חשבון אינפיניטסימלי

תוכן העניינים

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 1 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

טור טלסקופי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

טור הרמוני מוכלל

12) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

תשובות סופיות

1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$. **2)** מתכנס ל- $\frac{1}{3}$. **3)** מתבדר.

4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$. **5)** מתכנס ל- $\frac{11}{12}$. **6)** מתכנס ל-8.

7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$. **8)** מתכנס ל- $\frac{1}{12}$. **9)** מתבדר.

10) $S=\frac{1}{\ln 2}$ **11)** $\frac{1}{12}$

12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.

13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.

14) $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$

מבחני התכנסות לטורים

שאלות

מבחן ההתבדרות

1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

מבחן האינטגרל

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות **2-5** (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \, (p>1)$

5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \, (p\le 1)$

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$.

ב. מצא את הגבול $\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-n^3}$.

מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

מבחן המנה ומבחן השורש

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot 3^n}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

2) מתבדר.
3) מתבדר.
4) מתכנס.

5) מתבדר.
6) א. מתכנס. ב. 0

7) מתכנס.
8) מתבדר.
9) מתבדר.

10) מתכנס.
11) מתבדר.
12) מתכנס.

13) מתבדר.
14) מתכנס.
15) מתכנס.

16) מתכנס.
17) מתכנס.
18) מתכנס.

19) מתכנס.
20) מתכנס.
21) מתכנס.

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

מבחן לייבניץ

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$

2) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

בשאלות **4-10** קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

7) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתכנס.
3) מתכנס.

4) מתבדר.
5) מתכנס בהחלט.
6) מתכנס בתנאי.

7) מתכנס בהחלט.
8) מתכנס בתנאי.
9) מתכנס בתנאי.

10) מתכנס בתנאי.

תרגילי תיאוריה

שאלות

1) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

2) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

3) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+(-1)^n\right)$ מתבדר.

4) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

5) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

6) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף. הוכח כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

7) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס. הוכח כי $\sum \frac{a_n+4^n}{a_n+10^n}$ מתכנס.

8) הוכח או הפרך:

אם הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מקיימת $0\leq a_n\leq \frac{1}{n}$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

9) נניח כי $a_n\geq 0$.

הוכח כי: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

10) הוכח או הפרך:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

11) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

12) הוכח או הפרך:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

13) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכח או הפרך:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ לכל n, אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ לכל n, אז הטור מתבדר.

14) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum\sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

15) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכח כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.
2. הוכח כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 2 - סדרות

תוכן העניינים

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשב את הגבולות הבאים :

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{-n}\right)^{\ln n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+2}{n^2+1000n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+2n^2+6}{3n^3+10n}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+2n^2+6}{3n^5+10n}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-5n+6}{2n+10}-\dfrac{n}{2}\right)$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^4+2n^2+6+27n^6}}{\sqrt{3n^3+10n+4n^4}}$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1}-\sqrt{5n-1}}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16^n+4^{n+1}}{2^{4n+2}+2^{n+3}}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\cdot 9^n+3^{n+1}}{81^{0.5n}+3^{n+3}}$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{4n^2+2}{n^2+1000n}}$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{3n^3-5n-1}{n^3-2n^2+1}\right)$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{n^4+2n^2+6}{3n^4+10n}}$

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[5]{\dfrac{an+1}{bn+2}}$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+kn}-n\right)$

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

18) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2)$

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn}\right)$

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2+4n+1}$

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+n^2+1}$

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

* רמז לשאלה **22** : $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

<u>הערה חשובה מאוד !</u>

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי!
בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

1) 0
2) 4
3) ∞
4) 0
5) -5
6) 1
7) 1.5
8) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
9) 0.25
10) 4
11) 2
12) $\ln 3$
13) $e^{\frac{1}{3}}$
14) $\left(\lim a_n=\sqrt[5]{a/b}\right)\Leftarrow(b\neq 0)$, $(\lim a_n=\infty)\Leftarrow(a>0,\ b=0)$, $(\lim a_n=-\infty)\Leftarrow(a<0,\ b=0)$
15) 2.5
16) $\frac{k}{2}$
17) 0.5
18) 0.5
19) $\frac{a-b}{2}$
20) 0.5
21) $\frac{1}{3}$
22) 1

חישוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^{n}$

6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2}$

7) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n}$

תשובות סופיות

1) $e^{0.5}$

2) 1

3) e^{2}

4) e^{-1}

5) e^{3}

6) e^{-12}

7) e^{30}

חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשב את הגבולות בשאלות **1-5**:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{4n+\frac{1}{n}}}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

רמז לשאלה **4**: הוכח כי $a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

6) הוכח שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0:

א. $a_n=\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{5}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+1}}\right)$.

ב. $a_n=n^\alpha-(n+1)^\alpha$, $\alpha\in(0,1)$.

7) יהי x מספר ממשי וחיובי.

נתבונן בסדרה: $a_n=\frac{6n+\sqrt{\lfloor x^2n^2\rfloor}}{3n+\sqrt{2}}$.

הוכח כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>2$.

8) חשב את הגבול: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^{3n^2-4}+3^{2n^2+1}+4^{1.5n^2+5}+10^n}$.

תשובות סופיות

1) 4
2) 0
3) 1
4) 0
5) 1
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) 9

חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

שאלות

חשב את הגבולות הבאים :

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{4n}$

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n}$

תשובות סופיות

1) 0

2) 0

3) 4

4) $\frac{1}{4e}$

5) ∞

חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות **1-3** נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).
הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

1) $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\,,\ a_1=\sqrt{2}$

2) $a_{n+1}=\sqrt{2a_n-1}\,,\ a_1=2$

3) $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),\ a_1=2$

4) יהיו $a>0,\ \ x_1>0$.

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, לכל n.

הוכח שהסדרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$.

5) יהי $x_1=a\geq 0$.

