

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014



תוכן העניינים

| | |
|-----|--|
| 1 | אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים |
| 5 | אינטגרלים בשיטת ההצבה |
| 8 | אינטגרלים של פונקציות רציונליות |
| 13 | אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות |
| 24 | האינטגרל המסוים, סכומי רימן |
| 29 | שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת) |
| 51 | שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת) |
| 56 | המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל) |
| 58 | אינטגרלים לא אמיתיים |
| 69 | נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה |
| 73 | נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה |
| 84 | משוואות מסדר ראשון |
| 92 | שימושים של משוואות דיפרנציאליות |
| 100 | פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחים וגופים במרחב |
| 121 | גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים |
| 128 | נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות |
| 139 | כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים |
| 143 | נגזרת מכוונת וגרדיאנט |
| 148 | פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים |
| 155 | נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלם |
| 158 | קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים |
| 160 | קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים |
| 162 | קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז') |

תוכן העניינים

- 165..... 24. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים
- 167..... 25. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה
- 168..... 26. טורי טיילור - מקלורן

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 1 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים.....1

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

(24) מצא נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ כאשר n טבעי.

(25) חשב את $\int x^4 e^x dx$.

(26) מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ כאשר n טבעי.

(27) חשב את $\int \cos^4 x dx$.

(28) מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ כאשר n טבעי.

(29) חשב את $\int \sin^4 x dx$.

(30) מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ כאשר n טבעי.

(31) חשב את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

(32) חשב את האינטגרלים $\int e^{ax} \cos bxdx$, $\int e^{ax} \sin bxdx$.

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right\} \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 2 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 5

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 3 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית 8
2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית 10
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית 11

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}}$$
 (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$$
 (2)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx$$
 (3)

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx$$
 (4)

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$
 (5)

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$
 (6)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$
 (7)

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln |1 - \sqrt[3]{x^2}| + c \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln |1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left(\frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln |1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln \left((\sqrt[3]{x} - 0.5)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln |1 + e^x| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

נוסחאות

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 4 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות 13
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות 15
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית 16
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים 17
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות 20

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

| | |
|--|--|
| $\int \cos x dx = \sin x + c$ | $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$ |
| $\int \sin x dx = -\cos x + c$ | $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$ |
| $\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$ | $\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$ |
| $\int \cot x dx = \ln \sin x + c$ | $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$ | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$ | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$ |

זכור כי:

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 4x} \quad (2)$$

$$\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 10x} \quad (3)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8)$$

$$\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} \quad (9)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$$

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\frac{3}{4} x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8} x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(t) dt \quad \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right.$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t) (-dt) \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right.$$

זכור כי :

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (3)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (8)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$\frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c \quad (2)$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c \quad (4)$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad (5)$$

$$\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c \quad (8)$$

$$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (12)$$

$$-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c \quad (11)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \text{זכור כי:}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right\}$$

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}} \arctan \left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}} \right) \right) + c \quad (3)$$

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$$

$$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$$

$$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$$

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2-1} dx \quad (3)$$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2+2x-3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} \quad (10)$$

$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

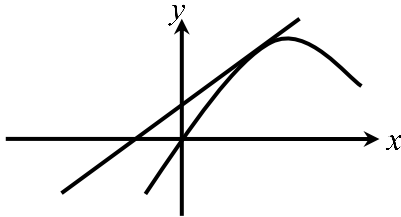
שאלות

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x , ברביעים הראשון והשני.



(2) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$.

בתחום: $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$.

מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה,

ומעלים אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה

של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון,

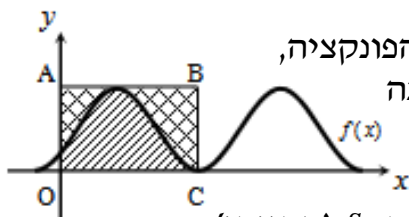
המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .

א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.



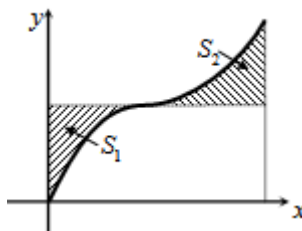
(3) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y = \sin x + x$, בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

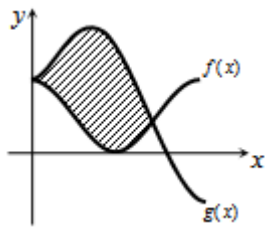
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכח.

ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 2\pi$,

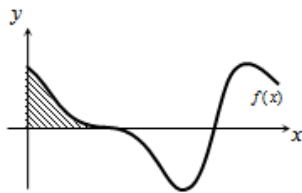
ומעבירים ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

הראה כי השטחים המסומנים בשרטוט, S_1 ו- S_2 , שווים.

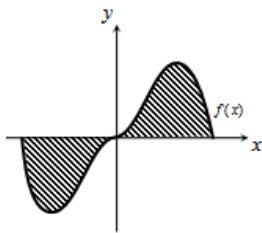




- 4 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
 השתמש בזהות $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.



- 5 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$.
 א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות $f'(x) = 0$ בתחום $0 < x < 2\pi$.
 ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$, אשר אינה קיצון, נמצאת על ציר ה- x .
 ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- 6 נתונה הפונקציה $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$.
 א. הוכח כי נגזרת הפונקציה היא $y' = x^2 \sin x$.
 באיור שלפניך נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \sin x$ בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.
 ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

- 7 נתונה הפונקציה $f(x) = a \cos x + b \sin x$, כאשר a, b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$,

והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות

1) א. $y = x + 2$ ב. π יח"ש.

1) א. $y = 1$ ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$.

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול.

ב. $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$.

3) א. $(0, 1)$, $(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4})$ ב. $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$.

4) א. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

5) א. הוכחה ב. הוכחה ג. $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$.

6) $b = -2, a = 2$

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 5 - האינטגרל המסוים, סכומי רימן

תוכן העניינים

- 24 1. האינטגרל המסוים
- 26 2. אי שוויונים עם אינטגרלים
- 27 3. סכומי רימן

האינטגרל המסוים

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-10 :

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx \quad (10)$$

(11) נתונה פונקציה רציפה f . הוכח:

א. אם f זוגית, אזי $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

ב. אם f אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (12)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (13)$$

תשובות סופיות

(1) -6

(2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3) $-2e^{-1} + 1$

(4) $\frac{1}{5}$

(5) $\arctan 6 - \arctan 3$

(6) $\frac{\pi}{2}$

(7) $\frac{17}{12}$

(8) $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(9) $\frac{\pi^2}{4}$

(10) $\frac{\pi}{4}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) 0

(13) $2 \arctan 4$

אי-שוויונים עם אינטגרלים

הוכח את אי-השוויונים הבאים :

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (1)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (2)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (5)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (6)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (7)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (8)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

סכומי רימן

חשב את הגבולות בשאלות 1-6:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 7-10 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכל להיעזר בזהויות הבאות:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 0.5n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2} \alpha \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (9)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (8)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (7)$$

$$(11) \text{ חשב את הגבול: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$1 - \cos 1 \quad (2)$$

$$\ln 2 \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad (5)$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\frac{1}{3} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \quad (9)$$

$$2 \quad (10)$$

$$\infty \quad (11)$$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 6 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

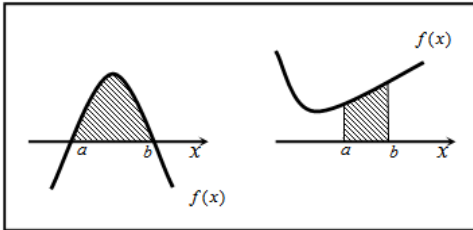
תוכן העניינים

- 1. חישוב שטחים 29
- 2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y 49
- 3. אורך קשת 50

חישוב שטחים

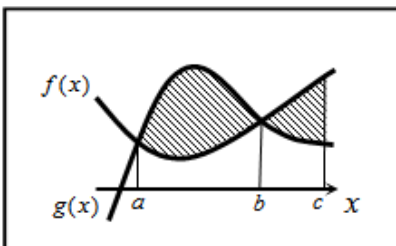
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

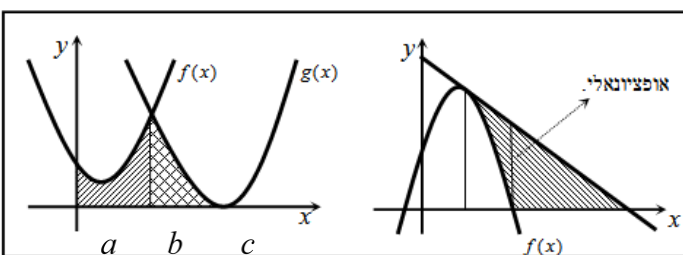


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

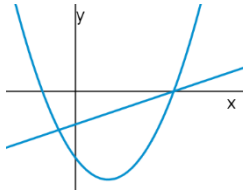
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

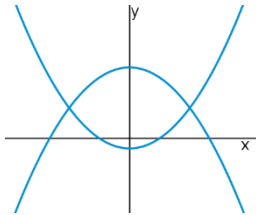


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

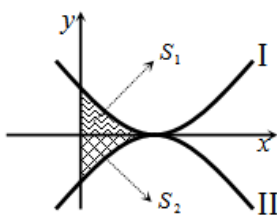
שאלות



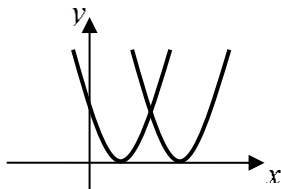
- (1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



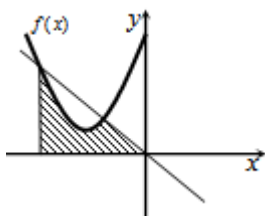
- (2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



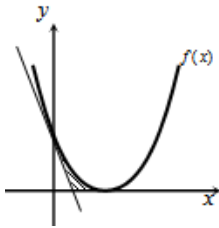
- (3) נתונות הפונקציות $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2$,
כמתואר באיור.
א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- S_1 ו- S_2 , כמתואר באיור.
הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



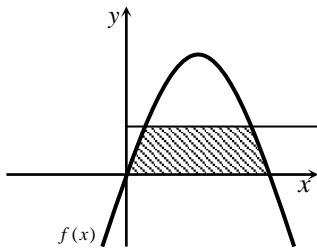
- (4) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .



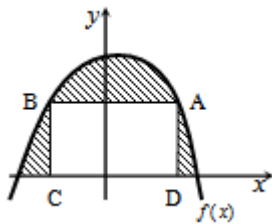
- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 6x + 12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x = -4$, כמתואר באיור.
א. מצא את משוואת הישר.
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



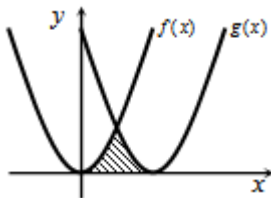
- 6) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.
 בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.
 א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
 ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



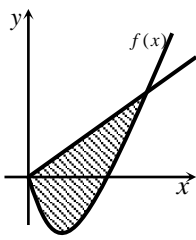
- 7) נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.
 הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
 ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות אלה הוא $x = 9$.
 א. מצא את ערך הפרמטר k .
 ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
 ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).



- 8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלפניך, היא $f'(x) = 3 - 2x$. ישר AB , שמשוואתו $y = 6$, חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו- B . מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x , כך שנוצר מלבן $ABCD$. ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא $x = 4$.
 א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).



- 9) באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה $f(x) = x^2$ את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x = 2$. הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.
 א. מצא את הפונקציה $g(x)$.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (השטח המסומן).



10 באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$,

וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

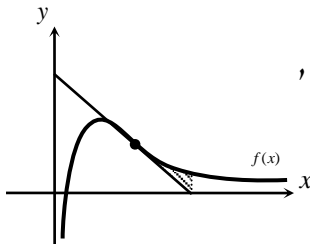
בנקודה שבה ערך ה- y הוא $y = 16$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

11 ענה על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$,

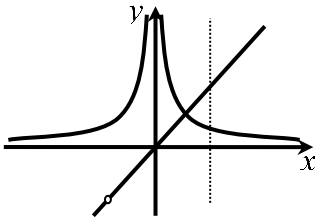
מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף א'.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- x ,

היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

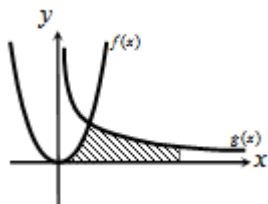


12 נתונות שתי פונקציות $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 2$ וציר ה- x .

13 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות



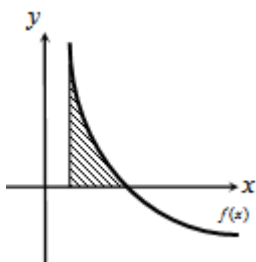
$f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ (קבוע, $a > 0$), בתחום $x > 0$.

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,

בנקודה הנמצאת על הישר $y = 4x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x = 4$.



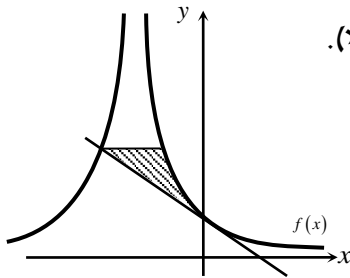
14 גרף הפונקציה $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$ (קבוע a)

חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והישר $x = 2$.



15 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$ (פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם

ציר ה- y , הוא $-\frac{1}{9}$.

א. מצא את ערך הפרמטר A .

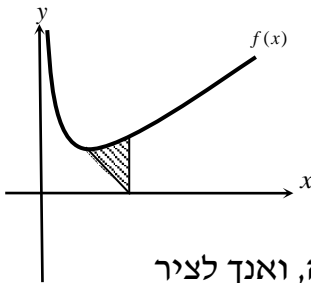
ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- y .

ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4.5$.

ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם.

מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).



16 באיור שלפניך נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.

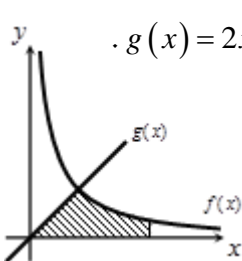
א. מצא את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים

ישר לנקודה $(2, 0)$, שעל ציר ה- x .

מצא את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר

ה- x , היוצא מהנקודה $(2, 0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.



17 באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = 2x - 1$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

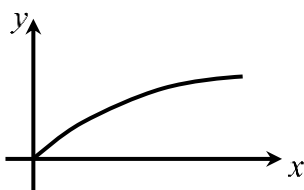
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים,

ציר ה- x והישר $x = 9$.

18 נתונה הפונקציה $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת

המינימום שלה וציר ה- y .



19 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

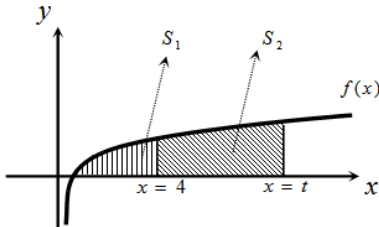
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק והישר $x = \sqrt{3}$.

(20) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

מעבירים שני אנכים לציר ה- x , $x=4$ ו- $x=t$ (כאשר $t > 4$).
נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x ב- S_1 ,
ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים ב- S_2 .

