

חזרה 3



תוכן העניינים

1	1. טורים עם איברים קבועים
15	2. סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות
22	3. משוואות מסדר ראשון
41	4. משוואות ליניאריות מסדר שני
54	5. משוואות ליניאריות מסדר n
62	6. מערכת משוואות לינאריות
72	7. שימושים של משוואות דיפרנציאליות
80	8. פרקי חזרה - אינטגרלים

3 חדוא

פרק 1 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים..... 1
2. מבחן ההתבדרות של טורים..... 4
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים..... 5
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים..... 7
5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי..... 9
6. תרגילי תיאוריה..... 10

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

טור טלסקופי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

טור הרמוני מוכלל

(12) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ו.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{ד.}$$

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$. ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$. ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

15) מצא את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.123123123\dots + 0.141414\dots$.

תשובות סופיות

- (1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$
- (2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$
- (3) מתבדר.
- (4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$
- (5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$
- (6) מתכנס ל- 8.
- (7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$
- (8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$
- (9) מתבדר.
- (10) $S = \frac{1}{\ln 2}$
- (11) $\frac{1}{12}$
- (12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר. ד. מתבדר. ו. מתכנס.
- (13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
- (14) $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$
- (15) $\frac{323}{1221}$

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p > 1) \quad (4)$$

ענה על הסעיפים הבאים: (6)

א. בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$.

ב. מצא את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$.

מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן ראפה

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------|-------------|-------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתבדר. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתבדר. | |
| (6) א. מתכנס. | ב. 0 | |
| (7) מתכנס. | (8) מתבדר. | (9) מתכנס. |
| (10) מתבדר. | (11) מתכנס. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר. | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתבדר. | (17) מתכנס. | (18) מתכנס. |
| (19) מתכנס. | (20) מתכנס. | (21) מתכנס. |
| (22) מתכנס. | (23) מתכנס. | (24) מתכנס. |
| (25) מתבדר. | (26) מתבדר. | |

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבע אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{הוכח שהטורים } \sum \sin n\theta, \sum \cos n\theta, \text{ כאשר } \theta \neq 2\pi k, \text{ חסומים.}$$

(7) הוכח את התכנסות הטורים הבאים :

$$. (\theta \neq 2\pi k) \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}$$

$$(8) \quad \text{בדוק התכנסות הטור } \sum \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$(9) \quad \text{הוכח שאם הסדרה } b_n \text{ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור } \sum b_n \sin n \text{ מתכנס.}$$

(10) ענה על שני הסעיפים הבאים :

$$א. \text{ הוכח שהטור } \sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\bmod 7) \text{ הוא טור חסום.}$$

$$ב. \text{ בדוק את התכנסות הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}.$$

מבחן אבל

בשאלות הבאות קבע אם הטור מתכנס או מתבדר:

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}} \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|----------------|-------------|-------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתכנס. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתכנס. | (6) הוכחה. |
| (7) הוכחה. | (8) מתבדר. | (9) הוכחה. |
| (10) א. הוכחה. | ב. מתכנס. | (11) מתכנס. |
| (12) מתכנס. | (13) מתכנס. | (14) מתכנס. |

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתכנס בהחלט. | (3) מתכנס בתנאי. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |

תרגילי תיאוריה

(1) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

(2) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

(3) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ מתבדר.

(4) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

(5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

(6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכח ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

(7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכח כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

(8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכח כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

(9) הוכח או הפרך:

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל n , אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

(10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

(11) הוכח או הפרך:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

(12) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

(13) הוכח או הפרך:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכח או הפרך:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n , אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

(16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכח כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכח כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

(17) הוכח :

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

(18) הוכח כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

(19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n .

א. נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכח כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכח כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

(20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

$$(21) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכח כי הטור מתכנס.

$$(22) \text{ נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n. \text{ הוכח כי } \sum n(a_n - a_{n+1}) \text{ מתכנס.}$$

$$(23) \text{ נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1$$

$$\text{האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$(24) \text{ נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיימת } a_n > 0, a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1} \text{ לכל } n \text{ טבעי. הוכח כי } \sum a_n \text{ מתבדר.}$$

$$(25) (a_n) \text{ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.}$$

$$\text{הוכח כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

$$(26) \text{ נתון טור חיובי } \sum a_n. \text{ הוכח או הפרך:}$$

- א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.
 ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

$$(27) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

א. הוכח כי הסדרה a_n מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ מתכנס.

ב. בדוק האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדוק האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמד את הנושא טורי מקלורן עם שארית לגראנז'.

(28) פונקציה f מוגדרת לכל x , גזירה ב-0 ומקיימת $f(0) = 0$. הוכח כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

(29) נתון פולינום $p(x)$.

$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

הוכח כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow p(0) = 0$.

(30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.

נתון כי:

(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. (2) לכל n טבעי $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

חדוא 3

פרק 2 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

15	1. סדרות פונקציות
18	2. טורי פונקציות
20	3. טורי חזקות

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות 1-11 :

א. בדוק התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצא את הפונקציה הגבולית.

