אנליזה וקטורית

תוכן העניינים

אנליזה וקטורית

פרק 1 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

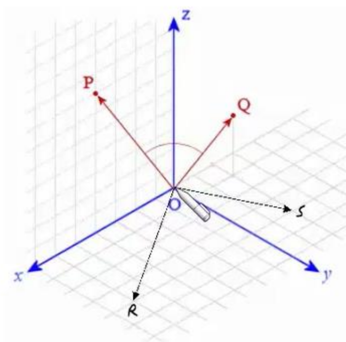
תוכן העניינים

וקטורים

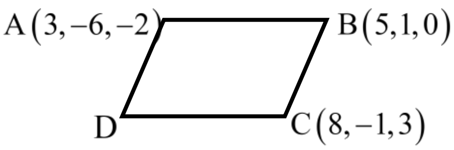
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\mathbf{u}$, $\vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

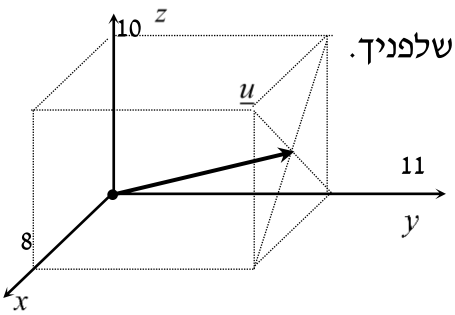
1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



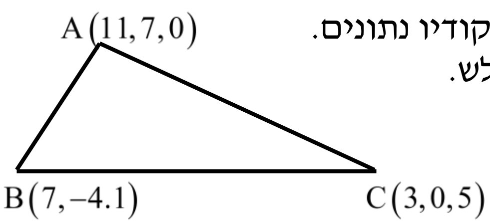
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



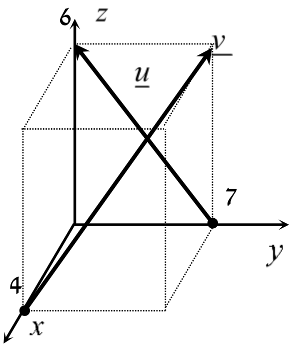
4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.



6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

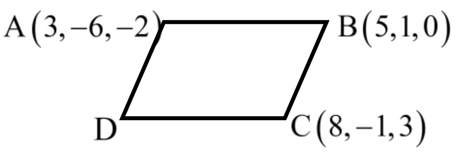
7) מצא את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראה כי $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



בשאלות **16-10** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$ ו- $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, ו-**16** הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשב:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $d(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **19-17** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים:

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$\text{D}(-7,-5,2)$, $\text{C}(-3,-5,0)$, $\text{B}(0,2,-1)$, $\text{A}(-4,2,1)$.
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.
ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$
ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$
ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) ענה על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי $|u+v|=|u-v| \Leftrightarrow u \perp v$.
הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.
ב. הוכח כי $|u+v|^2=|u|^2+|v|^2 \Leftrightarrow u \perp v$.
הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

26) הוכח:

א. $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$
ב. $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$
ג. $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$
ד. $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$
תן פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.
ה. $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$

תשובות סופיות

1) $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

7) א. $x=5,\quad y=-2,\quad z=6$

8) א. הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}^*$

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) הוכחה.

21) א. הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277^\circ$ ב. $\alpha=90^\circ$ ג. $\alpha=180^\circ$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח״ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) הוכחה.

26) הוכחה.

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

חשב: $(u\times v)\times w$.

2) חשב את שטח המשולש שקדקודיו: $A=(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי: $|u|\neq 0$, $\quad u\cdot w=0,\quad u\times v=0$.

הוכח כי: $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי: $|v|=4$, $\quad |u|=1,\quad u\perp v$.

חשב: $|(u+v)\times(u-v)|$.

5) נתון $w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

חשב:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

ב. חשב את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

7) חשב את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5), B(1,-1,-4), C(3,3,10), D(8,6,3)$.

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a,b,c}$.
הוכח כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a,a-b,a+b-4c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכח כי $\left[(u+v)\times(v+w)\right](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי: $u\cdot(v\times w)=4$.
חשב:
א. $u\cdot(w\times v)$ ב. $(v\times w)\cdot u$ ג. $w\cdot(u\times v)$ ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a,b,c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a\times b\times c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) שאלת הוכחה.

4) 8

5) א. -3 ב. -3 ג. -3

6) א. 6 ב. 1

7) $9\frac{1}{3}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

11) אין לו נוסחה.

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

1) הוכח שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

2) מצא את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

3) נתונים שני ישרים:

$$L_2:\ x+7=y-5\ ,\ z=3 \qquad\qquad L_1:\ \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},$$

א. הוכח שהישרים מצטלבים.
ב. מצא את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) $\sqrt{26}$

3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,
כאשר $r(t)=\left(\cos\pi t,-\ln t,\sqrt{t-2}\right)$ ו- $t_0=4$.

ב. רשום את המשוואות הפרמטריות $x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\cos^2 t$,
כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשום את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה
הווקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

2) רשום את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א. $9x^2+4y^2=36$ (במישור xy)

ב. $\begin{cases}-x+y-z+1=0\\4x-2y-2z-1=0\end{cases}$

ג. $\begin{cases}y^2=z\\x^2=y\end{cases}$

ד. $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z=y+2\end{cases}$

ה. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\z=x^2\end{cases}$

ו. $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\z=2x\end{cases}$

3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(21t^2,21t^2-1,10e^t\right)$.

בסעיפים א-ג, חשב:

א. $\lim\limits_{t\to1} r(t)$

ב. $r'(t)$

ג. $\int_0^1 r(t)dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

4) נתונה: $r(t)=\left(\cos 4t,\sin 4t,t^4\right)$.

א. חשב: $\frac{d|r'|}{dt}, \left|\frac{dr}{dt}\right|, \frac{dr}{dt}$.

ב. הוכח שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$.

א. גזור את הפונקציה.

ב. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$ ב- $t=0$.

ג. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2=z \\ x^2=y \end{cases}$, בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצא משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t)=(\sin t,e^{2t},t^2)$, ב- $t=0$.

6) נתונה העקומה $r(t)=\left(t^2,t,5\right)$.

א. מצא נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור $x-6y+4z-3=0$.

ב. מצא משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t)=\left(3\sin t,-2\cos t,t\right)$, ב- $t=0.5\pi$.

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

7) נתון $r(t)=\left(3\sin t,3\cos t,4t\right)$.

חשב את משיק היחידה **(T)**, נורמל היחידה **(N)** והבינורמל **(B)** של r.

8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכח שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t, אז $r(t)\cdot r'(t)=0$.
כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכח שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

מצא את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק, המתאימים ל- $t=2$.

10) נתון $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$.

על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית, הוכח כי $r'(t)=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$.

11) חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x=t^3+2t,\ y=-3e^{-2t},\ z=2\sin 5t$.

עבור החלקיק, בזמן $t=0$, חשב את:

א. המהירות.

ב. גודל המהירות.

ג. התאוצה.

ד. גודל התאוצה.

ה. הזווית בין וקטורֵי המהירות והתאוצה.

12) נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן: $\vec{r}(t)=\vec{v}_0t-\frac{1}{2}gt^2\vec{k}$,

כאשר $\vec{v}_0=\vec{v}(0)=(v_{01},v_{02},v_{03})$ המהירות ההתחלתית.

מצא את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13) חלקיק נע על העקומה $x=2\cos t,\ y=2\sin t$.

א. חשב את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t.

ב. שרטט את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t=0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.

ג. הראה שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14) מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t)=(2,-1,-10t)$.

ברגע $t=0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(0,0,100)$.

מצא את משואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

15) תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t)=\left(18\cos 3t,-18\sin 3t,0\right)$.

ברגע $t=0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(2,0,1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי) ובמהירות $v(0)=(0,2,4)$.

מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

תשובות סופיות

1) א1. $0<t\le 4$ א2. $r(4)=\left(\cos 4\pi,-\ln 4,\sqrt{2}\right)$

ב. $r(t)=\left(\sin t,\ \cos t,\cos^2 t\right)$ ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

2) א. $x=2\cos t\ ,\ y=3\sin t$
$r(t)=\left(2\cos t,3\sin t\right)$

ב. $x=2t-0.5,\ y=3t-1.5,\ z=t$
$r(t)=\left(2t-0.5,3t-1.5,t\right)$

ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^4$
$r(t)=\left(t,t^2,t^4\right)$

ד. $x=t,\ y=\frac{t^2}{4}-1,\ z=\frac{t^2}{4}+1$
$r(t)=\left(t,\frac{t^2}{4}-1,\frac{t^2}{4}+1\right)$

ה. $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=9\cos^2 t$
$r(t)=\left(3\cos t,3\sin t,9\cos^2 t\right)$

3) א. $(21,20,10e)$ ב. $\left(42t,42t,10e^t\right)$ ג. $(7,6,10e-10)$ ד. כן.   ה. כן.

4) א. $\frac{dr}{dt}=\left(-4\sin 4t,4\cos 4t,4t^3\right),\quad \left|\frac{dr}{dt}\right|=4\sqrt{1+t^6},\quad \frac{d\,|r'|}{dt}=\frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}}$

ב. שאלת הוכחה.

5) א. $r'(t)=\left(4\cos 4t,e^t+te^t,4t^3\right)$ ב. $(x,y,z)=(0,0,0)+s(4,1,0)$

ג. $(x,y,z)=(1,1,1)+s(1,2,4)$ ד. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$

6) א. $(9,3,5)$ ב. $2y+z=0.5\pi$

7) $T(t)=\frac{1}{5}\left(3\cos t,-3\sin t,4\right),\quad N(t)=(-\sin t,-\cos t,0),\quad B(t)=\frac{1}{5}\left(4\cos t,-4\sin t,-3\right)$

8) שאלת הוכחה.

9) המישור הניצב $x+4y+12z=114$, מישור הנישוק $24x-12y+2z=16$,
מישור היישור $76x+143y-54z=292$.

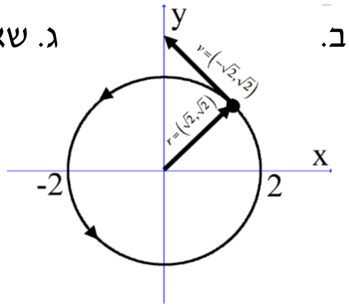
10) שאלת הוכחה.