ידוע כי $8S_1 = S_2$.
מצא את t .



(21) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

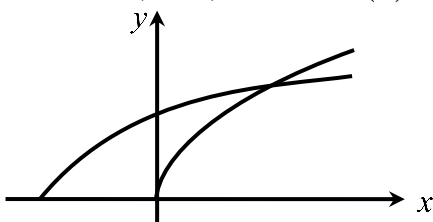
3. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m = \frac{17}{16}$.

מצא את נקודת ההשקה.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

(22) נתונות שתי פונקציות $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$, כאשר $(b > 0)$.



גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- x הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצא את ערכו של הפרמטר b .

(23) באיור שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$,

ברביע הראשון.

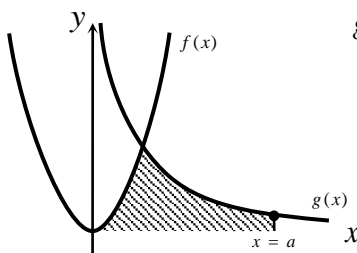
מעבירים ישר $x=a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- x והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $85\frac{1}{3}$.

מצא את a .



24) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$.

מעבירים שני ישרים $x = k$ ו- $x = t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

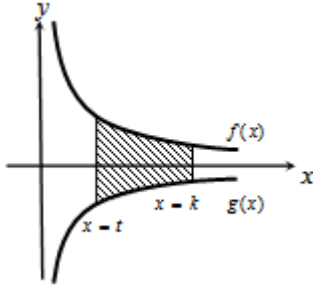
ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראה כי $k = 4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות

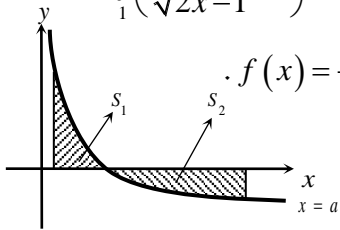
לבין הישרים $x = k$ ו- $x = t$, הוא $S = 12$.

מצא את t .



25) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא עבור איזה ערך של a , $a > 1$ יתקיים $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.



ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$.

מעבירים שני אנכים לציר ה- x , $x = 1$ ו- $x = 13$,

כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 .

מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

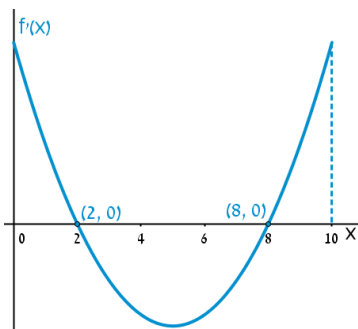
ג. ענה על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והאנך $x = 1$, כלומר את S_1 .

2. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח S_2 .

נמק את טענתך.



26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

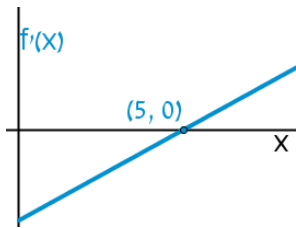
א. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

אם $f(5) = 0$, $f(0) = -4$, $f(2) = 6$,

וכן $f(10) > 0$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x = 2$.



(27) לפניך גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את

ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $(5, 0)$.

א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית,

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y

שלה הוא $y = -2$.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך

את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.

(28) באיור שלפניך מתוארת הנגזרת $f'(x)$.

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

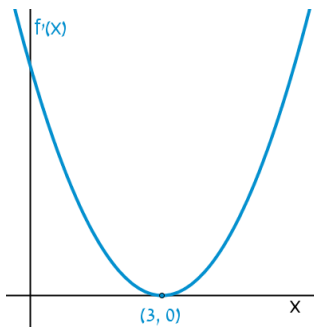
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

אם ידוע כי $f(3) = 4$, וכי היא חותכת את

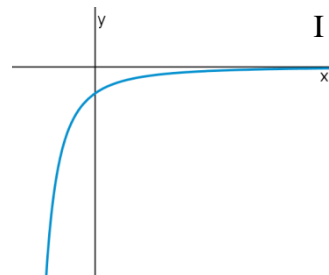
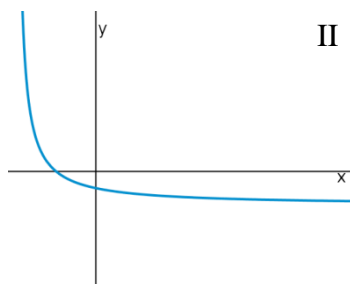
ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.



(29) באיורים שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:

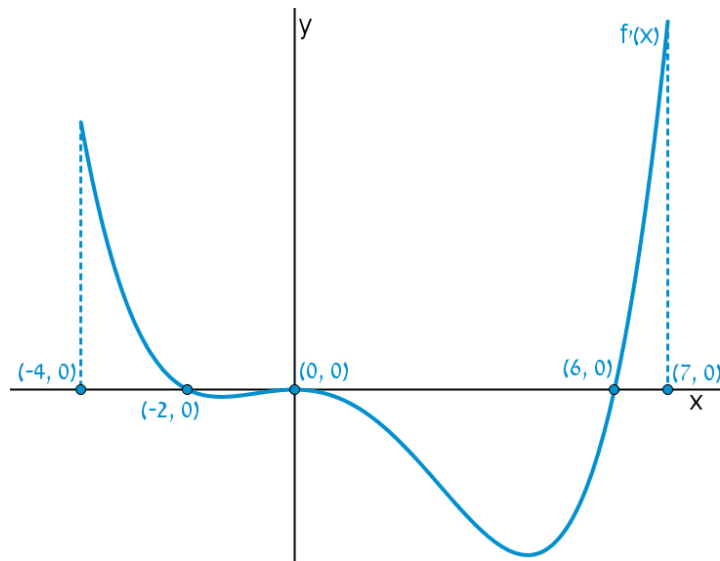


א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.

ב. נתון $f(10) = -3$, וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$.

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

30 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:

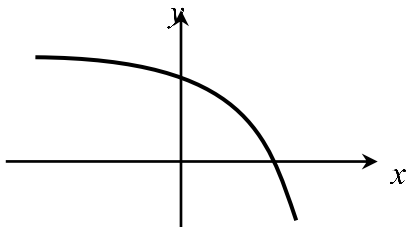


- א. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$,
 לפי הנתונים $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.
- ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.
- ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מייזים של פונקציות מעריכיות

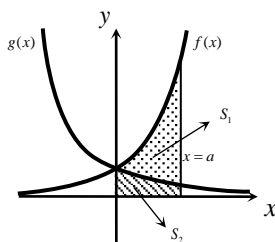
| אינטגרלים יסודיים | אינטגרלים של פונקציות מורכבות |
|---------------------------------------|---|
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$ |
| $\int e^x dx = e^x + c$ | $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$ |



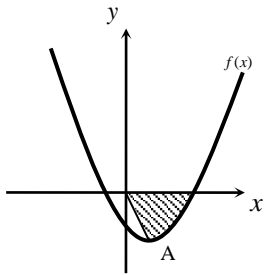
- (31)** נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
 חשב את גודל השטח הכלוא בין
 הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
 ניתן להשאיר e ו- \ln בתשובה.

- (32)** נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $b > 0$.
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים
 וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
 מצא את ערכו של הפרמטר b .

- (33)** נתונות הפונקציות $f(x) = e^{-x}$ ו- $g(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
 מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
 הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$,
 ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x , כך שנוצר מלבן.
 הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

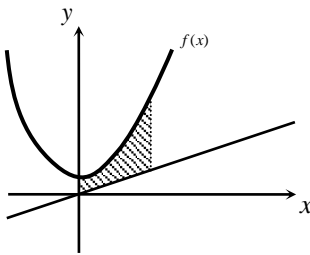


- (34)** באיור שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציות
 $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
 מעבירים אנך לציר ה- x את הישר $x = a$,
 כאשר $a > 0$, כמתואר באיור.
 אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 .
 ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 .
 מצא את a .



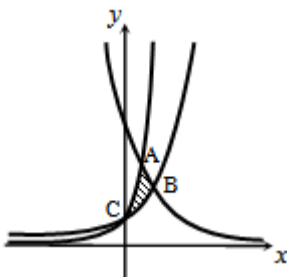
35 נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$.

- הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.
 א. מצא את שיעורי הנקודה A.
 מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.
 ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.7$.



36 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

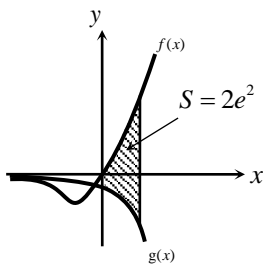
- ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$.
 א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
 ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, והישר $y = 0.1x$.
 חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y והאנך $x = 2$.



37 באיור שלפניך מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$1. f(x) = 2^x \quad 2. g(x) = 4^x \quad 3. h(x) = 2^{4-2x}$$

- א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.
 ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).
 ג. חשב את השטח המסומן באיור.



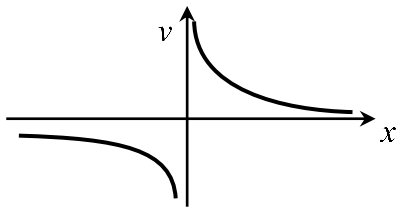
38 ענה על הסעיפים הבאים:

- א. גזור את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.
 ב. באיור שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = xe^x - 1$ ו- $g(x) = -e^x$.
 מעבירים ישר $x = a$, כאשר $a > 0$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר (מקווקו).
 ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.
 מצא את a .

פונקציות לוגריתמיות

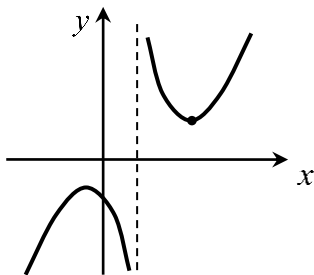
אינטגרלים מייזים של פונקציות לוגריתמיות

| אינטגרל יסודי | אינטגרל של פונקציה מורכבת |
|------------------------------------|--|
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ | $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$ |



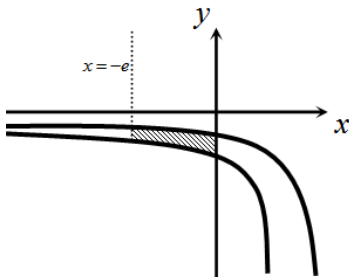
(39) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x . ניתן להשאיר \ln בתשובה.



(40) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$, ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום שלה. אפשר להשאיר ביטוי עם \ln בתשובה.

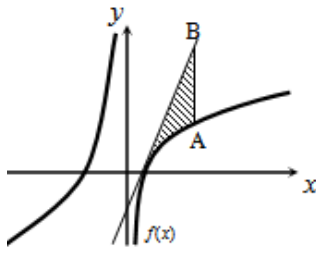


(41) באיור שלפניך נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x < 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

- מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.
- חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.

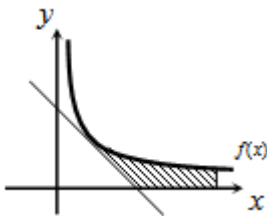


(42) נתונה הפונקציה $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא $y = 18x - 9$.
א. מצא את a ו- b וכתוב את הפונקציה.

מעבירים ישר המקביל לציר ה- y , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

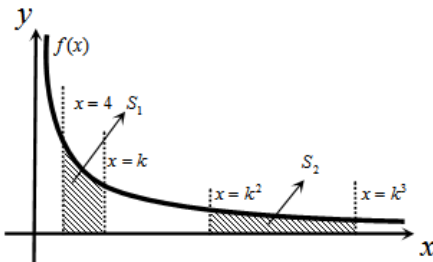
- ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



(43) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ היא $y = 4 - x$.
א. מצא את $f(x)$.

- ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x > 0$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = e^2$.



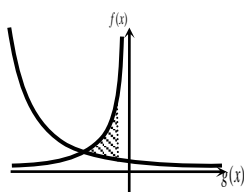
(44) באיור שלפניך נתונה הפונקציה

$f(x) = \frac{2}{x}$, בתחום $x > 0$.

מעבירים את הישרים $x = k^2$, $x = k^3$, $x = k$ ו- $x = 4$ (כמתואר באיור) ($x > 4$).

א. הבע באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2 .

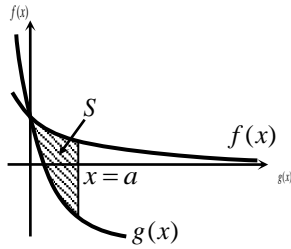
- ב. הראה כי ההפרש $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k , וחשב את ערכו.
ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 . מצא את k .



(45) נתונות הפונקציות $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.
א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

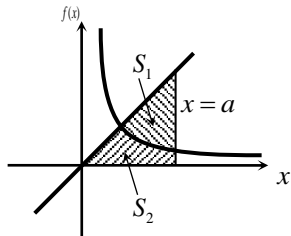
- ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



(46) באיור שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציות
 $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ ו- $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$
 בתחום $x \geq 0$.

- א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .
 ב. מעבירים ישר $x = a$ ($a > 1$), המאונך לציר ה- x , חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור). מצא את ערכו של a , עבורו מתקיים $S = 4$.

(47) באיור שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר $y = x$.
 א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



- מעבירים אנך לציר ה- x , $x = a$, הנמצא מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם. האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2 , המתוארים באיור.
 ב. מצא את הערך של a , עבורו השטח S_2

$$\text{יהיה שווה ל-} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7.$$

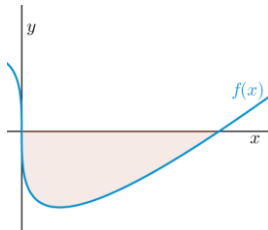
- ג. עבור ערך ה- a שמצאת בסעיף הקודם, חשב את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$.

פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מייזים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

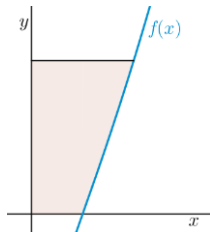
| אינטגרל יסודי | אינטגרל של פונקציה מורכבת |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$ | $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n} \neq -1$.



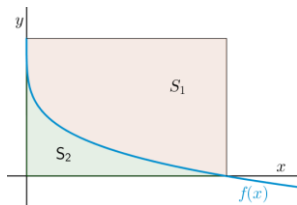
48) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



49) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$.

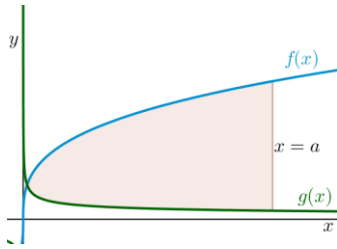
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. מעבירים אנך לציר ה- y מהנקודה $(4, 6)$.
 חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.



50) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.

- נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן, ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1 , ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 .

מצא את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



51 באיור שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציות

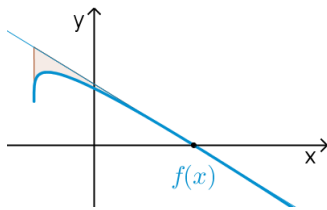
$$f(x) = 4\sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $x > 0$.

ב. מעבירים אנך לציר ה- x , $x = a$ (פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך,

הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש.

מצא את a .



52 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, פרמטר a .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 2$.

א. מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.