ב. בדוק התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$(1) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} [0, 0.5] \quad (2) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} (0, 1)$$

$$(3) \quad f_n(x) = \arctan(nx) \quad \text{ב-} (0, \infty) \quad (4) \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(5) \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{ב-} [0, 1] \quad (6) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{ב-} [0.5, 4]$$

$$(7) \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+n} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (8) \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{ב-} \mathbb{R}$$

$$(9) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (10) \quad f_n(x) = n(1-x)x^n \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(11) \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1)+1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(12) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0, 4]$?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0, 4]$?
 ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(13) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0, \infty)$?
 ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0, \infty)$?
 ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1, \infty)$?

$$(14) \text{ נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(15) \text{ נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = [1 - \chi_n(x)] \left(x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ כאשר}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1, \infty)$?
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?
 ב. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1, \infty)$?

תשובות סופיות

- (1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- (14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1, \infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.
ב. רק אם $\alpha < 0$.

טורי פונקציות

שאלות

מצא את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-6:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידן:

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (12)$$

תשובות סופיות

(1) $x > 0$

(2) $x \neq 5$

(3) $x < 3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$

(4) $0 < x \neq \frac{1}{n}$

(5) $x > 0$

(6) $x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

(7) מתכנס במידה שווה.

(8) מתכנס במידה שווה.

(9) מתכנס במידה שווה.

(10) מתכנס במידה שווה.

(11) מתכנס במידה שווה.

(12) מתכנס במידה שווה.

טורי חזקות

שאלות

מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצא את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבע את תחום ההתכנסות:

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15) \qquad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14) \qquad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18) \qquad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17) \qquad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20) \qquad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא "פירוק לשברים חלקיים".

תשובות סופיות

- | | |
|--|--|
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (2) | $-1 \leq x < 1, R = 1$ (1) |
| $-1 \leq x \leq 1, R = 1$ (4) | $-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2$ (3) |
| $-1 < x < 1, R = 1$ (6) | $-3 < x \leq -1, R = 1$ (5) |
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (8) | $x = 1, R = 0$ (7) |
| $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3$ (10) | $-5 < x \leq 3, R = 4$ (9) |
| $-7 < x < -3, R = 2$ (12) | $-9 \leq x \leq 11, R = 10$ (11) |
| $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n}$ (14) | $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (13) |
| $(x < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$ (16) | $(x < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$ (15) |
| $(x < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ (18) | $(x < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1}$ (17) |
| $(x < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n$ (20) | $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n$ (19) |

3 חדוא

פרק 3 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא	11
2. הפרדת משתנים	22
3. משוואה הומוגנית	24
4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$	26
5. משוואה מדויקת	27
6. גורם אינטגרציה	29
7. משוואה לינארית מסדר ראשון	32
8. משוואת ברנולי	34
9. הצבות שונות ומשוונות	35
10. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד	36
11. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון	39

הפרדת משתנים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

משוואה הומוגנית

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 8-1 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 : \text{נתונה המשוואה} \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n , על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

משוואה מהצורה $(ax + by + c)dx + (dx + ey + f)dy = 0$

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x + y + 2} \quad (1)$$

$$(x + 2y + 3)dx + (2x + 4y - 1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3 + x + 2y}{1 + x + y} \quad (4)$$

$$(2x + y - 3)dx + (x + y - 1)dy = 0 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x + y + 1) + \frac{1}{4}\ln(2(x + y + 1) + 1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x - 1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y + 2}{x - 1} - 1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y + 2}{x - 1} + 1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x + 2y + 3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x - 1| = \frac{1}{4}\left[-(2 + \sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} - 2\frac{y + 2}{x - 1}\right| + (-2 + \sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} + 2\frac{y + 2}{x - 1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x - 2| = \frac{1}{2}\ln\left(2 + 2\frac{y + 1}{x - 2} + \left(\frac{y + 1}{x - 2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

משוואה מדויקת

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-6:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{-xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{-xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } (3x^2 + ye^{-xy})dx + (2y^3 + kxe^{-xy})dy = 0, \text{ כאשר } k \text{ קבוע.}$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k , על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

גורם אינטגרציה

שאלות

(1) הראה שהמשוואה $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$ אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

(2) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$ אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

(3) הראה שהמשוואה $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$ אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x .

פתור את המשוואות בשאלות 4-9:

(4) $(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0$

(5) $(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0$

(6) $(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0$

(7) $(y^2 - y)dx + xdy = 0$

(8) $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

(9) $y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$

(10) נתונה מד"ר לא מדויקת $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

א. הוכח: אם $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכח: אם $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

(11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$.

מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד. כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

(12) נתונה המשוואה $(5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0$.

מצא את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x + y)$.

(13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

מצא תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

(14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(x^2 y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0$.

מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$. כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

(15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

א. מצא תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזר בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$.

(16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

מצא תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $x + y$ בלבד.

תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

שאלת הוכחה. (10)

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{ב.} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

משוואות ברנולי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

הצבות שונות ומשוונות

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y' = \cos(y - x) \quad (1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right); \quad y(1) = 0 \quad (2)$$

$$y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4}, \quad y(0) = 1 \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{\sin z} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right) \quad (2)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

(1) נתונה הבעיה $y(2) = -1$, $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$.

- א. הוכח ש- $y_1(x) = -x + 1$, $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.
 קבע באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.
 ב. הסבר מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

(2) נתונה הבעיה $y(0) = 0$, $y' = \sqrt[3]{y} + 4$.

- א. הוכח שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.
 ב. הוכח שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.
 ג. הוכח שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצא אותו.

(3) פתור את הבעיה $y(4) = 0$, $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$.

(4) נתונה הבעיה $y(0) = 4$, $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$.

- א. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.
 ב. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

(5) נתונה המד"ר $xdx = (2x + y^3)dy$.