11) א. $(2,6,10)$ ב. $\sqrt{140}$ ג. $(0,-12,0)$ ד. 12 ה. 120.46°

12) $v(t)=\left(v_{01},v_{02},v_{03}-gt\right),\ |v(t)|=\sqrt{(v_{01})^2+(v_{02})^2+(v_{03}-gt)^2},\ a(t)=\left(0,0,-g\right),\ |a(t)|=g$

13) א. $v(t)=(-2\sin t,2\cos t)$
$|v(t)|=2$

ב.



ג. שאלת הוכחה.

14) $r(t)=(2t,-t,-5t^2+100)$

15) $r(t)=(-2\cos 3t+4,2\sin 3t-4t,4t+1)$

גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

1) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z),\ \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכח:

א. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\operatorname{div}(\mathbf{F})+\operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב. $\nabla(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla(\mathbf{F})+\nabla(\mathbf{G})$

2) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.
הוכח כי: $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F})=(\nabla\varphi)\cdot\mathbf{F}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

3) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.

א. הוכח כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$. או בניסוח אחר $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$.

ב. הוכח כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0$. או בניסוח אחר $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$.

4) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z),\ \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כללים
הוכח כי: $\mathbf{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\mathbf{curl}(\mathbf{F})+\mathbf{curl}(\mathbf{G})$.

5) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי.
הוכח כי $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=-\nabla^2\mathbf{F}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi=\varphi(x,y,z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\mathrm{grad}\varphi$ מוגדר על ידי $\mathrm{grad}\varphi=\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

<u>הגדרה (דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)</u>

יהי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$.

מגדירים את **הדיברגנץ של F** המסומן $\mathrm{div}\mathbf{F}$, כך:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{div}\mathbf{F}=\nabla\cdot\mathbf{F}\\&\mathrm{div}\mathbf{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(f,g,h)\\&\mathrm{div}\mathbf{F}=f_x+g_y+h_z\end{aligned}}\ .$$

מגדירים את **ה- curl של F** המסומן $\mathrm{curl}\mathbf{F}$, על ידי:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{curlF}=\nabla\times\mathbf{F}\\&\mathbf{curlF}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(f,g,h)\\&\mathbf{curlF}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\f&g&h\end{vmatrix}\\&\mathbf{curlF}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\g&h\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial z}\\f&h\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\f&g\end{vmatrix}\\&\mathbf{curlF}=(h_y-g_z)\mathbf{i}+(f_z-h_x)\mathbf{j}+(g_x-f_y)\mathbf{k}\end{aligned}}$$

הערה: יש הרושמים $\mathrm{rot}\mathbf{F}$ במקום $\mathrm{curl}\mathbf{F}$.

GOOL
בשביל התירגול

אנליזה וקטורית

פרק 2 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

הצגה פרמטרית של ישר

שאלות

1) האם הנקודה $\mathrm{A}(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$?

2) האם הנקודה $\mathrm{B}(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x}=t(2,-1,5)$?

3) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור,
שעובר בנקודות $\mathrm{A}(-5,-2)$ ו- $\mathrm{B}(1,6)$.

4) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב,
שעובר בנקודות $\mathrm{C}(3,0,-2)$ ו- $\mathrm{D}(4,1,1)$.

5) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $\mathrm{G}(2,-7,1)$,
ומקביל לישר $\ell : \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

6) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$,
ומאונך לישר $\ell : \underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

7) ענה על הסעיפים הבאים:
א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell : \underline{x}=(1,2,3)+t(4,5,6)$.
כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות x, y ו- z.
ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $x=1+2t$, $y=10$, $z=4-t$.
כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

8) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

9) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $\mathrm{M}(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- z.

10) מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

11) ישר עובר בנקודה $(1,-1,4)$ וכיוונו $(4,10,2)$.
מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(4,10,2)$

ב. $\underline{x}=(3,4,5)+t(4,10,2)$

ג. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(2,5,1)$

ד. $\underline{x}=(5,9,6)+t(8,20,4)$

ה. כל התשובות נכונות.

12) ישר עובר דרך הנקודות $A(1,-1,2)$ ו- $B(4,0,1)$.
תאר את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נקי' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

13) הצג כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell:\begin{cases}x=1-4t\\ y=2t\\ z=2+10t\end{cases}$

ב. $\ell:\begin{cases}x=1+t\\ y=4\\ z=10t\end{cases}$

ג. $\ell:\ \dfrac{x-1}{2}=y+1=z-4$

ד. $\ell:\ x-1=y+10,\ z=4$

ה. $\ell:\ \begin{cases}x-y+z=1\\ 2x-y+3z=3\end{cases}$

תשובות סופיות

1) כן.

2) לא.

3) $\ell: \underline{x}=(-5,-2)+t(6,8)$

4) $\ell: \underline{x}=(4,1,1)+t(1,1,3)$

5) $\ell: \underline{x}=(2,-7,1)+s(-4,2,1)$

6) $\ell: \underline{x}=(1,2,3)+t(2,1,0)$

7) א. $x=1+4t\ ,\ y=2+5t\ ,\ z=3+6t$ ב. $\ell: \underline{x}=(1,10,4)+t(2,0,-1)$

8) $\ell: \underline{x}=t(0,1,0)$

9) $\ell: \underline{x}=(3,-1,4)+t(0,0,1)$

10) $(7,-5,0)$

11) ה

12) א. $\ell: \underline{x}=(1,-1,2)+t\cdot(3,1,-1)$ ב. $\ell: \begin{cases} x=1+3t \\ y=-1+t \\ z=2-t \end{cases}$

ג. $\ell: \dfrac{x-1}{3}=y+1=2-z$ ד. $\ell: \begin{cases} x-3y=4 \\ y+z=1 \end{cases}$

13) א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-4,2,10)$ ב. $\underline{x}=(1,4,0)+t(1,0,10)$

ג. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(2,1,1)$ ד. $(x,y,z)=(1,-10,4)+t(1,1,0)$

ה. $(x,y,z)=(2,1,0)+t(-2,-1,1)$

מצב הדדי בין ישרים

שאלות

1) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x}=(2,-3,0)+t(5,-1,2)$, $\ell_2 : \underline{x}=(12,-5,4)+s(-10,2,-4)$.

2) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x}=(0,1,-7)+t(-2,1,1)$, $\ell_4 : \underline{x}=(2,0,-6)+s(6,-3,-3)$.

3) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x}=(-3,5,1)+t(4,0,-1)$, $\ell_6 : \underline{x}=(-1,7,4)+s(-1,1,2)$.

4) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x}=(3,0,0)+t(2,-2,5)$, $\ell_8 : \underline{x}=(0,1,-5)+s(3,1,-2)$.

5) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x}=(-4,1,-1)+t(3,0,-1)$, $\ell_{10} : \underline{x}=s(6,0,-2)$.

6) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x}=(2,8,-1)+t(1,0,0)$, $\ell_{12} : \underline{x}=(-5,8,2)+s(2,0,-1)$.

7) מצא את ערכו של הפרמטר k שבעבורו הישרים הבאים:
$\ell_1 : \underline{x}=(k+1,1-k,6)+t(1,-2,2)$, $\ell_2 : \underline{x}=(k-1,7,-k)+s(1-k^2,k^2+2,-6)$

א. מקבילים.
ב. מתלכדים.

8) נתונות הנקודות: $\mathrm{A}(3,-1,5)$, $\mathrm{B}(k,-1,3)$, $\mathrm{C}(-6,3,-1)$, $\mathrm{D}(-2,3,k)$.
הראה כי לכל ערך של k הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

תשובות סופיות

1) מתלכדים.

2) מקבילים.

3) נחתכים, $(1,5,0)$.

4) מצטלבים.

5) מקבילים.

6) נחתכים, $(1,8,-1)$.

7) א. $k=2$ ב. $k=-2$

8) שאלת הוכחה.

הצגה פרמטרית של מישור

שאלות

1) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא: $\mathrm{C}(0,-3,1)$, $\mathrm{B}(3,6,2)$, $\mathrm{A}(1,-4,0)$.

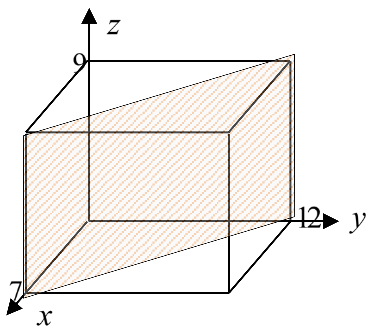
2) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $\mathrm{Q}(6,7,-1)$, ומכיל את הישר $\ell : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)$.

3) נתונים שני ישרים: $\ell_2 : \underline{x}=(2,16,11)+s(0,1,-6)$, $\ell_1 : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)$.
הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

4) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $\mathrm{D}(5,-2,-1)$ ומכיל את ציר ה- x.

5) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.



תשובות סופיות

1) $\pi : \underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$

2) $\pi : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$

3) $\pi : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)+s(0,1,-6)$

4) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$

5) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$

6) $\pi : \underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,9)+s(-7,12,0)$

משוואת מישור

שאלות

1) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x-y+3z-6=0$:

א. $\mathrm{D}(5,7,1)$ ב. $\mathrm{E}(2,-1,1)$

2) מצא את ערכו של k שבעבורו הנקודה $\mathrm{A}(1,k,-1)$ נמצאת על המישור: $\pi : kx-2y+(1+k)z+7=0$.

3) נתונה משוואת מישור: $\pi : 3x+2y-z-9=0$.
מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

4) נתונה משוואת מישור: $\pi : 4x+y-2z+8=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות

1) א. על המישור. ב. לא על המישור.

2) $k=3$

3) $(3,0,0)$, $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$, $(0,0,-9)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$

מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi : 2x++3z-12=0$.
כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצא את משוואת המישור.

3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

4) המישור π עובר בנקודות: $\mathrm{A}(1,0,-3)$, $\mathrm{B}(2,0,0)$, $\mathrm{C}(4,-1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

5) ענה על הסעיפים הבאים:
א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,-,5)$.
1. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
2. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.
ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.
ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

תשובות סופיות

1) $\pi : \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$

2) $\pi : -2x+3y+z+19=0$

3) $\pi : x-3y+8z=0$

4) $\pi : 3x+6y-z-6=0$

5) א. 1. $\pi : \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ 2. $-2x+3y+z-1=0$
ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא.