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי: $x_{n+1}=\frac{1}{5}\left(x_n^2+6\right)$, לכל n.

א. מצא את כל הערכים של הקבוע a, עבורם הסדרה עולה/יורדת.

ב. קבע האם הסדרה x_n מתכנסת עבור $3<a<3.5$.

6) יהיו $0<b_1<a_1$.

נגדיר: $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\ ,\ a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, לכל n.

הוכח שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

7) נתונה הסדרה $a_1=1,\ a_2=1$, $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$.

א.1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי: $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

הנח שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים וחשב אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים.
בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכח שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצא ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכח שהגבול $\lim_{n\to\infty}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשב אותו.

ב.3. הוכח באינדוקציה שהביטוי הסגור שמצאת בסעיף ב.1. הוא אכן נכון.

תשובות סופיות

1) הגבול 2.

2) הגבול 1.

3) הגבול 1.

4) הגבול הוא $\sqrt{a}$.

5) א. אם $2\le a\le 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה.
ב. לא מתכנסת.

6) שאלת הוכחה.

7) ב.1. $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$

חישוב גבול לפי ההגדרה

שאלות

על סמך ההגדרה של גבול של סדרה, הוכח כי :

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+3}=\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+1}=1$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+1}{2n^2+n+3}=2$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}2n+4=\infty$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}n^3-n^2+5n+6=\infty$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\log(2n+5)=\infty$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{2n+1}=\infty$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}=-\infty$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=2$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 3 - פונקציות של שני משתנים

תוכן העניינים

מבוא לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצא את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטט סקיצה של הקבוצה D.

1) $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\frac{x+y}{x-y}$

4) $g(x,y)=\sqrt{x+4y}+\sqrt{x-4y}$

5) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+4y}}+\frac{1}{\sqrt{x-4y}}$

6) $h(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y+4}}$

7) $f(x,y)=e^{xy}\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

8) $z(x,y)=\frac{4}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

9) $z(x,y)=\ln\left(\frac{x-4y}{x+4y}\right)$

10) $f(x,y)=\ln\left[x\ln(y-4x)\right]$

11) $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$ (ענו על סעיף א בלבד)

תשובות סופיות

1) $D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{4}x^2\le y\le\sqrt{5-x^2}\right\}$

2) $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\,,\ x>0\right\}$

3) $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\,,\ y\ne x\right\}$

4) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x\le y\le\frac{1}{4}x\right\}$

5) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

6) $D=\left\{(x,y)\,|\ -4\le y\le x^2-4\,,\ x\ge 0\right\}$

7) $D=\left\{(x,y)\,|\ x^2+y^2=4\right\}$

8) $D=\left\{(x,y)\,|\ |x|+|y|<1\right\}$

9) $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x<y<-\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

10) $D=\left\{(x,y)\,|\,[x<0 \text{ and } 4x<y<4x+1] \text{ or } [x>0 \text{ and } y>4x+1]\right\}$

11) $D=\left\{(x,y,z)\,|\,x>-4, y>1, z>0\right\}$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **6-1**, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו, ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

1) $f(x,y)=\frac{y}{x}$

2) $f(x,y)=\ln x+\ln y$

3) $f(x,y)=x^2+y^2$

4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

5) $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

6) $f(x,y)=x\sqrt{y}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **10-7** שרטט מפת קווי גובה:

7) $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$

8) $f(x,y)=e^{x-y}$

9) $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

10) $f(x,y)=\min\{3x,y\}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **13-11**, שרטט את קו הגובה k:

11) $f(x,y)=(x-y)^2$ $(k=0,4)$

12) $f(x,y)=\min\{y-x^2,x+y\}$ $(k=0,2)$

13) $f(x,y)=\begin{cases} x^2+3x-y-3 & x^2\ge y \\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y \end{cases} \quad (k=1)$

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y & x\le 1 \\ 2x+y & x>1 \end{cases}$.

א. שרטט את קו הגובה $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x,y)=C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שווה ערך.

תשובות סופיות

1) $x\neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

2) $x>0, y>0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

3) כל המישור.

4) $x^2+y^2\le 1$, עיגול היחידה.

5) $y<x^2$

6) $y\ge 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר GooL.co.il

משטחים מפורסמים

שאלות

זהה ושרטט את המשטחים בשאלות **1-3**:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

2) $z=5x^2+1.25y^2$

3) $20x^2+45y^2=180+36z^2$

4) זהה ושרטט את המשטחים הבאים:

א. $z=4x^2+y^2+1$

ב. $z=3-x^2-y^2$

5) זהה כל אחד מהמשטחים הבאים:

א. $25x^2+100y^2+4z^2=100$

ב. $25x^2+4y^2-50x-16y-100z+41=0$

ג. $x^2+4y^2-4z^2+80z-404=0$

6) מצא את החיתוך בין המשטח $x^2+y^2+z^2=169$ לבין המשטח $z=12$.
הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. זהה את המשטח $2x^2+2y^2+2z^2-16x-4y+40z+206=0$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשטח הנ"ל עם הישר $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+14}{2}$.

8) מצא את החיתוך בין שני המשטחים $x^2+y^2+(z-10)^2=24$,
ו- $x^2+y^2+z^2=64$.
הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

9) ענה על הסעיפים הבאים:

א. זהה את המשטח $36z^2+4x^2-9y^2=36$ ושרטט אותו.

ב. רשום הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח מסעיף א'.

- **להלן נספח עם סיכום של כל המשטחים הנפוצים.**

תשובות סופיות

1) אליפסואיד.

2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.

3) היפרבולואיד חד יריעתי.

4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.

5) א. אליפסואיד.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.

ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.

6) החיתוך הוא מעגל $x^2+y^2=25$ שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.

7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.

נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12),\ B(\frac{59}{5},-\frac{2}{9},-\frac{112}{9})$.

8) החיתוך הוא המעגל $x^2+y^2=15$ שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.