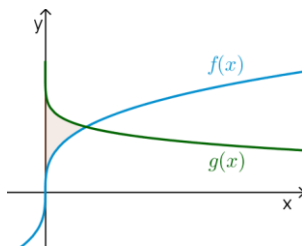
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.

חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.



53 באיור שלפניך נתונים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$$

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

54 הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x

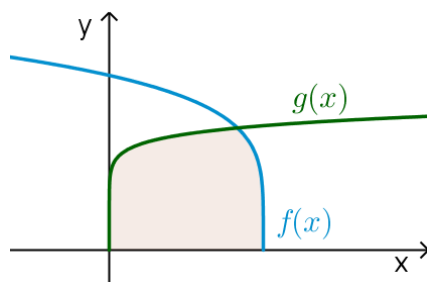
בנקודה שבה $x = 1.2$.

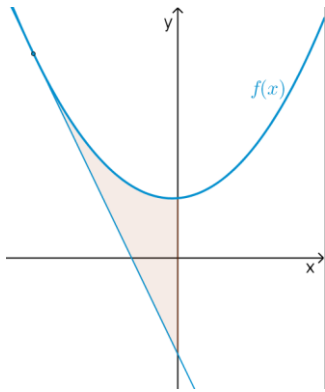
א. מצא את $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף

הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה

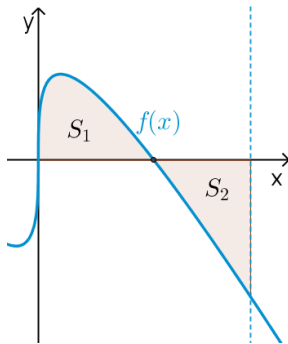
$g(x) = \sqrt[10]{x}$ וציר ה- x .





55) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$.

- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



56) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 . מעבירים ישר $x = k$, אשר יוצר את השטח S_2 , כמתואר באיור. מצא את k , אם ידוע כי $S_1 = S_2$.

תשובות סופיות

- (1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (3) א. $f(x) = I$, $g(x) = II$ ב. שאלת הוכחה.
- (4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (5) א. $y = -x$ ב. $(-3, 3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (6) א. $y = -4x + 4$ ב. $(1, 0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (7) א. $k = 10$ ב. $(1, 9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (8) א. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (9) א. $g(x) = (x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (10) א. $f(x) = x^2 - 6x$ ב. $(0, 0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (11) א. $y = -x + 2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.
- (12) 1 יח"ש.
- (13) א. $a = 32$, $(2, 8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (14) א. $a = 36$, $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.
- (15) א. $A = 6$ ב. $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $(-1.5, \frac{2}{3})$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.
- (16) א. $\min(0.5, 1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.
- (17) א. $(4, 8)$ ב. 48 יח"ש.
- (18) 2.26 יח"ש.
- (19) 0.5 יח"ש.
- (20) $t = 16$
- (21) א. i. $x > 0$ ii. $(4, 0)$ iii. $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$ ב. $(16, 14)$ ג. 88 יח"ש.
- (22) $b = 2$
- (23) $a = 9$

- (24) א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$.
- (25) א. $a=13$. ב. $(5,0)$. ג. i. $S_1=2$. ii. $S_2=|-S_1|=2$.
- (26) ב. 10 יח"ש.
- (27) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$. ג. $\min(5,-2)$. ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (28) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש. ד. 1 יח"ש.
- (29) א. $f(x): \mathbb{R}, f'(x): \mathbb{I}$. ב. 1 יח"ש.
- (30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (31) $S=0.192$ יח"ש.
- (32) $b=2$.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) $a=\ln 2$.
- (35) א. $A(1,-e-2)$. ב. $y=-(e+2)x$. ג. $S=4.744$ יח"ש.
- (36) א. $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}, a=-2$. ב. 1.52.
- (37) א. $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$. ב. $S=1.03$ יח"ש.
- (38) א. $y'=xe^x$. ב. $a=2$.
- (39) $S=\ln 4$ יח"ש.
- (40) $S=4\ln 2-2$ יח"ש.
- (41) א. $f(x)=\frac{2}{x-1}, g(x)=\frac{1}{x-2}, a=2$. ב. $S=1.76$ יח"ש.
- (42) א. $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}, a=2, b=-4$. ב. $x=2$. ג. $S=6+\ln 256 \approx 11.54$ יח"ש.
- (43) א. $f(x)=\frac{4}{x}$. ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.
- (44) א. $S_1=2\ln k - \ln 16, S_2=2\ln k$. ב. $S_2-S_1=\ln 16$. ג. $k=8$.
- (45) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$. ב. $(-2,2)$. ג. $S=\ln 5\frac{1}{3} \approx 1.674$ יח"ש.
- (46) ב. $a=2$.
- (47) א. $(1,1)$. ב. $a=5$. ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$.
- (48) א. $(0,0), (8,0)$. ב. $S=16$ יח"ש.
- (49) א. $x>0$. ב. $(2,0)$. ג. $S=18.149$ יח"ש.

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a = 8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2\right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$(-1.2, 1.2) \quad \text{ג.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, \quad a=1 \quad \text{א.} \quad (52)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ה.} \quad \text{יח"ש.} \quad y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ד.} \quad (53)$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad (1, 1) \quad \text{א.} \quad (54)$$

$$S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad (55)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad (56)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296\dots \quad \text{ג.} \quad (0, 0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \text{כל } x \quad (57)$$

חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

שאלות

(1) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

(2) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

תשובות סופיות

(1) $20\frac{5}{6}$

(2) $20\frac{5}{6}$

אורך קשת

שאלות

בשאלות הבאות חשב את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad (2) \qquad (1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4) \qquad (1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6) \qquad (0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad (8) \qquad (0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = x^2 \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \{82^{1.5} - 1\} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17}+4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5}+2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad (9)$$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 7 - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

- 1. חישוב נפח גוף-סיבוב..... 51
- 2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב..... 54
- 3. חישוב נפח גוף כללי..... 55

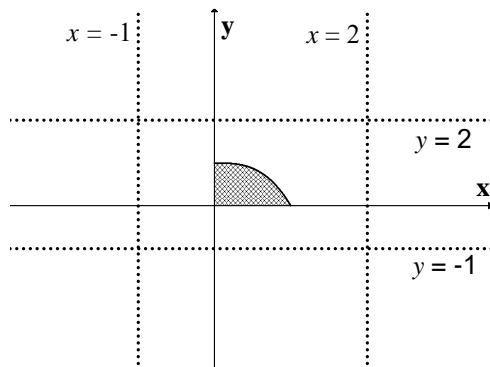
חישוב נפח גוף-סיבוב

שאלות

(1) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 2x - 1$ מסתובב סביב ציר ה- x .
 חשב את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
 א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
 ב. שיטת הקליפות הגליליות.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 2x - 1$ מסתובב סביב ציר ה- y .
 חשב את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
 א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
 ב. שיטת הקליפות הגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = 1 - x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו.
 מצא את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות 3-8:



(3) ציר ה- x .

(4) הישר $y = -1$.

(5) הישר $y = 2$.

(6) ציר ה- y .

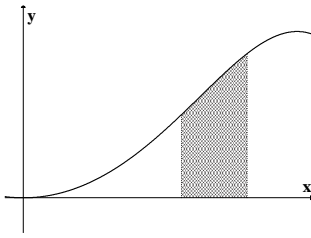
(7) הישר $x = -1$.

(8) הישר $x = 2$.

(9) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

(10) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

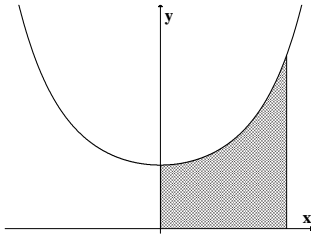
(11) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



(12) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = \sin(x^2)$

$$\text{והישרים } x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}, x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}, y = 0$$

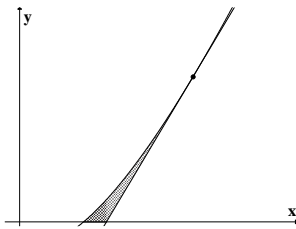
מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו נפח הגוף המתקבל?



(13) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = e^{x^2}$

$$\text{והישרים } y = 0, x = 0, x = 1$$

מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו נפח הגוף המתקבל?



(14) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = x \ln x$,

המשיק לגרף בנקודה (e, e) וציר ה- x ,

מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו נפח הגוף המתקבל?

(15) השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x + 8$, $x = 0$

מסתובב סביב הישר $x = 4$.

מצא את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

תשובות סופיות

$$\frac{64}{15}\pi \text{ ב.} \quad \frac{64}{15}\pi \text{ א.} \quad (1)$$

$$\frac{8}{3}\pi \text{ ב.} \quad \frac{8}{3}\pi \text{ א.} \quad (2)$$

$$\frac{9\pi}{14} \quad (3)$$

$$\frac{15\pi}{7} \quad (4)$$

$$\frac{33\pi}{14} \quad (5)$$

$$\frac{3\pi}{5} \quad (6)$$

$$2.1\pi \quad (7)$$

$$\frac{12\pi}{5} \quad (8)$$

$$V = \pi R^2 \cdot H \quad (9)$$

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} \quad (10)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (11)$$

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1) \quad (12)$$

$$\pi(e-1) \quad (13)$$

$$\frac{e^3-4}{54}\pi \quad (14)$$

$$128\pi \quad (15)$$

חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

שאלות

- (1) הפונקציה $y = \sqrt{4-x^2}$, עבור $-1 \leq x \leq 1$, מסתובבת סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?
- (2) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.
- (3) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.
- (4) הפונקציה $x = \sqrt{9-y^2}$, עבור $-2 \leq y \leq 2$, מסתובבת סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

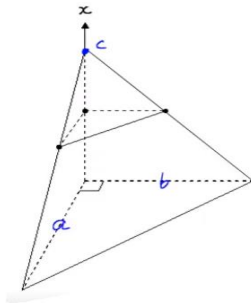
תשובות סופיות

- (1) 8π
- (2) $S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$
- (3) $S = 4\pi R^2$
- (4) 24π

חישוב נפח גוף כללי

שאלות

(1) מצא נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו a .



(2) חשב את נפחה של פירמידה, שבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).

תשובות סופיות

$$V = \frac{a^2 h}{3} \quad (1)$$

$$\frac{abc}{6} \quad (2)$$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 8 - המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל) 56

המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכח כי אם $f(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו- $b(x)$ גזירות, אזי:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזור את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשב את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

(10) חקור את הפונקציה $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$, לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) $I'(x) = e^{-x^2}$

(4) $I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2$

(5) $I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1)\ln(x^3 + x)$

(6) $I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

(7) $\frac{1}{2}$

(8) $\frac{2}{3}$

(9) $4e^{16}$

(10) תחום הגדרה: כל x .נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל x .נקודות פיתול: $x = -1, 1, -\frac{3}{7}$.תחומי קמירות: $x > 1$, $-1 < x < -\frac{3}{7}$.תחומי קעירות: $-1 < x < 1$, $x < -1$.

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 9 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

- 58 1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון
- 60 2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני
- 61 3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי
- 62 4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים
- 63 5. מבחני השוואה
- 65 6. התכנסות בהחלט
- 66 7. מבחן דיריכלה
- 67 8. התכנסות בתנאי

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-5:

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

$$(6) \text{ הוכח כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ עבור } |\alpha| < 1.$$

$$(7) \text{ הוכח כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \text{ עבור } |\alpha| > 1.$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2e} \quad (3)$$

(4) מתבדר : ∞ .

$$\frac{5}{4e^2} \quad (5)$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

(1) מתבדר: ∞ .

(2) מתבדר: ∞ .

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

1) חשב את האינטגרל הבא: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

תשובה

1) מתבדר: ∞ .

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

(1) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x = 1$ וציר ה- x , עבור $x \leq 1$.

(2) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x = 5$.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$.

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0 \leq x \leq k$, שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x \geq k$. מצא את הקבוע k .

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

מבחני השוואה

שאלות

בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1 + x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

תשובות סופיות

- | | |
|-------------|-------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתבדר. |
| (3) מתכנס. | (4) מתכנס. |
| (5) מתבדר. | (6) מתבדר. |
| (7) מתכנס. | (8) מתכנס. |
| (9) מתבדר. | (10) מתכנס. |
| (11) מתכנס. | (12) מתבדר. |
| (13) מתכנס. | (14) מתבדר. |
| (15) מתכנס. | (16) מתכנס. |

התכנסות בהחלט

שאלות

בשאלות 1-3 בדוק אם האינטגרלים מתכנסים:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

$$(4) \text{ הוכח: אם } \int_a^{\infty} |f(x)| dx \text{ מתכנס, אז } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס.}$$

תשובות סופיות

- (1) מתכנס.
- (2) מתכנס.
- (3) מתכנס.
- (4) שאלת הוכחה.

מבחן דיריכלה

שאלות

הוכח כי האינטגרלים הבאים מתכנסים :

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (2) \quad \text{א.}$$

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \quad (3) \quad \text{ב.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

התכנסות בתנאי

שאלות

קבע האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

$$(1) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$$

$$\text{ב.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx$$

$$(4) \quad \int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$(5) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx$$

תשובות סופיות

- (1) א. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.
 ב. מתכנס בהחלט.
 ג. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.
- (2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.
- (3) א. מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$,
 מתבדר עבור $p \geq 2$.
 ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 5$,
 מתבדר עבור $p \geq 5$.
- (4) מתכנס בתנאי.
- (5) מתכנס בתנאי.

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 10 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

- 1. הצגה פרמטרית של עקום..... 69
- 2. הנגזרת ושימושיה..... 70
- 3. שימושי האינטגרל המסוים..... 71

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

(1) עבור מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

(2) עבור מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

(3) לפניך תיאור פרמטרי של מסלולים במישור. על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצא משוואה מתאימה, שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

תשובות סופיות

(1) א. $y = x - 1, x \geq 1$ ב. $y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$ ג. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$

(2) א. $x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4$ ב. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$ ג. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$

(3) א. $y = (x+4)^2$ ב. $(x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1$ ג. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1$ ה. $x^2 + y^2 = 25$ ו. $x^2 - y^2 = 4k^2$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

(1) חשב את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad \text{הנתונה בצורה פרמטרית:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטט את העקום.

ב. חשב את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצא את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

ד. מצא את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

$$(3) \quad \begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטט את העקום.

ב. מצא את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0, 0)$.

ג. מצא את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי, ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

$$(1) \quad y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$$

$$(2) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y' = \frac{-2}{2t+1} \quad \text{ג. } y = 2x+3 \quad \text{ד. } y = -0.5x+3$$

$$(3) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y = \pm\sqrt{3}x \quad \text{ג. אופקי- } (0, -9) \quad \text{אנכי } (2, -6), (-2, -6)$$

ד. $-1 < t < 1$ קמור. $t > 1$ או $t < -1$ קעור.

