

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2



תוכן העניינים

1.	וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים	1
2.	וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב	15
3.	המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)	47
4.	אינטגרלים לא אמיתיים	49
5.	טורים עם איברים קבועים	60
6.	סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות	74
7.	טורי טיילור - מקלורן	83
8.	פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחים וגופים במרחב	94
9.	גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים	115
10.	נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות	122
11.	נגזרת מכוונת וגרדיאנט	133
12.	פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים	138
13.	נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים	151
14.	קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים	154
15.	קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) - ריבועים פחותים	156
16.	קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')	158
17.	קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים	161
18.	קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה	163
19.	אינטגרלים כפולים	164
20.	שימושי האינטגרל הכפול	170
21.	אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)	173
22.	החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)	176
23.	אינטגרלים משולשים ושימושיהם	178

תוכן העניינים

24. אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל).....181

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 1 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

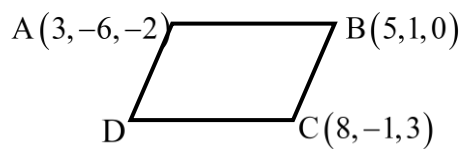
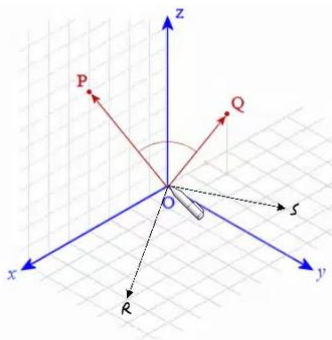
1. וקטורים.....1
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת.....6
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב.....8
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי.....9
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור.....13

וקטורים

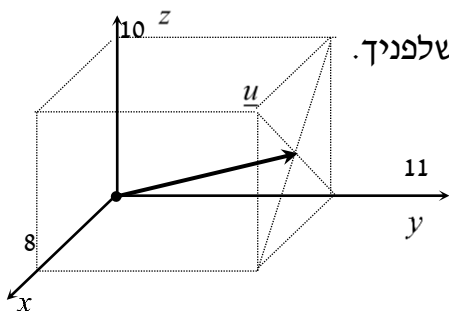
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}, \vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

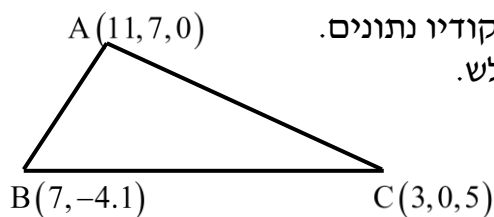
- (1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצא את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



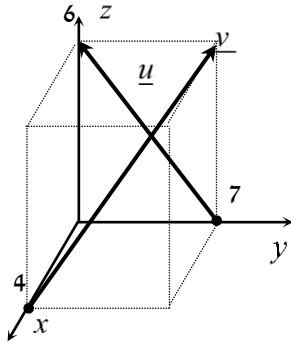
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$

והווקטור $\overrightarrow{MN} = (-1, -1, 9)$.



(6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

(7) מצא את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$ כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$,

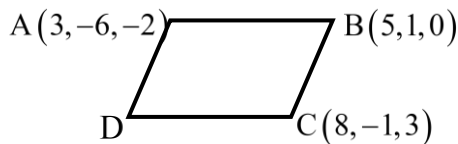
$\underline{v} = (z - 2, y + 1, x - 3)$.

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$

א. הראה כי $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצא את שיעורי הקדקוד D .

* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ו- $\underline{w} = (2, 6, -5)$.
 * בשאלות 13, 14, ו-16 הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשב:

א. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12) $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13) $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14) $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15) $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16) $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$, ויש למצוא את הווקטורים:

(17) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

(18) $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

(19) $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$

הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

(21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$$A(1, 2, 0), B(-2, 5, 3), C(-1, 8, 4), D(4, 3, -1)$$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

(22) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5), \underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1), \underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3), \underline{v} = (4, -2, -6)$

(23) מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם :

$$A(-3, 2, 1), B(0, 3, 2), C(5, -1, 0)$$

(24) נתונים הווקטורים $\underline{u} = (2, -1, 0), \underline{v} = (5, 0, 3)$.

מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

(25) ענה על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכח כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$

הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכח כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2$

הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

(26) הוכח :

א. $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ב. $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ג. $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$

ד. $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$

תן פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (25)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (26)$$

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

(1) נתון: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
חשב: $(u \times v) \times w$.