9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y.

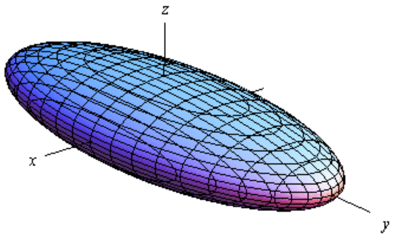
ב. $\ell_2:\ (x,y,z)=(3,2t,t)\quad \ell_1:(x,y,z)=(3t,2t,1)$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

<u>אליפסואיד</u>

<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

<u>תיאור</u>: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

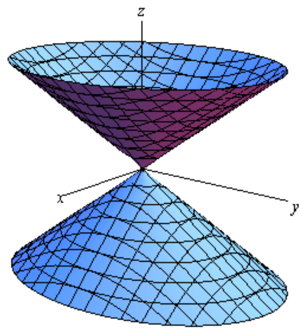


<u>חרוט אליפטי</u>

<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

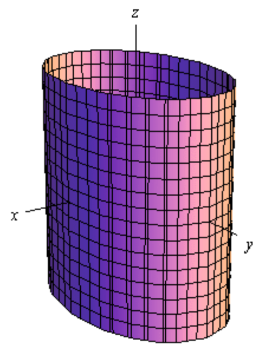


<u>גליל אליפטי</u>

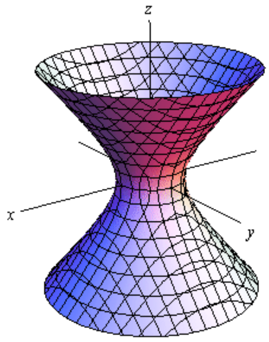
<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.



היפרבולואיד חד-יריעתי

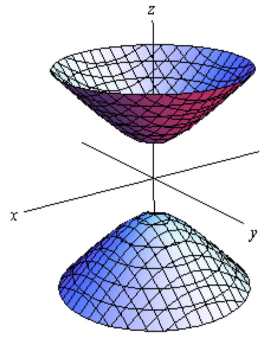


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו-yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים

היפרבולואיד דו-יריעתי

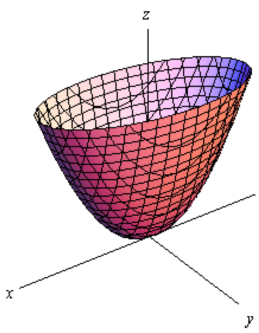


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו-yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים

פרבולואיד אליפטי



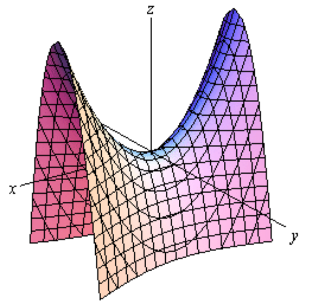
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו-yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$

פרבולואיד היפרבולי



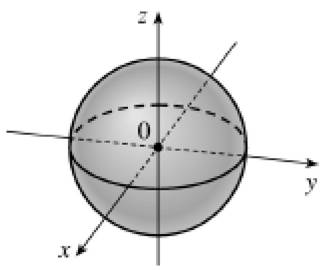
<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

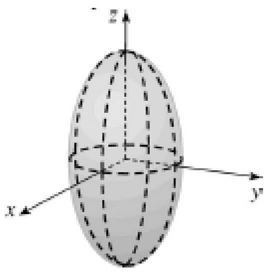
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$

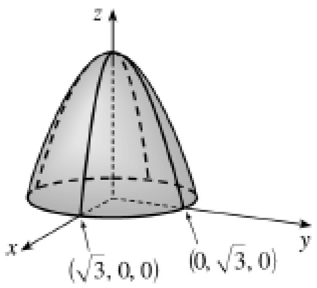
דוגמאות שונות



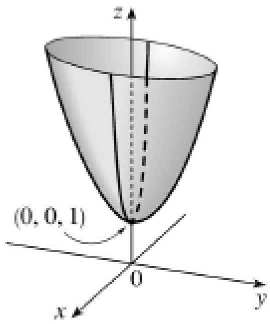
$x^2+y^2+z^2=1$



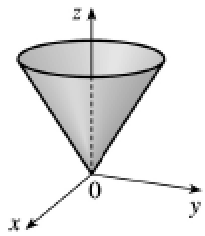
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



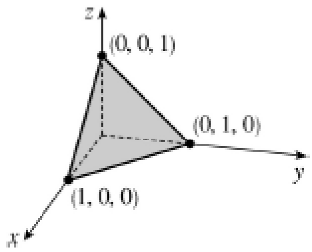
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

נוסחאות – גבולות

	$x\to-\infty$	$x\to 0$	$x\to\infty$
$y=\frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty}=0$	$\frac{1}{0^+}=\infty,\ \frac{1}{0^-}=-\infty$	$\frac{1}{\infty}=0$
$y=e^x$	$e^{-\infty}=0$	$e^0=1$	$e^{\infty}=\infty$
$y=\ln x$	$---$	$\ln(0^+)=-\infty$	$\ln(\infty)=\infty$
$y=a^x, a>1$ $y=a^x, 0<a<1$	$a^{-\infty}=0$ $a^{-\infty}=\infty$	$a^0=1$ $a^0=1$	$a^{\infty}=\infty$ $a^{\infty}=0$
$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$	e $---$	(from right) 1 e	e 1
$y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt[3]{x}$	$---$ $-\infty$	$\sqrt{0^+}=0$ $\sqrt[3]{0}=0$	$\sqrt{\infty}=\infty$ $\sqrt[3]{\infty}=\infty$

Defined Limits:

$\infty\cdot\infty=\infty$, $\infty(-\infty)=-\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $\infty\pm a=\infty$, $\infty\cdot(\pm a)=\pm\infty$, $\infty/(\pm a)=\pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 4 - נגזרות חלקיות

תוכן העניינים

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות **1-6** חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק f_x).

