

חדוא של טורים והתמרות



תוכן העניינים

1	1. אינטגרלים לא אמיתיים
12	2. טורים עם איברים קבועים
(ללא ספר)	3. טורי פונקציות וטורי חזקות
26	4. טורי טיילור - מקלורן
28	5. התמרת פורייה
48	6. טורי פורייה
67	7. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים
82	8. נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה
86	9. נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

חדוא של טורים והתמרות

פרק 1 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון..... 1
2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני..... 3
3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי..... 4
4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים..... 5
5. מבחני השוואה..... 6
6. התכנסות בהחלט..... 8
7. מבחן דיריכלה..... 9
8. התכנסות בתנאי..... 10

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-5:

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

$$(6) \text{ הוכח כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ עבור } |\alpha| < 1.$$

$$(7) \text{ הוכח כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \text{ עבור } |\alpha| > 1.$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2e} \quad (3)$$

(4) מתבדר : ∞ .

$$\frac{5}{4e^2} \quad (5)$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

(1) מתבדר: $-\infty$

(2) מתבדר: $-\infty$

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

1) חשב את האינטגרל הבא: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

תשובה

1) מתבדר: ∞ .

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

(1) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x = 1$ וציר ה- x , עבור $x \leq 1$.

(2) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x = 5$.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$.

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0 \leq x \leq k$, שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x \geq k$. מצא את הקבוע k .

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

מבחני השוואה

שאלות

בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1 + x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

תשובות סופיות

- | | |
|-------------|-------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתבדר. |
| (3) מתכנס. | (4) מתכנס. |
| (5) מתבדר. | (6) מתבדר. |
| (7) מתכנס. | (8) מתכנס. |
| (9) מתבדר. | (10) מתכנס. |
| (11) מתכנס. | (12) מתבדר. |
| (13) מתכנס. | (14) מתבדר. |
| (15) מתכנס. | (16) מתכנס. |

התכנסות בהחלט

שאלות

בשאלות 1-3 בדוק אם האינטגרלים מתכנסים:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

$$(4) \text{ הוכח: אם } \int_a^{\infty} |f(x)| dx \text{ מתכנס, אז } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס.}$$

תשובות סופיות

- (1) מתכנס.
- (2) מתכנס.
- (3) מתכנס.
- (4) שאלת הוכחה.

מבחן דיריכלה

שאלות

הוכח כי האינטגרלים הבאים מתכנסים :

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

התכנסות בתנאי

שאלות

קבע האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

$$(1) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$$

$$\text{ב.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx$$

$$(4) \quad \int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$(5) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx$$

תשובות סופיות

- (1) א. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.
 ב. מתכנס בהחלט.
 ג. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.
- (2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.
- (3) א. מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$, מתבדר עבור $p \geq 2$.
 ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 5$, מתבדר עבור $p \geq 5$.
- (4) מתכנס בתנאי.
- (5) מתכנס בתנאי.

חדוא של טורים והתמרות

פרק 2 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

- 12 1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים
- 15 2. מבחן ההתבדרות של טורים
- 16 3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים
- 18 4. מבחני התכנסות לטורים כלליים
- 20 5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי
- 21 6. תרגילי תיאוריה

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

טור טלסקופי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

טור הרמוני מוכלל

12) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ו.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{ד.}$$

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$. ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$. ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

15) מצא את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.123123123\dots + 0.141414\dots$.

תשובות סופיות

- (1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$
- (2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$
- (3) מתבדר.
- (4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$
- (5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$
- (6) מתכנס ל- 8.
- (7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$
- (8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$
- (9) מתבדר.
- (10) $S = \frac{1}{\ln 2}$
- (11) $\frac{1}{12}$
- (12) א. מתכנס.
ד. מתבדר.
- (13) א. מתכנס.
ב. מתבדר.
ה. מתכנס.
- (14) $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$
- (15) $\frac{323}{1221}$
- ג. מתבדר.
ו. מתכנס.
ג. מתבדר.
- ב. מתבדר.
ה. מתכנס.
ב. מתבדר.

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}$ ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (4) \quad (p \leq 1) \quad (p > 1)$$

ענה על הסעיפים הבאים: (6)

א. בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$.

ב. מצא את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$.

מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן ראָפֶה

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------|-------------|-------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתבדר. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתבדר. | |
| (6) א. מתכנס. | ב. 0 | |
| (7) מתכנס. | (8) מתבדר. | (9) מתכנס. |
| (10) מתבדר. | (11) מתכנס. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר. | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתבדר. | (17) מתכנס. | (18) מתכנס. |
| (19) מתכנס. | (20) מתכנס. | (21) מתכנס. |
| (22) מתכנס. | (23) מתכנס. | (24) מתכנס. |
| (25) מתבדר. | (26) מתבדר. | |

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבע אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{הוכח שהטורים } \sum \sin n\theta, \sum \cos n\theta, \text{ כאשר } \theta \neq 2\pi k, \text{ חסומים.}$$

(7) הוכח את התכנסות הטורים הבאים :

$$. (\theta \neq 2\pi k) \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}$$

$$(8) \quad \text{בדוק התכנסות הטור } \sum \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$(9) \quad \text{הוכח שאם הסדרה } b_n \text{ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור } \sum b_n \sin n \text{ מתכנס.}$$

(10) ענה על שני הסעיפים הבאים :

$$א. \text{ הוכח שהטור } \sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\bmod 7) \text{ הוא טור חסום.}$$

$$ב. \text{ בדוק את התכנסות הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}.$$

מבחן אבל

בשאלות הבאות קבע אם הטור מתכנס או מתבדר:

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}} \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|----------------|-------------|-------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתכנס. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתכנס. | (6) הוכחה. |
| (7) הוכחה. | (8) מתבדר. | (9) הוכחה. |
| (10) א. הוכחה. | ב. מתכנס. | (11) מתכנס. |
| (12) מתכנס. | (13) מתכנס. | (14) מתכנס. |

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתכנס בהחלט. | (3) מתכנס בתנאי. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |

תרגילי תיאוריה

(1) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

(2) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

(3) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ מתבדר.

(4) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

(5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

(6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכח ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

(7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכח כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

(8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכח כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

(9) הוכח או הפרך:

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל n , אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

(10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

(11) הוכח או הפרך:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

(12) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

(13) הוכח או הפרך:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכח או הפרך:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n , אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

(16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכח כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכח כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

(17) הוכח :

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

(18) הוכח כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

(19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n .

א. נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכח כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכח כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

(20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

$$(21) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכח כי הטור מתכנס.

$$(22) \text{ נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n. \text{ הוכח כי } \sum n(a_n - a_{n+1}) \text{ מתכנס.}$$

$$(23) \text{ נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1. \text{ האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$(24) \text{ נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיימת } a_n > 0, a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1} \text{ לכל } n \text{ טבעי. הוכח כי } \sum a_n \text{ מתבדר.}$$

$$(25) (a_n) \text{ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס. הוכח כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

$$(26) \text{ נתון טור חיובי } \sum a_n. \text{ הוכח או הפרך:}$$

- א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.
 ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

$$(27) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

א. הוכח כי הסדרה a_n מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ מתכנס.

ב. בדוק האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדוק האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמד את הנושא טורי מקלורן עם שארית לגראנז'.

(28) פונקציה f מוגדרת לכל x , גזירה ב-0 ומקיימת $f(0) = 0$. הוכח כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

(29) נתון פולינום $p(x)$.

$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

הוכח כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow p(0) = 0$.

(30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.

נתון כי:

(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. (2) לכל n טבעי $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

חדוא של טורים והתמרות

פרק 3 - טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חדוא של טורים והתמרות

פרק 4 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

1. טור טיילור וטור מקלורן 26

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = 0$ (טור מקלורן) בשאלות 1-24 :

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, עליך להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
 לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24, עליך להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
 תוכל להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח שבעמוד האחרון.

מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות בשאלות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27) \quad f(x) = \tan x \quad (26) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$(-1 < x < 1)$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

חדוא של טורים והתמרות

פרק 5 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

28	1. מבוא כללי
30	2. נוסחת כיווץ והזזה
32	3. נוסחת הנגזרת
33	4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה
35	5. נוסחת המומנט
37	6. נוסחת ההתמרה ההפוכה
(ללא ספר)	7. נוסחת התמרה כפולה
38	8. משפט פלנשראל
39	9. משפט הקונבולוציה
43	10. תרגילים מסכמים

מבוא כללי:

שאלות:

$$\cdot \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של} \quad (1)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (2)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (3)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (4)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{bx} & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של} \quad (5)$$

$$\cdot f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right]$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של} \quad (6)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (7)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (8)$$

$$\cdot f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega} \quad \text{הינה} \quad f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{הוכיחו התמרת פורייה של} \quad (9)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של} \quad (10)$$

$$\cdot a > 0 \quad f(x) = \begin{cases} x & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של} \quad (11)$$

$$\cdot f(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{האם קיימת} \quad f \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \quad \text{כך ש-} \quad (12)$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \quad (2)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{2\sin(2\omega) - \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega) + i[\cos(\omega) - 1]}{\omega} \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega}}{i\omega} \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-i)\omega} - 1}{1-i\omega} \quad (8)$$

(9) הוכחה.