- א. הראו שעבור $x = x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון, ופתרו אותה ככזאת.
 ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית, מהן נקודות ההתחלה (x_0, y_0) , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד, העובר דרך (x_0, y_0) .
 צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
 מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0, y_0) ?

$$(6) \quad \begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו 3 קרובי פיקארד לפתרון הבעיה.
 ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).
 ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \rightarrow \infty$.

$$(7) \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases} \quad \text{כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה? } (x > 0)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית התחלה:}$$

- א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.
 ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.
 ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(9) \quad \begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית התחלה:}$$

- א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.
 ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.
 ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(10) \quad \begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(11) \quad \begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(12) \quad \begin{cases} y' = xy e^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

תשובות סופיות

- (1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר. ג. שאלת הוכחה.
- (2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
- (3) $y(x) = 0$
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.
ב. כל נקודת התחלה (x_0, y_0) , שעבורה $y_0 \neq 0$.
הקטע הארוך ביותר: $(0, \infty)$ או $(-\infty, 0)$.
- (6) א. $y_0(x) = 1, y_1(x) = 1 + x^2, y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$
ב. $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$. ג. הוכחה.
- (7) אחד.
- (8) א. $[-0.08, 0.08]$ ב. $[-0.1, 0.1]$ ג. הוכחה.
- (9) א. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5, 0.5]$ ג. הוכחה.
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

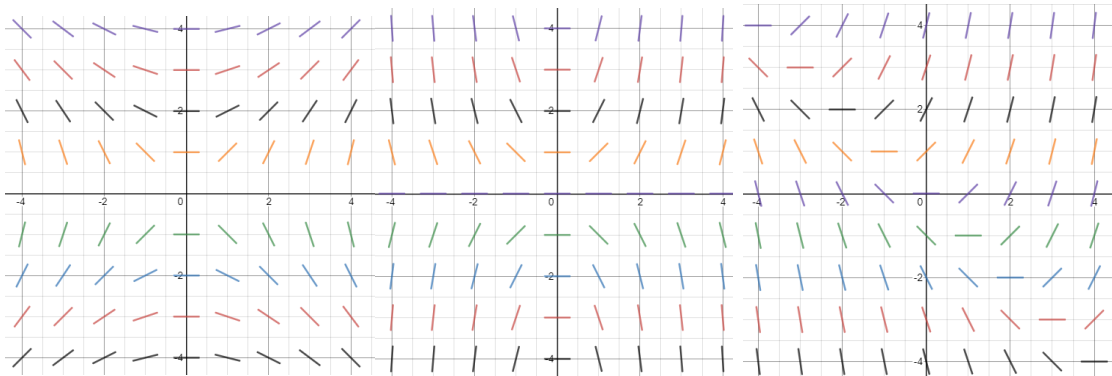
(1) שרטט שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y' = 2y - x$.

(2) התאם כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א. $y' = \frac{x}{y}$

ב. $y' = xy$

ג. $y' = x + y$



איור 3

איור 2

איור 1

(3) נתונה המד"ר: $y' = y - x$, $y(0) = 2$.

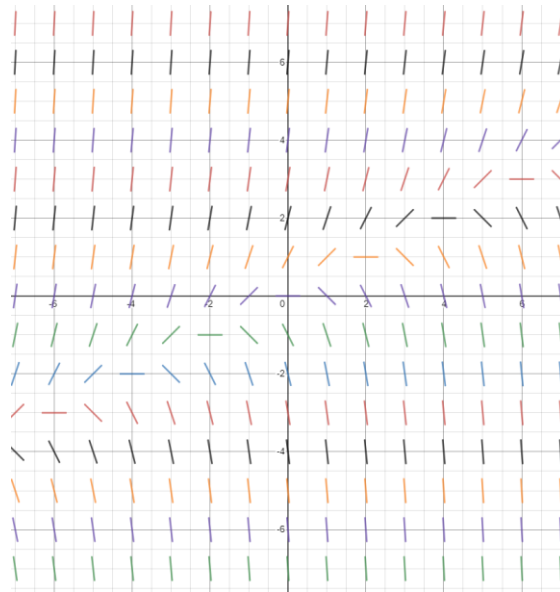
מצא בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.1$.

(4) נתונה המד"ר: $y' = x + y$, $y(1) = 2$.

מצא בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.2$.

תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

$$y(1) = 4.593 \quad (3)$$

$$y(2) = 6.95328 \quad (4)$$

3 חדוא

פרק 4 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה 41
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים 43
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל" 45
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם" 47
5. וריאציית פרמטרים 49
6. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר (ללא ספר)
7. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל 50
8. הוורונסקיאן ושימושיו 51
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני 53

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k ; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[\frac{c^2 (x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k) ; y = c \quad (8)$$

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-11:

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 1, \quad 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3; \quad y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2} y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

(12) נתונה המד"ר: $yy'' + (y')^2 = 0$.

א. הראה כי $y_1 = 4$ ו- $y_2 = \sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראה כי הפתרון $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.

האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} \quad (3)$$

$$z = e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (5)$$

$$x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}} \quad (6)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (7)$$

$$y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x] \quad (8)$$

$$y = e^2 \sin 3x \quad (9)$$

$$y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[c_1 \cos \left(\frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left(\frac{2}{5} x \right) \right] \quad (10)$$

$$y = 4e^{-\frac{|x|}{a}} \quad (11)$$

(12) שאלת הוכחה.