מישורים המקבילים לצירים

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi : (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות

1) $k=3$

2) 6 יח"נ.

מצב הדדי בין ישר ומישור

1) נתונים הישר והמישור הבאים:

$\pi : 2x-y-3z+6=0$, $\ell : \underline{x}=(5,0,1)+t(4,1,-2)$.

קבע את המצב ההדדי שביניהם.

אם הישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך.

2) נתונים הישר והמישור הבאים:

$\pi : x-3y+2z-11=0$, $\ell : \underline{x}=(2,-1,6)+t(-1,1,2)$.

קבע את המצב ההדדי שביניהם.

אם הישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך.

3) נתונים הישר והמישור הבאים:

$\pi : 2x+y+6z+11=0$, $\ell : \underline{x}=(-6,1,0)+t(3,0,-1)$.

קבע את המצב ההדדי שביניהם.

אם הישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך.

4) נתונים הישר והמישור הבאים:

$\pi : 2x-y+z-4=0$, $\ell : \underline{x}=(1,a,3)+t(4,1-b,0)$.

מצא את ערכי a ו- b בעבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות

1) הישר חותך, $(1,-1,3)$.

2) מקבילים.

3) הישר מוכל.

4) $a=1$, $b=-7$

מצב הדדי בין מישורים

שאלות

1) נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1 : 2x-y+4z-5=0 \ , \ \pi_2 : 4x-2y+8z-10=0$

ב. $\pi_3 : x+3y-z+1=0 \ , \ \pi_4 : 3x+9y-3z-8=0$

ג. $\pi_5 : 5x-2y-2z+3=0 \ , \ \pi_6 : 2x+3y+z-5=0$

2) נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1 : 2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0 \ , \ \pi_2 : 4x+12y-4z+k^2-2=0$.

מצא את ערכי k עבור המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

תשובות סופיות

1) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

2) א. $k \neq 2,-3$ ב. $k=-3$ ג. $k=2$

ישר חיתוך בין מישורים

שאלות

1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x+y-2z+2=0$, $\pi_2 : 2x-y+z+10=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x+2y-3z+2=0$, $\pi_4 : 2x-3y+z+4=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x-3y+z+2=0$, $\pi_6 : 5x-2z+20=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x-2y-z+6=0$, $\pi_8 : z-2=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

5) מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x-5y+z+18=0$
עם המישור $[xz]$.

6) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x-3y+2z-1=0$, $\pi_2 : 4x+y-z-6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות

1) $\ell : \underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$

2) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$

3) $\ell : \underline{x}=(0,4,10)+t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$

5) $\ell : \underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$

6) $\ell : \underline{x}=t(1,9,13)$

זווית בין שני ישרים

שאלות

1) מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x}=(4,0,0)+t(6,8,1)$, $\ell_2 : \underline{x}=s(-4,2,-4)$

ב. $\ell_1 : \underline{x}=(10,17,-18)+t(3,0,-6)$, $\ell_2 : \underline{x}=(6,5,4)+s(0,4,0)$

2) מצא את הזווית, שבין ישר העובר דרך הנקודות $B(6,0,-2)$, $A(3,4,6)$,
וישר העובר דרך הנקודות: $D(-1,4,2)$, $C(6,5,1)$,
וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

3) נתונות הנקודות $C(3,-1,2)$, $B(4,2,-1)$, $A(1,-3,0)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב, העובר דרך הנקודות:
1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $D(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$, נמצאת על הישר AB, שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

4) נתון מישור שמשוואתו: $3x-4y+6=0$. הנקודות $B(-2,y,-1)$, $A(x,6,1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C=11$.
מצא את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא: $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות

1) א. $78.521°$ ב. $90°$

2) $63.37°$. הישרים מצטלבים.

3) א. 1. $\ell : \underline{x}=(1,-3,0)+t(3,5,-1)$ א. 2. $\ell : \underline{x}=(4,2,-1)+t(-1,-3,3)$

א. 3. $\ell : \underline{x}=(1,-3,0)+t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. $35.477°$.

4) $C(0,2,11)$ או $C(0,28.45,11)$

זווית בין ישר ומישור

שאלות

1) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\ell : \underline{x}=(-2,0,5)+t(-2,1,2)$, $\pi : 3x-2y+2z+9=0$.

2) נתונות הנקודות $A(1,-1,2)$, $B(0,2,-1)$, $C(1,2,5)$, $D(-7,3,-1)$.
מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה היא: $2x+y-2z-6=0$. קדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$.
מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים: $x_B=z_B=-1$.

תשובות סופיות

1) $18.87°$ **2)** $44.83°$ **3)** $14.9°$

זווית בין שני מישורים

שאלות

1) מצא את הזווית שבין המישורים $\pi_1 : 4x+3y+z-12=0$ ו- $\pi_2 : 4x-7y+5z+3=0$.

2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקודקודיה הם:
$A(0,2,-5)$, $B(3,-1,1)$, $C(7,-1,-5)$, $D(3,2,0)$.
מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

3) מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות

1) $90°$ 2) $87.539°$ 3) $32.312°$

מרחק בין שתי נקודות במרחב

שאלה

1) נתונות הנקודות: $A(2,4,-5)$, $B(0,-2,6)$ ו- $C(k,-1,13-k)$.
מצא ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה-שוקיים: $AB = AC$.

תשובה

1) $k = 8$ או $k = 12$.

מרחק בין נקודה לישר

שאלות

1) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell : \underline{x}=t(2,0,-7)$.

2) נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$, $B(2,-1,0)$, $A(1,6,-1)$.
חשב את שטח המשולש ABC.

3) על הישר $\ell : \underline{x}=(5,-2,0)+t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$. מצא את שיעורי הקדקוד B
(שתי אפשרויות).

תשובות סופיות

1) $\sqrt{54}$

2) 12.75 יח״ש.

3) $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.

מרחק בין נקודה למישור

שאלות

1) מצא את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

2) מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell:\underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

3) נתונים ישר ומישור: $\pi:2x+4y-4z+15=0$, $\ell:\underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות

1) $2\frac{1}{2}$

2) $\pi:3x-2y+z+21=0$ או $\pi:3x-2y+z-7=0$.

3) $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

מרחק בין ישרים מקבילים

שאלות

1) נתונות הנקודות $D(12,11,-8)$, $C(6,1,4)$, $B(12,-5,2)$, $A(15,0,-4)$.

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$l_1: \underline{x}=(2,0,-1)+t(1,-2,1)$, $l_2: \underline{x}=(-8,-1,19)+s(-4,1,6)$

$l_3: \underline{x}=(-2,7,-11)+r(-2,4,-2)$, $l_4: \underline{x}=(-2,1,5)+q(4,-1,-6)$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

תשובות סופיות

1) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

2) א. הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

מרחק בין ישר למישור

שאלות

1) נתונה משוואת מישור : $4x-z+6=0$.

א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

ב. מצא את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

2) נתונים ישר ומישור: $\pi: 3x+12y-4z+k-10=0$, $l: \underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות

1) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$

2) א. הוכחה. ב. $k=2,4$

מרחק בין מישורים מקבילים

שאלות

1) נתונה משוואת מישור : $\pi\ :\ 3x-4y+5z-10=0$.
מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

2) נתונים שני מישורים מקבילים : $\pi_1\ :x-2y-2z+6=0$, $\pi_2\ :x-2y-2z-12=0$.
מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים,
והנמצא במרחק שווה משניהם.

3) נתונים שישה מישורים :

$\pi_1:2x+y-2z-11=0,\quad \pi_2:x+2y+2z+5=0,\quad \pi_3:2x-2y+z+3=0$

$\pi_4:2x+y-2z+7=0,\quad \pi_5:x+2y+2z-1=0,\quad \pi_6:kx+qy+z+p=0$

מצא את ערכי הפרמטרים k, q ו- p , שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה,
שנפחה 60 יחידות נפח.

4) כדור, שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$, חסום בקובייה, שבסיסה התחתון מונח
על מישור, שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות

1) $\pi_1\ :\ 3x-4y+5z+10=0$, $\pi_2\ :\ 3x-4y+5z-30=0$

2) $\pi_3\ :x-2y-2z-3=0$

3) $k=2$, $q=-2$, $p=18,-12$

4) $12x+4y-3z-136=0$

מרחק בין ישרים מצטלבים

שאלות

1) נתונים שני הישרים הבאים : $\ell_1 : \underline{x} = (-3,2,6) + t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0,2,-7) + s(1,0,-1)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

2) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1 : \underline{x} = (-1,0,5) + t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2,-1,9) + s(6,-1,0)$.
מצא את המרחק שביניהם.

3) מצא את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4,-2,-1) + t(-1,1,6)$, מציר ה- z.

תשובות סופיות

1) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.

2) 1.567 יח"א.

3) $\sqrt{2}$ יח"א.

היטלים ונקודות סימטריה

שאלות

1) נתונה נקודה $A(1,-1,3)$ ונתון הישר $\ell: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$.

א. מצא את היטל הנקודה A על הישר.

ב. מצא את הנקודה הסימטרית ל-A ביחס לישר.

2) נתונה נקודה $A(0,0,1)$ ונתון מישור $7x+7y-z=8$.

א. מצא את היטל הנקודה A על המישור.

ב. מצא את הנקודה C, הסימטרית ל-A, ביחס למישור.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(1,3,2)$ ביחס למישורי הצירים.

ב. מצא את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(x,y,z)$ ביחס למישורי הצירים.

4) נתונות 4 נקודות במרחב: $A(0,2,4),\ B(-2,6,2),\ C(2,-4,8),\ D(10,2,0)$.
מצא את היטל הישר AD על המישור ABC.