שימושי האינטגרל המסוים

$$(1) \text{ חשב את השטח הכלוא בעקום } C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$$

$$(2) \text{ חשב את השטח הכלוא בתוך האליפסה } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ כאשר } a, b > 0$$

* שים לב שאם $a = b = r$, נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס r .

$$(3) \text{ חשב את השטח הכלוא בין העקום } 0 \leq t \leq \pi, \quad x = \cos t, \quad y = t + \sin t$$

לבין ציר ה- x .

$$(4) \text{ חשב את השטח הכלוא בין העקום } 0 \leq t \leq 2\pi, \quad x = 4 \cos t, \quad y = \sin^2 t$$

לבין ציר ה- x .

$$(5) \text{ חשב את אורך העקום } 0 \leq t \leq 2\pi \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

$$(6) \text{ חשב את אורך העקום } \begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}, \text{ מהנקודה } (1, 0) \text{ לנקודה } (-1, \pi).$$

(7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

מצא את המרחק שהחלקיק עבר והשווה אותו לאורך העקום עצמו.

$$(8) \text{ חלק העקום } \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, \text{ שבין } t = 0 \text{ לבין } t = \pi, \text{ מסתובב סביב ציר ה-} x.$$

מהו שטח המעטפת הנוצרת?

$$(9) \text{ חלק העקום } \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \text{ שבין } t = 0 \text{ לבין } t = \frac{\pi}{2}, \text{ מסתובב סביב ציר ה-} y.$$

מהו שטח המעטפת הנוצרת?

$$(10) \text{ חשב את אורך העקום } -\pi \leq t \leq 2\pi \quad \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}$$

11) חשב את אורך העקום $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$. $1 \leq t \leq 3$.

תשובות סופיות

8/3 (1)

πab (2)

1.5π (3)

$16/3$ (4)

8 (5)

4 (6)

7) אורך העקום הוא 2π . המרחק שעבר החלקיק הוא 4π .

$4\pi r^2$ (8)

$6\pi/5$ (9)

$6\pi\sqrt{29}$ (10)

$\sqrt{3}e(e^2 - 1)$ (11)

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 11 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

- 73 1. קואורדינטות קוטביות
- 75 2. הנגזרת ושימושיה
- 76 3. שימושי האינטגרל המסוים

קואורדינטות קוטביות

שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

(2) ענה על הסעיפים הבאים :

א. א. המר את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית $(0, -4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המר את הנקודה הקרטזית $(-2, 2)$ לנקודה קוטבית.

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $4x - x^2 = 1 + xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המר את המשוואה $r = -4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $x^2 + y^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המר את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המר את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

(5) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המר את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המר את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המר את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

תשובות סופיות

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ ב.}$$

$$(2) \quad (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ב.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ ג.}$$

$$(3) \quad 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א.} \quad (x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב.}$$

$$(4) \quad r = 4 \sin \theta \text{ א.} \quad r \cos \theta = 10 \text{ ב.} \quad r \sin \theta = 4 \text{ ג.}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א.} \quad y = x \text{ ב.} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג.}$$

$$\text{ד.} \quad 6\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 \cdot y = 4\sqrt{x^2 + y^2} - x$$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

- (1) מצא את משוואת המשיק לעקום $r = 3 + 8\sin \theta$ בנקודה $\theta = \frac{\pi}{6}$.
- (2) מצא את משוואת המשיק לעקום $r = 1 - 2\sin \theta$ בראשית הצירים.

תשובות סופיות

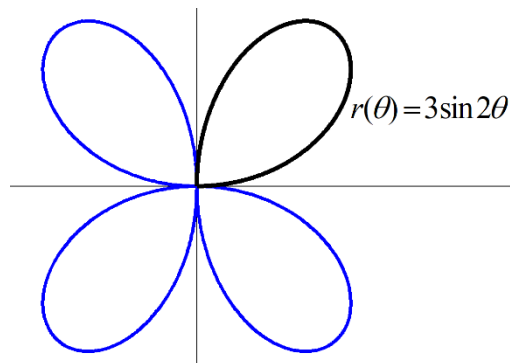
$$y = \frac{11\sqrt{3}}{5}x - \frac{98}{5} \quad (1)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (2)$$

שימושי האינטגרל המסוים

שאלות

- (1) חשב את השטח של הלולאה הפנימית של $r = 2(1 + 2\cos\theta)$.
- (2) חשב את השטח הכלוא בתוך $r = 6 + 4\cos\theta$ ומשמאל לציר ה- y .
- (3) חשב את השטח הכלוא בתוך $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (4) חשב את השטח המוגבל בתוך $r = 3 + 2\sin\theta$ ומחוץ ל- $r = 2$.
- (5) חשב את השטח המוגבל בתוך $r = 2$ ומחוץ ל- $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (6) חשב את השטח המוגבל בתוך $r = 2$ ובתוך $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (7) חשב את השטח הכלוא בתוך המעגל $r = 2\sin\theta$ ומחוץ למעגל $r = 1$.
- (8) מצא את אורך הקרדיואידה $r = 1 + \cos\theta$.
- (9) מצא את האורך של עלה אחד של הורד $r = 3\sin 2\theta$.
אין צורך לחשב את האינטגרל!



- (10) מצא את אורך העקום $r = \theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq 1$.
- (11) העקום $r = \cos\theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

(12) העקום $r = 4 + 4\sin\theta$, כאשר $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y .
 מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

תשובות סופיות

$$S = 4\pi - 6\sqrt{3} = 2.174 \quad (1)$$

$$S = 22\pi - 48 \quad (2)$$

$$S = 11\pi \quad (3)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} = 24.187 \quad (4)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} = 2.196 \quad (5)$$

$$10.37 \quad (6)$$

$$S = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (7)$$

$$8 \quad (8)$$

$$\ell = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\cos^2 2\theta} d\theta \quad (9)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{2} \quad (10)$$

$$S_x = \pi \quad (11)$$

$$S_y = 102.4\pi \quad (12)$$

נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

קווים

$$(1) \quad r \cos \theta = a \quad - \text{ הישר } x = a$$

$$(2) \quad r \sin \theta = b \quad - \text{ הישר } y = b$$

$$(3) \quad \theta = \beta \quad - \text{ הישר העובר דרך הראשית } y = (\tan \beta)x$$

מעגלים

$$1. \quad r = a \quad - \text{ מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו } a$$

$$2. \quad r = 2a \cos \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנקודה } (a, 0) \text{ ורדיוסו } |a|$$

$$3. \quad r = 2b \sin \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנקודה } (0, b) \text{ ורדיוסו } |b|$$

$$4. \quad r = 2a \cos \theta + 2b \sin \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנק' } (a, b) \text{ ורדיוסו } \sqrt{a^2 + b^2}$$

קרדיוודות ולמניסקטות

$$(1) \quad \text{קרדיוודות } r = a \pm a \cos \theta, r = a \pm a \sin \theta$$

גרף בצורת לב שמכיל את הראשית.

$$(2) \quad \text{למניסקטות עם לולאה פנימית } r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta \quad (a < b)$$

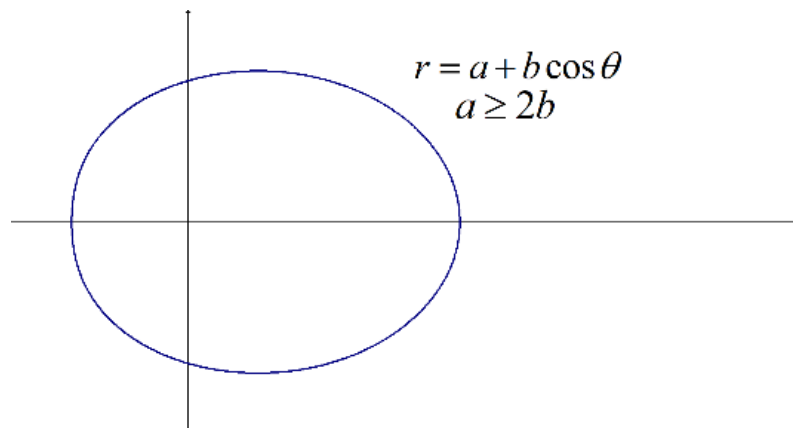
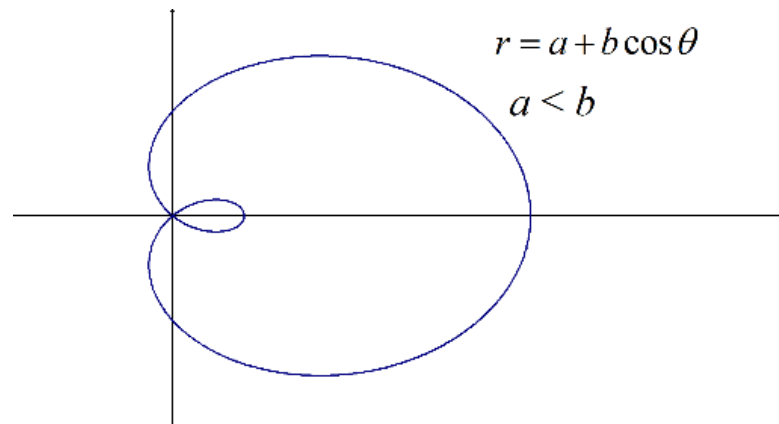
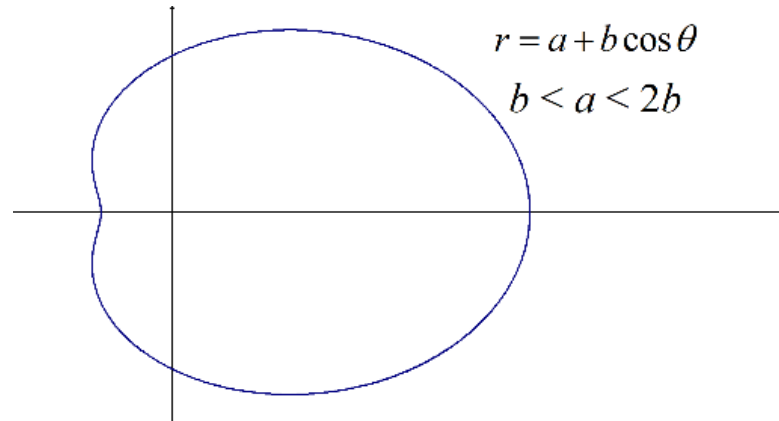
גרף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

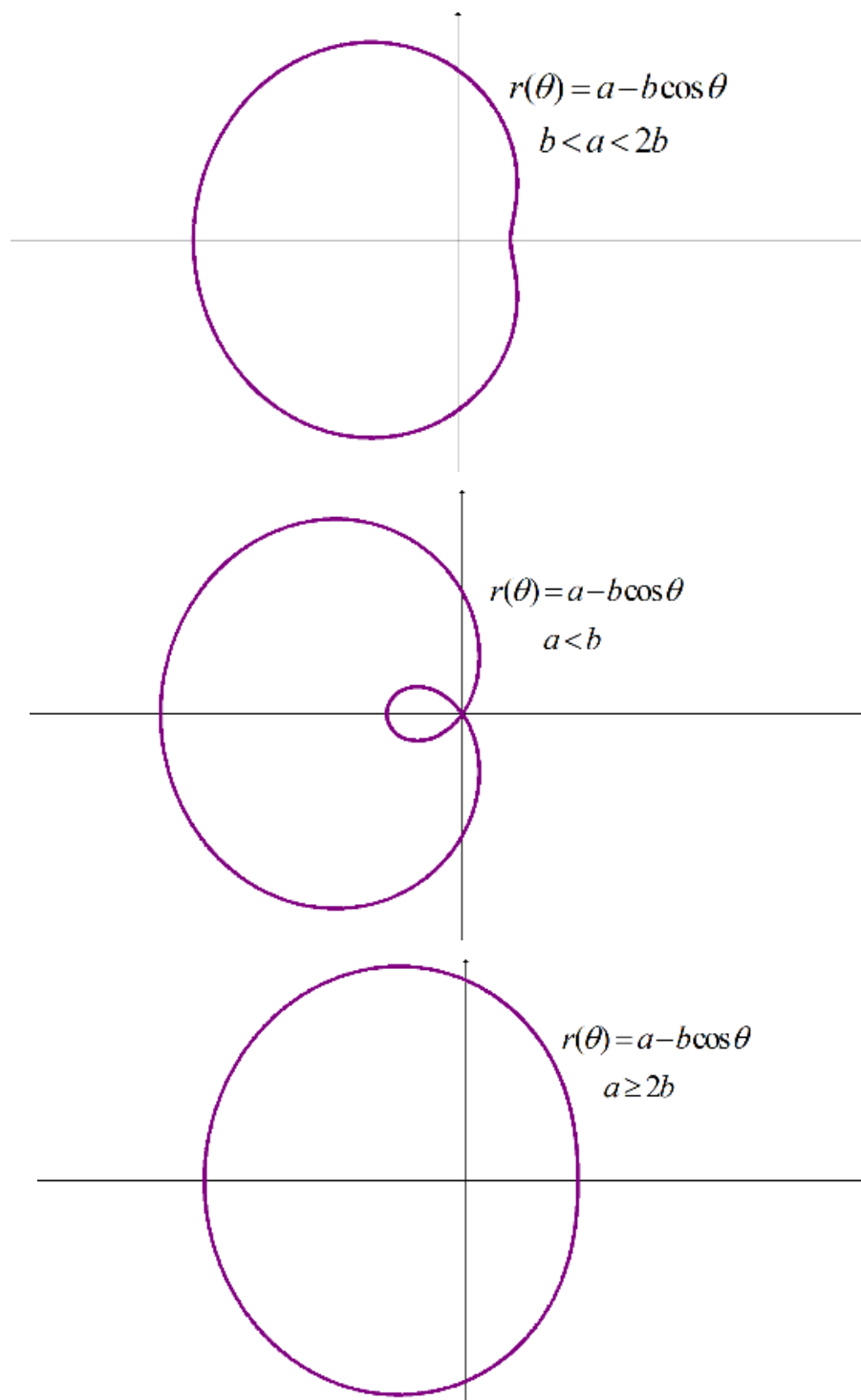
$$(3) \quad \text{למניסקטות ללא לולאה פנימית } r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta \quad (a > b)$$