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

6) $f(x,y,z)=xy^2z^3$

7) נתון: $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכח כי: $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

8) נתון: $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשב: $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

הערת סימון

$$\boxed{f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ \ ;\ \ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2}$$

תשובות סופיות

1) $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $\quad$ $f_y = -6x^2y + 3$

2) $f_x = 5x^4 \ln y$ $\quad$ $f_y = \dfrac{x^5}{y}$

3) $$f_x = 2x\frac{y^4\left(\sqrt{y} + 5\ln y\right)}{y^2 + 5y + y^y}$$

4) $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $\quad$ $f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

5) $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{\left(x + y^2\right)^2}$ $\quad$ $f_y = \dfrac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{\left(x + y^2\right)^2}$

6) $f_x = y^2z^3$ $\quad$ $f_y = 2xyz^3$ $\quad$ $f_z = 3xy^2z^2$

7) שאלת הוכחה.

8) $$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = 4$$

הערת סימון

$$f = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות **1-13** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

4) $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

5) $f(x,y)=xy(x-y)$

6) $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

7) $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

8) $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

9) $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

10) $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

11) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

12) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

13) $f(x,y,z)=xyz$

14) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

15) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

16) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

17) נתון: $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$.

חשב: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$

תשובות סופיות

1) $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$ $\quad f_{xx} = 8 - 2y^2$ $\quad f_y = -2x^2y + 10$

$f_{yy} = -2x^2$ $\quad f_{xy} = -4xy$ $\quad f_{yx} = -4xy$

2) $f_x = 4x^3 \ln y$ $\quad f_{xx} = 12x^2 \ln y$ $\quad f_y = \frac{x^4}{y}$

$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$ $\quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$ $\quad f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$

3) $f_x = 3x^2 - 6y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 - 6x$

$f_{yy} = 6y$ $\quad f_{xy} = 6$ $\quad f_{yx} = -6$

4) $f_x = 3x^2 + 3 - 3y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$

$f_{yy} = 6y - 6$ $\quad f_{xy} = -3$

5) $f_x = 2xy - y^2$ $\quad f_{xx} = 2y$ $\quad f_y = x^2 - 2xy$

$f_{yy} = -2x$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y$

6) $f_x = 2\left[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0\right]$

$f_y = 2\left[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0\right]$

$f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$, $f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0]$

$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$

7) $f_x = e^{xy}\left(xy + y^2 + 1\right)$ $\quad f_y = e^{xy}\left(x^2 + xy + 1\right)$

$f_{xx} = e^{xy} \cdot y\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(y + 0 + 0\right) \cdot e^{xy}$

$f_{yy} = e^{xy} \cdot x\left(x^2 + xy + 1\right) + \left(0 + x\right) \cdot e^{xy}$

$f_{xy} = e^{xy} \cdot x\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(x + 2y\right) \cdot e^{xy}$

8) $f_x = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right)$ $\quad f_y = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right)$

$f_{xx} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + \left(2x + 2\right)e^{x+y}$

$f_{yy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right) + \left(2y + 2\right)e^{x+y}$

$f_{xy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + 2y \cdot e^{x+y}$

9) $f_x = e^{-x^2-y^2}\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right)$ $\quad f_y = e^{-x^2-y^2}\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right)$

$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(2 - 6x^2 - 4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right) + \left(4 - 2x^2 - 12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(-4x \cdot 2y\right)e^{-x^2-y^2}$

(10 $f_x=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$ $\quad f_y=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$

$$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$$

(11 $f_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$ $\quad f_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ $\quad f_{xx}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

(12 $f_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{1}{3}$ $\quad f_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{1}{3}$ $\quad f_{xx}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\dfrac{1}{3}$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

(13 $f_x=yz$ $\quad f_{xx}=0$ $\quad f_{xy}=z$ $\quad f_{xz}=y$ $\quad f_y=xz$

$f_{yx}=z$ $\quad f_{yy}=0$ $\quad f_{yz}=x$ $\quad f_z=xy$ $\quad f_{zx}=y$

$f_{zy}=x$ $\quad f_{zz}=0$

(14 -2

(15 -1

(16 $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

(17 $\dfrac{\dfrac{4}{e^2}\left(1+\dfrac{1}{e}\right)}{16}$

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 5 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

1) נתון: $x=2u-v,\ \ y=u^2+v^2\ \ ,z=\ln(x^2-y^2)$.
חשב: $z_u\ ,\ z_v$.

2) נתון: $v=4t+k,\ u=t^2+4m\ ,\ z=e^{u-v}$.
חשב: $z_t,\ z_m,\ z_k$.

3) נתון: $z=f(x^2-y^2)$.
הוכח: $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

4) נתון: $z=f(xy)$.
הוכח: $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

5) נתון: $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$.
הוכח: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

6) נתון: $z=f(x-y,y-x)$.
הוכח: $z_x+z_y=0$.

7) נתון: $w=f(x-y,y-z,z-x)$.
הוכח: $w_x+w_y+w_z=0$.

8) נתון: $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$.
הוכח: $u_x\cos y+u_y\cos x=\cos x\cos y$.

9) נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$.

הוכח: $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$.

10) נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

הוכח: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$.

11) נתון: $u(x,y,z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

הוכח: $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$.

12) נתון: $h(x,y) = f(y+ax) + g(y-ax)$.

הוכח: $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$.

13) נתון: $u(x,y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$. הוכח:

א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$

ב. $u_{xy} = u_{yx}$

ג. חשב: $u_{xy}(1,\pi)$, אם ידוע ש- $f'(0) = 2, \quad g'(0) = 1$.

14) נתון: $u = f(x,y) \ , \ x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$.

א. הוכח: $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2}(u_\theta)^2$.

ב. הוכח: $u_{rr} = f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta$.