תשובות סופיות

1) א. $B(0,1.5,-1.5)$ ב. $C(-1,4,-6)$

2) א. $B\left(\frac{7}{11},\frac{7}{11},\frac{10}{11}\right)$ ב. $C\left(\frac{14}{11},\frac{14}{11},\frac{9}{11}\right)$

3) א. $B_{xy}(1,3,-2),\ C_{xz}(1,-3,2),\ D_{yz}(-1,3,2)$
ב. $B_{xy}(x,y,-z),\ C_{xz}(x,-y,z),\ D_{yz}(-x,y,z)$

4) $\underline{x}=(0,2,4)+t(0,1,1)$

שאלות מסכמות

1) נתונות הנקודות $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצא את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

2) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים, מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצא גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$, $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$

ב. $\underline{x}=(2,3,1)+s(12,-3,1)$, $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$

ג. $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$, $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$

ד. $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$, $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$

3) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

4) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם.
במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D', שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא: $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא: $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

6) הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור, שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצא את משוואת המישור, המשיק לכדור בנקודה A.

7) נתונים מישור וישר: $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$, $\ell : \underline{x} = (1,5,5) + t(1,1,0)$.
מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z, הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

8) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

9) נתונים ישר ומישור: $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$, $\ell_1 : \underline{x} = (0,-3,0) + t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, ℓ_2, המקביל למישור π, עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π, הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
מצא את שטח המלבן PQQ'P'.
(הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2)

10) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$.
ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של $60°$ עם הישר $\ell_2 : \underline{x} = (1,3,-4) + t(1,1,0)$.
מצא את משוואת המישור π_3.

תשובות סופיות

1) א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. הזווית היא: $47.6°$.

3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל.
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$, הזווית היא: $40.78°$.

4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$, זווית: $63.6°$.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

5) $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$, $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

6) $\pi: -3x+y+3z+15=0$.

7) $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

8) $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

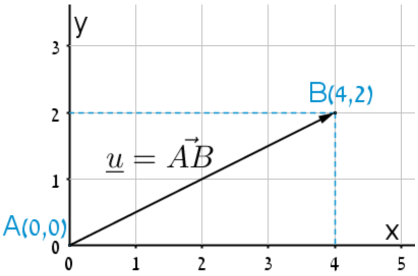
9) 10.467 יח"ש.

10) $\pi_3: x+2y-z-58=0$ או $\pi_3: 2x+y+z-5=0$

סיכום כללי

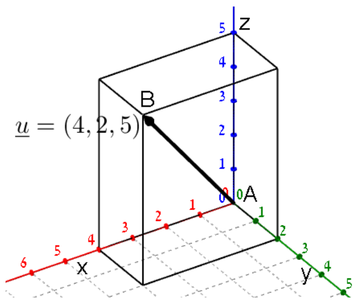
הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.



דוגמאות:

- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.

ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overline{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2},y_M=\frac{y_1+y_2}{2},z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$; $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$.

מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

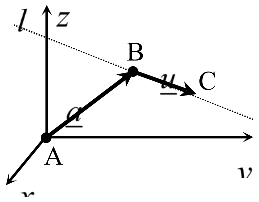
מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$, $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

גודלו של וקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.



הווקטור $\underline{a}$ נקרא **וקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.
הווקטור $\underline{u}$ נקרא **וקטור הכיוון של הישר.**
זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell:\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים: $\underline{u}=\overline{BC}=C-B=(7,0,10)-(5,3,1)=(2,-3,9)$; $\underline{a}=\overline{AB}=B-A=(5,3,1)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l:\underline{x}=(5,3,1)+t(2,-3,9)$.

***הערות:**

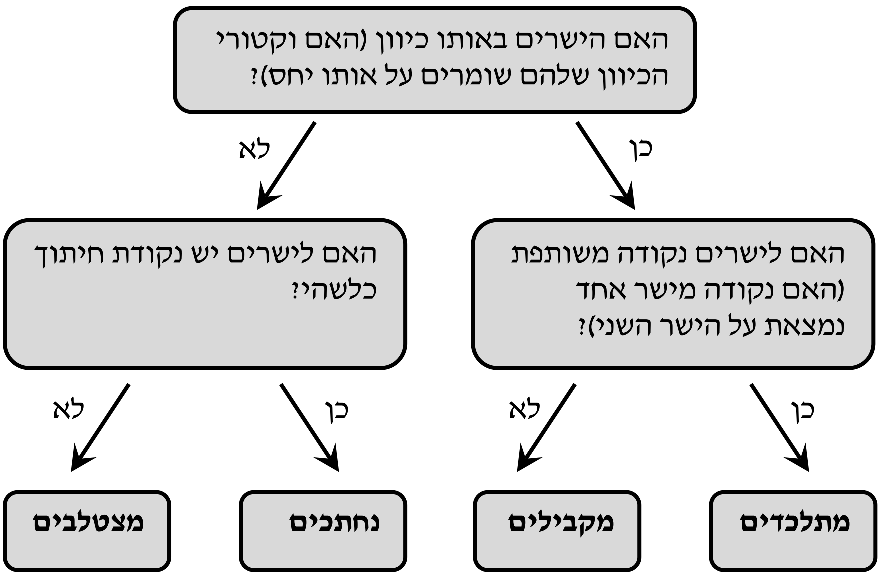
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l:\underline{x}=(7,0,10)+t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים

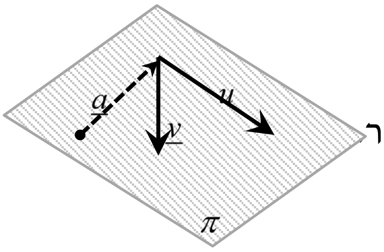
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ הוא **ווקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם **וקטורי הכיוון של המישור.**
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi: \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}+s\underline{v}$
כאשר t,s הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π.

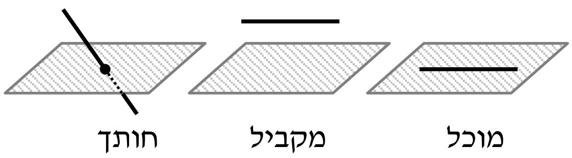
משוואת מישור

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi: \ ax+by+cz+d=0$,
כאשר: (x,y,z) היא נקודה על המישור והמקדמים a,b,c הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h}=(a,b,c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.



כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך וקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1: \ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2: \ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

מתלכדים	מקבילים	נחתכים
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$	כל מצב אחר

חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.
- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1=\underline{a_1}+t\underline{u_1}$ ו- $l_2=\underline{a_2}+s\underline{u_2}$ תחושב: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{u_1}\cdot\underline{u_2}}{|\underline{u_1}|\cdot|\underline{u_2}|}\right|$.
- זווית חדה α בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi: \ ax+by+cz+d=0$

  תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.
- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1: \ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

  ו- $\pi_2: \ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{h_1}\cdot\underline{h_2}}{|\underline{h_1}|\cdot|\underline{h_2}|}\right|$.

חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $\mathrm{A}\left(x_1, y_1, z_1\right)$ ו- $\mathrm{B}\left(x_2, y_2, z_2\right)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$.

2. מרחק בין נקודה $\mathrm{A}\left(x_1, y_1, z_1\right)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l: \underline{x}=\underline{a}+t \underline{u}$ יחושב ע״י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

3. מרחק בין נקודה $\mathrm{A}\left(x_1, y_1, z_1\right)$ למישור: $\pi: \ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע״י: $d=\left|\frac{a x_1+b y_1+c z_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע״י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.

5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע״י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.

6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:

   א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

   ב. שימוש בנוסחה: $d=\left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע״י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

אנליזה וקטורית

פרק 3 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

1) תהי $f(x,y)=x^2+y^2$.

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3,4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f, העובר דרך $(3,4)$.

2) תהי $f(x,y)=3x^2y$.
חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

3) תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$.
חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

4) תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$.
חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היחידה,
היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x.

5) תהי $f(x,y)=xy^2$.
חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$.

6) תהי $f(x,y,z)=x^2y^2z$.
חשב את הנגזרת המכוונת של f, בנקודה $(2,1,4)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$.

7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x,y), נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,
מצא את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון לנקודה $(2,6)$.

8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$
בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית, וחשב את ערכה.

9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$,
בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית, וחשב את ערכה.

10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$, ואני נמצא
בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11) נתונה הפונקציה $f(x,y)=4x^2y$.

א. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .

ג. מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2yz^4$.
מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2,-1)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x ,
ו- $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- z .
הנח שהזווית עם ציר ה- y חדה.

13) נתונה הפונקציה $f(x,y)=xy^2-x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1,1)$.

א. חשב את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q ,
בכיוון וקטור שיוצר זווית $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצא וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=0$.

ג. האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=6$.

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+4y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכח כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ג. חשב את $\nabla f(0,0)$.

ד. בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ה. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0,0)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=(1,-1)$.

ו. הסבר מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

15) הפונקציה $f(x,y,z)=2x^2+4y^2+z^2$, מתארת טמפרטורה בנקודה (x,y,z).

א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2,4,1)$?

ב. אוסף הנקודות (x,y,z), בהן הטמפרטורה שווה 20°,
מהווה משטח מפורסם. מהו?

ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2,4,1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר.
באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$),
בנקודה $(2,4,1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר,
אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן.
באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

16) גֻּלָּה מוחזקת בנקודה $(2,1,14)$, שעל המשטח $z=20-x^2-2y^2$.
משחררים את הגֻּלָּה והיא מתחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

א. מהו המשטח הנתון?

ב. מצא את הווקטור $\vec{u}=(a,b,c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֻּלָּה.

17) תהי $f=f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:

1. $f(x,x^2)=\dfrac{x^2}{2}+x^4$ לכל x.

2. הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$, בנקודה $(1,1)$, בכוון הווקטור $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$,
שווה 1.

חשב את הגרדיאנט של f בנקודה $(1,1)$.

18) נתונה $f=f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f\left(x,y,x^2+y^2\right)=2x+y$.
נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,2,4)=-\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u}=(-2,1,2)$.
חשב את $\nabla f(0,2,4)$.

19) נתונה הפונקציה $f(x,y)=12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשב את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8,1)$ בכיוון הווקטור $\vec{u}=(3,4)$.

ב. בדוק האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה (0,0).

ג. חשב $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ד. באיזה כיוון α , הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ תהיה מקסימלית?
מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20) נתונה הפונקציה $f\left(x,y\right)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}+20x+21y & x\neq 0 \\ 21y & x=0 \end{cases}$.

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)<m$, לכל וקטור יחידה $\hat{u}$?

ב. מצא וקטור יחידה $\hat{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=0$.