גרף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

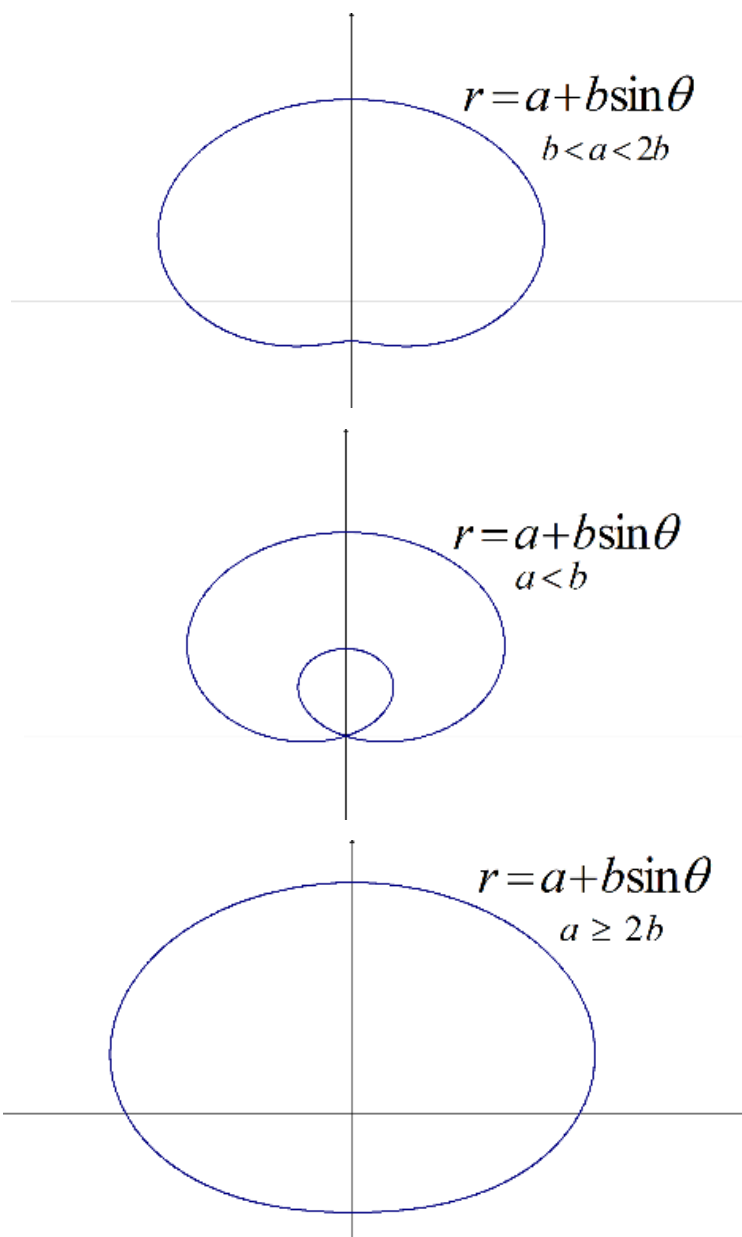
$$* \text{ נשרטט בדרך כלל עבור מחזור שלם } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

למינסקטות ביתר פירוט

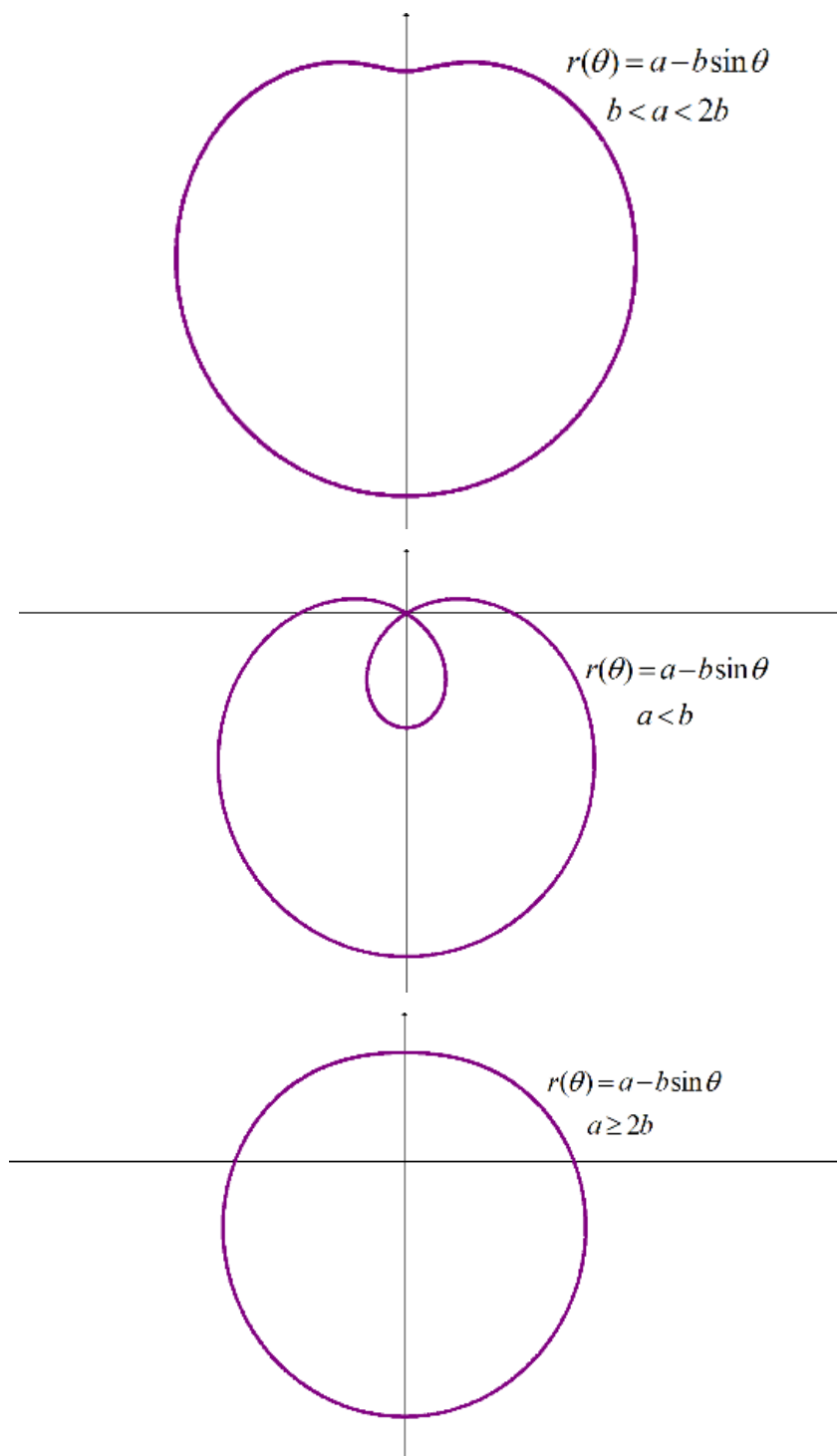
 הגרף של $r = a + b \cos \theta$:


הגרף של $r = a - b \cos \theta$ 

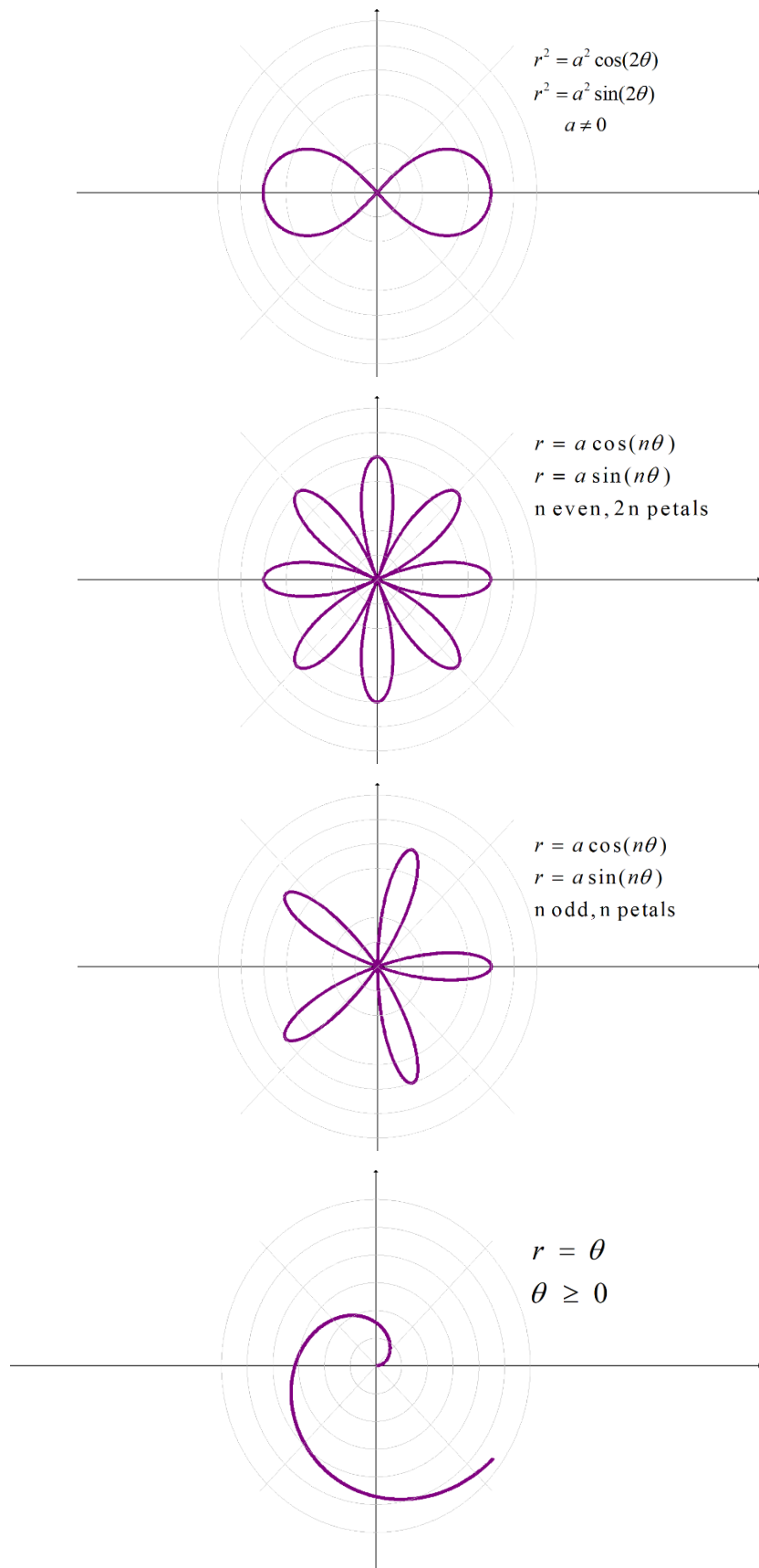
הגרף של $r = a + b\sin\theta$



הגרף של $r = a - b \sin \theta$



גרפים נפוצים נוספים



חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 12 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים 84
3. משוואה הומוגנית 86
4. משוואה לינארית מסדר ראשון 88
5. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון 90

הפרדת משתנים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

משוואה הומוגנית

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 8-1 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 : \text{נתונה המשוואה} \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n , על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

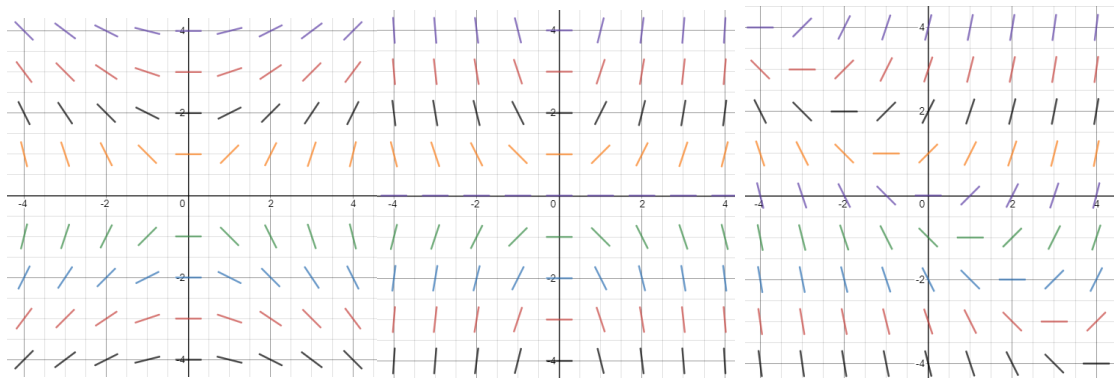
(1) שרטט שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y' = 2y - x$.

(2) התאם כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א. $y' = \frac{x}{y}$

ב. $y' = xy$

ג. $y' = x + y$



איור 3

איור 2

איור 1

(3) נתונה המד"ר: $y' = y - x$, $y(0) = 2$.

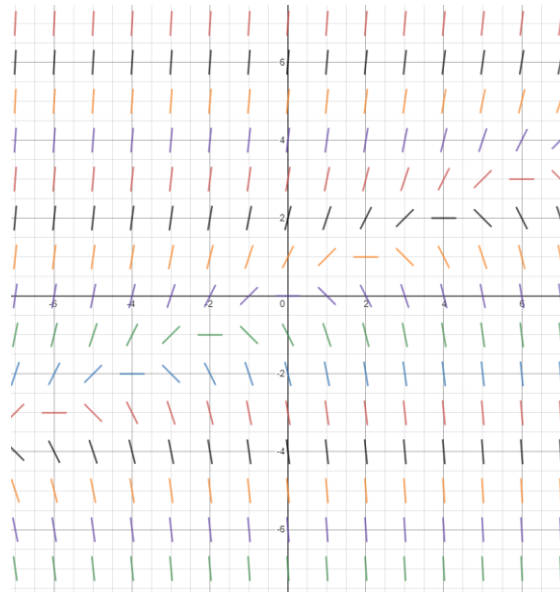
מצא בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.1$.

(4) נתונה המד"ר: $y' = x + y$, $y(1) = 2$.

מצא בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.2$.

תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

(3) $y(1) = 4.593$

(4) $y(2) = 6.95328$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 13 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

| | |
|----|------------------------|
| 92 | 1. בעיות גיאומטריות |
| 94 | 2. עקומות אורתוגונליות |
| 96 | 3. בעיות גדילה ודעיכה |
| 98 | 4. בעיות שונות |

בעיות גיאומטריות

שאלות

(1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x, y) על העקום,

$$\text{שווה ל-} -\frac{x}{y}.$$

מצא את משוואת העקום.

(2) מצא את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

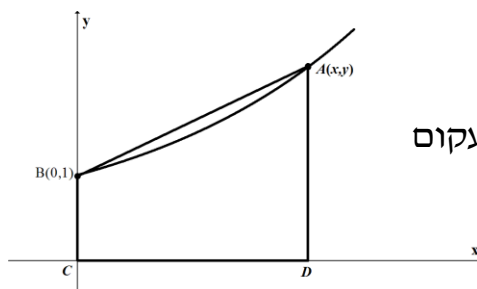
(3) מצא את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

(4) נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2, 4)$.

נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x, y)$ שעליו, ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים, שווה לשיעור ה- y של הנקודה A .

(5) מצא את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3, 4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

(6) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x, y) שבין נקודה זו וציר ה- x , נחצה על ידי ציר ה- y . מצא את משוואת העקום זה.



(7) נתון עקום העובר בנקודה $B(0,1)$.

בכל נקודה A שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$, הנראה בציור. מהי משוואת העקום?

(8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1, 3)$,

ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x, y) שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$.

מצא את משוואת העקום.

(9) מצא את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(1,2)$,
 ושכל נקודה (x, y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$.