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + t e^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3x e^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[\frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

משוואה לינארית, כללית – שיטת ד'אלמבר – שיטת הפתרון השני – שיטת אבל

שאלות

(1) פתור $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$,

כאשר ידוע $y_1(x) = e^{2x}$.

(2) פתור $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

(3) הסבר את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגם על המד"ר:

$$(0 < x < 1), \quad (1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}$$

כאשר ידוע ש- $y_1(x) = e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

(1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

(2) $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

(3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

- (1) האם ייתכן כי $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = \sin x$ הם שני פתרונות של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ עם מקדמים רציפים בקטע $[0, \pi]$?
- (2) הראו כי הפונקציות $y_1(x) = \sin x^2$, $y_2(x) = \cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ בקטע $(-4, \infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x = 0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?
- (3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ הן פתרונות של המשוואה $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$ בקטע $(-\frac{1}{2}, \infty)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?
- (4) נתונות שתי פונקציות $y_1 = x^3$, $y_2 = |x^3|$ בקטע $[-4, 4]$.
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy'' - 2y' = 0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?
- (5) ענה על הסעיפים הבאים:
א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I .
הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$ הם פתרונות שלה.
ב. רשום משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x > 0$, שהפונקציות $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^4$ הן פתרונות שלה.

- 6 נתון כי $y_1(x), y_2(x)$ הם פתרונות של המד"ר $y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$, בקטע I , כאשר p, q רציפות בקטע I .
 הראו, כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c) = y_2(c) = 0$, אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

- (1) לא.
 (2) $W = -2x$
 (3) כן.
 (4) א. $W = 0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.
 (5) א. שאלת הוכחה. ב. $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$
 (6) שאלת הוכחה.

משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

שאלות

(1) נתונה המשוואה $y'' - 4y = 12x$.

א. פתור את המשוואה.

ב. מצא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$

ג. נסה למצוא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$.

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תן דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0) = 1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

(2) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

הראה כי $y_1(x) = 0$ ו- $y_2(x) = x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

(3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x = 0$, כך שהפונקציות $y = 4x$ ו- $y = \sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

(1) א. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 3x$ ב. $y = 4e^{2x} - 3e^{-2x} - 3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו ל: www.GooL.co.il.

(2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3 חדוא

פרק 5 - משוואות ליניאריות מסדר n

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה מסדר שלישי 54
2. משוואת אוילר מסדר שלישי (ללא ספר) 54
3. משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים 55
4. שיטת השוואת מקדמים 58
5. שיטת וריאציית הפרמטרים 60
6. הוורונסקיאן ושימושיו 61

משוואה חסרה מסדר שלישי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y' y''' - (y'')^2 - 3y''(y')^2 - 4(y')^4 = -16y(y')^3 \quad (1)$$

עם תנאי ההתחלה: $y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = -12$.

$$\begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y'' y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y'' y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = -1, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 3y''' y - y' y'' = 0 \\ y(1) = 1, y'(1) = 3, y''(1) = 6 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} (y' y''' - 2(y'')^2) y^2 = -(y')^4 \\ y > 0 \\ y(1) = y'(1) = y''(1) = 1 \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \ln |-3 + 4y| = x + \frac{1}{4} \ln 3 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{1-x} - 1 \quad (2)$$

$$y = \tan x - 1 \quad (3)$$

$$y = x^3 \quad (4)$$

$$y = e^{x-1} \quad (5)$$

משוואות לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-15:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (4)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (7)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (8)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (10)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (11)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (12)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (13)$$

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} y'''' - 3y''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = -19 \\ y'''(0) = -47 \end{cases} \quad (15)$$

16 נתונה משוואה דיפרניציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6,

אשר אחד הפתרונות שלה הוא $x^2 e^x \cos 2x$.

א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה.

ב. מצא את המשוואה.

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (5)$$

$$y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \quad (6)$$

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x} \quad (9)$$

$$y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x] \quad (10)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \quad (11)$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x \quad (12)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \quad (13)$$

$$y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (14)$$

$$y = e^x - 2e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (15)$$

$$y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x] \quad (16)$$

$$y'''' - 6y'''' + 27y'''' - 68y'''' + 135y'''' - 150y'''' + 125y'''' = 0 \quad \text{ג.}$$

שיטת השוואת מקדמים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2 \sin x - 4 \cos x \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (3)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (4)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 2 \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4 \sin x - 2 \cos x \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (5)$$

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x} \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \quad (7)$$

שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x| \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x + 1 - \ln(e^x + 1)) + e^x (-\ln(e^x + 1)) + e^{2x} \left(-\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right) \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln |x| \quad (3)$$

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

- (1) האם קיימת מד"ר מהצורה $y'''+p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0$, בעלת מקדמים רציפים בקטע $[-1,1]$, כך שהפונקציות $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2$, $y_3(x)=x^3$ הן פתרונות שלה?
- (2) נתונות הפונקציות: $y_1(x)=4-x$, $y_2(x)=4+x$, $y_3(x)=20+x$.
 א. חשב את הוורונסקיאן של הפונקציות.
 ב. קבע האם הפונקציות תלויות בקטע $(-\infty, \infty)$.
 ג. ענה שוב על סעיף ב', בידיעה ששלוש הפונקציות הן פתרון של המד"ר $y''=0$.
- (3) פתור את הסעיפים הבאים:
 א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמים בקטע I , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I . הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע I , כך ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ הם פתרונות שלה.
 ב. רשום משוואה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2$, $y_3(x)=x^3$ הן פתרונות שלה.