הערות סימון

1) במישור $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{j}=(0,1)$, $\mathbf{i}=(1,0)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:
$\vec{u}=(x,y)$ **או** $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.
למשל: $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4)$.
במרחב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{k}=(0,0,1)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{i}=(1,0,0)$,
ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v}=(x,y,z)$, **או** $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.
למשל: $\vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4,5)$.

2) יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם $\underline{u}$ או $\mathbf{u}$.

3) וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

תשובות סופיות

1) א. הגרדיאנט $(6,8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.

2) $\frac{48}{5}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $7.5\sqrt{2}$

5) $3\sqrt{13}$ 6) $\frac{88}{3}$ 7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1,1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.

9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור (12,14,-12) ושווה ל-22.

10) בכיוון הווקטור $(-2,2,-2)$.

11) א. $8\sqrt{3}+2$ ב. $8+2\sqrt{3}$ ג. $\ell:\ (1,2,4)+t\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},8+2\sqrt{3}\right)$

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}-2$

13) א. $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ב. $\vec{u}=(5,1)$ (יש עוד). ג. לא.

14) א. הוכחה. ב. $f_x=1,\ f_y=0$ ג. $\nabla f(0,0)=(1,0)$
ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0

15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הוקטור $(8,32,2)$.
ד. בכיוון הווקטור $(8,32)$.

16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u}=(4,4,-32)$

17) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

18) $\nabla f(0,2,4)=(2,-3,1)$

19) א. $\frac{67}{5}$ ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12\left(\cos\alpha-\cos^3\alpha\right)^{\frac{1}{3}}$
ד. $\alpha=54.73^\circ$, $Max\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

20) א. $m>29$ ב. $\hat{u}=(21/29,-20,29)$ (יש אחרים).

אנליזה וקטורית

פרק 4 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות **3-1**:

1) $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

2) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

3) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

4) D – משולש בעל הקודקודים: $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$.

5) D – משולש בעל הקודקודים: $O(0,0), A(2,1), B(-2,1)$.

6) D – טרפז בעל הקודקודים: $O(0,0), A(1,0), B(1,2), C(0,1)$.

7) D – עיגול $x^2+y^2\le 1$.

8) D – עיגול $x^2+y^2\le y$.

9) $D=\left\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\right\}$

10) $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

חשב את האינטגרלים בשאלות **11-15**:

11) $\iint\limits_D xy^2dxdy$, כאשר D חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

12) $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר D חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

13) $\iint\limits_D |x\,y|dxdy$, כאשר D עיגול בעל הרדיוס a , שמרכזו בראשית.

14) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=x$, $y=x+a$, $y=a, y=3a$ $(a>0)$.

15) $\iint\limits_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2}dA$, כאשר D התחום הכלוא בין $x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}$.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{a^3}{3}\pi$

4) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$

5) $\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy+\int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

7) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

8) $\int_{-1/2}^{1/2} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$

9) $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

10) $\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx+$
$+\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

11) $\frac{32}{21}$

12) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

13) $\frac{a^4}{2}$

14) $14a^4$

15) 0

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החלף סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-6**:

1) $\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)dydx$

2) $\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

3) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

4) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$

5) $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

6) $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)dydx$

חשב את האינטגרלים הבאים (רמז: שנה את סדר האינטגרציה):

7) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}dxdy$

8) $\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

9) $\int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy \quad (x,y\geq 0)$

10) $\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2)dydx$

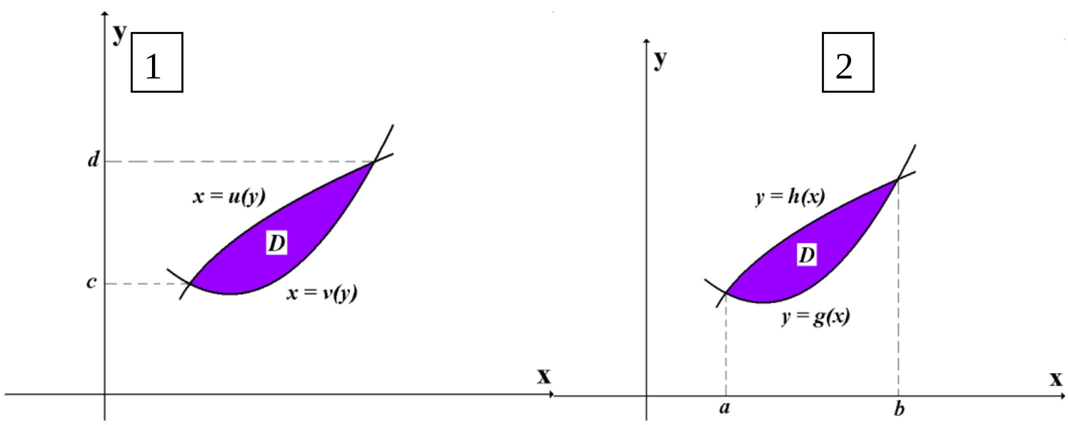
הערות סימון

$\boxed{1}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dydx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

$\boxed{2}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$



לתשומת ליבכם, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך: $\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישומים $dxdy$ ו- $dydx$ זהים.

תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

7) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

8) $\frac{241}{60}$

9) $\frac{1}{4}(e-2)$

10) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$

אנליזה וקטורית

פרק 5 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

שימושי האינטגרל הכפול

שאלות

בשאלות **1-4** חשב את **שטחי התחומים** החסומים ע"י העקומים:

1) $x+y=2,\quad x^2-4y=4$

2) $(a>0)\quad xy=a^2,\quad x+y=\frac{5}{2}a$

3) $y^2=9-x,\quad y^2=9-9x$

4) $x+y=3,\quad y^2=4x$

בשאלות **5-10** חשב את **נפחי הגופים** החסומים ע"י המשטחים:

5) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

6) $z=0,\ z=x^2+y^2,\ y=1,\ y=x^2$

7) $(x>0)\ z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

8) $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

9) $(z\ge 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

10) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

11) ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$,
יש פונקציית צפיפות $\delta(x,y)=xy$.
א. חשב את מסת הלוח.
ב. חשב את מרכז הכובד של הלוח.

12) ללוח דק בצורת מלבן $R=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2},\quad -\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\right\}$,
יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).
חשב את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- z.
בטא את תשובתך באמצעות המסה של הלוח, M.

13) מצא את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2+z^2=4$, הנמצא מעל למלבן
$R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 4\}$, שבמישור xy.

תשובות סופיות

1) $\frac{64}{3}$

2) $a^2\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)$

3) 32

4) $\frac{64}{3}$

5) $\frac{5}{6}$

6) $\frac{88}{105}$

7) $\frac{17}{6}$

8) $16\frac{1}{5}$

9) $\frac{8}{3}$

10) 36

11) א. $\frac{1}{24}$ ב. $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$

12) $\frac{M\left(a^2+b^2\right)}{12}$

13) $\frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)$

אנליזה וקטורית

פרק 6 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

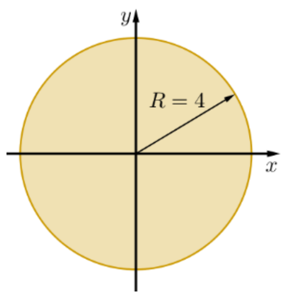
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

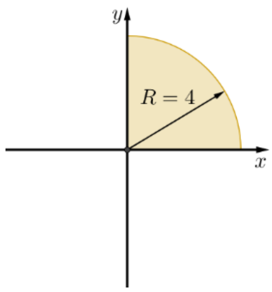
1) חשב $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשב את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

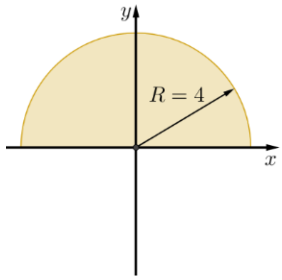
א.



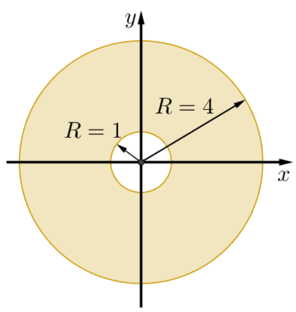
ב.



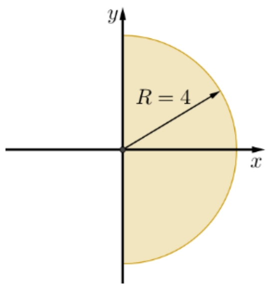
ג.



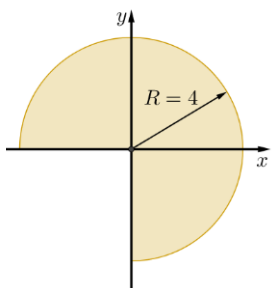
ד.



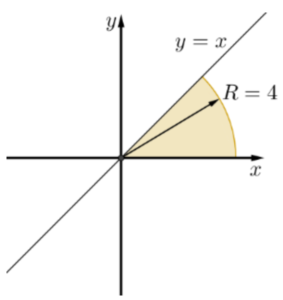
ה.



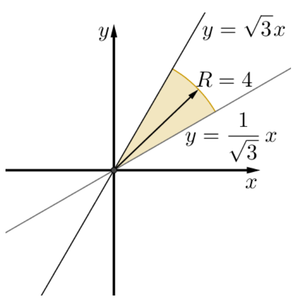
ו.



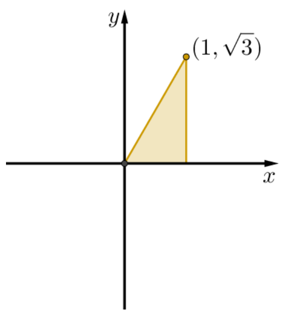
ז.



ח.



ט.



חשב את האינטגרלים בשאלות **2-17**, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

2) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

3) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

4) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

5) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

6) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

7) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

8) $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} xdxdy$

9) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} ydydx$

10) $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

11) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dxdy$

12) $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{\ln^2 2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

13) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$

14) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dydx$

15) $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2dxdy$

16) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy$

17) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}dydx$

בשאלות **18-20** חשב את **נפח הגוף** המתואר:

18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2+y^2+z^2=9$ לבין הגליל $x^2+y^2=1$.