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin([1-\omega])}{1-\omega} - \frac{\sin([1+\omega])}{1+\omega} \right\} \quad (10)$$

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} i \frac{\sin(\omega a) - \omega a \cos(\omega a)}{\omega^2} \quad (11)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \quad (12) \text{ לא. אינה רציפה בנקודות}$$

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-r,r] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ כאשר $r > 0$.

(2) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

כי

(3) נתונה פונקציה $g(x) \in G(\mathbb{R})$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.

מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב- $g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

(4) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-ax^2}$ כאשר $a > 0$.

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{רמז:}$$

(5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \cos(4\pi\omega) \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

$$F\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{רמז:}$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi \omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{16}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 & 4\pi - 2 \leq x \leq 4\pi + 2 \text{ or } -4\pi - 2 \leq x \leq -4\pi + 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

(1) נניח כי $f(x) \in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $f'(x) \in G$ ו- $f(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^{30}}$. מצאו התמרת פורייה של $f'(x) \cos(2x)$.

(2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F \left\{ \frac{x}{(x^2+a^2)^2} \right\}_\omega = \left(-\frac{1}{2} \right) (i\omega) \frac{1}{2|a|} e^{-|a\omega|}$

(3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \omega^2 e^{-|\omega|}$. רמז: $F \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

תשובות סופיות:

$$\frac{i \cdot \frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}} + i \cdot \frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

$$f(x) = (-2) \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad (3)$$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

$$(1) \text{ הוכיחו כי התמרת פורייה של } F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i} \frac{2c \cdot \omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$$

$$(2) \text{ מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = \frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1} - \frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$$

$$(3) \text{ הוכיחו כי התמרת פורייה של } g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \text{ כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים,}$$

$$\text{הינה } g(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{bi - (\omega - a)} - \frac{1}{bi - (\omega + a)} \right]$$

$$(4) \text{ מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \cos(2x) \text{ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה} \\ \text{כי } F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

$$(5) \text{ מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \sin^2(3x) \text{ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה} \\ \text{ובעובדה כי } F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

$$(6) \text{ נניח כי } f(x) \in G(R) \text{ ונגדיר } g(x) = f(3x-2) \cdot \cos(x) \text{ . בטאו את } g(\omega) \text{ על ידי } f(\omega)$$

$$(7) \text{ מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = e^{3i\omega} \cdot e^{-|\omega-2|} \text{ . רמז: } F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$$

$$(8) \text{ תהי } H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a > 0$

ב. $H(x)e^{-ax} \cos(bx)$ כאשר $a, b > 0$

ג. $H(x)e^{-ax} \sin(bx)$ כאשר $a, b > 0$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$f(x) = 2\pi i \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(x) \quad (2)$$

(3) הוכחה.

$$F\{e^{-|x|} \cos(2x)\} = \frac{1}{2\pi(1+[\omega+2]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-2]^2)} \quad (4)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} - \left[\frac{1}{2\pi(1+[\omega+6]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-6]^2)} \right] \quad (5)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{6} \left[e^{-\frac{2}{3}(\omega+1)} f\left(\frac{\omega+1}{3}\right) + e^{-\frac{2}{3}(\omega-1)} f\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \right] \quad (6)$$

$$F\left\{e^{2i[x+3]} \frac{2}{1+[x+3]^2}\right\} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ג.}$$

נוסחת המומנט:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ על ידי שימוש

$$.F\{x \cdot f(x)\} = i \frac{d}{d\omega} f(\omega)$$

(2) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} \quad \text{כי}$$

(4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x) = e^{-x^2}$

(5) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = 8x^3 e^{-\frac{4(x+1)^2+5}{3}}$

(6) תהי $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

(7) נתון כי התמרת פורייה של $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|}$

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

$$i \cdot \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2} \quad (1)$$

$$F\{x^2 e^{-x^2}\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right) e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (2)$$

$$F\{x \cdot e^{-|x|}\} = -\frac{i}{\pi} \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088) e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}} \quad (5)$$

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

(1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

(2) חשבו $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin(\omega) \cos(\omega x)}{\pi\omega} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

(1) ראו סרטון.

$$\begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \end{cases} \quad (2)$$

משפט פלנשראלי:

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a > 0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{\sin(bx)}{x} dx$ עבור $a, b > 0$.

(2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$.

(3) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

(4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

א. $f(\omega) = \frac{\sin(\omega a)}{\pi \omega}$. ב. $\pi \cdot \min\{a, b\}$.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

(1) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים.

(2) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים $x > 0$ ו- $x \leq 0$.

(3) מצאו פונקציה $f \in G$ כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$

(4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t) \in E$ מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f''(t)) g(x-t) dt = 2f(x)$$

(5) נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$.

(8) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$.

(9) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,2]}(x)$.

(10) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x))_{(x)}$.

(11) חשבו את הקונבולוציה $(e^{-x^2} * e^{-x^2})_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{-\frac{3(x+1)^2}{2}}$.

(13) נניח כי $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy \equiv 0$$

הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$.

תשובות סופיות:

$$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2,0] \\ 2-x & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2+9} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \frac{2}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 2 < x < 4 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\left(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 3 \\ 3-x & 2 < x < 3 \\ x-1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \quad (12)$$

(13) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ג. חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) \sin(x)}{(1-x^2)} dx$$

ד. חשבו את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \sin^2(\pi x) dx$$

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$

ב. מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} h'(y) e^{-|x-y|} dy = x \cdot e^{-|x|}$

(3) יהי $A > 0$ קבוע. נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x) \in G$ המקיימת $g(\omega) = f(\omega) f(-\omega)$. מצאו במפורש את $g(x)$.

(4) נניח כי $f(x) \in C^2(-\infty, \infty)$ כך ש- $f'(x), x \cdot f'(x), f''(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$

ומתקיים $f''(x) + x \cdot f'(x) + f(x) = 0$ לכל x ממשי.

א. הוכיחו כי $f(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$

ב. חשבו את $f(\omega)$ אם נתון כי $f(0) = 1$.

ג. מצאו את $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & |x| \leq 1 \\ 4 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תהי (5)}$$

א. חשבו את $f(\omega)$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{[2 \sin(2t) - \sin(t)]^2}{t^2} dt$

ג. חשבו את האינטגרל $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{2 \sin(2t) - \sin(t)}{\pi t} \cos(t) dt$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{\pi^2} & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ב. חשבו את האינטגרלים: $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \right)^2 dx$

ו- $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \cos(x) dx$

(7) נגדיר $\phi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת

אורתונורמלית ב- $L^2_{PC}(-\infty, \infty)$.

(8) תהי $f \in G$ פונקציה כך ש- $f' \in G$ פונקציה רציפה. מצאו פונקציה $g \in G$

המקיימת את המשוואה $g(t) = \int_{-\infty}^t e^{u-t} g(u) du + f'(t)$.

(9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$.