(2) חשב את שטח המשולש שקדקודיו: $A = (8, 2, 3)$, $B(4, -1, 2)$, $C(-8, 0, 4)$.

(3) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.
ידוע כי: $u \times v = 0$, $u \cdot w = 0$, $|u| \neq 0$
הוכח כי: $v \cdot w = 0$.

(4) נתונים שני וקטורים u, v במרחב.
ידוע כי: $|u| = 1$, $|v| = 4$, $u \perp v$
חשב: $|(u + v) \times (u - v)|$.

(5) נתון: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$
חשב:

א. $u \cdot (v \times w)$ ב. $v \cdot (w \times u)$ ג. $(u \times v) \cdot w$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(3, 0, 2)$, $D(4, 1, 1)$.
ב. חשב את נפח הפירמידה שקדקודה $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(3, 0, 2)$, $D(4, 1, 1)$.

(7) חשב את נפח הפירמידה שקדקודה $A(2, 2, 5)$, $B(1, -1, -4)$, $C(3, 3, 10)$, $D(8, 6, 3)$.

(8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים a, b, c .
 הוכח כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $a, a-b, a+b-4c$,
 שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

(9) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.
 הוכח כי $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$.

(10) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.

$$u \cdot (v \times w) = 4 \quad \text{ידוע כי:}$$

חשב:

$$\text{א. } u \cdot (w \times v) \quad \text{ב. } (v \times w) \cdot u \quad \text{ג. } w \cdot (u \times v) \quad \text{ד. } v \cdot (u \times w)$$

(11) נתונים שלושה וקטורים a, b, c במרחב.

מהי הנוסחה עבור $a \times b \times c$?

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$S = 22.5 \quad (2)$$

(3) שאלת הוכחה.

$$8 \quad (4)$$

$$\text{א. } -3 \quad \text{ב. } -3 \quad \text{ג. } -3 \quad (5)$$

$$\text{א. } 6 \quad \text{ב. } 1 \quad (6)$$

$$9\frac{1}{3} \quad (7)$$

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

$$\text{א. } -4 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 4 \quad \text{ד. } 4 \quad (10)$$

(11) אין לו נוסחה.

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

- (1) הוכח שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד :
 $A = (1, 2, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C = (2, 1, 2)$, $D(2, 2, 2)$

- (2) מצא את מרחק הנקודה $A(3, -2, 1)$ מהישר $L : (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$.

- (3) נתונים שני ישרים :

$$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, z=3$$

- א. הוכח שהישרים מצטלבים.
 ב. מצא את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.

- (2) $\sqrt{26}$

- (3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,

$$\text{כאשר } r(t) = (\cos \pi t, -\ln t, \sqrt{t-2}) \text{ ו- } t_0 = 4.$$

ב. רשום את המשוואות הפרמטריות $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \cos^2 t$ כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשום את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה) הווקטורית $r(t) = (t, t^2, t^3)$.

(2) רשום את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

$$\begin{cases} -x + y - z + 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } 9x^2 + 4y^2 = 36 \quad (\text{במישור } xy)$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = y + 2 \end{cases} \quad \text{ד.} \quad \begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} z = x^2 + 4y^2 \\ z = 2x \end{cases} \quad \text{ו.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x^2 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

(3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t) = (21t^2, 21t^2 - 1, 10e^t)$.

בסעיפים א-ג, חשב:

$$\text{א. } \lim_{t \rightarrow 1} r(t)$$

$$\text{ב. } r'(t)$$

$$\text{ג. } \int_0^1 r(t) dt$$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

(4) נתונה: $r(t) = (\cos 4t, \sin 4t, t^4)$.

א. חשב: $\frac{dr}{dt}$, $\left| \frac{dr}{dt} \right|$, $\frac{d|r'|}{dt}$.

ב. הוכח שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

(5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$.

א. גזור את הפונקציה.

ב. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$ ב- $t = 0$.

ג. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$ בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצא משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t) = (\sin t, e^{2t}, t^2)$ ב- $t = 0$.

(6) נתונה העקומה $r(t) = (t^2, t, 5)$.

א. מצא נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור

$$x - 6y + 4z - 3 = 0$$

ב. מצא משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t) = (3\sin t, -2\cos t, t)$

ב- $t = 0.5\pi$.

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

(7) נתון $r(t) = (3\sin t, 3\cos t, 4t)$.