ג. הוכח: $f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r$.

15) נתון $z=h(u,v)$, ונתון כי $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$.

הוכח כי:

א. u,v מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר, $u_{xx}+u_{yy}=0$ וכן $v_{xx}+v_{yy}=0$.

ב. $h_{xx}+h_{yy}=\left((u_x)^2+(v_x)^2\right)(h_{uu}+h_{vv})$

16) נתון: $u=f(x,y)$, $x=r\cosh s$, $y=r\sinh s$.

הוכח כי: $(u_x)^2-(u_y)^2=(u_r)^2-\frac{1}{r^2}(u_s)^2$.

17) פונקציה $f(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n, אם $f(tx,ty)=t^n\cdot f(x,y)$.

הוכח כי אם f הומוגנית, אז:

א. $x\cdot f_x+y\cdot f_y=n\cdot f(x,y)$

ב. $x^2f_{xx}+y^2f_{yy}+2xyf_{xy}=n(n-1)\cdot f(x,y)$

תשובות סופיות

1) $z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2}(-2y) \cdot 2u$

2) $z_t = e^{u-v}(1) \cdot 2t + e^{u-v}(-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1}(1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v}(-1) \cdot 1$

13) ג. $-e$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 6 - פונקציות הומוגניות-משפט אוילר

תוכן העניינים

פונקציות הומוגניות

שאלות

בשאלות **3-1** בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאיזה סדר:

1) $f\left(x,y\right)=x^3\sqrt{y}+y^3\sqrt{x}$

2) $h\left(x,y\right)=\dfrac{\ln\left(e^{5x}\right)}{\sqrt[3]{ex^6-7y^6}}$

3) $f\left(x,y\right)=\ln\left(4^x\right)\cdot g\left[\dfrac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right]$

4) נתון כי $z(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.

בדוק האם הפונקציה $4-\dfrac{1}{z(x,y)}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}+\dfrac{x}{y^4}=f(x,y)$ הומוגנית.

במידה ואינה הומוגנית, השמט ממנה חלק, כך שתתקבל פונקציה הומוגנית.

מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

5) מצא עבור איזה ערך של הפרמטר α, כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות.

כמו כן, מצא את סדר ההומוגניות עבור ה- α שמצאת.

א. $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^4y+xy^\alpha}{4x+10y}$

ב. $f\left(x,y\right)=\sqrt{\dfrac{y}{x}}\left(\ln\alpha x-\ln y\right)$

6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n, אז אם נחלק אותה ב- x^n,
נקבל פונקציה של $\frac{y}{x}$.

א. הדגם את הטענה על הפונקציות הבאות:
1. $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$
2. $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

ב. הוכח את הטענה לעיל.

הערה
ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n, אז קיימת פונקציה $g(t)$, כך ש- $t=\frac{y}{x}$,
המקיימת $\frac{f(x,y)}{x^n}=g(t)$.

7) תהיינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2, בהתאמה.
קבע, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה:

א. $f\cdot g$ ב. $\frac{f}{g}$ ג. $\frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}}$ ד. $f+g$

8) נתון כי f פונקציה הומוגנית מסדר 4.
ידוע כי $f(1,2)=4$, $f_x(1,2)=10$.
חשב את $f(2,4),\ f(0.5,1),\ f_x(2,4),\ f_x(1.5,3)$.

9) נתונה פונקציה $f(x,y)=x^4+y^2z(x,y)$.
ידוע כי z פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי $f(4,10)=1$.

א. חשב את $f(2,5)$.
ב. ידוע כי $f_x(1,1)=4$.
חשב את $f_x(a,a)$, לכל קבוע a.

תשובות סופיות

1) הומוגנית מסדר 3.5.
2) הומוגנית מסדר -1.
3) הומוגנית מסדר 1.
4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השמטת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:
$f(x,y)=\frac{x}{y^4}+\frac{1}{z(x,y)}$ הומוגנית מסדר -3.
$f(x,y)=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}$ הומוגנית מסדר -2.
$f(x,y)=-4$ הומוגנית מסדר 0.
5) א. עבור $\alpha=4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha>0$.
6) א.1. $g(t)=1-t+2t^2$ .2 $g(t)=\sqrt{1+t}$ ב. הוכחה.
7) א. הומוגנית מדרגה r_1+r_2. ב. הומוגנית מדרגה r_1-r_2.
ג. הומוגנית מדרגה $2r_1-\frac{r_2}{n}$.
ד. הומוגנית מדרגה r_1 רק אם $r_1=r_2$. אחרת לא הומוגנית.
8) $f(0.5,1)=\frac{1}{4}$, $f(2,4)=64$, $f_x(1.5,3)=33.75$, $f_x(2,4)=80$
9) א. $f(2,5)=\frac{1}{16}$ ב. $f_x(a,a)=4a^3$

משפט אוילר

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$.

א. הוכח שהפונקציה הומוגנית ומצא את דרגתה.

ב. הראה שמשפט אוילר מתקיים.

2) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- $f=f(x,y)$ הומוגנית מסדר 0.

הוכח כי $\frac{f_x}{f_y}=-\frac{y}{x}$.

ב. נתון כי $f(x,y)=\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{(x-y)(\ln x-\ln y)}$.

הוכח כי $x\cdot f_x=-y\cdot f_y$.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי פונקציית התועלת $u(x,y)=\left(\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הנח כי m קבוע חיובי.

ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a,a)=u_y(1,1)$.

ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2,2)+u_y(1,1)=1$.

4) תהי f פונקציה הומוגנית מסדר 2.

נגדיר $h(x,y)=x^2-y^2+f\left(\frac{x^2}{y},\frac{y^2}{x}\right)$.

א. הוכח כי h הומוגנית מסדר 2.

ב. נתון $h_x'(6,3)=9$, $f(8,1)=16$.

מצא את $h(2,1)$ ואת $h_y'(2,1)$.