(10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + b^2} dt = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}$

$$\cdot f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(\omega-t) \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(t) e^{i\omega x} dt d\omega \quad (11)$$

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f(x)$.

$$\cdot \chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תזכורת:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2+x^2)(x^2+b^2)} dx \quad (12)$$

כאשר $a, b > 0$.

$$\cdot f(x) = e^{-(x^2+2x+5)} \quad (13)$$

$$\cdot \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (14)$$

הוכיחו כי $a, b > 0$ לכל קבועים.

$$\cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x) \cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8e} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \quad (15)$$

$$\cdot \int_0^{\infty} \sin^3(x) x e^{-x} dx = \frac{9}{25} \quad (16)$$

תשובות סופיות:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\omega \sin(\omega\pi)}{1-\omega^2} \quad \text{ב.} \quad f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\omega\pi) \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \quad \text{א. (1)}$$

$$\frac{\pi^2}{2} \quad \text{ד.} \quad \frac{\pi}{2} \sin(1) \quad \text{ג.}$$

$$-h(y) = e^{-|y|}, \quad h(y) = -e^{-|y|} \quad \text{ב.} \quad -\frac{2i\omega}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א. (2)}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(A+x)^3}{3} - \frac{(A+x)^2}{2} x \right) & -A < x < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A^3}{3} - \frac{A^2}{2} x + \frac{x^3}{6} \right) & 0 < x < A \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{(3)}$$

$$\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ג.} \quad e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה. (4)}$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad \text{ג.} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad \frac{4 \cdot \sin(2\omega) - 2 \cdot \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{א. (5)}$$

$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\pi^2} \right) \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{15} \quad \text{ג.} \quad 2 \frac{\sin(\pi\omega) - \pi\omega \cos(\pi\omega)}{\pi^3 \omega^3} \quad \text{א. (6)}$$

(7) הוכחה.

$$g(t) = f(t) + f'(t) \quad \text{(8)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^x (1-x) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} e^{-x} (1+x) & x > 0 \end{cases} \quad \text{(9)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{a} \frac{(a-b)x}{(x^2 + (a-b)^2)^2} \quad \text{(10)}$$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2} \quad \text{(11)}$$

$$\frac{\pi}{a+b} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{\omega}{b^2 + \omega^2} d\omega \quad \text{(12)}$$

$$f(\omega) = \frac{1}{e^4} \cdot e^{i\omega} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{(13)}$$

(14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

חדוא של טורים והתמרות

פרק 6 - טורי פורייה

תוכן העניינים

48	1. טור פורייה ממשי
49	2. טור פורייה מרוכב
50	3. משפט פרסבל
53	4. רימן לבג
54	5. משפט דיריכלה
56	6. המשכה זוגית ואי זוגית
57	7. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה
60	8. טור פורייה בקטע כללי
62	9. התכנסות במידה שווה של טורי פורייה
63	10. משפט הקונבולוציה
65	11. תרגילים מסכמים

טור פורייה ממשי:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$.

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \sin(|x|)$.

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

תשובות סופיות:

$$\sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x) \quad (2)$$

$$\sin(|x|) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2kx) \quad (3)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx) \quad (4)$$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

תשובות סופיות:

$$x \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi \frac{(-1)^n}{in} + \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right\} e^{inx} \quad (2)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - 3(-1)^n \frac{\pi}{in} \right] e^{inx} \quad (3)$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{3}{\pi i (2k-1)} e^{i(2k-1)x} \quad (4)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4i} e^{ix} - \frac{1}{4i} e^{-ix} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - (2k)^2} e^{i[2k]x} \quad (5)$$

משפט פרסבל:

שאלות:

(1) באמצעות טור הפורייה $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$, חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$ בקטע $[-\pi, \pi]$

הינו $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(3) נתונות הפונקציות $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ x + \pi & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = x$.

מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

(4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$ ובאמצעותו

חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

(5) נתונות הפונקציות $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ e^{x^2} & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$, $g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n} = \frac{1}{8}$.

(6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad -\pi \leq x < \pi$$

- א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi < x < 3\pi$.
 ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$.

(7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi, \pi]$ על ידי הנוסחה: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}} e^{inx}$

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$.

(8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $p \neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

(9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} h^2 & h \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x \leq h \end{cases}$ בקטע $[-\pi, \pi]$

כאשר $0 \neq h \in [-\pi, \pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n \cos(2n)}{n^2}$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{32}$

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

תשובות סופיות:

$$\frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

$$\frac{\pi^2}{4} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx) \quad \text{ב.}$$

(6) א. ראו סרטון.

$$\approx 0.769 \quad \text{ג.}$$

$$8\pi \quad (7)$$

(8) הוכחה.

$$\frac{\pi^2 - 4}{4} \quad (9)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx} \quad \text{א. (10)}$$

ב. הוכחה.

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

$$(1) \text{ חשבו } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x} \cos(\sqrt{|x|}) \sin(nx) dx$$

$$(2) \text{ חשבו } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2 + 1} e^{i \cdot n^2 t} dt$$

$$(3) \text{ הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{se^{s^2}}{\sqrt{s^2 + 2017}} e^{inx} dx \right) = 0$$

תשובות סופיות:

0 (1)

0 (2)

הוכחה. (3)

משפט דיריכלה:

שאלות:

1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$ לטור פורייה

$$. x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$

$$. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח

$$. x = \frac{\pi}{2}$$

רמז: הציבו

$$. f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2x}{\pi} & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi, 3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ג. הוכיחו כי

3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

ב. חשבו את הטור

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

ג. חשבו את הטור

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ד. חשבו את הטור

4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \cos(ax)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר a

אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

$$. \frac{1}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\pi a + \pi n} + \frac{1}{\pi a - \pi n} \right]$$

א.

$$. \cot(\pi \alpha) = \frac{1}{\pi \alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi \alpha + \pi n} + \frac{1}{\pi \alpha - \pi n}$$

ב.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. ראו סרטון.

ג. הוכחה. ב. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$

(3) א. $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

(4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0, \pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0 < x < \pi$

$$. x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos([2k-1]x)$$

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = 1$ בקטע $[0, \pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ והוכיחו כי:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin([2k-1]x) \quad 0 < x < \pi \quad \text{מתקיים}$$

$$\text{ב.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = -\frac{\pi}{4}$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

(1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$ ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x) \in L^2_{pc}[-\pi, \pi]$).

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ מתכנס בהחלט.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = x(\pi - x)$ בקטע $[0, \pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?

שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x) = \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ בקטע $[0, \pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x^2}$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| e^{inx}$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$ מתכנס?

(4) נתבונן בטור הפורייה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(x+i)}$

כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}$ בקטע $(0, 2\pi)$.

ב. נסמון $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0, 2\pi)$.

(6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi, \pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k

פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ לכל $j = 0, 1, \dots, k-1$. נסמון $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k c_n) = 0$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$

ו- $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

ב. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[0, \pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0) = f(\pi) = 0$.

הראו כי מתקיים $\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

(8) נגדיר $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

(9) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \sin(n^{2.5}x)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

(10) נסמון $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{1.4}} + \frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

(11) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

(12) נסמן $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3.1} + i \cdot n^{2.2}} \cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$(2) \text{ א. } [0, \pi] \quad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin([2k-1]x)$$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

$$\text{ה. } [0, \pi] \quad \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \sim \frac{\pi^3}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k-1)^4} \cos([2k-1]x)$$

$$(3) \text{ א. } \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \cdot n c_n \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty$$

$$\text{ב. } \sum_{-\infty}^{\infty} n |c_n| < \infty$$

$$\text{ג. } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$$

(4) ראו סרטון.

$$(5) \text{ א. הוכחה. ב. } -\frac{\pi}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{\pi^2}{6} x$$

(6) הוכחה.

(7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

$$(10) \text{ א. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2.8}} < \infty$$

ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0, 2\pi]$.

(2) תהי הפונקציה $f(x) = \min\{1, |x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2, 2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0, 2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$.

(4) פתחו את $f(x) = |x|$ לטור פורייה בקטע $[-1, 1]$.

(5) פתחו את $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0, 2]$.

(6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x) = f(x+2)$ ובנוסף $-1 \leq x < 1$ $f(x) = 2 - |x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1, 1]$?

(7) מצאו טור קוסינוסים $f(x) = x$ בקטע $[0, 3]$.

(8) פתחו את $f(x) = \cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0, \pi]$.

תשובות סופיות:

$$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (1)$$

$$b_n = 0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{3-e}{4(e-1)} \quad \text{ג.} \quad \text{ב. ראו סרטון.} \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1+4n^2\pi^2} e^{inx} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(\pi[2k-1]x) \quad (4)$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right) \quad (5)$$

$$\frac{\pi^2}{8} \quad \text{ג.} \quad \frac{\pi^4}{96} \quad \text{ב.} \quad f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos([2k-1]\pi x) \quad \text{א.} \quad (6)$$

ד. אם f רציפה בקטע $[a, b]$, $f(a) = f(b)$, ו- f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במישל- f בקטע $[a, b]$.

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right) \quad (7)$$

$$\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin([2k-1]x) \quad (8)$$

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

$$(1) \quad \text{תהי הפונקציה } g(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

$$b. \quad \text{עבור } -\pi \leq x \leq \pi \text{ נגדיר את הפונקציה } h(x) = a \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \int_{-\pi}^x g(t) dt$$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה

ל- $h(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

$$(2) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) = |\sin(x)| \text{ במרחב } L_{PC}^2([-\pi, \pi]) \text{ ונסמן ב- } f'(x) \text{ את הנגזרת שלה.}$$

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f' .