19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=2y$, בין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=x$, בין הפרבולואיד $z=1-x^2-y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

21) חשב את **שטח התחום** החסום על ידי $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $y=x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$

ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$

2) $\frac{\pi}{2}$

3) π

4) $\frac{\pi}{8}$

5) $\frac{\pi}{2}$

6) πa^2

7) 2π

8) 36

9) $\frac{4}{3}$

10) $\pi \ln\frac{e}{2}$

11) $\pi(4-\pi)$

12) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{e}$

13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$

14) $\frac{\pi}{2}+1$

15) $-\frac{4}{5}$

16) $\pi \ln\frac{4}{e}$

17) π

18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$

19) $\frac{32}{9}$

20) $\frac{5\pi}{32}$

21) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

אנליזה וקטורית

פרק 7 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

1) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=x,\ y=x-1,\ y=1-x,\ y=3-x$.

2) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{x},\ y=0.5x,\ y=x$.

3) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $\mathrm{C}(1,1),\ \mathrm{B}(2,0),\ \mathrm{A}(0,0)$.

4) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $\mathrm{D}(1,5),\ \mathrm{C}(3,-1),\ \mathrm{B}(1,-3),\ \mathrm{A}(-1,3)$.

5) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2}dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

6) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $xy^2=2,\ xy^2=1,\ y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{x}$.

7) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y}dA$, כאשר $R=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\le 1\right\}$.

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}\ln 3$

2) $\frac{1}{2}(e^2-e)\ln 2$

3) $1-\frac{1}{2}\sin 2$

4) 192

5) 96π

6) $\frac{3}{4}$

7) $e-\frac{1}{e}$

אנליזה וקטורית

פרק 8 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים משולשים ושימושיהם

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות **1-4**:

1) $\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xzdydxdz$

2) $\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dxdzdy$

3) $B=\{(x,y,z)|0\le x\le 1, -1\le y\le 2, 0\le z\le 3\}$, $\iiint\limits_B xyz^2dV$

4) $B=\{(x,y,z)|0\le x\le 1 \,,\, 0\le y\le \sqrt{x} \,, 0\le z\le 1+x+y\}$, $\iiint\limits_B 6xydV$

חשב את האינטגרלים בשאלות **5-8**, על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

5) $\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dxdydz$

6) $\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dydxdz$

7) $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin \pi y^2}{y^2} dxdydz$

8) $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dydzdx$

בשאלות **9-14** חשב את **נפחי הגופים** החסומים על ידי המשטחים:

9) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

10) $z=0\,,\ z=x^2+y^2\,,\ y=1\,,\ y=x^2$

11) $(x\geq 0)\ \ z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\dfrac{2}{x}$

12) $z=0,\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

13) $(z\geq 0)\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\ z=y$

14) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

15) חשב את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r.
הנח שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל,
כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x,y,z)=kz\ \ (k>0)$.

16) חשב את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)
$V=\{(x,y,z)\,|\,0\leq x\leq a\ ,\ 0\leq y\leq b\ ,\ 0\leq z\leq c\}$, סביב ציר ה- z.
בטא את תשובתך באמצעות המסה של התיבה, M.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)$

3) $\frac{27}{4}$

4) $\frac{65}{28}$

5) $2\sin 4$

6) $3e-6$

7) 4

8) $\frac{\sin^2 4}{2}$

9) $\frac{5}{6}$

10) $\frac{88}{100}$

11) $\frac{17}{6}$

12) $16\frac{1}{5}$

13) $\frac{8}{3}$

14) 36

15) $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)=\left(0,0,\frac{2h}{3}\right),\quad M=\frac{1}{2}\pi kh^2r^2$

16) $\frac{1}{3}M\left(a^2+b^2\right)$

אנליזה וקטורית

פרק 9 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

בשאלות **1-4** חשב את האינטגרלים המשולשים :

1) $$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dzdydx$$

2) $$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dzdydx$$

3) $$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$$

4) $$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dzdydx$$

5) גוף כלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישור xy מלמטה, לבין מחצית פני הכדור $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ מלמעלה.
חשב את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

6) חשב את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ מלמעלה, ועל ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמטה.

7) מצא את הנפח של התחום מעל המישור xy , החסום על ידי הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ והגליל $x^2+y^2=a^2$.

תשובות סופיות

1) 4

2) $\frac{\pi}{3}$

3) $\frac{24\pi-32}{9}$

4) $\frac{32\pi}{5}$

5) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1107/488)\ ,\ V=\frac{122}{3}\pi$

6) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1.5/(2-\sqrt{2}))\ ,\ V=\frac{64}{3}\pi(2-\sqrt{2})$

7) $\frac{\pi}{2}a^4$

אנליזה וקטורית

פרק 10 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

שאלות

1) חשב את $\iiint\limits_G (z-y)^2 xydV$, כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים
$xy=4,\quad xy=2,\quad z=y+1,\quad z=y,\quad x=3,\quad x=1$.

2) חשב את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3) חשב את $\iiint\limits_G x^2 dV$, כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4) חשב את **נפח** התחום המוגבל על ידי המשטחים:
$y=4z^2,\quad y=z^2,\quad y=4x-12,\quad y=4x,\quad y=2z,\quad y=z$.

5) חשב את $\iiint\limits_G \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}\,dV$, כאשר G הוא כדור שמרכזו בנקודה $(1,2,4)$ ורדיוסו 1.

תשובות סופיות

1) $2\ln 3$

2) $\frac{4}{3}\pi abc$

3) $\frac{4}{15}\pi a^3bc$

4) $\frac{105}{32}$

5) π

אנליזה וקטורית

פרק 11 - אינטגרלים קוויים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים קוויים ושימושיהם

* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

שאלות

אינטגרל קווי מסוג I

בשאלות **1-4** חשב את האינטגרל $\int_C f(x,y)ds$, כאשר:

1) $f(x,y)=1-x^2 \quad ; \quad C:\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$

2) $f(x,y)=x \quad ; \quad C:\ x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le \pi$

3) $f(x,y)=x+y$; C קטע של ישר המחבר את $\mathrm{O}(0,0)$ עם $\mathrm{A}(1,2)$.

4) $f(x,y)=x+y^2$; C היקפו של $\Delta\mathrm{OAB}$: $\mathrm{O}(0,0),\ \ \mathrm{A}(0,1),\ \ \mathrm{B}(1,0)$.

בשאלות **5-6** חשב את האינטגרל $\int_C f(x,y,z)ds$, כאשר:

5) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \ ; \ C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t \ \ 0\le t\le \pi$

6) $f(x,y,z)=x^3+3z \ ; \ C:\ x=t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}t^2,\ z=\frac{1}{3}t^3 \ \ 0\le t\le 3$

7) חשב את **אורך העקום** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

8) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t\ \ (0\le t\le \pi)$.
חשב את **מסת** הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x,y,z)=kz\ \ (k>0)$.

אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות **9-10** חשב:

9) $C:\ x=\cos t,\ \ y=\sin t\ \ 0\le t\le \frac{\pi}{2}\ ;\ \int_C 2xydx+(x^2+y^2)dy$

10) $C:\ x=t,\ \ y=t^2\ \ 0\le t\le 1\ ;\ \int_C (2x+y)dx+(x^2-y)dy$

11) חשב $\int_C ydx+x^2dy$, כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$, ו- C נתון ע"י המשוואה:

א. $y=2x$

ב. $y=x^2$

12) חשב $\int_{(1,1)}^{(4,2)}(x+y)dx+(y-x)dy$, אם העקום נתון על ידי:

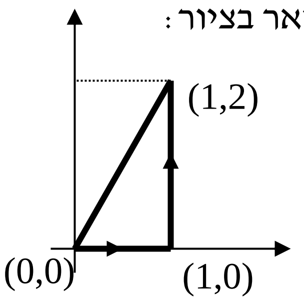
א. הפרבולה $y^2=x$.

ב. קו ישר.

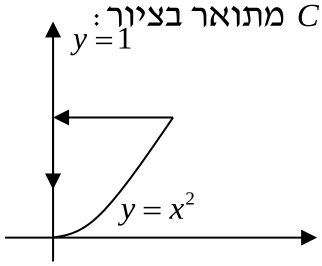
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.

ד. העקום: $x=2t^2+t+1,\quad y=t^2+1$.

13) חשב $\int_C x^2ydx+xdy$, כאשר המסלול C מתואר בציור:



14) חשב $\int_C (x-y^2)dx+dy$, כאשר המסלול C מתואר בציור:



15) אם $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2-6yz\right)\mathbf{i}+\left(2y+3xz\right)\mathbf{j}+\left(1-4xyz^2\right)\mathbf{k}$,

חשב את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$, לאורך המסלולים:

א. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

ב. הקוים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

בשאלות **16-17** חשב את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, כאשר:

16) $F(x,y)=\left(x^2y^3,-y\sqrt{x}\right),\quad r(t)=\left(t^2,-t^3\right),\quad 0\le t\le 1$

17) $F(x,y,z)=\left(\sin x,\cos y,xz\right),\quad r(t)=\left(t^3,-t^2,t\right),\quad 0\le t\le 1$

18) נתון שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=x^3y\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$.

א. חשב את ה**עבודה** שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה $y=x^2$ מ- $(-2,4)$ עד $(1,1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1,1)$ עד $(-2,4)$?

19) חשב את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$, על חלקיק הנע לאורך העיקול $(0\le t\le 1)$ $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$.