5) h ו- g הינן פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאמה. נגדיר:

$$f(x,y)=(x+y)h(x,y)+\frac{\sqrt{g(x,y)}}{x^2+y^2}$$

א. הוכח כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $h(4,32)=16$, $f_y^{'}(1,8)=3$, $f_x^{'}(2,16)=12$.

מצא את: $f(1,8)$ ואת $g(1,8)$.

6) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

מגדירים את הפונקציה: $p(x,y)=f(x,y)+g(x,y)-h(x,y)$.

נתון: $p(1,2)=\frac{7}{2}$, $h\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{5}{2}$, $f_y^{'}(-1,-2)=-4$, $f_x^{'}(2,4)=64$.

חשב את: $g\left(\frac{1}{2},1\right)$.

7) הפונקציה $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 3, והנתונים בשרטוט.

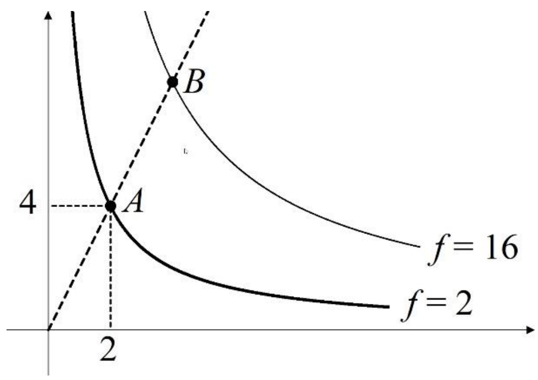
א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את ערך הסכום $f_x(4,8)+2f_y(4,8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x,y)$, על ידי $u(x,y)=(f(x,y))^2$.

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u_x(x,y)=2\cdot f(x,y)\cdot f_x(x,y)$.
הסבר זאת בקצרה.

2. הוכח כי $x\cdot u_x(x,y)+y\cdot u_y(x,y)=6(f(x,y))^2$.
היעזר בתת-הסעיף הקודם ובנתונים על f.



8) תהי $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m,
המקיימת $f(6,3)=243$ ו- $f(2,1)=27$.

א. מצא את סדר ההומוגניות m.

ב. בנקודה $(2,1)$ עוברת עש"ע של f.
מעבירים משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל.
המשיק הוא $2x+3y=7$.
מצא את $f_x(1,0.5)$, $f_y(2,1)$, $f_x(2,1)$.

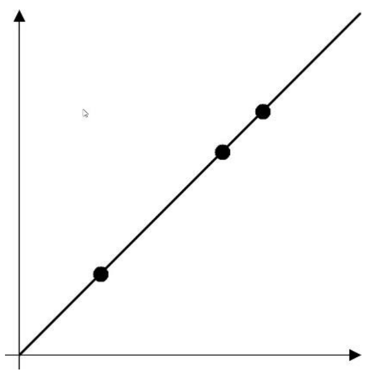
9) תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.
על הפונקציה g ידוע, כי $g(4)=5$, $g(1)=3$, $g'(8)=2$.
המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x,y), כך: $t=\dfrac{4y}{x}$.
מגדירים תועלת u כפונקציה של המשתנים (x,y), באופן הבא:
$u(x,y)=g(t)=g\left(\dfrac{4y}{x}\right)$.

א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1.
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכח כי הקרן $4y-x=0$ היא עקומת אדישות של התועלת.
צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכח כי $u_x(1,2)=-16$.



10) נניח ש- $f=f(x,y)$ הומוגנית מסדר 1.
הוכח כי $x^2 f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2 f_{yy}=0$.

11) מפעל מייצר x חולצות ו- y מכנסיים.
הרווח השולי, המתקבל מייצור כל אחד מהמוצרים, נתון על ידי:
$f_x(x,y)=4x+8y, \quad f_y(x,y)=8x+20y$ ₪ ליחידה.
מצא את פונקציית הרווח של המפעל, אם ידוע שפונקציה זו הומוגנית.

12) לחברת 'מזון בריא' יש 300 מכונות:
x מכונות לייצור שוקולד ו- y מכונות לייצור גלידה.
ידוע כי התפוקה השולית, המתקבלת מייצור כל אחד מהמוצרים,
נתונה על ידי $f_x(x,y)=6x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}, \quad f_y(x,y)=3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$.

א. מצא את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.
ב. מצא כמה מכונות מכל סוג על המפעל להחזיק, כדי לקבל את התפוקה הכוללת המקסימלית.

הערה: סעיף ב אינו קשור להומוגניות ועוסק בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".

13) בחברת 'שוקולד פנדה' בדקו ומצאו, כי התפוקה השולית, המתקבלת משימוש ב- x טון סוכר ו- y טון קקאו, נתונה על ידי $f_x(x,y)=3x^2y^2, \quad f_y(x,y)=2x^3y$.
מחירי המוצרים הם 6,000 ₪ לטון סוכר ו- 4,000 ₪ לטון קקאו,
והתקציב לקניית המוצרים הוא 100,000 ₪.

א. מצא את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.
ב. מצא את כמות הסוכר והקקאו בהם מתקבלת תפוקה מקסימלית.
מהי התפוקה במקרה זה?
ג. כיצד תשתנה התשובה, אם מחירי הסוכר והקקאו יהיו שניהם 5,000 ₪ לטון?

הערה: סעיפים ב-ג אינם קשורים להומוגניות ועוסקים בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".

14) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $f_x(x,y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 5.
ב. אם פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $f(2,4)=2^3 f(1,2)$,
אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) א. שאלת הוכחה. ב. $h(2,1)=4 \quad h_y'(2,1)=8$
5) א. שאלת הוכחה. ב. $g(1,8)=0 \quad f(1,8)=9,$
6) $-\frac{3}{4}$
7) א. $B(4,8)$ ב. 12 ג. הוכחה והסבר.
8) א. 2 ב. $f_x(1,0.5)=\frac{54}{7}, \quad f_y(2,1)=\frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}, \quad f_x(2,1)=\frac{108}{7},$
9) א. 5 ב-ד. שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) $f(x,y)=2x^2+8xy+10y^2$
12) א. $f(x,y)=9x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ ב. על המפעל להחזיק 200 מכונות לייצור שוקולד ו-100 מכונות לייצור גלידה, כדי לקבל תפוקה מקסימלית.
13) א. $f(x,y)=x^3y^2$
ב. אם המפעל ישתמש ב-10 טון סוכר ו-10 טון קקאו, הוא יקבל תפוקה מקסימלית השווה ל- $f(10,10)=10^3 10^2=100000$ חפיסות שוקולד.
ג. התשובה לא תשתנה.
14) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 7 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות **1-3**:

1) $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

2) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

3) $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{a} r^2\sin^2\varphi\, dr$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

4) D – משולש בעל הקודקודים: $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$.

5) D – משולש בעל הקודקודים: $O(0,0), A(2,1), B(-2,1)$.

6) D – טרפז בעל הקודקודים: $O(0,0), A(1,0), B(1,2), C(0,1)$.

7) D – עיגול $x^2+y^2\le 1$.

8) D – עיגול $x^2+y^2\le y$.

9) $D=\{(x,y)\mid y\le 1, y\ge x^2\}$

10) $D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$

חשב את האינטגרלים בשאלות **11-15**:

11) $\iint_D xy^2 dxdy$, כאשר D חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

12) $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר D חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

13) $\iint_D |x\,y|dxdy$, כאשר D עיגול בעל הרדיוס a, שמרכזו בראשית.

14) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=x$, $y=x+a$, $y=a, y=3a$ $(a>0)$.

15) $\iint_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2}dA$, כאשר D התחום הכלוא בין $y=\pi\sqrt{x}, y=\pi, y=0, x=-1$.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{a^3}{3}\pi$

4) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$

5) $\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy + \int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

7) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

8) $\int_{-1/2}^{1/2} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$

9) $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

10) $\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx +$
$+\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

11) $\frac{32}{21}$

12) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

13) $\frac{a^4}{2}$

14) $14a^4$

15) 0

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החלף סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-6**:

1) $\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)dydx$

2) $\int_{-6}^{2} \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

3) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

4) $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$

5) $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

6) $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)dydx$

חשב את האינטגרלים הבאים (רמז: שנה את סדר האינטגרציה):

7) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

8) $\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

9) $\int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy \quad (x,y\geq 0)$

10) $\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2)dydx$

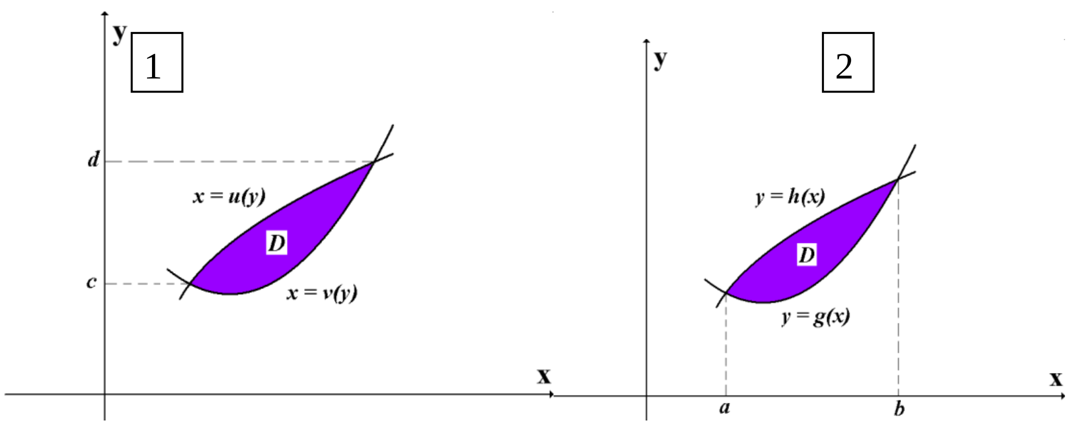
הערות סימון

$\boxed{1}$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA=\iint\limits_D f(x,y)\,dydx=\int\limits_a^b\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

$\boxed{2}$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d\int\limits_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$



לתשומת ליבכם, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int\limits_a^b\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך: $\int\limits_a^b\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישומים $dxdy$ ו- $dydx$ זהים.

תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

7) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

8) $\frac{241}{60}$

9) $\frac{1}{4}(e-2)$

10) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 8 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-8**,
מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

1) $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

2) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

4) $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

5) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

6) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

7) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

8) $f(x,y)=e^x\cos y$

9) נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$.
מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ״ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$,
וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ״ל.

12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא $6\$$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא $8\$$.
מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2
למחשבון בסין, על ידי: $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2 \quad Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2,$.
כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2, על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

13) נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2 + axy$.

א. הוכח שהנקודה $(0,0)$ היא נקי' קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבע עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

14) מצא שני מספרים, a $b > a$, כך ש- $\int_a^b \left(24 - 2x - x^2\right)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

1) $(-0.5,1)$ אוכף; $(1.5,-3)$ מינימום.

2) $(1,\ 2)$ מינימום; $(-1,-2)$ מקסימום; $(-1,\ 2)$, $(1,-2)$ אוכף.

3) $(0,0)$אוכף; $(1,1)$ מינימום.

4) $(-1,\ 1)(-1,\ -1)$ מינימום; $(1,\ 0)$ מקסימום; $(-1,\ 0),(1,1),(1,\ -1)$ אוכף.

5) $(0,\ 2)$ מקסימום.

6) $(4,\ 4)$ מקסימום.

7) $(-0.5,\ 4)$ מקסימום.

8) אין נקודות קריטיות.

9) $z = 4, \quad z = 3$

10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.