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחיבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi, 3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad a. \quad g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2k \cdot x) \quad b. \quad a = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$(2) \quad a. \quad f(x) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)} \right] \cos(2k \cdot x)$$

$$b. \quad f'(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)} \right] \sin(2k \cdot x)$$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית- 2π , הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה

שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל

נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n + \delta, \pi(n+1) - \delta]$

לכל $0 < \delta < \pi$ ולכל n שלם.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

- (1) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π אז $(f * g)_{(x)}$ מחזוריות- 2π .
- (2) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות- 2π ופונקציות זוגיות אז $(f * g)_{(x)}$ זוגית.
- (3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית- 2π כך שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $f(x) = \sqrt{2\pi} \cdot \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(x)$.
 חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$.
 הערה: $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
- (4) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos(x)$.
 חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.
- (5) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $f(x) = x$, $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.
 חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) $\pi - x$ (4) לכל x , $-\pi \leq x \leq \pi$ $(f * g)_{(x)} = -2 \cos(x)$

$$(f * g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} (x^2 - (x-1)^2) & -\pi + 1 \leq x \leq \pi \\ \frac{1}{4\pi} [x^2 - (x + (2\pi - 1))^2] & -\pi \leq x \leq -\pi + 1 \end{cases} \quad (5)$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1 טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t) = e^{iat}$ בתחום $-\pi \leq t \leq \pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים
$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2\alpha}{[\alpha^2 - n^2]} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} - \frac{1}{\alpha}$$

ג. הראו שמתקיים
$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{[\alpha - n]^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$$

ד. הראו שמתקיים
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^2 - \alpha^2)} = \frac{\pi}{4\alpha^2} \left(\frac{1}{\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)} - 1 \right)$$

2 נגדיר $f(x) = |x|$ במרחב $L_{PC}^2([-\pi, \pi])$ ונסמן ב- $f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f .

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty, \infty)$?

$$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots$$

ג. חשבו את הטור
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^2$$

3 תהי $f \in L_{PC}^2([-\pi, \pi])$.

נסמן ב- c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f .

נסמן $d_n = \operatorname{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

• f ממשית.

• f מתאפסת על הקטע $[-\pi, 0]$.

• מתקיים השיוויון
$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} d_n e^{inx} = x^2 e^{|x|} \cos(x)$$

מצאו את f .

(4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x) = \cos(2x)$

בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ו- $f(x) = -1$ בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$

האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

(5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π .

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$ ויהי $h > 0$ פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של $h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(t+x) dt$ כתלות ב- f_n .

תשובות סופיות:

(1) א. $e^{i\alpha t} \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi\alpha)}{[\alpha - n]\pi} \cdot e^{in t}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

(2) א. $f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos([2k+1]x)$

ב. כאשר k מספר שלם, $\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi}{4} & \pi k < x < \pi(k+1) \\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1) < x < \pi k \\ 0 & x = \pi k \end{array} \right.$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

(3) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 e^{|x|} \cos(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi, \pi]$ אם f רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$

ו- $f' \in E[-\pi, \pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[-\pi, \pi]$.

(5) f_0

חדוא של טורים והתמרות

פרק 7 - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

תוכן העניינים

67	1. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים
69	2. התכנסויות של פונקציות במרחביים נורמיים
73	3. מערכות אורתונורמליות
77	4. משפט קירוב מיטבי
80	5. מערכת אורתונורמלית סגורה
81	6. תרגילים מסכמים

מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים:

שאלות:

- (1) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a, b]$.
 הוכיחו כי $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$ מהווה נורמה במרחב זה.
- (2) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a, b]$.
 הוכיחו כי $\|f\| = \max_{[a,b]} |f(x)|$ מהווה נורמה במרחב זה.
- (3) יהי $V = R_{\leq 2}[x]$ המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה / שווה מ-2 מעל הממשיים.
 לכל שני פולינומים $p(x), q(x)$ ב- V נגדיר:
 $\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$
 הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot \rangle$ הינה מכפלה פנימית.
- (4) נגדיר את המרחב $V = C^1[-1, 1]$ (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[-1, 1]$).
 נגדיר: $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$
 הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot \rangle$ הינה מכפלה פנימית.
- (5) הוכיחו כי בכל מרחב מכפלה פנימית E מתקיים לכל $f, g \in E$:
 א. $\forall u \in E \quad \langle u, f+g \rangle = \langle u, f \rangle + \langle u, g \rangle$
 ב. $\operatorname{Re} \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2)$
 ג. $\operatorname{Im} \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2)$
 ד. $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\{\|f\|^2 + \|g\|^2\}$ (שוויון המקבילית).
- (6) יהי V מרחב מכפלה פנימית.
 נסמן $w = u+v$ וקטורים במרחב.
 הוכיחו כי אם $\langle u, v \rangle = 0$ אזי $\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

(7) נגדיר את המרחב V להיות מרחב הפונקציות $f(x)$ הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע $[a, b]$ (כלומר $f''(x)$ רציפה ב- $[a, b]$).

בדקו האם $\langle f, g \rangle = \int_a^b f''(x)g''(x)dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

(8) נגדיר את המרחב V להיות מרחב של פונקציות $f(x)$ ממשיות וגזירות ברציפות בקטע $[-1, 1]$ (כלומר הנגזרת $f'(x)$ רציפה בקטע $[-1, 1]$) כך ש- $f(-1) = 0$.

נגדיר $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)dx$.

הוכיחו כי $\langle f, g \rangle$ מהווה מכפלה פנימית במרחב V .

(9) יהי V מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע $[a, b]$.

הוכיחו כי $\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx + \max_{[a,b]} |f(x)|$ מהווה נורמה במרחב V .

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) $f(x) = 1$

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.

התכנסויות במרחבים נורמיים:

שאלות:

(1) הוכיחו:

א. הוכיחו כי לכל $f \in C[a, b]$ מתקיים $\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \sqrt{x-a} \cdot \|f\|_{L_2[a, b]}$

תזכורות: $\|f\|_{L_2[a, b]} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ ו- $\langle f, g \rangle_{L_2[a, b]} = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$

ב. הוכיחו כי אם $f_n \rightarrow f$ בנורמה $\|\cdot\|_{L_2[a, b]}$ במרחב $C[a, b]$

אזי גם $f_n \rightarrow f$ בנורמה $\|\cdot\|_{L_1[a, b]}$

תזכורת: $\|f\|_{L_1[a, b]} = \int_a^b |f(t)| dt$

ג. האם ההיפך נכון? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

(2) יהי V מרחב נורמי.

א. הוכיחו כי לכל $u, v \in V$ מתקיים $\|u - v\| \geq \left| \|u\| - \|v\| \right|$ (אי שיוויון המשולש ההפוך).

ב. הוכיחו כי אם $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ בנורמה של V אזי $\|f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|$.

(3) נתונה סדרת הפונקציות הבאה:

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{n} \cdot x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2\sqrt{n} - n\sqrt{n} \cdot x & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \end{cases}$$

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0, 10]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0, 10]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת ב- $L^1[0, 10]$?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת ב- $L^2[0, 10]$?

(4) נתונה סדרת פונקציות $f_n(x) = n(1-x)x^n$.

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,1]$? אם כן, מצאו את הפונקציה הגבולית.
- ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$?
- ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1[0,1]$?
- ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[0,1]$?

(5) נתונה
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
- ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?
- ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1(-\infty, \infty)$?
- ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2(-\infty, \infty)$?

(6) יהי V מרחב וקטורי של פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות שם למעט מספר סופי של נקודות, כאשר הנגזרת רציפה למקוטעין עם מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = f(a)g(a) + \int_a^b f'(x)g'(x)dx$$

א. לכל $x_0 \in [a,b]$ נגדיר את הפונקציה
$$g_{x_0}(x) = \begin{cases} x-a+1 & a \leq x \leq x_0 \\ x_0-a+1 & x_0 \leq x \leq b \end{cases}$$

- הוכיחו כי לכל $f \in V$ מתקיים $\langle f(x), g_{x_0}(x) \rangle = f(x_0)$.
- ב. הוכיחו כי לכל $f \in V$ ולכל $x_0 \in [a,b]$ מתקיים $|f(x_0)| \leq \sqrt{b-a+1} \cdot \|f\|$.
- ג. נניח כי $f_n(x) \in V$ סדרת פונקציות המתכנסת בנורמת V אל $f \in V$. הוכיחו כי ההתכנסות היא במידה שווה.

$$f_n(x) = \left[1 - \chi_n(x)\right] \left(x + \frac{1}{n}\right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x) \quad (7)$$

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2}\right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{כאשר}$$

א. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1, \infty)$?

אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1, \infty)$?

ג. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ בנורמת $L^1[1, \infty)$?

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cdot \chi_{[2^k, 2^{k+1}]}(x) \quad (8)$$

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{כאשר}$$

א. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1(-\infty, \infty)$?

ב. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2(-\infty, \infty)$?

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(kx) : L^2[-\pi, \pi] \quad (9)$$

א. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[-\pi, \pi]$ לפונקציה כלשהי?