(10) מצא את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(0,1)$, כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר ה- y , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x, y)$ והקטע OM , מהראשית O ל- M , הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע MN (כאשר N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה- y). צייר ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

תשובות סופיות

$$x^2 + y^2 = k \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = k \quad (2)$$

$$y^2 = ax \quad (3)$$

$$y = 2xe^{x-2} \quad (4)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} \quad (5)$$

$$2x^2 + y^2 = k \quad (6)$$

$$y = 2e^{x/4} - 1 \quad (7)$$

$$2xy + x^2 = 7 \quad (8)$$

$$x^3 - 3y^2x = 11 \quad (9)$$

$$2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad (10)$$

עקומות אורתוגונליות

שאלות

מצא את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות 1-4:

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

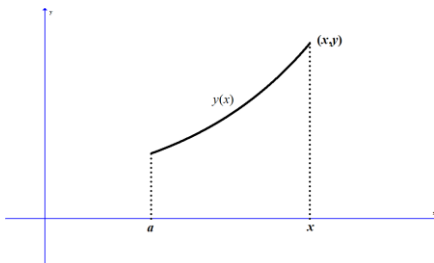
$$xy = c \quad (2)$$

$$x^2 + 2y^2 = c \quad (3)$$

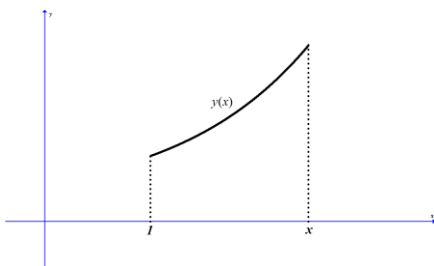
ב. מצא את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2 + 2y^2 = 9$, בנקודה $(1, 2)$ שעליה.

$$x^2 + y^2 = cx \quad (4)$$

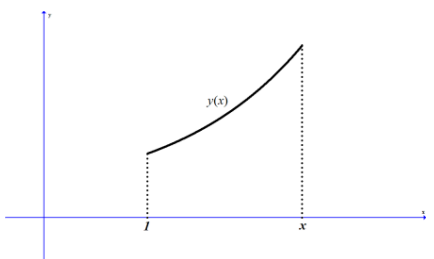
(5) מצא את משפחת העקומות, היוצרות זווית של 45° עם משפחת המעגלים $x^2 + y^2 = c$.



(6) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = a$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות $(a, y(a))$ ו- $(x, y(x))$. מצא את משוואת העקום.



(7) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי $y(1) = 2$. האם קיים עקום כזה, כך ששטחו של S שווה ל- $2y(x)$?



(8) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי $y(1) = 2$. האם קיים עקום כזה, כך שהשטח של S שווה ל- $2 - y(x)$?

תשובות סופיות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

$$y = ax^2, \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x-c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c \quad (5)$$

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k}x + C\right) \quad (6)$$

לא. (7)

כן. (8)

בעיות גדילה ודעיכה

שאלות

- (1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה. ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
- א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
- ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
- ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?
- *הנח שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- (2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים, ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.
- א. מצא את אחוז הגידול השנתי.
- ב. מצא כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת), היו בעיר 550 אלף תושבים.
- (3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%. כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.
- א. כמה כסף הפקיד האדם?
- ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש"ח?
- (4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה הראשונית היו 1,000 חיות. בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר. מצא אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה, היו בשמורה 2,000 חיות בר.
- (5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים. ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד, פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
- א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים, מכמות התחלתית של 100 גרם?
- ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם, מכמות התחלתית של 100 גרם?

- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע. בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.
- א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
- ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------------|------------------|----------------|
| 1) א. 7.28 מיליארד. | ב. 3.54 מיליארד. | ג. בשנת 2,106. |
| 2) א. 2% | ב. 15.92 שנים. | |
| 3) א. 4093.65 ש. | ב. 13.41 שנים. | |
| 4) 40.77 חודשים. | | |
| 5) א. 88.69 גרם. | ב. 19,188 שנים. | |
| 6) א. 3.04 שבועות. | ב. 14.6 שבועות. | |

בעיות שונות

שאלות

- (1) בזמן $t = 0$, יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.
- א. חשב את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.
 ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- (2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע $t = 0$, כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחרתור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה. משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$, כאשר v נמדדת במטר/שנייה.
- א. מצא את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.
 ב. מצא כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.
 ג. מצא את המהירות הסופית.
- (3) חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
- א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?
 ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- (4) נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם.
- נסמן ב- $h(t)$ את גובה פני המים, וב- k את קבוע הפרופורציה.
- א. רשום מד"ר עבור גובה פני המים, $h(t)$.
 מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?
 ב. ידוע כי $k = -2\pi$.
 פתור את המד"ר.
 תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

- (5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.
 לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.
 א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t .
 ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $\frac{1}{64}$ מנפחו ההתחלתי?
- (6) מבלון מלא אוויר, שרדיוסו R , מתחיל לצאת אוויר.
 קצב יציאת האוויר הוא $3V(t)$, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t .
 הוכח, כי כעבור $\ln 2$ שניות נפח הבלון ייקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.
 הערה: בשאלות 5 ו-6 נדרש ידע בהפרדת משתנים.

תשובות סופיות

- (1) א. 26.75 ק"ג. ב. 0.942 דקות.
- (2) א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.
- (3) א. $43\frac{1}{3}^{\circ}$. ב. 1.13 שעות.
- (4) א. $h(0) = 4$; $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$. ב. $h = (2-t)^2$; $t = \sqrt{2} + 2$.
- (5) א. $R(t) = \frac{12}{2t+3}$. ב. 4.5 שעות.
- (6) שאלת הוכחה.

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 14 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

| | |
|-----|---------------------------------------|
| 100 | 1. קווים נפוצים במישור |
| 104 | 2. מבוא לפונקציה של שני משתנים |
| 106 | 3. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים |
| 108 | 4. משטחים נפוצים במרחב |
| 110 | 5. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים |
| 111 | 6. גופים במרחב |
| 114 | 7. הצגה פרמטרית של עקום |
| 116 | 8. הצגה פולרית של עקום |
| 118 | 9. הצגה פרמטרית של משטח |

קווים נפוצים במישור

שאלות

1) שרטט במישור את התחומים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

2) שרטט במישור את התחומים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצא את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים :

א. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב. $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטט אותו.

א. $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג. $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה. $0 \leq x \leq 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

ו. $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטט אותו.

א. $y = 2 + \sqrt{1 - (x-3)^2}$

ב. $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג. $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$

ז. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ח. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

8) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$.

- א. הוכח שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטט אותה.
 ב. רשום את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.
 ג. רשום את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.
 ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?
 ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2\}$

12) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

13) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצא את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטט סקיצה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x-4y}{x+4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y-4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

$$f(x, y) = \tan \frac{y}{x} \quad (12)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

$$f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)} \quad (13)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו, ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטט מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטט את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

- א. שרטט את קו הגובה $f(x, y) = 0$.
- ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף?
 ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

- * בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
- ** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

- (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .
- (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.
- (5) $y < x^2$
- (6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: GooL.co.il

משטחים נפוצים במרחב

שאלות

זהה ושרטט את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהה ושרטט את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהה כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

(6) מצא את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

(7) נתון המשטח $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$

א. זהה את המשטח.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$.

(8) מצא את החיתוך בין המשטחים $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$ ו- $x^2 + y^2 + z^2 = 64$.
הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

(9) נתון המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$

א. זהה את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשום הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

- בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

- (1) אליפסואיד.
- (2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- (3) היפרבולואיד חד יריעתי.
- (4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.
- (5) א. אליפסואיד.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.
- (6) החיתוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$, שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.
- (7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12)$, $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$.
- (8) החיתוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$, שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.
- (9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
ב. $\ell_1 : (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2 : (x, y, z) = (3, 2t, t)$

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

- (1) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - z$. מצא את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטט אותו.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$. מצא את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטט אותו.
- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא את משטחי הרמה:
 א. $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$
 ב. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$
- (4) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$. מצא את משטחי הרמה של הפונקציה.
- (5) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$. מצא את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- (1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0, 0, -2)$ ורדיוסה 2.
- (2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 4)$ ונפתח כלפי מטה.
- (3) א. מישורים.
 ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה $(0, 0, k)$ ונפתח כלפי מעלה.
- (4) עבור $k < 0$ לא קיים משטח רמה k .
 עבור $k = 0$ נקודה $(0, 0, 0)$. עבור $k = 1$ מישורים.
 עבור $k > 1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y .
 עבור $0 < k < 1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z .
- (5) עבור $k < 0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k = 0$ חרוט אליפטי.
 עבור $k < 0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

גופים במרחב

שאלות

1) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו. $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד. $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\}$

3) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 4\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$

4) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

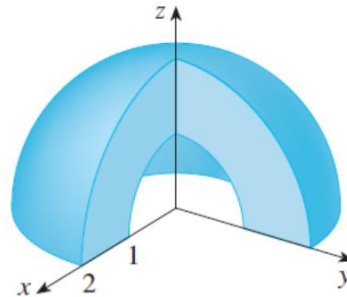
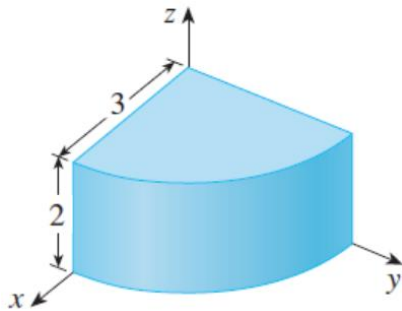
ה. $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף V במרחב.

תאר במילים את הגוף וכתוב אותו לפי התבנית $V = \{(x, y, z) \mid \dots\}$.

א.

ב.



7) נתונים המשטחים $z = x^2 + y^2$ ו- $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהה כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטט את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצא את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

8 נתונים שני משטחים: $z = x^2 + y^2 + z^2$ ו- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהה כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטט את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצא את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

(1) עבור מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x = t^2 + 1, y = t^2, t \geq 0$

ב. $x = \sin t, y = \cos^2 t, 0 \leq t \leq \pi$

ג. $x = \cos t, y = 4 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$

(2) עבור מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $y = x^4 + 1, 1 \leq x \leq 4$

ב. $y = -\sqrt{4-x^2}, -2 \leq x \leq 2$

ג. $y = +\sqrt{4-x^2}, -2 \leq x \leq 2$

(3) לפניך תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.

על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצא משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1) + 1, y = t(0.5t+1) + 1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

(4) חשב את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

(5) חשב את אורך העקום $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}, -\pi \leq t \leq 2\pi$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad \text{ב. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{ג. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$$

$$(3) \quad \text{א. } y = (x + 4)^2 \quad \text{ב. } (x + 4)^2 + \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

$$(4) \quad 8$$

$$(5) \quad 6\pi\sqrt{29}$$

הצגה פולרית של עקום

שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

(2) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית $(0, -4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המר את הנקודה הקרטזית $(-2, 2)$ לנקודה קוטבית.

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $4x - x^2 = 1 + xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המר את המשוואה $r = -4 \cos \theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $x^2 + y^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המר את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המר את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

(5) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המר את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המר את המשוואה $r = 2 \cos \theta + 4 \sin \theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המר את המשוואה $6r^3 \sin \theta = 4 - \cos \theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

תשובות סופיות

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ ב.}$$

$$(2) \quad (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ב.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ ג.}$$

$$(3) \quad 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א.} \quad (x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב.}$$

$$(4) \quad r = 4 \sin \theta \text{ א.} \quad r \cos \theta = 10 \text{ ב.} \quad r \sin \theta = 4 \text{ ג.}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א.} \quad y = x \text{ ב.} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג.}$$

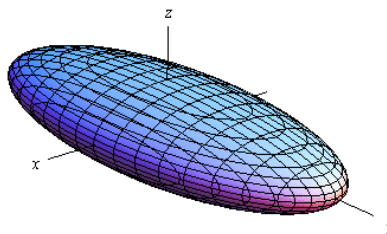
$$\text{ד.} \quad 6\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 \cdot y = 4\sqrt{x^2 + y^2} - x$$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

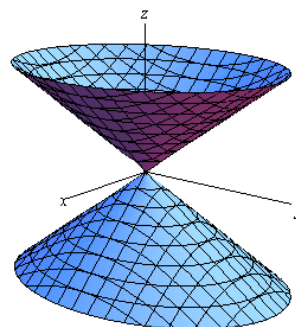
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל כדור עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

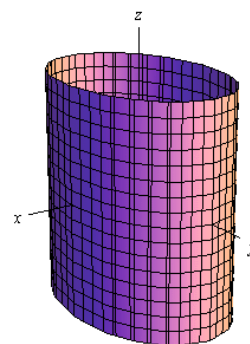
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. * מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים. * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

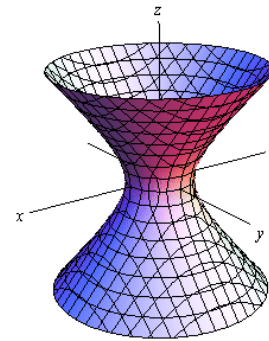


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

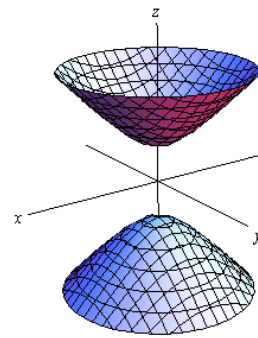
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

**היפרבולואיד דו-יריעתי**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 : \text{משוואה}$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

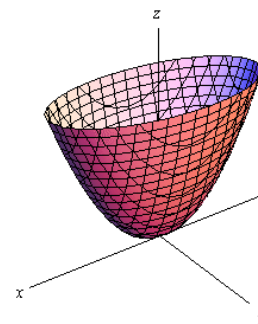
**פרבולואיד אליפטי**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

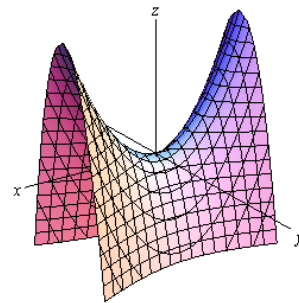
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



פרבולואיד היפרבולי



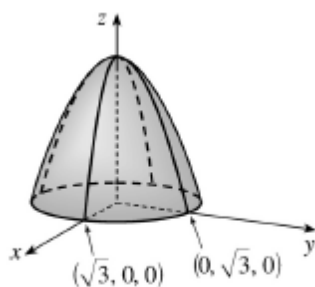
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

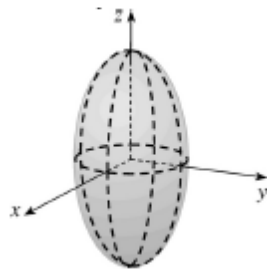
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

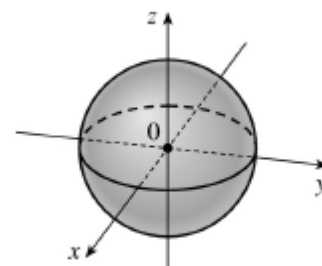
דוגמאות שונות



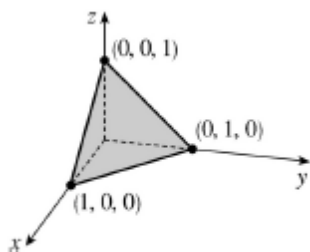
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



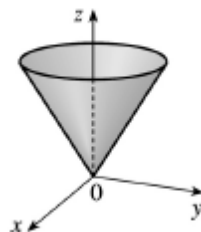
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



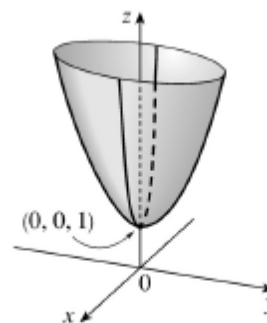
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 15 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. גבול של פונקציה של שני משתנים 121
2. רציפות של פונקציה של שני משתנים 124

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-9:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (9)$$

חשב את הגבולות בשאלות 10-17 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשב את הגבולות בשאלות 18-25 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

* בשאלות 18, 20-23 ו-25 מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

(26) ענה על הסעיפים הבאים :

א. חשב את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$

ב. העזר בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, וחשב את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$

ג. העזר בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, וחשב את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$

ד. העזר בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$, וחשב את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$

* קחו בחשבון שייתכן שכותב השאלה לא ייתן את הגבול הידוע בגוף השאלה.