11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.

12) $P_2 = 12\$ \qquad P_1 = 10\$,$ רווח מקסימלי $288\$$.

13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = -2$, $a = 2$, לא ניתן לדעת; $a > 2,\ a < -2$ אוכף; $-2 < a < 2$ מינימום.

14) $a = -6,\ b = 4$

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 9 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות **5-1**:

1) $f(x,y)=1+2xy-x^2-y^2$

2) $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$

3) $(z=f(x,y))\ z^3+z+xy-2x-y+2=0$

4) $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+6y^2+3x-12y+8$

5) $(x,y,z>0)\ f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$

6) מצא מרחק מינימלי בין הפרבולה $y=x^2+1$, לפרבולה $y=-x^2+2x$.

* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות **11-7** נתונות n נקודות, $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y=h(x)$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

7) $h(x)=ax+b$, הדגם עבור הנקודות $(2,2.5),(1,0.8),(3,3.2),(4,3.5)$.

8) $h(x)=ax^2+bx$, הדגם עבור הנקודות $(-1,2),(2,0),(0,-2)$.

9) $h(x)=ax+\dfrac{b}{x}$, הדגם עבור הנקודות $(10,20.2),(6,12.9),(4,8.5),(0.5,4)$.

10) $h(x)=ax^2+\dfrac{b}{x^2}$, הדגם עבור הנקודות $(4,33),(2,8.5),(0.5,2.3),(1,4.5),(0.1,90)$.

11) $h(x)=ax^2+bx+c$, הדגם עבור הנקודות
$(1,4.5),(0.5,2.3),(0,0.8),(-1,0.1),(-0.5,0.12)$.

12) נתונות n נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$.
מצא ישר $y=ax+b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
עליך להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b.

הערה: בשאלות **11** ו-**12** ניתן להניח ש- a ו- b, המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a=0,\ f_b=0$, נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)-y_i\right)^2$.

תשובות סופיות

1) (t,t) לכל t ממשי, מקסימום.

2) $(0,0)$ מקסימום.

3) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

4) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

5) $(0.5,1,1)$ מינימום.

6) 0.375

7) $y=0.88x+0.3$

8) $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$

9) $y=2.032x+\frac{1.5039}{x}$

10) $y=2.06x^2+\frac{0.9}{x^2}$

11) $y=1.48x^2+2.196x+0.824$

12) $b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$, $a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 10 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות **1-4** מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

1) $2x^2+3xy=1-2y^2 \quad f(x,y)=x^2+y^2;$

2) $x^2+y^2=1 \quad f(x,y)=x^2-y^2;$

3) $x^2+y^2=13 \quad f(x,y)=4x+6y;$

4) $x^2+2y^2=6 \quad f(x,y)=x^2y;$

5) נתונה בעיית הקיצון $x+3y=12 \quad s.t. \quad \max\{xy\}$, כאשר $x,y>0$.
א. פתור את הבעיה.
ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

6) נתונה בעיית הקיצון $\sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \quad s.t. \quad \max\{2x+y\}$, כאשר $x,y\geq 0$.
א. פתור את הבעיה.
ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצא את הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x-6y+4=0$,
לפרבולה $x^2+2xy+y^2+4y=0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0) מהישר $ax+by+c=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

10) מוישל'ה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל, (x,y), נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסח ופתור את בעיית מוישל'ה.

11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל (x,y) נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח.
נסח ופתור את בעיית דני.

12) עקומת התמורה בין מנגו, (x), ואננס, (y), היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = (x,y), על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסח ופתור את הבעיה.

13) ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$.
המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K=2,\ P_L=1$.
היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $\left(K^*,L^*\right)$,
המביא למינימום את העלות.
נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

14) נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x,y)\}\ \ s.t.\ \ p_1x+p_2y=I$.
תהי $\left(x^*,y^*\right)$ נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה.
הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda=\dfrac{x\cdot u_x+y\cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

1) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max(\pm1,\mp1)$

2) $\max(\pm1,0)$ $\min(0,\pm1)$

3) $\min(-2,-3)$ $\max(2,3)$

4) $\min(\pm2,-1)$ $\max(\pm2,1)$

5) $\max(6,2)$

6) $\max(9,36)$

7) $(6,2)$

8) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max(\pm1,\mp1)$

9) $7/\sqrt{45}$

10) $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

11) $\max(6,2)$

12) $\max(2,3)$

13) $\sqrt{K}+\sqrt{L}=100$; $\min\{2K+L\}$

14) שאלת הוכחה.

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 11 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

2) מצא על פני הכדור $x^2+y^2+z^2=36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1,2,2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1,2,2)$.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$.

ב. מצא נק' על המישור $-2x-2y+z=0$ שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1,2,3)$.

ג. בדוק תשובתך על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

4) מצא את הנקודות על המשטח $z^2=xy+1$ הקרובות ביותר לראשית.

5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ למישור $3x+4y+12z=288$. רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0,z_0) מהמישור $ax+by+cz+d=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2+y^2=1$ והמישור $z=x+y$ לבין ראשית הצירים.

7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ והמישור $z=x+y$, לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות

1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.

2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2,4,4)$,
והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2,-4,-4)$.

3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{10}{3})$.

4) $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$

5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.

6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.

7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 12 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=3xy-6x-3y+7$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0,5),(3,0),(0,0)$.

2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2,0),(2,2),(0,2),(0,0)$.

3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+2y^2-x$ בתחום R, כאשר R הוא העיגול $x^2+y^2\le 4$.

4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x+y\ge -3\,,\ x\le 0, y\le 0\}$.

5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 3x\ge -y\}$.

תשובות סופיות

1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט 11-.
2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט 1-.
3) מקסימום מוחלט $33\frac{1}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.
4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט 1-.
5) מקסימום מוחלט $1+6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1-6\sqrt{10}$.