ב. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\pi, \pi]$?

$$h_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

ג. האם $h_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\pi, \pi]$?

ד. האם $h_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[-\pi, \pi]$?

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) א. $f(x) = 0$

ב. $\sup_{[0,10]} |f_n(x)| \geq \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

ד. $\frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ג. $\frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ב. $\left(\frac{n}{n+1}\right) \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$

(4) א. $f(x) = 0$

ד. $\frac{2n^2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ג. $\frac{n}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ב. $1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

(5) א. $f(x) = 0$

ד. $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ג. $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(6) הוכחה.

(7) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית ב- $[1, \infty)$ והפונקציה הגבולית הינה $\frac{1}{x}$.

ב. $\max \left\{ n^\alpha - \frac{1}{n + \frac{1}{n^2}}, \frac{1}{n+1} \right\}$

(8) א. לא, סדרת הנורמות שואפת לאינסוף.
ג. אין התכנסות בנורמה כיוון שסדרת הפונקציות כלל אינה שייכת למרחב הנורמי.

ב. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty$

(9) א. לא, סדרת הנורמות שואפת לאינסוף.
ב. לא, כי אם הייתה התכנסות במידה שווה אז הייתה התכנסות בנורמת $L^2[-\pi, \pi]$ (בקטע הקומפקטי).

ג. $\sup_{[-\pi, \pi]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1 - \cos(kx)}{k^{1.5}} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{k^{1.5}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ד. כן, כי התכנסות במידה שווה (בקטע סופי) גוררת התכנסות בנורמת $L^2[-\pi, \pi]$ (בקטע סופי).

מערכות אורתונורמליות:

שאלות:

(1) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x) = \cos(nx)$ במרחב $L^2[-\pi, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

עם המכפלה הפנימית

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

(2) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x) = \sin(nx)$ במרחב $L^2[0, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

עם המכפלה הפנימית

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

(3) יהי מרחב מכפלה פנימית V ותהי $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ מערכת של פולינומים כך

ש- $\varphi_n(x)$ הינו פולינום ממעלה n .

$$\langle \varphi_n(x), x^m \rangle = 0 \quad \text{מתקיים } m < n$$

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

(4) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[e^{-\pi}, e^{\pi}]$ עם המכפלה

$$\langle f, g \rangle = \int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{x} dx$$

הפנימית

$$\varphi_n(x) = \sin(n \ln(x))$$

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

(5) נניח כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2[a, b]$ עם

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \text{ יהיו } c > 0 \text{ ו- } d \text{ ממשי כלשהוא.}$$

הוכיחו כי המערכת $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $\psi_n(x) = \sqrt{c} \cdot \varphi_n(c \cdot x + d)$ הינה מערכת

$$\text{אורתונורמלית סגורה במרחב } L^2\left[\frac{a-d}{c}, \frac{b-d}{c}\right] \text{ עם המכפלה}$$

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x) \overline{g(x)} dx \text{ הפנימית}$$

(6) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^N$ מערכת אורתונורמלית סופית.

$$\text{הוכיחו כי לכל } v \in V \text{ מתקיים } \left\| \sum_{n=1}^N \langle v, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle v, e_n \rangle|^2$$

מערכת פולינומי צ'בישב:

(7) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1, 1)$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ : ונגדיר ב- } K \text{ מכפלה פנימית:}$$

הוכיחו כי אוסף הפונקציות $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $T_n(x) = \cos[n \cdot \arccos(x)]$

(הנקראת גם פולינומי צ'בישב) הינה מערכת אורתוגונלית ב- K ומצאו

קבועים α_n כך שהמערכת $\{\alpha_n T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית.

מערכת פולינומי הרמיט:

(8) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות

$$\text{למקוטעין ומקיימות את התנאי } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x^2} dx < \infty$$

$$\text{נגדיר על } K \text{ מכפלה פנימית } \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \cdot e^{-x^2} dx$$

הוכיחו כי פולינומי הרמיט, המוגדרים על ידי הנוסחה $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתוגונלית במרחב K ומצאו להם קבועי נרמול.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח כי לכל n, k טבעיים כך ש- $k < n$

$$\langle H_n, x^k \rangle = 0 \text{ . ניתן להיעזר בעובדה כי } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

מערכת פולינומי לג'נדר:

(9) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx \text{ : מכפלה פנימית}$$

הוכיחו כי פולינומי לג'נדר, הנתונים על ידי נוסחת רודריגז $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$

מהווים מערכת אורתוגונלית ב- K וכי $\langle P_n, P_n \rangle = \frac{2}{2n+1}$ לכל n טבעי.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n, k טבעיים כך ש- $k < n$ מתקיים.

$$\langle P_n, x^k \rangle = 0$$

מערכת פולינומי לגר:

(10) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x} dx < \infty \text{ למקוטעין ומקיימות את התנאי}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx \text{ מכפלה פנימית על } K$$

הוכיחו כי פולינומי לגר, המוגדרים על ידי הנוסחה $L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^{-x}]$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב K .

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n, k טבעיים כך ש- $k < n$ מתקיים.

$$\langle L_n, x^k \rangle = 0$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \text{ ניתן להיעזר בנוסחה}$$

תשובות סופיות:

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) הוכחה.
- (7) מערכת פולינומי צ'בישב: הוכחה.
- (8) מערכת פולינומי הרמיט: הוכחה.
- (9) מערכת פולינומי לגינדר: הוכחה.
- (10) מערכת פולינומי לגר: הוכחה.

קירוב מיטבי:

שאלות:

(1) מצאו את נקודות המינימום של הפונקציה:

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \alpha - \beta \cos(x) - \gamma \cos(10x)|^2 dx$$

א. כאשר $f(x) = \cos^2(x)$

ב. כאשר $f(x) = x^3$

ג. כאשר $f(x) = \sin(x)$

(2) במרחב $C[-\pi, \pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$.

נגדיר תת מרחב $W = \text{span}\{1, \sin(x), \cos(x), x\}$ ופונקציה $f(x) = |x|$. מצאו פונקציה $g \in W$ כך ש- $\|f - g\|$ מינימלי.

הערה:

שימו לב שהמערכת $\{1, \sin(x), \cos(x), x\}$ איננה אורתונורמלית.

(3) נתבונן במרחב $C[-1, 1]$ מעל \mathbb{C} .

א. הוכיחו כי $\langle f, g \rangle = f(-1) \overline{g(-1)} + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$ מהווה מכפלה פנימית.

ב. מצאו את כל הערכים של $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$|-1 - \alpha + \beta - \gamma|^2 + \int_{-1}^1 |3x^2 - \beta - 2\gamma x|^2 dx$$

(4) נתבונן במרחב $C[-1, 1]$ מעל \mathbb{C} .

נתון כי $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

מצאו את כל הערכים של $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$\int_{-1}^1 |x^3 - \alpha - \beta x - \gamma x^2|^2 dx + \int_{-1}^1 |3x^2 - \beta - 2\gamma x|^2 dx$$

(5) תהי V קבוצת הפונקציות הרציפות על הישר הממשי המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx < \infty$.

א. הוכיחו כי V עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x^2} dx$$

ב. הוכיחו כי כל הפולינומים שייכים ל- V .

ג. מצאו את הקירוב המיטבי של x^3 על מרחב הפולינומים מדרגה 2 לכל היותר.

הערה:

ניתן להשתמש באינטגרלים הבאים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

(6) יהי L מרחב וקטורי של פונקציות ממשיות ורציפות למקוטעין על הקטע $[1, \infty)$

$$\int_1^{\infty} x |f(x)|^2 dx < \infty$$

$$\langle f, g \rangle = \int_1^{\infty} f(x) g(x) x dx$$

$$W = \text{span} \left\{ \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2} \right\}$$

$$P_W \left(\frac{x}{e^{\sqrt{x}}} \right)$$

(7) תהי $f \in C[-1, 1]$.

הוכיחו כי לכל פונקציה אי זוגית $g \in C[-1, 1]$

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^1 |f(x) + f(-x)|^2 dx \leq \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)|^2 dx$$

תשובות סופיות:

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0 \quad \text{ג.}$$

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0 \quad \text{ב.}$$

$$\alpha = 0.5, \beta = \gamma = 0 \quad \text{א. (1)}$$

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(x) \quad \text{(2)}$$

$$\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0 \quad \text{ב.}$$

א. הוכחה. (3)

$$\alpha = \gamma = 0, \beta = \frac{9}{10} \quad \text{(4)}$$

$$P_w(x^3) = \frac{3}{2}x \quad \text{ג.}$$

ב. הוכחה.