תשובות סופיות

- (1) לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודה אחת $x=0$.
- (2) א. $W=0$ ב. הפונקציות תלויות. ג. הפונקציות תלויות.
- (3) א. שאלת הוכחה. ב. $x \neq 0$, $y'''+\frac{3}{x}y''+\frac{6}{x^2}y'-\frac{6}{x^3}y=0$.

3 חדוא

פרק 6 - מערכת משוואות לינאריות

תוכן העניינים

1. חזרה מאלגברה לינארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים 62
2. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הלכסון 64
3. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת וריאציית הפרמטרים 69
4. מערכת משוואות כללית - שיטת ההצבה 71

חזרה מאלגברה לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

שאלות

בשאלות הבאות מצא את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$x = 0, x = 1, x = 2, v_{x=0} = (-1, 0, 1), v_{x=1} = (0, 1, 0), v_{x=2} = (1, 0, 1) \quad (1)$$

$$x = 6, x = 2, x = -4, v_{x=6} = (0, 0, 1), v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=-4} = (-1, 1, 0) \quad (2)$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 3, v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0) \quad (3)$$

$$x = 1, x = 3, x = -2, v_{x=1} = (-1, 4, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=-2} = (-1, 1, 1) \quad (4)$$

$$x = 1, x = 4, x = -1, v_{x=1} = (1, -2, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=-1} = (-1, 0, 1) \quad (5)$$

$$x = -1, x = 3, v_{x=-1} = (-1, 2), v_{x=3} = (1, 2) \quad (6)$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = (1 + i, 2), v_{x=1-2i} = (1 - i, 2) \quad (7)$$

$$x = 1, x = 1 + \sqrt{3}i, x = 1 - \sqrt{3}i, v_{x=1} = (1, 1, 1),$$

$$v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, -2), v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -2) \quad (8)$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון

שאלות

פתור את מערכות המשוואות בשאלות 1-2:

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (1)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ כד ש-}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

הוכח כי $z(t) = y(t)$.

פתור את מערכות המשוואות בשאלות 4-5:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases} \quad (4)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (5)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ כד ש-}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\text{חשב: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

$$(7) \quad \begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2' = 0 \\ 3y_2' - 4y_1' - 5y_2 = 0 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות:}$$

$$(8) \quad \text{פתור: } \bar{x}'(t) = A \cdot \bar{x}(t), \text{ כאשר } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: בשאלות 7 ו-8 יש להגיע לפתרון המרוכב מהפתרון ממשי.

פתור את מערכות המשוואות המופיעות בשאלות 9-14:
(שים לב שכל המערכות אינן ניתנות ללכסון)

$$(9) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(10) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(11) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(12) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(13) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(14) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(15) \text{ דני פתר את המערכת } x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} x(t)$$

$$\text{וקיבל } x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{0t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{נתון תנאי התחלה: } x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

עבור אילו ערכים של הקבועים הממשיים, a, b, c , הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה הנתון יהיה חסום לכל t ממשי?

תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$z(t) = y(t) \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$0 \quad (6)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad (7)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[\cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \quad (8)$$

$$+ c_3 e^t \left[\sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ 2t-1 \\ t \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 0.5t^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} t^2 - t + 2 \\ \frac{t^2}{2} + 1 \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t-1 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + c_4 e^{1t} \begin{bmatrix} 1 \\ t-2 \\ \frac{t^2}{2} - t + 1 \\ \frac{t^3}{6} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ -4t \\ -2t \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$a = -c, \quad b = 2a \quad (15)$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות

פתור את מערכת המשוואות בשאלות 1-4:

$$\begin{aligned} (1) \quad x_1' &= x_1 + x_2 + 2e^{-t} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 + 4e^{-t} \end{aligned} \quad (2) \quad \begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + e^{at} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \end{aligned} \quad (a \text{ קבוע})$$

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 2z + e^t \\ y' &= x + 2y + z \\ z' &= 2x + y + z + e^t \end{aligned} \quad (4) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(5) המר את המשוואה $y'' + y'' - 2y = t^2$, במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

$$(6) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 8t+3 \\ -3t+3 \\ t+3 \end{pmatrix} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות:}$$

(7) נתונה המד"ר $e^{-x} y''''(x) - y''(x) + e^x x^2 y'(x) = 5e^{-x}$. רשום את המד"ר כמערכת משוואות לינאריות מסדר ראשון, בהצגה מטריציאלי.

(8) נתונה המד"ר $x^2 y''(x) + 10xy'(x) + (1 + 4x^2)y(x) = \ln x$. רשום את המד"ר כמערכת משוואות לינאריות מסדר ראשון, בהצגה מטריציאלי.

הערה: בשאלות 7 ו-8 המערכת המתקבלת היא לא עם מקדמים קבועים. יחד עם זאת, אתם מתבקשים רק להציג את המערכת ולא לפתור אותה.

תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} : \text{עבור } a = -1 \text{ נקבל:} \quad (2)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} e^{at} \\ -2e^{at} \end{pmatrix} : \text{עבור } a \neq 1 \text{ נקבל:}$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3t+2) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - (3t+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3t+1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}te^t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{9}e^t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} \\ (2t-1)e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t-1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -e^{2t}t^2 & e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{1}{t^2}+4\right) & -\frac{10}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\ln t}{t^2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

מערכת משוואות כללית – שיטת ההצבה

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} y'' + 2z' = e^{3x} \\ y' - z'' + 3z = x^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$z(0) = y(0) = y'(0) = 0 \text{ , בהינתן } \begin{cases} y'' + z' = e^{-2x} \\ y + z = \sin x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 6x - 3y + e^{-t} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + \sin 2t \\ x_2' = x_1 + x_2 + \cos 2t \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} z'' - 3z' + 2z + y' - y = 0 \\ z' - 2z + y' + y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{24} e^{3x} + x^2, \quad y = \frac{1}{12} e^{3x} - \frac{2}{3} x^3 - 2c_2 e^x + 2c_3 e^{-x} + kx + l \quad (1)$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^x - \frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x, \quad y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{6} e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \quad (2)$$

$$x = c_1 + c_2 e^t + 4te^t - e^{-t}, \quad y = 2c_1 + \frac{3}{2} c_2 e^t + 6te^t - \frac{3}{2} e^t - \frac{5}{2} e^{-t} \quad (3)$$

$$x_1 = c_1 + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad x_2 = -c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{4} \sin 2t \quad (4)$$

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}, \quad y = 2c_1 + \frac{1}{2} c_2 e^x \quad (5)$$

3 חדוא

פרק 7 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

72	1. בעיות גיאומטריות
74	2. עקומות אורתוגונליות
76	3. בעיות גדילה ודעיכה
78	4. בעיות שונות

בעיות גיאומטריות

שאלות

(1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x, y) על העקום,

$$\text{שווה ל-} -\frac{x}{y}.$$

מצא את משוואת העקום.

(2) מצא את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

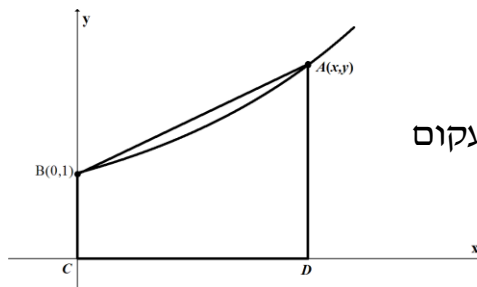
(3) מצא את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

(4) נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2, 4)$.

נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x, y)$ שעליו, ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים, שווה לשיעור ה- y של הנקודה A .

(5) מצא את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3, 4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

(6) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x, y) שבין נקודה זו וציר ה- x , נחצה על ידי ציר ה- y . מצא את משוואת העקום זה.



(7) נתון עקום העובר בנקודה $B(0,1)$.

בכל נקודה A שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$, הנראה בציור. מהי משוואת העקום?

(8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1, 3)$,

ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x, y) שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$.

מצא את משוואת העקום.

(9) מצא את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(1,2)$,
 ושכל נקודה (x, y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$.

(10) מצא את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(0,1)$, כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר ה- y , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x, y)$ והקטע OM , מהראשית O ל- M , הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע MN (כאשר N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה- y). צייר ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

תשובות סופיות

$$x^2 + y^2 = k \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = k \quad (2)$$

$$y^2 = ax \quad (3)$$

$$y = 2xe^{x-2} \quad (4)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} \quad (5)$$

$$2x^2 + y^2 = k \quad (6)$$

$$y = 2e^{x/4} - 1 \quad (7)$$

$$2xy + x^2 = 7 \quad (8)$$

$$x^3 - 3y^2x = 11 \quad (9)$$

$$2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad (10)$$

עקומות אורתוגונליות

שאלות

מצא את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות 1-4:

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

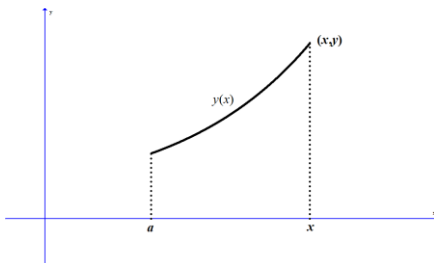
$$xy = c \quad (2)$$

$$x^2 + 2y^2 = c \quad (3)$$

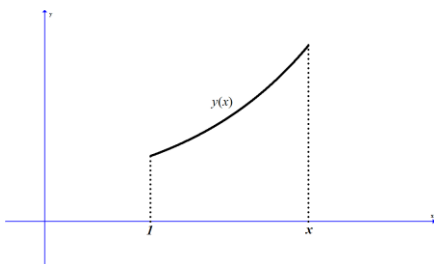
ב. מצא את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2 + 2y^2 = 9$,
 בנקודה $(1, 2)$ שעליה.

$$x^2 + y^2 = cx \quad (4)$$

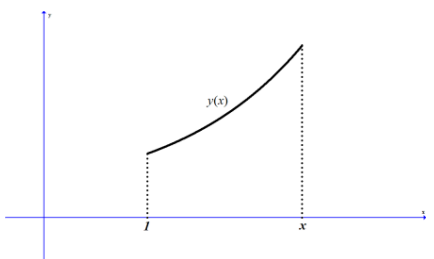
(5) מצא את משפחת העקומות, היוצרות זווית של 45°
 עם משפחת המעגלים $x^2 + y^2 = c$.



(6) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$,
 ציר ה- x , $x = a$, $x = x$ משתנה (ראו ציור).
 ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת
 בין הנקודות $(a, y(a))$ ו- $(x, y(x))$.
 מצא את משוואת העקום.