(27) הוכח לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$.

(28) הוכח לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$.

(29) הוכח לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$.

תשובות סופיות

1 (1)

 $\frac{1}{12}$ (2)

1 (3)

0 (4)

אינסוף (5)

 $\frac{1}{2}$ (6)

2 (7)

5 (8)

0 (9)

(10) – (17) אין לפונקציה גבול.

0 (18)

0 (19)

0 (20)

0 (21)

3 (22)

0 (23)

0 (24)

0 (25)

0 א-ד. (26)

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות 1-3 בדוק את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
 במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
 האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלות 4-5 בדוק את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון}$$

עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7 נתונה פונקציה ממשית רציפה $f = f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0, 0)$?

8 הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

אם $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y)$ לכל y ,

וגם $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0)$ לכל x ,

אז $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$.

9 פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $|f(x, y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$, לכל (x, y) .

הוכח שהפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$.

10 מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ k & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל המרחב?

11 נתון כי:

לכל x מתקיים $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq |x_2 - x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה x).

הוכח כי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

12 הוכח או הפרך:

נתון כי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

$$z(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ידוע כי $z(1, 14) < 0$, $z(14, 1) > 0$.

אז בתחום ההגדרה של z קיימת נקודה (c_1, c_2) , כך ש- $z(c_1, c_2) = 0$.

תשובות סופיות

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$, הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור $m > 1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m \leq 1$ הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

| | $x \rightarrow -\infty$ | $x \rightarrow 0$ | $x \rightarrow \infty$ |
|--------------------------------------|---|---|---------------------------------------|
| $y = \frac{1}{x}$ | $\frac{1}{-\infty} = 0$ | $\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$ | $\frac{1}{\infty} = 0$ |
| $y = e^x$ | $e^{-\infty} = 0$ | $e^0 = 1$ | $e^\infty = \infty$ |
| $y = \ln x$ | --- | $\ln(0^+) = -\infty$ | $\ln(\infty) = \infty$ |
| $y = \arctan x$ | $\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ | $\text{atan}(0) = 0$ | $\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$ |
| $y = a^x, a > 1$ | $a^{-\infty} = 0$ | $a^0 = 1$ | $a^\infty = \infty$ |
| $y = a^x, 0 < a < 1$ | $a^{-\infty} = \infty$ | $a^0 = 1$ | $a^\infty = 0$ |
| $y = \sin x$ | --- | $\sin 0 = 0$ | --- |
| $y = \cos x$ | --- | $\cos 0 = 1$ | --- |
| $y = \frac{\sin x}{x}$ | 0 | 1 | 0 |
| $y = \frac{\tan x}{x}$ | --- | 1 | --- |
| $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ | e | (from right) 1 | e |
| $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ | --- | e | 1 |
| $y = \sqrt{x}$ | --- | $\sqrt{0^+} = 0$ | $\sqrt{\infty} = \infty$ |
| $y = \sqrt[3]{x}$ | $-\infty$ | $\sqrt[3]{0} = 0$ | $\sqrt[3]{\infty} = \infty$ |

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 16 - נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות

תוכן העניינים

| | |
|-----|-----------------------------|
| 128 | 1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון |
| 130 | 2. נגזרות חלקיות מסדר שני |
| 134 | 3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה |
| 136 | 4. דיפרנציאביליות |

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות 1-10 חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \text{ (רק } f_x \text{)}$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \qquad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \qquad f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (11) \text{ נתון}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \text{ הוכח כי}$$

$$f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad (12) \text{ נתון}$$

$$\text{חשב } \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \qquad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \qquad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \qquad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \qquad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \qquad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \qquad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \qquad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \qquad f_y = 2xyz^3 \qquad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \qquad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \qquad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

(11) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (12)$$

הערת סימון

| | |
|--|--|
| $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$ | $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$ |
| $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$ | $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$ |
| $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$ | $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$ |

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-14 חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$

16) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

17) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

18) נתון $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$

חשב $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$

הערת סימון

$$\begin{array}{l}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll}
 f_y = -2x^2y + 10 & f_{xx} = 8 - 2y^2 & f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \\
 f_{yx} = -4xy & f_{xy} = -4xy & f_{yy} = -2x^2 \\
 f_y = \frac{x^4}{y} & f_{xx} = 12x^2 \ln y & f_x = 4x^3 \ln y \quad (2) \\
 f_{yx} = \frac{4x^3}{y} & f_{xy} = \frac{4x^3}{y} & f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \\
 f_y = 3y^2 - 6x & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 - 6y \quad (3) \\
 f_{yx} = -6 & f_{xy} = 6 & f_{yy} = 6y \\
 f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4) \\
 & f_{xy} = -3 & f_{yy} = 6y - 6 \\
 f_y = x^2 - 2xy & f_{xx} = 2y & f_x = 2xy - y^2 \quad (5) \\
 & f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y & f_{yy} = -2x \\
 & f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] & (6) \\
 & f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0] \\
 & f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] & f_{xx} = 2[8y - 0 - 24] \\
 & & f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0] \\
 & f_y = e^{xy}(x^2 + xy + 1) & f_x = e^{xy}(xy + y^2 + 1) \quad (7) \\
 f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} & f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy} \\
 & f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy} \\
 f_y = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) & f_x = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) \quad (8) \\
 & , f_{xx} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y} \\
 & f_{yy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y} \\
 & f_{xy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y} \\
 f_y = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) & f_x = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9) \\
 & f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}
 \end{array}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y) \qquad f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y) \qquad f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{xy} = -40 \sin(10x+4y) \qquad f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \qquad f_{xy} = z \qquad f_{xx} = 0 \qquad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \qquad f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = z \qquad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \qquad f_{zy} = x \qquad f_{zx} = y \qquad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) \quad (18)$$

16

נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

שאלות

$$(1) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$?
 ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$(2) \quad \text{מצא את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

$$(3) \quad \text{מצא את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y + x^2)^2}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכח שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. הוכח שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0, 0)$ וחשב אותן.

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.
 ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה $(0, 0)$?

$$6 \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. בדוק האם $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0, 0)$?

ג. האם $f_{xyxy}(1, 4) = f_{yxxy}(1, 4)$.

הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

1 (א. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. ב. לא רציפה בנקודה $(0, 0)$.)

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2 $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 0$

3 $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$

4 א. שאלת הוכחה. ב. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$.

$$5 \quad \text{א.} \quad f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ב. לא רציפות.

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6 א. $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0, 0)$. ג. כן.

דיפרנציאביליות

שאלות

בשאלות 1-4 בדוק האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x + y}{y + 4x} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (5) \text{ בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \text{ נתון } m, \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$(7) \quad \text{נתון } m, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

(8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \text{ נגדיר פונקציה חדשה}$$

$$\text{נתון } f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f(0, 0) = 0$$

הוכח ש- ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

$$(9) \quad \text{בדוק דיפרנציאביליות } f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0, 0)$.

$$(10) \quad \text{נתונה } f: R^n \rightarrow R \text{ המוגדרת על ידי } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases}$$

האם f דיפרנציאבילית בנקודה $x = 0$?

תשובות סופיות

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
- (6) א. $m > 1$ ב. $m > 0$ ג. $m > 2$
- (7) א. $m < 1$ ב. לכל m ג. $m < 0.5$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 17 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים 139

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

(1) נתון: $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = \ln(x^2 - y^2)$
 חשב: z_u , z_v .

(2) נתון: $v = 4t + k$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$
 חשב: z_t , z_m , z_k .

(3) נתון: $z = f(x^2 - y^2)$
 הוכח: $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$.

(4) נתון: $z = f(xy)$
 הוכח: $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$.

(5) נתון: $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$
 הוכח: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$.

(6) נתון: $z = f(x - y, y - x)$
 הוכח: $z_x + z_y = 0$.

(7) נתון: $w = f(x - y, y - z, z - x)$
 הוכח: $w_x + w_y + w_z = 0$.

(8) נתון: $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$
 הוכח: $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$.

9 נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$

הוכח: $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$

10 נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$

הוכח: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$

11 נתון: $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

הוכח: $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$

12 נתון: $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$

הוכח: $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$

13 נתון: $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$ הוכח:

א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$

ב. $u_{xy} = u_{yx}$

ג. חשב: $u_{xy}(1, \pi)$, אם ידוע ש- $g'(0) = 1$, $f'(0) = 2$.

14 נתון: $y = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$, $u = f(x, y)$

א. הוכח: $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$

ב. הוכח: $u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$

ג. הוכח: $f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$

15 נתון $z = h(u, v)$, ונתון כי $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.
הוכח כי:

א. u, v מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ וכן $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

ב. $h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$.

16 נתון: $y = r \sinh s$, $x = r \cosh s$, $u = f(x, y)$.

הוכח כי: $(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$.

17 פונקציה $f(x, y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n , אם $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$.
הוכח כי אם f הומוגנית, אז:

א. $x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$.

ב. $x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$.

18 נתונה הפונקציה $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.

ב. נתון $x = 2t, y = t$.

חשב את $z'(0)$ באופן ישיר.

ג. נתון $x = 2t, y = t$.

חשב את $z'(0)$ לפי כלל השרשרת.

ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבע האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

$$-e \quad \text{ג.} \quad (13)$$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad \text{א.} \quad (18) \quad \text{ב.} \quad \frac{4}{5} \quad \text{ג.} \quad 0 \quad \text{ד.} \quad \text{לא דיפרנציאבילית.}$$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 18 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט 143

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

(1) תהי $f(x, y) = x^2 + y^2$.

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3, 4)$.

(2) תהי $f(x, y) = 3x^2y$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

(3) תהי $f(x, y) = x - \sin(xy)$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$,

בכיוון הווקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

(4) תהי $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x .

(5) תהי $f(x, y) = xy^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון לנקודה $(4, 5)$.

(6) תהי $f(x, y, z) = x^2y^2z$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2, 1, 4)$,

בכיוון הווקטור $\vec{u} = 1\cdot\mathbf{i} + 2\cdot\mathbf{j} + 2\cdot\mathbf{k}$.

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x, y) , נתון על ידי $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, מצא את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון לנקודה $(2, 6)$.

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$ בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית, וחשב את ערכה.

9 מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$ בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית, וחשב את ערכה.

10 אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$, ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11 נתונה הפונקציה $f(x, y) = 4x^2y$.

- א. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- ב. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .
- ג. מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12 נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = x^2yz^4$.

- מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2, -1)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , ו- 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- z . הנח שהזווית עם ציר ה- y חדה.

13 נתונה הפונקציה $f(x, y) = xy^2 - x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1, 1)$.

- א. חשב את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q , בכיוון וקטור שיוצר זווית של 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצא וקטור \bar{u} , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(Q) = 0$.

ג. האם קיים וקטור \bar{u} , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(Q) = 6$.

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + 4y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכח כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$.
- ב. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
- ג. חשב את $\nabla f(0, 0)$.
- ד. בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
- ה. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0, 0)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = (1, -1)$.
- ו. הסבר מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

$$(15) \text{ הפונקציה } f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2, \text{ מתארת טמפרטורה בנקודה } (x, y, z)$$

- א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2, 4, 1)$?
- ב. אוסף הנקודות (x, y, z) , בהן הטמפרטורה שווה 20° , מהווה משטח מפורסם. מהו?
- ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2, 4, 1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר. באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?
- ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$), בנקודה $(2, 4, 1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר, אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן. באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

$$(16) \text{ גֵּלָה מוחזקת בנקודה } (2, 1, 14), \text{ שעל המשטח } z = 20 - x^2 - 2y^2$$

משחררים את הגֵּלָה והיא מתחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

- א. מהו המשטח הנתון?
- ב. מצא את הווקטור $\vec{u} = (a, b, c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֵּלָה.

$$(17) \text{ תהי } f = f(x, y) \text{ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:}$$

$$1. f(x, x^2) = \frac{x^2}{2} + x^4 \text{ לכל } x$$

$$2. \text{ הנגזרת המכוונת של } f(x, y), \text{ בנקודה } (1, 1), \text{ בכיוון הווקטור } \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

שווה 1.

חשב את הגרדיאנט של f בנקודה $(1, 1)$.

18 נתונה $f = f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f(x, y, x^2 + y^2) = 2x + y$.

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 2, 4) = -\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u} = (-2, 1, 2)$.
חשב את $\nabla f(0, 2, 4)$.

19 נתונה הפונקציה $f(x, y) = 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשב את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8, 1)$ בכיוון הווקטור $\vec{u} = (3, 4)$.

ב. בדוק האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

ג. חשב $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$, בכיוון וקטור \vec{v} , היוצר זווית α

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ד. באיזה כיוון α , הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ תהיה מקסימלית?

מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20 נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 20x + 21y & x \neq 0 \\ 21y & x = 0 \end{cases}$

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) < m$, לכל וקטור יחידה \hat{u} ?

ב. מצא וקטור יחידה \hat{u} , המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) = 0$.

הערות סימון

1 במישור \mathbb{R}^2 : $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$$\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \text{ או } \vec{u} = (x, y)$$

$$\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

במרחב \mathbb{R}^3 : $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v} = (x, y, z)$, או $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

$$\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j} + 5 \cdot \mathbf{k}$$

2 יש המסמנים וקטור \vec{u} גם \underline{u} או \mathbf{u} .

3 וקטור יחידה יסומן \hat{u} .

תשובות סופיות

- (1) א. הגרדיאנט $(6, 8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.
- (2) $\frac{48}{5}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $7.5\sqrt{2}$
- (5) $3\sqrt{13}$ (6) $\frac{88}{3}$ (7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
- (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1, 1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.
- (9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(12, 14, -12)$ ושווה ל-22.
- (10) בכיוון הווקטור $(-2, 2, -2)$.
- (11) א. $8\sqrt{3} + 2$. ב. $8 + 2\sqrt{3}$. ג. $l: (1, 2, 4) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 + 2\sqrt{3}\right)$
- (12) $\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$
- (13) א. $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}$. ב. $\vec{u} = (5, 1)$ (יש עוד). ג. לא.
- (14) א. הוכחה. ב. $f_x = 1, f_y = 0$. ג. $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$
- (15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8, 32, 2)$. ד. בכיוון הווקטור $(8, 32)$.
- (16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u} = (4, 4, -32)$
- (17) $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (18) $\nabla f(0, 2, 4) = (2, -3, 1)$
- (19) א. $\frac{67}{5}$. ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)^{\frac{1}{3}}$
- ד. $\text{Max} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = 12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}, \alpha = 54.73^\circ$
- (20) א. $m > 29$. ב. $\hat{u} = (21/29, -20, 29)$ (יש אחרים).