א. הוכחה. (5)

$$\frac{28}{e}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{36}{e}x^{-\frac{5}{2}} \quad \text{(6)}$$

הוכחה. (7)

מערכת אורתונורמלית סגורה:

שאלות:

(1) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א. האם קיים $v \in V$ כך ש- $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}$?

ב. נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

יהיו $u, v \in V$ כך ש- $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{n}$ ו- $\langle v, e_n \rangle = \frac{1}{n+1}$. חשבו את $\langle u, v \rangle$.

(2) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א. יהי $u \in V$ כך ש- $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$

מצאו את הקירובים המיטביים u_1, u_2, u_3 ל- u בתת המרחבים $W_1 = \text{span}\{e_1\}$,

$W_2 = \text{span}\{e_1, e_2\}$, $W_3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ בהתאמה.

ב. נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

חשבו $\|u - u_1\|$, $\|u - u_2\|$, $\|u - u_3\|$ כאשר u_1, u_2, u_3 הם הקירובים המיטביים מהסעיף הקודם.

(3) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V .

נגדיר $g_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[f_{2n-1} + f_{2n}]$, $g_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[f_{2n-1} - f_{2n}]$

א. הוכיחו כי המערכת $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית ב- V .

ב. הוכיחו כי המערכת $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V .

תשובות סופיות:

(1) א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2 \leq \|u\|^2 < \infty$ ב. $\langle u, v \rangle = 1$

(2) א. $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot e_2 + \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot e_3$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot e_2$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e_1$

ב. $\|u - u_3\| = \sqrt{\frac{9}{40}}$, $\|u - u_2\| = \sqrt{\frac{7}{24}}$, $\|u - u_1\| = \sqrt{\frac{5}{12}}$

(3) א. הוכחה. ב. הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

(1) יהי V מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$.

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \overline{g'(x)} dx$$

נגדיר על V מכפלה פנימית:

א. הוכיחו כי המערכת $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורתוגונלית במרחב V .

מצאו נורמה של e^{inx} המושרית מהמכפלה הפנימית הני"ל.

ב. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f \in V$ המקיימת:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - in \cdot f'(x)) e^{-inx} dx \right|^2}{1+n^2} = 1$$

(2) נגדיר $a_n = \min_{\alpha \in \mathbb{C}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sqrt{|\cos(x)|} - \alpha \cos(nx) \right|^2 dx \right]$. חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(3) נגדיר $R_n = \min_{a,b \in \mathbb{C}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sqrt{|x|^3} - a \sin(nx) - b \sin([n+1]x) \right|^2 dx \right]$. חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$.

(4) נגדיר $g(a,b) = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \min\{1, |x|\} - a - b \sin(nx) \right|^2 dx \right]$

א. מצאו את הערכים a, b עבורם $g(a,b)$ מינימלית.

ב. חשבו את $g(a,b)$ עבור a, b אלו.

תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(2) $\frac{4}{\pi}$

(3) $\frac{\pi^3}{2}$

(4) א. $a = 1 - \frac{1}{2\pi}$, $b = 0$. ב. $g(a,b) = 2 - \frac{4}{3\pi} - 2 \left[1 - \frac{1}{2\pi} \right]^2$

חדוא של טורים והתמרות

פרק 8 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

- 82 1. הצגה פרמטרית של עקום.
- 83 2. הנגזרת ושימושיה.
- 84 3. שימושי האינטגרל המסוים.

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

(1) עבור מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

(2) עבור מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

(3) לפניך תיאור פרמטרי של מסלולים במישור. על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצא משוואה מתאימה, שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

תשובות סופיות

(1) א. $y = x - 1, x \geq 1$ ב. $y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$ ג. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$

(2) א. $x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4$ ב. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$ ג. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$

(3) א. $y = (x+4)^2$ ב. $(x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1$ ג. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1$ ה. $x^2 + y^2 = 25$ ו. $x^2 - y^2 = 4k^2$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

(1) חשב את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad \text{הנתונה בצורה פרמטרית:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטט את העקום.

ב. חשב את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצא את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

ד. מצא את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

$$(3) \quad \begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטט את העקום.

ב. מצא את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0, 0)$.

ג. מצא את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי, ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

$$(1) \quad y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$$

$$(2) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y' = \frac{-2}{2t+1} \quad \text{ג. } y = 2x+3 \quad \text{ד. } y = -0.5x+3$$

$$(3) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y = \pm\sqrt{3}x \quad \text{ג. אופקי- } (0, -9) \quad \text{אנכי } (2, -6), (-2, -6)$$

ד. $-1 < t < 1$ קמור. $t > 1$ או $t < -1$ קעור.

שימושי האינטגרל המסוים

$$(1) \text{ חשב את השטח הכלוא בעקום } C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$$

$$(2) \text{ חשב את השטח הכלוא בתוך האליפסה } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ כאשר } a, b > 0$$

* שים לב שאם $a = b = r$, נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס r .

$$(3) \text{ חשב את השטח הכלוא בין העקום } 0 \leq t \leq \pi, \quad x = \cos t, \quad y = t + \sin t$$

לבין ציר ה- x .

$$(4) \text{ חשב את השטח הכלוא בין העקום } 0 \leq t \leq 2\pi, \quad x = 4 \cos t, \quad y = \sin^2 t$$

לבין ציר ה- x .

$$(5) \text{ חשב את אורך העקום } 0 \leq t \leq 2\pi \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

$$(6) \text{ חשב את אורך העקום } \begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}, \text{ מהנקודה } (1, 0) \text{ לנקודה } (-1, \pi).$$

(7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

מצא את המרחק שהחלקיק עבר והשווה אותו לאורך העקום עצמו.

$$(8) \text{ חלק העקום } \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, \text{ שבין } t = 0 \text{ לבין } t = \pi, \text{ מסתובב סביב ציר ה-} x.$$

מהו שטח המעטפת הנוצרת?

$$(9) \text{ חלק העקום } \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \text{ שבין } t = 0 \text{ לבין } t = \frac{\pi}{2}, \text{ מסתובב סביב ציר ה-} y.$$

מהו שטח המעטפת הנוצרת?

$$(10) \text{ חשב את אורך העקום } -\pi \leq t \leq 2\pi \quad \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}$$

11) חשב את אורך העקום $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$. $1 \leq t \leq 3$.

תשובות סופיות

8/3 (1)

πab (2)

1.5π (3)

$16/3$ (4)

8 (5)

4 (6)

7) אורך העקום הוא 2π . המרחק שעבר החלקיק הוא 4π .

$4\pi r^2$ (8)

$6\pi/5$ (9)

$6\pi\sqrt{29}$ (10)

$\sqrt{3}e(e^2 - 1)$ (11)

חדוא של טורים והתמרות

פרק 9 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

86	1. קואורדינטות קוטביות
88	2. הנגזרת ושימושיה
89	3. שימושי האינטגרל המסוים

קואורדינטות קוטביות

שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

(2) ענה על הסעיפים הבאים :

א. א. המר את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית $(0, -4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המר את הנקודה הקרטזית $(-2, 2)$ לנקודה קוטבית.

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $4x - x^2 = 1 + xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המר את המשוואה $r = -4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $x^2 + y^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המר את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המר את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

(5) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המר את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המר את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המר את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

תשובות סופיות

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ ב.}$$

$$(2) \quad (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ב.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ ג.}$$

$$(3) \quad 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א.} \quad (x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב.}$$

$$(4) \quad r = 4 \sin \theta \text{ א.} \quad r \cos \theta = 10 \text{ ב.} \quad r \sin \theta = 4 \text{ ג.}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א.} \quad y = x \text{ ב.} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג.}$$

$$\text{ד.} \quad 6\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 \cdot y = 4\sqrt{x^2 + y^2} - x$$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

- (1) מצא את משוואת המשיק לעקום $r = 3 + 8\sin \theta$ בנקודה $\theta = \frac{\pi}{6}$.
- (2) מצא את משוואת המשיק לעקום $r = 1 - 2\sin \theta$ בראשית הצירים.