(7) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$,
 ציר ה- x , $x = 1$, $x = x$ משתנה (ראו ציור).
 ידוע כי $y(1) = 2$.
 האם קיים עקום כזה,
 כך ששטחו של S שווה ל- $2y(x)$?



(8) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$,
 ציר ה- x , $x = 1$, $x = x$ משתנה (ראו ציור).
 ידוע כי $y(1) = 2$.
 האם קיים עקום כזה,
 כך שהשטח של S שווה ל- $2 - y(x)$?

תשובות סופיות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

$$y = ax^2, \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x-c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c \quad (5)$$

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k}x + C\right) \quad (6)$$

(7) לא.

(8) כן.

בעיות גדילה ודעיכה

שאלות

- (1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה. ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
- א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
- ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
- ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?
- *הנח שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- (2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים, ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.
- א. מצא את אחוז הגידול השנתי.
- ב. מצא כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת), היו בעיר 550 אלף תושבים.
- (3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%. כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.
- א. כמה כסף הפקיד האדם?
- ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש"ח?
- (4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה הראשונית היו 1,000 חיות. בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר. מצא אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה, היו בשמורה 2,000 חיות בר.
- (5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים. ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד, פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
- א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים, מכמות התחלתית של 100 גרם?
- ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם, מכמות התחלתית של 100 גרם?

- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע. בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.
- א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
- ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------------|------------------|----------------|
| 1) א. 7.28 מיליארד. | ב. 3.54 מיליארד. | ג. בשנת 2,106. |
| 2) א. 2% | ב. 15.92 שנים. | |
| 3) א. 4093.65 ש. | ב. 13.41 שנים. | |
| 4) 40.77 חודשים. | | |
| 5) א. 88.69 גרם. | ב. 19,188 שנים. | |
| 6) א. 3.04 שבועות. | ב. 14.6 שבועות. | |

בעיות שונות

שאלות

- (1) בזמן $t = 0$, יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.
- א. חשב את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.
 ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- (2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע $t = 0$, כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחתור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה. משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$, כאשר v נמדדת במטר/שנייה.
- א. מצא את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.
 ב. מצא כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.
 ג. מצא את המהירות הסופית.
- (3) חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
- א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?
 ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- (4) נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם. נסמן ב- $h(t)$ את גובה פני המים, וב- k את קבוע הפרופורציה.
- א. רשום מד"ר עבור גובה פני המים, $h(t)$. מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?
 ב. ידוע כי $k = -2\pi$. פתור את המד"ר. תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

- (5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.
 לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.
 א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t .
 ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $\frac{1}{64}$ מנפחו ההתחלתי?
- (6) מבלון מלא אוויר, שרדיוסו R , מתחיל לצאת אוויר.
 קצב יציאת האוויר הוא $3V(t)$, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t .
 הוכח, כי כעבור $\ln 2$ שניות נפח הבלון ייקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.
 הערה: בשאלות 5 ו-6 נדרש ידע בהפרדת משתנים.

תשובות סופיות

- (1) א. 26.75 ק"ג. ב. 0.942 דקות.
- (2) א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.
- (3) א. $43\frac{1}{3}^{\circ}$. ב. 1.13 שעות.
- (4) א. $h(0) = 4$; $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$. ב. $h = (2-t)^2$; $t = \sqrt{2} + 2$.
- (5) א. $R(t) = \frac{12}{2t+3}$. ב. 4.5 שעות.
- (6) שאלת הוכחה.

3 חדוא

פרק 8 - פרקי חזרה - אינטגרלים

תוכן העניינים

80	1. אינטגרלים מיידיים
83	2. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים
85	3. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים
89	4. אינטגרלים בשיטת ההצבה
92	5. אינטגרלים של פונקציות רציונליות
96	6. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

אינטגרלים מיידיים

בסוף ספר הפרק יש נספח עם זהויות בטריגו.

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

$$\int 4dx \quad (1) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10) \qquad \int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$)

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$)

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28) \qquad \int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

(29) חשב את האינטגרל: $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$)

(30) חשב את האינטגרל: $\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$)

חשב את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int 2 \sin 4x + \cos x dx \quad (36)$$

$$\int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad (35)$$

$$\int \cos 4x dx \quad (34)$$

תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll}
 -\frac{1}{x} + c & \text{(3)} & \frac{x^5}{5} + c & \text{(2)} & 4x + c & \text{(1)} \\
 \frac{4x^{11}}{11} + c & \text{(6)} & -\frac{2}{\sqrt{x}} + c & \text{(5)} & \frac{x^{1.5}}{1.5} + c & \text{(4)} \\
 \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c & \text{(9)} & -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c & \text{(8)} & \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c & \text{(7)} \\
 \frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c & \text{(12)} & -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c & \text{(11)} & \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c & \text{(10)} \\
 -\frac{1}{(x-2)^4} + c & \text{(15)} & \frac{(x-1)^{21}}{21} + c & \text{(14)} & \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c & \text{(13)} \\
 & & 10\sqrt{2x+4} + c & \text{(17)} & \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c & \text{(16)} \\
 -\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c & \text{(19)} & & & -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c & \text{(18)} \\
 \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c & \text{(22)} & \frac{\ln|x|}{4} + c & \text{(21)} & \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c & \text{(20)} \\
 x + \ln|x+2| + c & \text{(25)} & \frac{\ln|4x-1|}{4} + c & \text{(24)} & x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c & \text{(23)} \\
 \frac{e^{2x+2}}{2} + c & \text{(28)} & \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c & \text{(27)} & 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c & \text{(26)} \\
 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c & \text{(30)} & & & \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c & \text{(29)} \\
 -\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c & \text{(33)} & \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c & \text{(32)} & \frac{1}{2}\arctan(2x) + c & \text{(31)} \\
 -\frac{1}{2}\cos(4x) + \sin x + c & \text{(36)} & -2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + c & \text{(35)} & \frac{1}{4}\sin(4x) + c & \text{(34)}
 \end{array}$$