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=\int_C\left(f,g,h\right)\cdot\left(dx,dy,dz\right)=\int_C fdx+gdy+hdz$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot dr=\int_C\left(A_1,A_2,A_3\right)\cdot\left(dx,dy,dz\right)=\int_C A_1dx+A_2dy+A_3dz$$

תשובות סופיות

1) π

2) $\frac{16}{3}$

3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

4) $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

5) $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$

6) $\frac{567}{2}$

7) 6

8) $\sqrt{5}k\pi^2$

9) $\frac{1}{3}$

10) $\frac{4}{3}$

11) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

12) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$

13) $\frac{1}{2}$

14) $\frac{4}{5}$

15) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$

16) $-\frac{59}{105}$

17) $\frac{6}{5}-\sin 1-\cos 1$

18) א. 3 ב. -3

19) 1

הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

עקום	הצגה פרמטרית	דוגמה
$y=f(x)\ (a\le x\le b)$	$x=t,\ y=f(t)\ (a\le t\le b)$	$y=x^2\ (1\le x\le 2)$ $\Downarrow$ $x=t,\ y=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x=f(y)\ (a\le y\le b)$	$y=t,\ x=f(t)\ (a\le t\le b)$	$x=y^2\ (1\le y\le 2)$ $\Downarrow$ $y=t,\ x=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t, y=r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t, y=2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t, y=-r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t, y=-2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t, y=5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=-b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t, y=-5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
ישר פרמטרי במישור מהנקי' (x_0,y_0) לנקי' (x_1,y_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מהנקי' $(1,2)$ לנקי' $(3,4)$ $x=1+2t$ $y=2+2t$ $(0\le t\le 1)$
ישר פרמטרי במרחב מהנקי' (x_0,y_0,z_0) לנקי' (x_1,y_1,z_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $z=z_0+t(z_1-z_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מ- $(1,2,3)$ ל- $(4,7,9)$ $x=1+3t$ $y=2+5t$ $z=3+6t$ $(0\le t\le 1)$

אנליזה וקטורית

פרק 12 - שדות משמרים - אי תלות במסלול

תוכן העניינים

שדות משמרים – אי-תלות במסלול

שאלות

בשאלות **1-6** קבע האם $\mathbf{F}$ הוא שדה משמר;
אם כן, מצא פונקציה ϕ, כך ש- $\nabla\phi=\mathbf{F}$.

1) $\mathbf{F}(x,y)=(6x+5y,5x+4y)$

2) $\mathbf{F}(x,y)=xe^{y}\mathbf{i}+ye^{x}\mathbf{j}$

3) $\mathbf{F}(x,y)=\left(2x\cos y-y\cos x,-x^{2}\sin y-\sin x\right)$

4) $\mathbf{F}(x,y,z)=z^{2}\mathbf{i}+e^{-y}\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$

5) $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+\left(xy+3z^{2}\right)\mathbf{k}$

6) $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(z,2yz,y^{2}\right)$

7) נתון האינטגרל $\int_{(1,2)}^{(3,4)}\left(6xy^{2}-y^{3}\right)dx+\left(6x^{2}y-3xy^{2}\right)dy$.

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1,2)$ ו- $(3,4)$.

ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

8) חשב את האינטגרל $\int_{(1,4)}^{(3,1)}2xy^{3}dx+\left(1+3x^{2}y^{2}\right)dy$.

9) חשב את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^{4}+3\right)dx+\left(x^{2}-4xy^{3}\right)dy$.

10) יהי $\mathbf{F}(x,y)=e^{y}\mathbf{i}+xe^{y}\mathbf{j}$. מצא את **העבודה** שמבצע השדה על חלקיק הנע על $y=\sqrt{1-x^{2}}$, מ- $(1,0)$ ל- $(-1,0)$.

11) חשב את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)}\left(2xz^3+6y\right)dx+\left(6x-2yz\right)dy+\left(3x^2z^2-y^2\right)dz$.
תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

12) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F}=\dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$, ונתונים 3 מסלולים:

$L_1:\ x^2+y^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

$L_2:\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ בכיוון השלילי (עם כוון השעון).

$L_3:\ (x-10)^2+(y-7)^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

חשב:

א. $\oint\limits_{L_1}\mathbf{F}dr$ ב. $\oint\limits_{L_2}\mathbf{F}dr$ ג. $\oint\limits_{L_3}\mathbf{F}dr$

13) ענה על הסעיפים הבאים:

א. שרטט את השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, ברביע הראשון.

ב. בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\right\}$, נסמן $g=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

1. הוכח כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכח שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום D (מסעיף ב).

ד. הוכח שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,x>0\right\}$, ומצא את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\right\}$, חשב $\oint\limits_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר C עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה $(0,0)$.

14) נתון השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$,

בתחום $D=\{(x,y)\in R^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\}$.

א. שרטט את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

ב. נסמן $g=\frac{y}{x^2+y^2}$, $f=\frac{x}{x^2+y^2}$.

1. הוכח כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.
2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכח שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$

$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\right)$

$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\hat{x}+g(x,y,z)\hat{y}+h(x,y,z)\hat{z}$

$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$

תשובות סופיות

1) $\phi(x,y)=3x^2+5xy+2y^2$

2) השדה אינו משמר.

3) $\phi(x,y)=x^2\cos y-y\sin x$

4) $\phi(x,y,z)=xz^2-e^{-y}$

5) $\phi(x,y,z)=xyz+z^3$

6) השדה אינו משמר.

7) א. שאלת הוכחה. ב. 236

8) -58

9) 5

10) -2

11) $15=$ עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- $(1,-1,1)$ ל- $(2,1,-1)$, לאורך C.

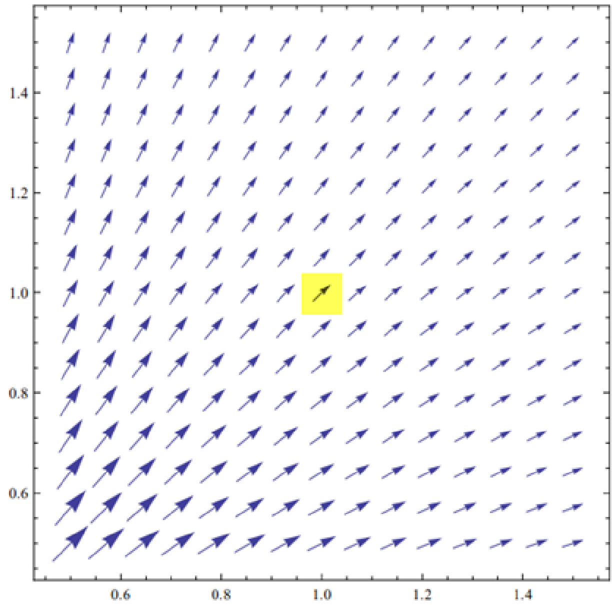
12) א. 2π ב. -2π ג. 0

13) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. שאלת הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.
ג. שאלת הוכחה. ד. שאלת הוכחה; $\phi=\arctan\frac{y}{x}+k$ ה. 2π

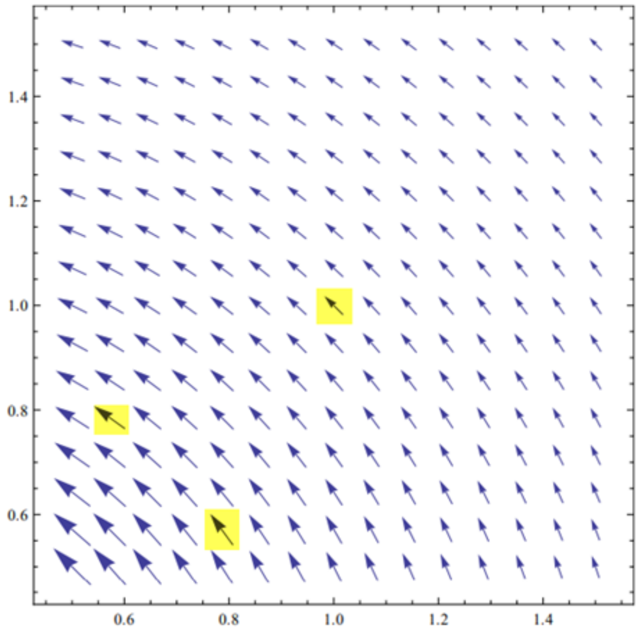
14) א. ראו בעמוד הבא. ב. 1. שאלת הוכחה. 2. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.
ג. שאלת הוכחה.

שרטוטים

שאלה 13 סעיף א:



שאלה 14 סעיף א:



אנליזה וקטורית

פרק 13 - משפט גרין

תוכן העניינים

משפט גרין

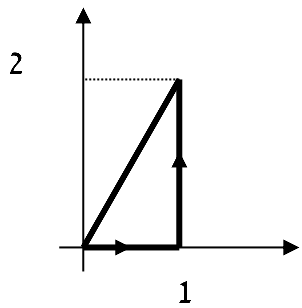
שאלות

בשאלות **1-3** אשר את משפט גרין.

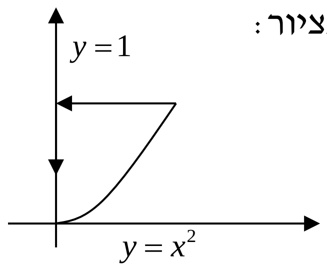
כלומר, חשב את האינטגרל $\oint_C fdx+gdy$ ואת האינטגרל $\iint_R \left(g_x-f_y\right)dA$,

והראה שהם שווים זה לזה.

1) $\oint_C x^2ydx+xdy$; המסלול C מתואר בציור:



2) $\oint_C (x-y^2)dx+dy$; המסלול C מתואר בציור:



3) $\oint_C (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$, C הוא ריבוע שקדקודיו:

$(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ בכיוון החיובי.

4) חשב את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=\left(e^x-y^3\right)\mathbf{i}+\left(\cos y+x^3\right)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2+y^2=1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון,

ומשלים הקפה אחת.

5) חשב את האינטגרל $\int_C\left(e^y-\tan\frac{x}{2}\right)dx+\left(xe^y+y\cos y^2\right)dy$, כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y=8-x^2,\ y=x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

6) חשב את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y}\cos y dx+\left(e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2xy\right)dy$,

כאשר C הוא חצי האליפסה $\left\{x^2+4y^2=4,\ y\geq 0\right\}$ מהנקודה $(2,0)$

לנקודה $(-2,0)$.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C,

נתון על ידי $\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$.

ב. חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

8) נתון האינטגרל הקווי $\oint_C\left(x^3+3x^2y+3xy^2y^3\right)dx+\left(3x^2y+3x-\sin y\right)dy$,

כאשר C מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון.

מהו הערך המקסימלי של האינטגרל?

עבור איזו מסילה C הוא מתקבל?

9) הוכח שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין C,

החוסמת שטח במישור, והמקיימת $\oint_C -y^3dx+x^3dy=0$.

10) חשב: $\oint_C\frac{4x-y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dx+\frac{x-4y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dy$, כאשר:

א. C הוא המעגל $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

ב. C הוא המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=144$.