תשובות סופיות

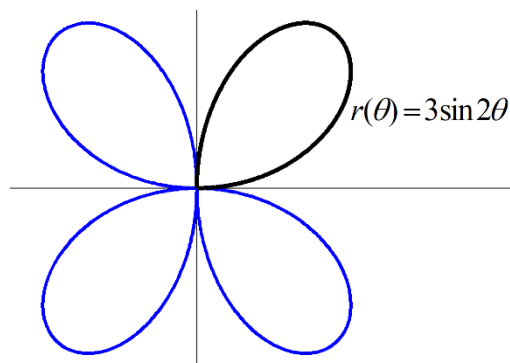
$$y = \frac{11\sqrt{3}}{5}x - \frac{98}{5} \quad (1)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (2)$$

שימושי האינטגרל המסוים

שאלות

- (1) חשב את השטח של הלולאה הפנימית של $r = 2(1 + 2\cos\theta)$.
- (2) חשב את השטח הכלוא בתוך $r = 6 + 4\cos\theta$ ומשמאל לציר ה- y .
- (3) חשב את השטח הכלוא בתוך $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (4) חשב את השטח המוגבל בתוך $r = 3 + 2\sin\theta$ ומחוץ ל- $r = 2$.
- (5) חשב את השטח המוגבל בתוך $r = 2$ ומחוץ ל- $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (6) חשב את השטח המוגבל בתוך $r = 2$ ובתוך $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (7) חשב את השטח הכלוא בתוך המעגל $r = 2\sin\theta$ ומחוץ למעגל $r = 1$.
- (8) מצא את אורך הקרדיואידה $r = 1 + \cos\theta$.
- (9) מצא את האורך של עלה אחד של הורד $r = 3\sin 2\theta$.
אין צורך לחשב את האינטגרל!



- (10) מצא את אורך העקום $r = \theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq 1$.
- (11) העקום $r = \cos\theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

(12) העקום $r = 4 + 4\sin\theta$, כאשר $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y .
 מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

תשובות סופיות

$$S = 4\pi - 6\sqrt{3} = 2.174 \quad (1)$$

$$S = 22\pi - 48 \quad (2)$$

$$S = 11\pi \quad (3)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} = 24.187 \quad (4)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} = 2.196 \quad (5)$$

$$10.37 \quad (6)$$

$$S = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (7)$$

$$8 \quad (8)$$

$$\ell = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\cos^2 2\theta} d\theta \quad (9)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{2} \quad (10)$$

$$S_x = \pi \quad (11)$$

$$S_y = 102.4\pi \quad (12)$$

נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

קווים

$$(1) \quad r \cos \theta = a \quad - \text{ הישר } x = a$$

$$(2) \quad r \sin \theta = b \quad - \text{ הישר } y = b$$

$$(3) \quad \theta = \beta \quad - \text{ הישר העובר דרך הראשית } y = (\tan \beta)x$$

מעגלים

$$1. \quad r = a \quad - \text{ מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוס } a$$

$$2. \quad r = 2a \cos \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנקודה } (a, 0) \text{ ורדיוס } |a|$$

$$3. \quad r = 2b \sin \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנקודה } (0, b) \text{ ורדיוס } |b|$$

$$4. \quad r = 2a \cos \theta + 2b \sin \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנק' } (a, b) \text{ ורדיוס } \sqrt{a^2 + b^2}$$

קרדיודות ולמניסקטות

$$(1) \quad \text{קרדיודות } r = a \pm a \cos \theta, r = a \pm a \sin \theta$$

גרף בצורת לב שמכיל את הראשית.

$$(2) \quad \text{למניסקטות עם לולאה פנימית } r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta \quad (a < b)$$

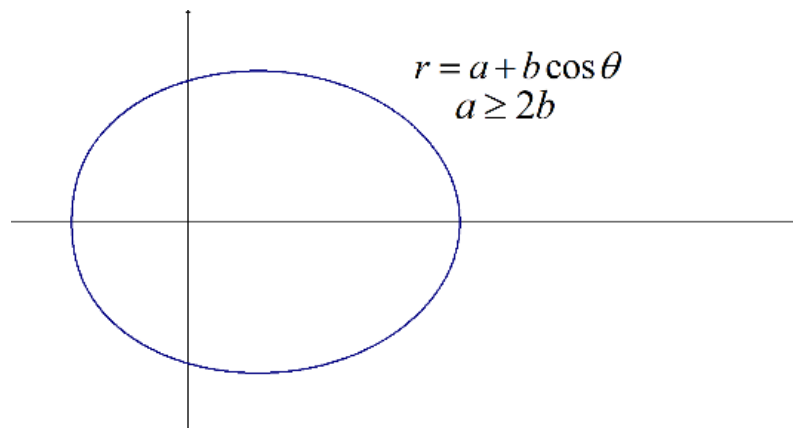
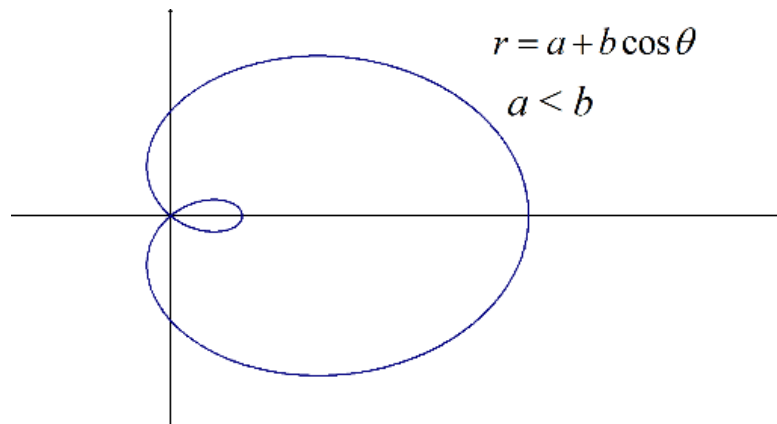
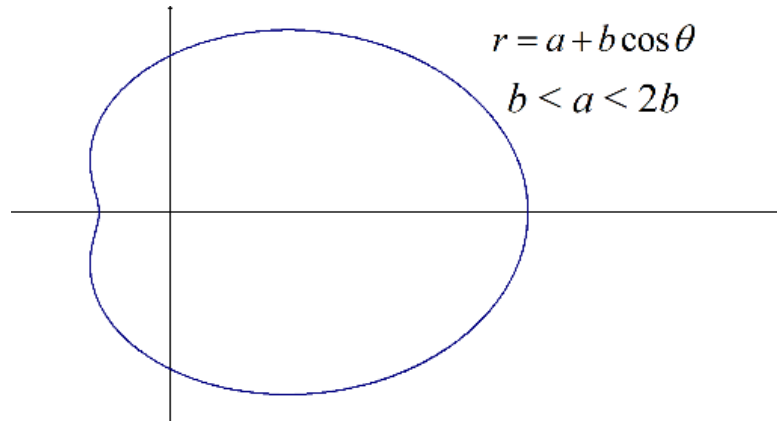
גרף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

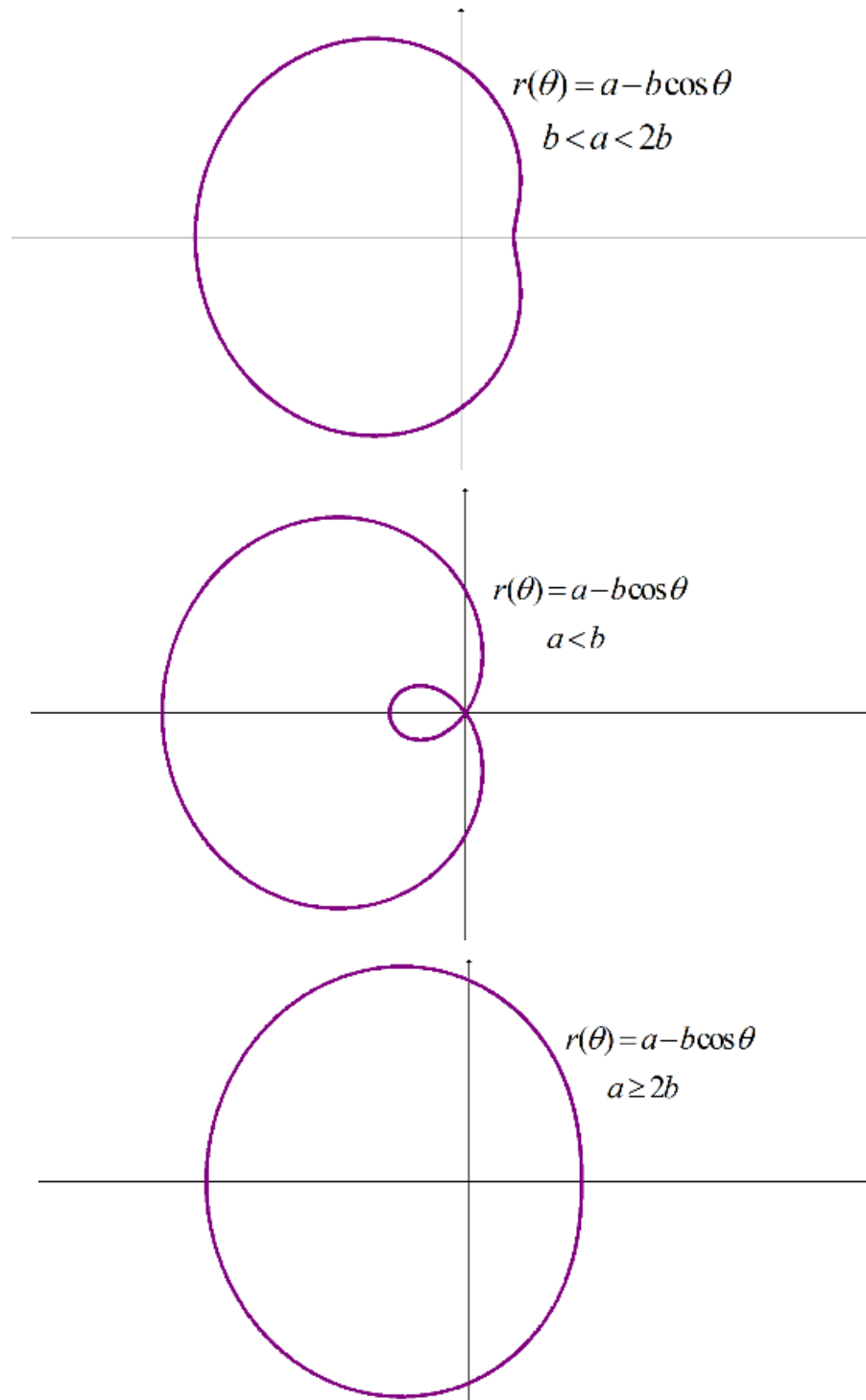
$$(3) \quad \text{למניסקטות ללא לולאה פנימית } r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta \quad (a > b)$$