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{3} \ln x^3+1 +c$ (3)	$\ln \sin x +c$ (2)	$\ln x^2+1 +c$ (1)
$e^2 \ln e^x+1 +c$ (6)	$\ln \ln x +c$ (5)	$-\ln \cos x +c$ (4)
$-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$ (9)	$e^{\tan x}+c$ (8)	$e^{x^2}+c$ (7)
$\sin(\ln x)+c$ (12)	$\sin(\sin x)+c$ (11)	$\sin(2x^2+1)+c$ (10)
$-2\cos(\sqrt{x})+c$ (15)	$-\frac{1}{2}\cos(x^2+1)+c$ (14)	$\frac{1}{40}\sin(10x^4+1)+c$ (13)
$\frac{1}{2}(\tan x)^2+c$ (18)	$\frac{1}{2}(\arctan x)^2+c$ (17)	$\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$ (16)
$\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c$ (21)	$\sqrt{2\sin x}+c$ (20)	$2\sqrt{x^2+1}+c$ (19)
$\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}+c$ (24)	$\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$ (23)	$\frac{2}{9}(x^3+4)^{\frac{3}{2}}+c$ (22)

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

(24) מצא נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ כאשר n טבעי.

(25) חשב את $\int x^4 e^x dx$.

(26) מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ כאשר n טבעי.

(27) חשב את $\int \cos^4 x dx$.

(28) מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ כאשר n טבעי.

(29) חשב את $\int (\sin x)^4 dx$.

(30) מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ כאשר n טבעי.

(31) חשב את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

תשובות סופיות

- (1) $xe^x - e^x + c$
- (2) $\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c$
- (3) $x \cos x + \sin x + c$
- (4) $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$
- (5) $-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c$
- (6) $-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c$
- (7) $x \ln x - x + c$
- (8) $-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c$
- (9) $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c$
- (10) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$
- (11) $\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c$
- (12) $x \tan x + \ln |\cos x| + c$
- (13) $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c$
- (14) $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c$
- (15) $\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c$
- (16) $x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c$
- (17) $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c$
- (18) $-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c$
- (19) $\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c$
- (20) $\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left(-(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int \cos(x^2+1) \cdot 2x^3 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln|\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln|1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-19:

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{x^2-4} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

חשב את האינטגרלים בשאלות 20-24 :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (23)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (24)$$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt[4]{x-1}} dx \quad (27)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (28)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (29)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (30)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (20)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (21)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (22)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (23)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (24)$$

$$-1.5 \ln|1 - \sqrt[3]{x^2}| + c \quad (25)$$

$$6 \left(\frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln|1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (26)$$

$$4 \left(\frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln|1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (27)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln|\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln\left(\left(\sqrt[3]{x} - 0.5\right)^2 + 0.75\right) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}}\right) + c \quad (28)$$

$$-\ln|1 + e^x| + x + c \quad (29)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1}\right| + c \quad (30)$$

אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

שאלות

פתרון על ידי זהויות

זכור כי :

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$
$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-24 :

$$\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad (2)$$

$$\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx \quad (3)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8)$$

$$\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx \quad (9)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$$

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

פתרון על ידי הצבות פשוטות

$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left. \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right = \int f(t) dt$	זכור כי :
$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right = \int f(t) (-dt)$	

חשב את האינטגרלים בשאלות 25-36 :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (26)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (25)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (28)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (27)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (30)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (29)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (32)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (31)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (34)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (36)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (35)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \text{זכור כי:}$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 37-39:

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (39) \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (38) \quad \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad (37)$$

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$$

$$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \quad \text{זכור כי:}$$

$$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$$

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (42) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (41) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (40)$$

תשובות סופיות

- $$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$
- $$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$
- $$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$
- $$\tan x - x + c \quad (8)$$
- $$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$
- $$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$
- $$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$
- $$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$
- $$\frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$
- $$2 \sin x + c \quad (20)$$
- $$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$
- $$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$
- $$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$
- $$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$
- $$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$
- $$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$
- $$\sin x + c \quad (11)$$
- $$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$
- $$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$
- $$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$
- $$-\cot x - x + c \quad (19)$$
- $$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$
- $$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$
- $$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$
- $$\frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c \quad (26)$$
- $$\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c \quad (25)$$
- $$-\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c \quad (28)$$
- $$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (27)$$
- $$-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c \quad (30)$$
- $$\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad (29)$$
- $$\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c \quad (32)$$
- $$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (31)$$
- $$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c \quad (34)$$
- $$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| + c \quad (33)$$
- $$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (36)$$
- $$-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c \quad (35)$$

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1} + c \quad (37)$$

$$\ln\left|1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c \quad (38)$$

$$-x + 2\left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}} \arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}}\right)\right) + c \quad (39)$$

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + c \quad (40)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (41)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (42)$$

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$