ג. C היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 0.5.
2) הערך המשותף הוא 0.8.
3) הערך המשותף הוא 8.
4) 1.5π
5) $0.5\sin 64$
6) $\frac{8}{3}+e^4-\frac{1}{e^4}$
7) א. הוכחה. ב. πab
8) הערך המקסימלי הוא $\frac{6\pi}{4}$, עבור המסילה $C: x^2+y^2=1$.
9) הוכחה.
10) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{\pi}{2}$

אנליזה וקטורית

פרק 14 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים משטחיים מסוג I

שאלות

בשאלות **1-5** חשב את האינטגרל המשטחי:

1) $\iint\limits_S x^2yzdS$, כאשר S הוא המישור $z=1+2x+3y$,
מעל המלבן $R=[0,3]\times[0,2]$.

2) $\iint\limits_S xdS$, כאשר S הוא המשטח $y=x^2+4z$, $0\le z\le 2$, $0\le x\le 2$.

3) $\iint\limits_S yzdS$, כאשר S הוא המישור $z=y+3$, שכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$.

4) $\iint\limits_S \left(x^2z+y^2z\right)dS$, כאשר S הוא חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$.

5) $\iint\limits_S xyzdS$, כאשר S הוא חלק החרוט $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+3u\mathbf{k}$,
המקיים $0\le v\le\frac{\pi}{2}$, $1\le u\le 2$.

6) חשב את **שטח הפנים** של כדור בעל רדיוס R .

7) היריעה הדקה S היא חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$, שמתחת למישור $z=1$,
וצפיפותה $\delta(x,y,z)=\delta_0$, קבועה.
חשב את **מסת** היריעה.

תשובות סופיות

1) $171\sqrt{14}$

2) $\frac{33\sqrt{33}-17\sqrt{17}}{6}$

3) $\pi\sqrt{2}/4$

4) 16π

5) $93/\sqrt{10}$

6) $4\pi R^2$

7) $\frac{\pi\delta_0}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

אינטגרל משטחי מסוג II

שאלות

בשאלות הבאות חשב את האינטגרל $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

בניסוח אחר: חשב את השטף של שדה הזרימה $\mathbf{F}$ דרך S.

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) $\mathbf{F}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$.

5) $\mathbf{F}=0\mathbf{i}-2z\mathbf{j}+\left(-3y-1\right)\mathbf{k}$, S הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

תשובות סופיות

1) $\frac{11}{6}$

2) $\frac{8\pi}{3}$

3) 27

4) 12π

5) -16π

אנליזה וקטורית

פרק 15 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

תוכן העניינים

משפט הדיברגנץ (גאוס)

שאלות

בשאלות **1-3** אשר את משפט הדיברגנץ.

כלומר, חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, ואת האינטגרל $\iiint_G div\mathbf{F}dV$,

והראה שהם שווים זה לזה ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

(ראה הערת סימון בעמוד הבא)

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G, הנקבעת ע"י המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G, $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G, הנקבעת ע"י המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישורים $z=0$ ו- $z=2$.
חשב את **השטף** של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ דרך S.
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

5) חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.
$\mathbf{F}=\left(z^2-x\right)\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:
$x=0,\ x=3,\ z=4-y^2,\ z=0$.

6) חשב את $\iint_S xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$,
כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי $z=0$, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

7) יהי S משטח <u>פתוח</u> $x^2+z^2=16$, $0\le y\le 4$ (גליל ללא הבסיסים).
חשב את **השטף** של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+x^5\mathbf{k}$ דרך S.
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

8) חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

$$\mathbf{F}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2\right)\mathbf{i}+2x\arctan y\mathbf{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\mathbf{k}\ ;$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$ (המשטח <u>פתוח</u>).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$,

מתקיים: $\iiint_G div\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$.

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla\cdot\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S fdydz+gdzdx+hdxdy$$

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$.

2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$.

3) הערך המשותף הוא 27.

4) 279π

5) 16

6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

7) 0

8) -4π

אנליזה וקטורית

פרק 16 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

משפט סטוקס

שאלות

בשאלות **1-3** בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים.
כלומר, חשב את האינטגרל $\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}ds$, ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$,
והראה שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בעמוד הבא).

1) $\mathbf{F}=2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+5y\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\ge 0$.

2) $\mathbf{F}=\left(x^2+y-4\right)\mathbf{i}+\left(-3xy\right)\mathbf{j}+\left(2xz+z^2\right)\mathbf{k}$; S הוא שפת חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

3) $\mathbf{F}=(y+z)\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה, החסום על ידי המישורים $2x+z=6,\ y=2$, ושאינו כלול
א. במישור xy.
ב. במישור $y=2$.
ג. במישור $2x+z=6$.

4) חשב את האינטגרל $\oint_C x^2dx+4xy^3dy+y^2xdz$, כאשר C עקומה בצורת מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

5) חשב את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר $\mathbf{F}=\left(x+y^2\right)\mathbf{i}+\left(y+z^2\right)\mathbf{j}+\left(z+x^2\right)\mathbf{k}$;
ו- C היא שפת המשולש, שקדקודיו הם $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$,
וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

6) חשב את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$, כאשר $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$; ו- S הוא החלק של הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$, ומעל למישור xy.

7) חשב את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$, כאשר $\mathbf{F}=(x-z)\mathbf{i}+(x^3+yz)\mathbf{j}-3xy^2\mathbf{k}$;
ו- S הוא משטח החרוט $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, מעל למישור- xy .

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$,
מתקיים: $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$.

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס :

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{Rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\oint_C fdx+gdy+hdz=\iint_S \left((h_y-g_z)\mathbf{i}+(f_z-h_x)\mathbf{j}+(g_x-f_y)\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{n}dS$$

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 12π.
2) הערך המשותף הוא -16π.
3) הערך המשותף הוא : א. -6 ב. -9 ג. -18
4) -90
5) -1
6) 0
7) 12π

אנליזה וקטורית

פרק 17 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^4-x}{\ln x}dx$.

2) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^m-x^n}{\ln x}dx$ $(m,n>0)$.

3) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

4) חשב את האינטגרל $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)dx$.

5) הוכח כי $\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right)=\int_0^{\pi}\ln\left(1+\alpha\cos x\right)dx$, עבור $|\alpha|<1$.

6) חשב $\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx$, עבור $\alpha\neq\pm1$.

7) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

8) חשב את האינטגרל $\int_0^1 x^p(\ln x)^m dx$ $(p>0,\ m\in\mathbb{N})$.

9) חשב את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{(2-\cos x)^2}dx$.

תשובות סופיות

1) $\ln 2.5$

2) $\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right)$

3) $\frac{\pi}{8}\ln 2$

4) 2π

5) שאלת הוכחה.

6) $\int_0^{\pi} \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx = \begin{cases} 0 & |\alpha|<1 \\ 2\pi\ln|\alpha| & |\alpha|>1 \end{cases}$

7) $\frac{\pi+2}{8}$

8) $\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}}$

9) $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$, עבור $b > a > 0$.

2) חשב את האינטגרל $\int_0^\pi \ln\frac{b-\cos x}{a-\cos x}dx$, עבור $b, a > 1$.

3) הוכח כי $\int_0^{2\pi}\left[(b-\sin x)^2 - (a-\sin x)^2\right]dx = 2\pi(b^2 - a^2)$, לכל a ו- b.

הערה: פתור בשתי דרכים, גם ע״י אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם ע״י חישוב ישיר.

4) בהינתן הנוסחה: $\int_0^{2\pi}\frac{1}{\alpha+\sin x}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $\alpha > 1$,

הוכח כי: $\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right)dx = 2\pi\ln\left(\frac{9}{8}\right)$.

תשובות סופיות

1) $\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$

2) $\pi\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה

אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר

<u>הערה חשובה</u>

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שילמדו בהמשך.
חלק מהמרצים מסתפק רק בצד הטכני החישובי ולא נכנס לנושא זה כלל.
בררו עם מתרגל ו/או מרצה הקורס האם אתם נדרשים לנושא זה.
במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים.
בהצלחה!

שאלות

1) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(kx)\,dx$, כאשר k ממשי.
הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $0<a\le\alpha$.

2) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+\alpha\right)^n}dx$, כאשר n טבעי.
הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha\ge 1$.

3) הוכח שהאינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ מתכנס במידה שווה עבור $\alpha\ge 0$.

4) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2}dx$.
הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α.

5) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$ עבור $\alpha\ge k>0$.

א. חשב את האינטגרל והוכח שהאינטגרל תלוי בפרמטר.
ב. הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α המקיים $\alpha\ge k>0$.

6) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x}dx$.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל n טבעי ולכל α המקיים $\alpha \ge k > 0$.

7) נתון כי $\phi(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2}dx$, כאשר $\alpha \ge k > 0$.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

8) נתון האינטגרל $\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2}dx$.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \ge k > 0$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר GooL.co.il

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשב את האינטגרל $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$.

2) הוכח שלכל n טבעי מתקיים:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}xdx=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\frac{\pi}{2}.$$

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}dx$.

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2/2}dx$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty x^{10}e^{-x^2}dx$.

ג. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$.

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ $(\alpha>0)$.

ב. בעזרת סעיף א' חשב את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

תשובות סופיות

1) $n!$

2) שאלת הוכחה.

3) א. $\sqrt{2\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

4) א. אם n אי-זוגי אז 0, ואם n זוגי אז $1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot\sqrt{2\pi}$.

ב. $\frac{945}{64}\sqrt{\pi}$ ג. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

5) א. $-\arctan\alpha+\frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{2}$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשב: $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, עבור $b>a\geq k>0$.

2) חשב: $\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$, עבור $b>a\geq k>0$.

3) חשב: $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

4) הוכח כי עבור $b>a>0$ ו- $r\in\mathbb{R}$, מתקיים $\int_0^\infty \cos rx\frac{a^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+r^2}{a^2+r^2}$.

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin rx}{x}dx=\arctan\frac{r}{\alpha}$ $(\alpha,r>0)$.

ב. הוכח כי $\int_0^\infty \left[e^{-\alpha x}\frac{1-\cos rx}{x^2}\right]dx=\arctan\frac{r}{a}-\frac{a}{2}\ln\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)$ $(\alpha,r>0)$.

ג. הוכח כי $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\arctan\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)$ $(\alpha>0)$.

6) הוכח:

א. $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$.

8) חשב: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

תשובות סופיות

1) $\ln\frac{b}{a}$

2) $\frac{\pi}{2}(b-a)$

3) π

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{4}$

8) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$