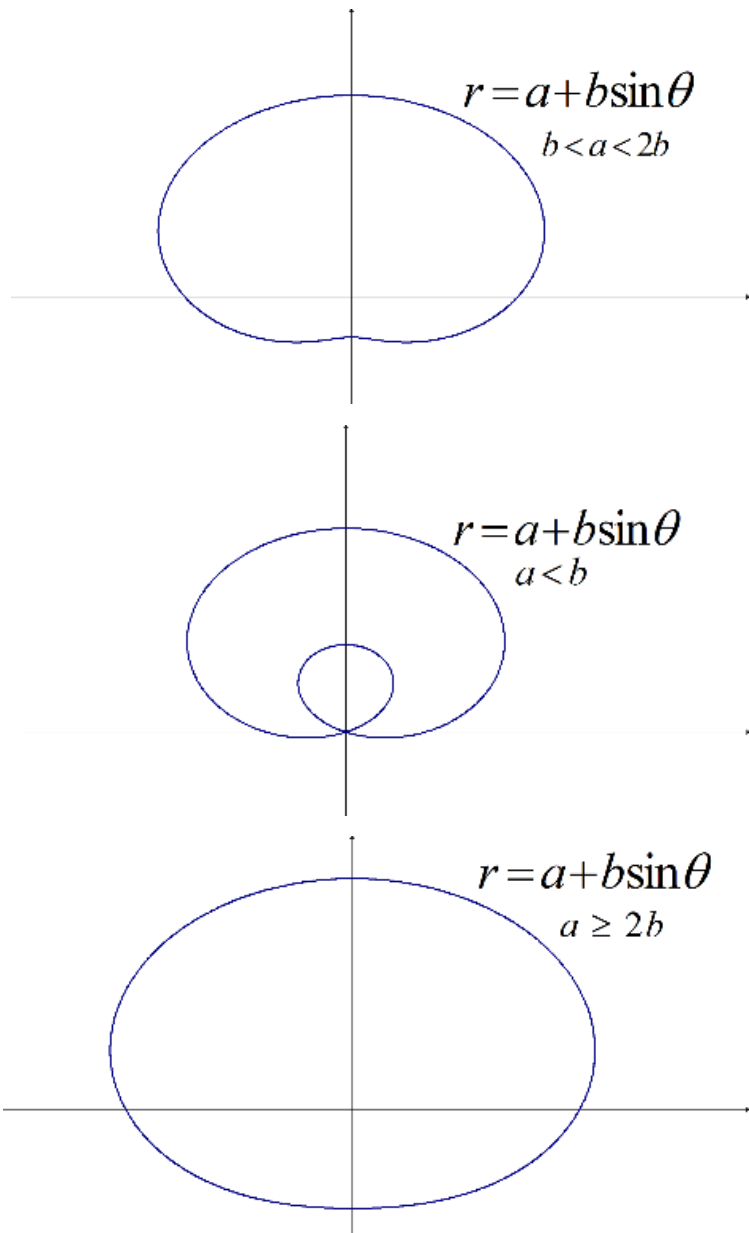
גרף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

$$* \text{ נשרטט בדרך כלל עבור מחזור שלם } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

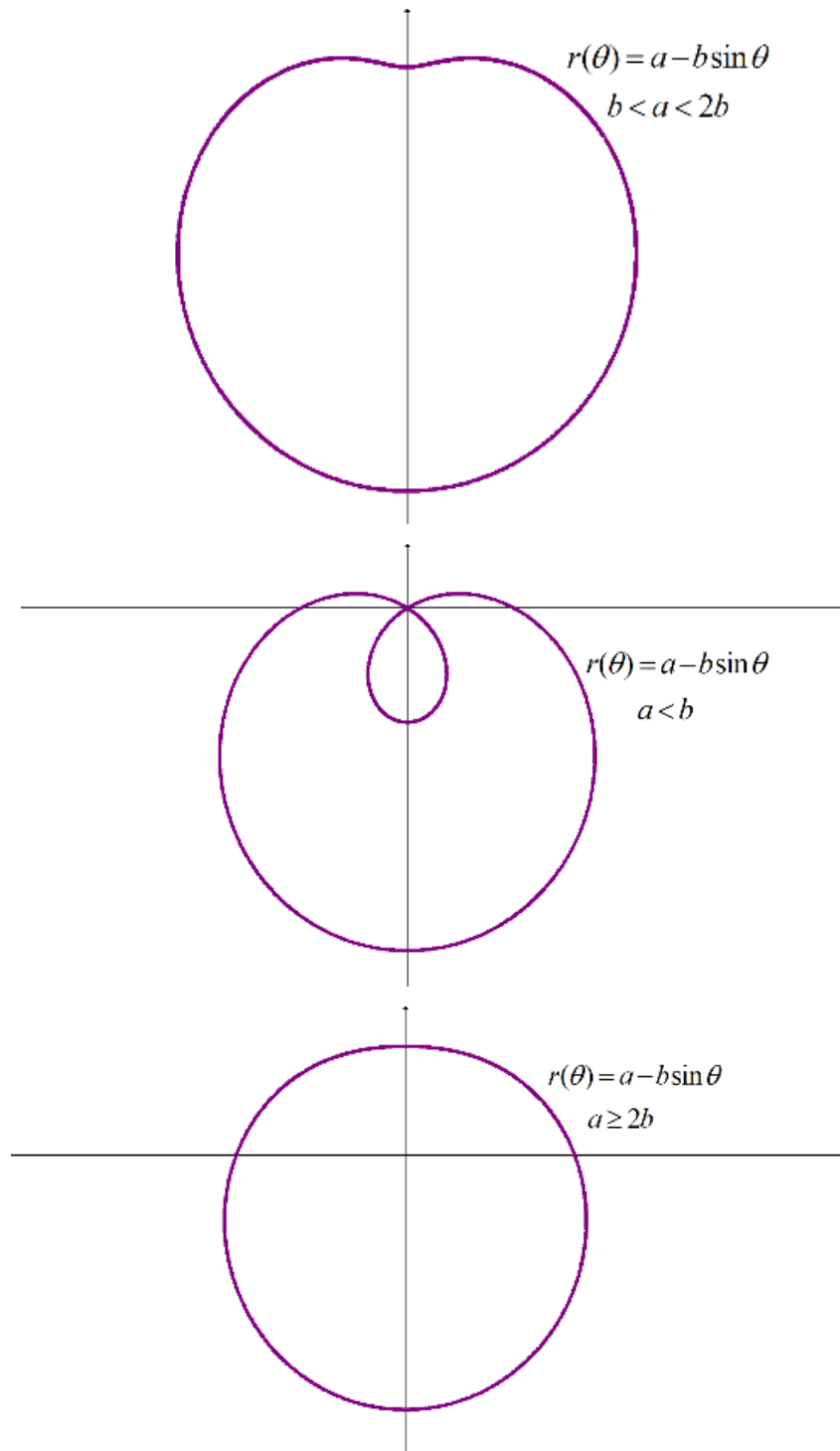
למינסקטות ביתר פירוט

 הגרף של $r = a + b \cos \theta$:


הגרף של $r = a - b \cos \theta$ 

הגרף של $r = a + b \sin \theta$ 

הגרף של $r = a - b \sin \theta$



גרפים נפוצים נוספים