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 19 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

| | | |
|-----|-------|--------------------------------|
| 148 | | 1. פונקציות סתומות - הפן הטכני |
| 151 | | 2. שימושים גאומטריים |

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

- (1) מצא את y' , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$, וחשב את $y'(0)$.
- (2) מצא את $y'(1)$, כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.
- (3) מצא את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.
- (4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$
חשב את $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.
- (5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$
חשב את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.
- (6) נתונה המשוואה $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$
הוכח כי $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$.
- (7) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^3 - 2xz + y = 0$
מצא $z_{xx}(1,1)$.
- (8) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצא:
 א. $z_{xx}(2,1)$
 ב. $z_{xy}(2,1)$
 ג. $z_{yy}(2,1)$

$$(9) \quad \begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשב את u_x, v_x, u_y, v_y .

ב. הראה כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

$$(10) \quad \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשב את w_x, w_y .

ב. חשב y_x, y_w .

$$(11) \quad \begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

הוכח כי $z'(x) + y'(x) = 0$.

$$(12) \quad \begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = f(u) \\ -x \sin u + y \cos u = f'(u) \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

הוכח כי:

$$א. \quad (z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$$

$$ב. \quad z_{xy} = z_{yx}$$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, \quad y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, \quad y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

שאלת הוכחה. (6)

$$z_x(1,1) = -16 \quad (7)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, \quad z_{yy}(2,1) = 4 \quad (8)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, \quad u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, \quad v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, \quad v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left(uv \neq \frac{1}{8} \right) \quad (9)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3uv, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2}(v+u) \quad (u \neq v) \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2uv}{v+u}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{2}{3(v+u)} \quad (u \neq \pm v) \quad (11)$$

שאלת הוכחה. (11)

שאלת הוכחה. (12)

שימושים גאומטריים

שאלות

- (1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ ($z < 0$).
 מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה $x = -2$, $y = 1$.
- (2) מצא משוואה של מישור משיק למשטח $xyz = 8$ בנקודה $(-2, 2, -2)$,
 וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.
- (3) מצא מישור המשיק למשטח $x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2$,
 המקביל למישור $x + 8y + 18z = 0$.
- (4) למשטח $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.
 מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C, בהתאמה.
 נסמן: $O = (0, 0, 0)$.
 הוכח: $OA + OB + OC = a$.
 (למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)
- (5) נתון המשטח $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$, ונתונה הנקודה $(1, 2, -1)$.
 הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x + 3y - 2z = 10$,
 בנקודה Q.
 מצא את הנקודה Q.
- (6) הראה שהמשטח $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
 המשטחים $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$, בנקודת החיתוך $(1, -1, 2)$.
- (7) מצא משוואת הישר המשיק לעקום $C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$
 בנקודה בה $t = \frac{1}{4}\pi$.

(8) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתון עקום $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$,

ונתונה נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$, המתקבלת מהצבת $t = t_0$ במשוואת העקום. הוכח כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

ב. מצא את משוואת המישור הנורמל לעקום

$$C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$$

בנקודה בה $t = 0.25\pi$.

(9) נתונות שתי העקומות:

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

נתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח S , וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy .

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצא את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

(10) נתונות שלוש עקומות:

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

$$C_3: x = u + 2, y = u, z = u^2 - 1$$

נתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח S , וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy .

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח S ? נמק!

(11) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שמשוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה P שעליו, היא $\ell: P + t \cdot \nabla F(P) \times \nabla G(P)$.

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצא את משוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

12) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח שמשוואת המישור הנורמלי לעקום

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה P שעליו, היא $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$,

כאשר $(a, b, c) = \nabla F(P) \times \nabla G(P)$.

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצא את משוואת המישור הנורמלי לעקום :

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, על ידי $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2 + v^2$.

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u, v) = (1, 0)$.

14) מצא ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u$$

עבור $u \in [0, \pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.

באיזה משטח מדובר?

תשובות סופיות

(1) $3x - 6y + 2z + 18 = 0$

(2) $x - y + z + 6 = 0$, $(-2, 2, -2) + t(1, -1, 1)$

(3) $x + 8y + 18z = 21$, $x + 8y + 18z = -21$

(4) שאלת הוכחה.

(5) $Q(7, -9, -15)$

(6) שאלת הוכחה.

(7) $\ell: (x, y, z) = (3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + s(3\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$

(8) א. שאלת הוכחה. ב. $3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2}$

(9) א. $P(1, -1, 0)$ ב. $x - 2z = 1$

(10) א. נקבל שנקודת החיתוך היא $P(1, -1, 0)$ ב. לא.

(11) א. שאלת הוכחה. ב. $(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(3, 16, 2)$

(12) א. שאלת הוכחה. ב. $3x + 16y + 2z = -11$

(13) כל נקודה, למעט $(0, 0, 0)$. $-2x + z = -1$

(14) $\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1,

שנוסחתו: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 20 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלם

תוכן העניינים

- 155 1. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים
- 157 2. הדיפרנציאל השלם - נוסחת הקירוב הליניארי.

נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

שאלות

פתח את הפונקציות בשאלות 1-4 לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a, b) :

$$(a, b) = (1, 2) \quad f(x, y) = x^2y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = (1 + y)\ln(1 + x - y) \quad (2)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (3)$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y}{x + y^2}} \quad (4)$$

(5) בעזרת התוצאה של שאלה 2, חשב בקירוב את $\ln(1.5)$.

(6) בעזרת התוצאה של שאלה 3, חשב בקירוב את e^3 .

(7) בעזרת התוצאה של שאלה 4, חשב בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

תשובות סופיות

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 14y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

הדיפרנציאל השלם – נוסחת הקירוב הליניארי

שאלות

- (1) חשב בקירוב: $\ln(0.01^2 + 0.99^2)$.
- (2) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצא בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.
- (3) מחשבים את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו. ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%, ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.
- (4) נתונות שתי צלעות במלבן $a = 10\text{cm}$, $b = 24\text{cm}$. חשב את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב-4mm ואת הצלע b יקצרו ב-1mm.
- (5) מודדים את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

תשובות סופיות

- (1) $\cong -0.01$
- (2) $2\frac{7}{3200}$
- (3) 8%
- (4) שינוי מדויק: 0.06472, שינוי מקורב: 0.06153.
- (5) 5%

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 21 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 158

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-8,

מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \quad \text{נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4.$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה (1,2,3) למישור $-2x - 2y + z = 0$, וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

- 12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$, $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$. כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

- 13) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$.
- א. הוכח שהנקודה $(0, 0)$ היא נקי קריטית.
- ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבע עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכלף, או שלא ניתן לדעת.

14) מצא שני מספרים, $b > a$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

- 1) $(-0.5, 1)$ אוכלף; $(1.5, -3)$ מינימום.
- 2) $(1, 2)$ מינימום; $(-1, -2)$ מקסימום; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכלף.
- 3) $(0, 0)$ אוכלף; $(1, 1)$ מינימום.
- 4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום; $(1, 0)$ מקסימום; $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$ אוכלף.
- 5) $(0, 2)$ מקסימום.
- 6) $(4, 4)$ מקסימום.
- 7) $(-0.5, 4)$ מקסימום.
- 8) אין נקודות קריטיות.
- 9) $z = 4$, $z = 3$
- 10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- 11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- 12) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$ רווח מקסימלי \$288.
- 13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = 2$, $a = -2$, לא ניתן לדעת; $a > 2$, $a < -2$ אוכלף; $-2 < a < 2$ מינימום.
- 14) $a = -6$, $b = 4$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 22 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה רבת משתנים.....160

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות 1-5 :

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

(6) מצא מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 1$, לפרבולה $y = -x^2 + 2x$.
* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות 7-11 נתונות n נקודות, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y = h(x)$, כך ששכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

$$(7) \quad h(x) = ax + b, \text{ הדגם עבור הנקודות } (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5).$$

$$(8) \quad h(x) = ax^2 + bx, \text{ הדגם עבור הנקודות } (-1, 2), (2, 0), (0, -2).$$

$$(9) \quad h(x) = ax + \frac{b}{x}, \text{ הדגם עבור הנקודות } (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4).$$

$$(10) \quad h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}, \text{ הדגם עבור הנקודות } (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90).$$

(11) הדגם עבור הנקודות $h(x) = ax^2 + bx + c$, $(1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12)$.

(12) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. מצא ישר $y = ax + b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. עליך להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות 11 ו-12 ניתן להניח ש- a ו- b , המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a = 0, f_b = 0$, נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$.

תשובות סופיות

(1) לכל t ממשי, מקסימום.

(2) $(0, 0)$ מקסימום.

(3) אין קיצון. $(1, 2)$ אוקף.

(4) אין קיצון. $(1, 2)$ אוקף.

(5) מינימום. $(0.5, 1.1)$.

(6) 0.375

(7) $y = 0.88x + 0.3$

(8) $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$

(9) $y = 2.032x + \frac{1.5039}{x}$

(10) $y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2}$

(11) $y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824$

(12)
$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 23 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ.....162

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות 1-4 מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{נתונה בעיית הקיצון } \max \{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12, \text{ כאשר } x, y > 0. \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{נתונה בעיית הקיצון } \max \{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \text{ כאשר } x, y \geq 0. \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12, \quad (7)$$

מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$\text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצא את הנקודות} \quad (8)$$

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית

הצירים הוא מקסימלי.

$$\text{מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0, \quad (9)$$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax + by + c = 0, \text{ הוא } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- 10** מוישליה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$. מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח. מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$, והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישליה.
- 11** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$. מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח. לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.
- 12** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$. לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$. דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.
- 13** ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) , המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).
- 14** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x, y)\} \text{ s.t. } p_1x + p_2y = I$. תהי (x^*, y^*) נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה. הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda = \frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(1)}$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad \text{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \text{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \text{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \text{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \text{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(8)}$$

$$7 / \sqrt{45} \quad \text{(9)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \text{(10)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(11)}$$

$$\max(2, 3) \quad \text{(12)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \text{(13)}$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad \text{(14)}$$

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 24 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים 165

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

- (1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.
- (2) מצא על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.
- (3) ענה על הסעיפים הבאים:
 א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.
 ב. מצא נקי' על המישור $-2x - 2y + z = 0$ שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1, 2, 3)$.
 ג. בדוק תשובתך על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.
- (4) מצא את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.
- (5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ למישור $3x + 4y + 12z = 288$. רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$, הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- (6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.
- (7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ והמישור $z = x + y$, לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2, 4, 4)$, והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2, -4, -4)$.
- (3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$
- (5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 25 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 167

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

- (1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$.
- (2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$.
- (3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$.
- (5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$.

תשובות סופיות

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$.

חדוא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 26 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

1. חדוא 2_טורי טיילור - מקלורן_חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז_נספח.pdf . . 168
2. טור טיילור וטור מקלורן 169
3. טור טיילור סביב $X=X_0$ 171
4. חישוב סכום של טור 172
5. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן 173
6. חישובים מקורבים של פונקציות 174
7. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים 176
8. השארית של לגראנז 177

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

| <u>טור מקלורן</u> | <u>תחום התכנסות</u> |
|---|------------------------------------|
| $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ | $-\infty < x < \infty$ |
| $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ | $-\infty < x < \infty$ |
| $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ | $-\infty < x < \infty$ |
| $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ | $-1 < x \leq 1$ |
| $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ | $-1 \leq x \leq 1$ |
| $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$ | $-1 < x < 1$ |
| $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ | $-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$ |
| $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$ | $-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$ |
| | $-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$ |
| | $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ |

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = 0$ (טור מקלורן) בשאלות 1-24 :

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, עליך להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
 לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24, עליך להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
 תוכל להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח שבעמוד האחרון.

מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות בשאלות 25-27 (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27) \quad f(x) = \tan x \quad (26) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$(-1 < x < 1)$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

$$(0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$(0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

חישוב סכום של טור

שאלות

חשב את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$\pi/4 \quad (5) \qquad 2e \quad (4) \qquad \sqrt{e} \quad (3) \qquad e^{-2} \quad (2) \qquad e \quad (1)$$

$$\ln \frac{3}{2} \quad (9) \qquad \ln 2 \quad (8) \qquad \cos 1 \quad (7) \qquad \sin 1 \quad (6)$$

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות 1-3 חשב את ערך הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(4) נתון כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k$ כאשר k קבוע שונה מאפס.
מצאו את n ואת k .

תשובות סופיות

$$k = 1, n = 3 \quad (4) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{120} \quad (1)$$

חישובים מקורבים של פונקציות

שאלות

בשאלות 1-3 חשב בשגיאה הקטנה מ-0.001:

$$\frac{1}{e} \quad (1) \qquad \sin 3^\circ \quad (2) \qquad \arctan 0.25 \quad (3)$$

בשאלות 4-6 חשב בעזרת n איברים ראשוניים (שוניים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והערך את השגיאה בחישוב:

$$(n=3) \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4) \qquad (n=1) \cos 4^\circ \quad (5) \qquad (n=4) \ln 1.5 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ עבור } |x| \leq \frac{\pi}{6} ?$$

$$(8) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \ln(1+x) \cong x \text{ עבור } |x| < 0.01 ?$$

$$(9) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \text{ עבור } |x| \leq 0.2 ?$$

$$(10) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.001?}$$

$$(11) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.01?}$$

תשובות סופיות

$$\frac{53}{144} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{60} \quad (2)$$

$$\frac{47}{192} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8}, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{48} \quad (4)$$

$$1, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{\pi \cdot \pi}{4050} \quad (5)$$

$$\frac{77}{192}, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{160} \quad (6)$$

$$\frac{(\pi/6)^5}{5!} \quad (7)$$

$$\frac{(0.01)^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad (9)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (10)$$

$$|x| < \sqrt[2]{9/100} \quad (11)$$

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

השארית של לגראנז'

- (1) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את $\sqrt[3]{66}$ והערך את השגיאה בקירוב.
- (2) רשום את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את $\tan 0.1$ והערך את השגיאה בקירוב.
- (3) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את $\sqrt{5}$ והערך את השגיאה בקירוב.
- (4) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב $x_0 = 16$, כולל שארית לגראנז'.
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את $\sqrt[4]{15}$ והערך את השגיאה בקירוב.

הערה לגבי קירובים

אם מבקשים קירוב שהוא מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה, אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} . למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$. בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

תשובות סופיות

$$(1) \text{ נוסחה: } \sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81 \cdot \sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{5}{663552}$$

$$(2) \text{ נוסחה: } \tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2, \text{ חישוב: } \tan 0.1 = \frac{1}{10}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{970}$$

$$(3) \text{ נוסחה: } \sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{512}$$

$$(4) \text{ נוסחה: } \sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128 \cdot \sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{3130}$$

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

| <u>טור מקלורן</u> | <u>תחום התכנסות</u> |
|---|------------------------------------|
| $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ | $-\infty < x < \infty$ |
| $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ | $-\infty < x < \infty$ |
| $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ | $-\infty < x < \infty$ |
| $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ | $-1 < x \leq 1$ |
| $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ | $-1 \leq x \leq 1$ |
| $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$ | $-1 < x < 1$ |
| $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ | $-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$ |
| $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$ | $-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$ |
| | $-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$ |
| | $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ |