad (3)$$

$$\phi(x, y, z) = xz^2 - e^{-y} \quad (4)$$

$$\phi(x, y, z) = xyz + z^3 \quad (5)$$

(6) השדה אינו משמר.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. 236

(8) -58

(9) 5

(10) -2

(11) = 15 עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- (1, -1, 1) ל- (2, 1, -1), לאורך C.

(12) א.  $2\pi$  ב.  $-2\pi$  ג. 0

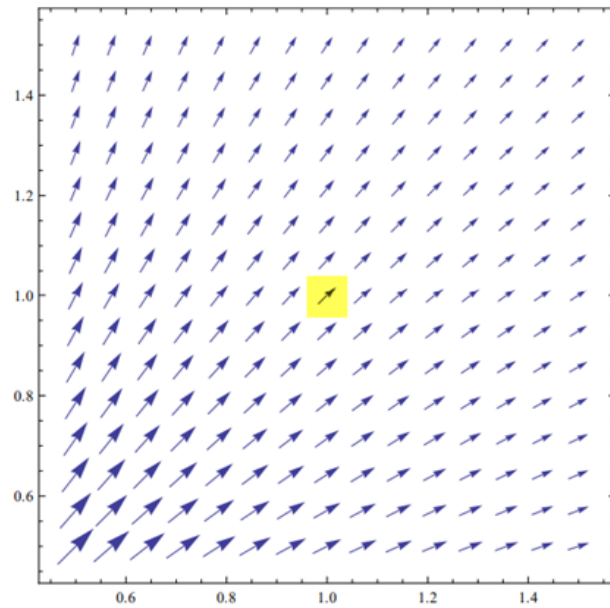
(13) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. שאלת הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.

ג. שאלת הוכחה. ד. שאלת הוכחה;  $\phi = \arctan \frac{y}{x} + k$ ; ה.  $2\pi$

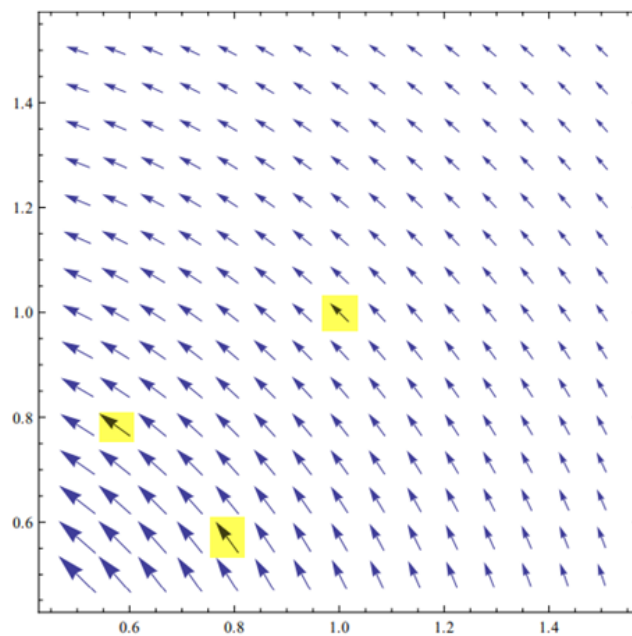
(14) א. ראו בעמוד הבא. ב. 1. שאלת הוכחה. 2. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר. ג. שאלת הוכחה.

## שרטוטים

שאלה 13 סעיף א:



שאלה 14 סעיף א:



# אנליזה וקטורית

פרק 15 - משפט גרין

תוכן העניינים

110 ..... 1. משפט גרין.

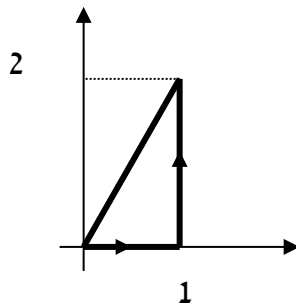
## משפט גרין

## שאלות

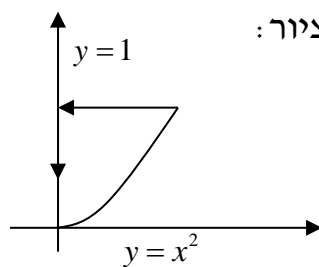
בשאלות 1-3 אשר את משפט גרין.

כלומר, חשב את האינטגרל  $\oint_C f dx + g dy$  ואת האינטגרל  $\iint_R (g_x - f_y) dA$ ,

והראה שהם שווים זה לזה.



(1)  $\oint_C x^2 y dx + x dy$ ; המסלול  $C$  מתואר בציור:



(2)  $\oint_C (x - y^2) dx + dy$ ; המסלול  $C$  מתואר בציור:

(3)  $\oint_C (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$ ; הוא ריבוע שקדקודיו:

$(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$  בכיוון החיובי.

(4) חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח  $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה  $x^2 + y^2 = 1$ , בכיוון הפוך לכיוון השעון, ומשלים הקפה אחת.

(5) חשב את האינטגרל  $\int_C \left( e^y - \tan \frac{x}{2} \right) dx + \left( x e^y + y \cos y^2 \right) dy$ , כאשר  $C$  הוא

האיחוד של העקומים  $y = 8 - x^2$ ,  $y = x^2$  ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

$$(6) \quad \int_C -2e^{2x-y} \cos y dx + (e^{2x-y} (\sin y + \cos y) + 2xy) dy$$

כאשר  $C$  הוא חצי האליפסה  $\{x^2 + 4y^2 = 4, y \geq 0\}$  מהנקודה  $(2, 0)$  לנקודה  $(-2, 0)$ .

(7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט  $C$ ,

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

$$ב. \quad \text{חשב את שטח האליפסה } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(8) \quad \oint_C (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx + (3x^2y + 3x - \sin y) dy$$

כאשר  $C$  מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון. מהו הערך המקסימלי של האינטגרל? עבור איזו מסילה  $C$  הוא מתקבל?

(9) הוכח שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין  $C$ ,

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dy = 0$$

$$(10) \quad \text{חשב: } \oint_C \frac{4x-y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dx + \frac{x-4y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dy, \text{ כאשר:}$$

$$א. \quad C \text{ הוא המעגל } (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$ב. \quad C \text{ הוא המעגל } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 144$$

ג.  $C$  היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

## תשובות סופיות

- (1) הערך המשותף הוא 0.5.
- (2) הערך המשותף הוא 0.8.
- (3) הערך המשותף הוא 8.
- (4)  $1.5\pi$
- (5)  $0.5 \sin 64$
- (6)  $\frac{8}{3} + e^4 - \frac{1}{e^4}$
- (7) א. הוכחה. ב.  $\pi ab$
- (8) הערך המקסימלי הוא  $\frac{6\pi}{4}$ , עבור המסילה  $C: x^2 + y^2 = 1$ .
- (9) הוכחה.
- (10) א. 0. ב.  $\frac{\pi}{2}$ . ג.  $\frac{\pi}{2}$ .

# אנליזה וקטורית

פרק 16 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

תוכן העניינים

113	1. הצגה פרמטרית של משטח
115	2. אינטגרלים משטחיים מסוג 1
115	3. אינטגרלים משטחיים מסוג 2

## אינטגרלים משטחיים מסוג I

### שאלות

בשאלות 5-1 חשב את האינטגרל המשטחי:

$$(1) \quad \iint_S x^2 y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = 1 + 2x + 3y,$$

$$\text{מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2].$$

$$(2) \quad \iint_S x dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח } y = x^2 + 4z, \text{ } 0 \leq x \leq 2, \text{ } 0 \leq z \leq 2.$$

$$(3) \quad \iint_S y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = y + 3, \text{ שכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1.$$

$$(4) \quad \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ } z \geq 0.$$

$$(5) \quad \iint_S x y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט } \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$$

$$\text{המקיים } 1 \leq u \leq 2, \text{ } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$(6) \quad \text{חשב את שטח הפנים של כדור בעל רדיוס } R.$$

$$(7) \quad \text{היריעה הדקה } S \text{ היא חלק הפרבולואיד } z = x^2 + y^2, \text{ שמתחת למישור } z = 1,$$

$$\text{וצפיפותה } \delta(x, y, z) = \delta_0, \text{ קבועה.}$$

חשב את מסת היריעה.

**תשובות סופיות**

$$171\sqrt{14} \quad (1)$$

$$\frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6} \quad (2)$$

$$\pi\sqrt{2}/4 \quad (3)$$

$$16\pi \quad (4)$$

$$93/\sqrt{10} \quad (5)$$

$$4\pi R^2 \quad (6)$$

$$\frac{\pi\delta_0}{6}(5\sqrt{5}-1) \quad (7)$$

## אינטגרל משטחי מסוג II

### שאלות

בשאלות הבאות חשב את האינטגרל  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$  ( $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ ).

בניסוח אחר: חשב את השטף של שדה הזרימה  $\mathbf{F}$  דרך  $S$ .

$$(1) \quad \mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} - xz^2 \mathbf{k} \quad ; \quad S \text{ הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים:} \\ x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$$

$$(2) \quad \mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k} \quad ; \quad S \text{ הוא פני הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$(3) \quad \mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k} \quad ; \quad S \text{ הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי} \\ \text{המישורים: } 2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$$

$$(4) \quad \mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad ; \quad S \text{ חלק הפרבולואיד } z = 4 - x^2 - y^2, \text{ שבו } z \geq 0$$

$$(5) \quad \mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k} \quad ; \quad S \text{ הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו } 4 \\ \text{והוא נמצא מעל המישור } xy$$

### תשובות סופיות

$$(1) \quad \frac{11}{6}$$

$$(2) \quad \frac{8\pi}{3}$$

$$(3) \quad 27$$

$$(4) \quad 12\pi$$

$$(5) \quad -16\pi$$

# אנליזה וקטורית

פרק 17 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

תוכן העניינים

116 ..... 1. משפט הדיברגנץ

## משפט הדיברגנץ (גאוס)

## שאלות

בשאלות 1-3 אשר את משפט הדיברגנץ.

כלומר, חשב את האינטגרל  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ , ואת האינטגרל  $\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV$ ,

והראה שהם שווים זה לזה ( $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ ).  
(ראה הערת סימון בעמוד הבא)

(1)  $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} - xz^2 \mathbf{k}$ ;  $S$  הוא פני הקובייה  $G$ ,  
הנקבעת ע"י המישורים:  $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$ .

(2)  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ ;  $S$  הוא פני הכדור  $G$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

(3)  $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$ ;  $S$  הוא פני הפירמידה  $G$ ,  
הנקבעת ע"י המישורים:  $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$ .

(4) יהי  $S$  פני הגוף הכלוא בגליל  $x^2 + y^2 = 9$ , בין המישורים  $z=0$  ו- $z=2$ .  
חשב את השטף של השדה הווקטורי  $\mathbf{F} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$  דרך  $S$ .  
כלומר, חשב את  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ , כאשר  $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ .

(5) חשב את  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ , כאשר  $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ .

$\mathbf{F} = (z^2 - x)\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ ;  $S$  הוא פני הגוף החסום על ידי:  
 $x=0, x=3, z=4 - y^2, z=0$ .

(6) חשב את  $\iint_S xz^2 dydz + (x^2 y - z^3) dzdx + (2xy + y^2 z) dx dy$   
כאשר  $S$  הוא פני הגוף החסום על ידי  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,  $z=0$ .

(7) יהי  $S$  משטח פתוח  $x^2 + z^2 = 16$ ,  $0 \leq y \leq 4$  (גליל ללא הבסיסים).  
חשב את השטף דרך  $S$  של השדה הווקטורי  $\mathbf{F} = z^2 \mathbf{i} + 5y \mathbf{j} + x^5 \mathbf{k}$ .  
כלומר, חשב את  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ , כאשר  $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ .

(8) חשב את  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ , כאשר  $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ .

$$\mathbf{F} = \left( \frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2 \right) \mathbf{i} + 2x \arctan y \mathbf{j} - \frac{2xz(1+y) + 1 + y^2}{1+y^2} \mathbf{k}$$

$S$  הוא חלק הפרבולואיד  $z = 4 - x^2 - y^2$ , שבו  $z \geq 0$  (המשטח פתוח).

### הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי  $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ ,

$$\text{מתקיים: } \iiint_G \text{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV = \iint_S f dydz + g dzdx + h dx dy$$

### תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא  $\frac{11}{6}$ .

(2) הערך המשותף הוא  $\frac{8}{3}\pi$ .

(3) הערך המשותף הוא 27.

(4)  $279\pi$

(5) 16

(6)  $\frac{2\pi a^5}{5}$

(7) 0

(8)  $-4\pi$

# אנליזה וקטורית

פרק 18 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

118 ..... 1. משפט סטוקס

## משפט סטוקס

### שאלות

בשאלות 1-3 בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים.

כלומר, חשב את האינטגרל  $\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} ds$ , ואת האינטגרל  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ,

והראה שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בעמוד הבא).

$$(1) \quad \mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}; \quad S \text{ חלק הפרבולואיד } z = 4 - x^2 - y^2, \text{ שבו } z \geq 0.$$

$$(2) \quad \mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + (-3xy)\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}; \quad S \text{ הוא שפת חצי כדור שמרכזו}$$

בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור  $xy$ .

$$(3) \quad \mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}; \quad S \text{ הוא משטח התחום בשמינית הראשונה,}$$

החסום על ידי המישורים  $y = 2$ ,  $2x + z = 6$ , ושאינו כלול

א. במישור  $xy$ .

ב. במישור  $y = 2$ .

ג. במישור  $2x + z = 6$ .

$$(4) \quad \text{חשב את האינטגרל } \oint_C x^2 dx + 4xy^3 dy + y^2 x dz, \text{ כאשר } C \text{ עקומה בצורת מלבן}$$

מ- $(0,0,0)$  ל- $(0,3,3)$ , משם ל- $(1,3,3)$  ומשם ל- $(1,0,0)$ .

$$(5) \quad \text{חשב את האינטגרל } \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \text{ כאשר } \mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k};$$

ו- $C$  היא שפת המשולש, שקדקודיו הם  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$ ,

וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה- $z$ ).

$$(6) \quad \text{חשב את } \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS, \text{ כאשר } \mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}; \text{ ו-} S \text{ הוא החלק של}$$

הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , הכלוא בתוך הגליל  $x^2 + y^2 = 1$ , ומעל למישור  $xy$ .

$$(7) \text{ חשב את } \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS, \text{ כאשר } \mathbf{F} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$$

ו- $S$  הוא משטח החרוט  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , מעל למישור- $xy$ .

### הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי  $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ ,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים:}$$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = \iint_S ((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS$$

### תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא  $12\pi$ .

(2) הערך המשותף הוא  $-16\pi$ .

(3) הערך המשותף הוא: א.  $-6$       ב.  $-9$       ג.  $-18$

(4)  $-90$

(5)  $-1$

(6)  $0$

(7)  $12\pi$

# אנליזה וקטורית

פרק 19 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

- 120 ..... 1. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)
- 122 ..... 2. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)
- 123 ..... 3. אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר
- 125 ..... 4. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)
- 127 ..... 5. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

## גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

### שאלות

$$(1) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^4 - x}{\ln x} dx$$

$$(2) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx \quad (m, n > 0)$$

$$(3) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$(4) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx$$

$$(5) \text{ הוכח כי } \int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx = \pi \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \right) \text{ עבור } |\alpha| < 1$$

$$(6) \text{ חשב } \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx \text{ עבור } \alpha \neq \pm 1$$

$$(7) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(8) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^1 x^p (\ln x)^m dx \quad (p > 0, m \in \mathbb{N})$$

$$(9) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^\pi \frac{1}{(2 - \cos x)^2} dx$$

## תשובות סופיות

$$\ln 2.5 \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{8} \ln 2 \quad (3)$$

$$2\pi \quad (4)$$

שאלת הוכחה. (5)

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \begin{cases} 0 & |\alpha| < 1 \\ 2\pi \ln |\alpha| & |\alpha| > 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\pi + 2}{8} \quad (7)$$

$$\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}} \quad (8)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{27}} \quad (9)$$

## אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

### שאלות

$$(1) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \text{ עבור } b > a > 0.$$

$$(2) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^\pi \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x} dx \text{ עבור } b, a > 1.$$

$$(3) \text{ הוכח כי } \int_0^{2\pi} [(b - \sin x)^2 - (a - \sin x)^2] dx = 2\pi(b^2 - a^2) \text{ לכל } a, b > 0.$$

הערה: פתור בשתי דרכים, גם ע"י אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם ע"י חישוב ישיר.

$$(4) \text{ בהינתן הנוסחה: } \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \sin x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \text{ עבור } \alpha > 1,$$

$$\text{ הוכח כי: } \int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{5 + 3 \sin x}{5 + 4 \sin x} \right) dx = 2\pi \ln \left( \frac{9}{8} \right).$$

### תשובות סופיות

$$(1) \ln \left( \frac{b+1}{a+1} \right)$$

$$(2) \pi \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$$

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

## אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר

### הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שילמדו בהמשך. חלק מהמרצים מסתפק רק בצד הטכני החישובי ולא נכנס לנושא זה כלל. בררו עם מתרגל ו/או מרצה הקורס האם אתם נדרשים לנושא זה. במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים. בהצלחה!

### שאלות

$$(1) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(kx) dx \text{ , כאשר } k \text{ ממשי.}$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור  $0 < a \leq \alpha$ .

$$(2) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + \alpha)^n} dx \text{ , כאשר } n \text{ טבעי.}$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור  $\alpha \geq 1$ .

$$(3) \text{ הוכח שהאינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \text{ מתכנס במידה שווה עבור } \alpha \geq 0.$$

$$(4) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2} dx.$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל  $\alpha$ .

$$(5) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \text{ עבור } \alpha \geq k > 0.$$

א. חשב את האינטגרל והוכח שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל  $\alpha$  המקיים  $\alpha \geq k > 0$ .

$$(6) \quad \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל  $n$  טבעי ולכל  $\alpha$  המקיים  $\alpha \geq k > 0$ .

$$(7) \quad \phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2} dx, \text{ כאשר } \alpha \geq k > 0.$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

$$(8) \quad \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2} dx$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל  $\alpha \geq k > 0$ .

### תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

### שאלות

(1) חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$

(2) הוכח שלכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$$

(3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

ב. חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

(4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$ , כאשר  $n \in \mathbb{N}$ .

ב. חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} x^{10} e^{-x^2} dx$

ג. חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $(\alpha > 0)$

ב. בעזרת סעיף א' חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

### תשובות סופיות

(1)  $n!$

(2) שאלת הוכחה.

(3) א.  $\sqrt{2\pi}$       ב.  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(4) א. אם  $n$  אי-זוגי אז 0, ואם  $n$  זוגי אז  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot \sqrt{2\pi}$

ב.  $\frac{945}{64} \sqrt{\pi}$       ג.  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(5) א.  $-\arctan \alpha + \frac{\pi}{2}$       ב.  $\frac{\pi}{2}$

## אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

### שאלות

(1) חשב:  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ , עבור  $b > a \geq k > 0$ .

(2) חשב:  $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$ , עבור  $b > a \geq k > 0$ .

(3) חשב:  $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$ .

(4) הוכח כי עבור  $b > a > 0$  ו-  $r \in \mathbb{R}$ , מתקיים  $\int_0^{\infty} \cos rx \frac{a^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}$ .

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin rx}{x} dx = \arctan \frac{r}{a}$  ( $\alpha, r > 0$ ).

ב. הוכח כי  $\int_0^{\infty} \left[ e^{-ax} \frac{1 - \cos rx}{x^2} \right] dx = \arctan \frac{r}{a} - \frac{a}{2} \ln \left( 1 + \frac{r^2}{a^2} \right)$  ( $\alpha, r > 0$ ).

ג. הוכח כי  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \arctan \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)$  ( $\alpha > 0$ ).

(6) הוכח:

א.  $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ .

ב.  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ .

(7) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח כי  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$

(8) חשב:  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

### תשובות סופיות

(1)  $\ln \frac{b}{a}$

(2)  $\frac{\pi}{2}(b-a)$

(3)  $\pi$

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) א. שאלת הוכחה. ב.  $\frac{\pi}{4}$

(8)  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$