חשב את משיק היחידה (T), נורמל היחידה (N) והבינורמל (B) של r.

(8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכח שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t , אז $r(t) \cdot r'(t) = 0$.

כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכח שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

(9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t) = (t, t^2, t^3)$.

מצא את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק,

המתאימים ל- $t = 2$.

10 נתון $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית, הוכח כי $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

11 חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x = t^3 + 2t$, $y = -3e^{-2t}$, $z = 2\sin 5t$

עבור החלקיק, בזמן $t = 0$, חשב את:

א. המהירות.

ב. גודל המהירות.

ג. התאוצה.

ד. גודל התאוצה.

ה. הזווית בין וקטורי המהירות והתאוצה.

12 נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן: $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k}$

כאשר $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$ המהירות ההתחלתית.

מצא את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13 חלקיק נע על העקומה $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

א. חשב את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t .

ב. שרטט את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת

וקטור המהירות ברגע $t = 0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות

ממוקם בראש וקטור המיקום.

ג. הראה שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות,

ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14 מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t) = (2, -1, -10t)$.

ברגע $t = 0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0) = (0, 0, 100)$.

מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r = r(t)$.

15 תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t) = (18\cos 3t, -18\sin 3t, 0)$.

ברגע $t = 0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0) = (2, 0, 1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)

ובמהירות $v(0) = (0, 2, 4)$.

מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r = r(t)$.

תשובות סופיות

$$r(4) = (\cos 4\pi, -\ln 4, \sqrt{2}) \quad \text{א. } 0 < t \leq 4 \quad (1)$$

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \quad \text{ב. } r(t) = (\sin t, \cos t, \cos^2 t)$$

$$x = 2t - 0.5, y = 3t - 1.5, z = t \quad \text{א. } (2) \quad r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$$

$$x = t, y = \frac{t^2}{4} - 1, z = \frac{t^2}{4} + 1 \quad \text{ג. } r(t) = (t, t^2, t^4)$$

$$r(t) = \left(t, \frac{t^2}{4} - 1, \frac{t^2}{4} + 1 \right)$$

$$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 9 \cos^2 t \quad \text{ה. } r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9 \cos^2 t)$$

$$(7, 6, 10e - 10) \quad \text{א. } (21, 20, 10e) \quad \text{ב. } (42t, 42t, 10e^t) \quad \text{ג. } (7, 6, 10e - 10) \quad \text{ד. כן. ה. כן. } (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = (-4 \sin 4t, 4 \cos 4t, 4t^3), \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = 4\sqrt{1+t^6}, \quad \frac{d|r|}{dt} = \frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}} \quad \text{א. } (4)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(4, 1, 0) \quad \text{א. } r'(t) = (4 \cos 4t, e^t + te^t, 4t^3) \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \quad \text{ג. } (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 2, 4)$$

$$2y + z = 0.5\pi \quad \text{א. } (9, 3, 5) \quad (6)$$

$$T(t) = \frac{1}{5}(3 \cos t, -3 \sin t, 4), \quad N(t) = (-\sin t, -\cos t, 0), \quad B(t) = \frac{1}{5}(4 \cos t, -4 \sin t, -3) \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

$$24x - 12y + 2z = 16, \quad x + 4y + 12z = 114 \quad \text{מישור הניצב} \quad (9)$$

$$76x + 143y - 54z = 292 \quad \text{מישור היישר}$$

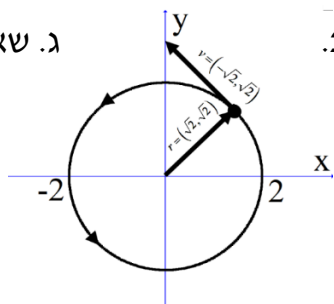
שאלת הוכחה. (10)

$$120.46^\circ \quad \text{א. } (2, 6, 10) \quad \text{ב. } \sqrt{140} \quad \text{ג. } (0, -12, 0) \quad \text{ד. } 12 \quad \text{ה. } 120.46^\circ \quad (11)$$

$$v(t) = (v_{01}, v_{02}, v_{03} - gt), \quad |v(t)| = \sqrt{(v_{01})^2 + (v_{02})^2 + (v_{03} - gt)^2}, \quad a(t) = (0, 0, -g), \quad |a(t)| = g \quad (12)$$

$$v(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \quad \text{א. } (13) \quad |v(t)| = 2$$

ג. שאלת הוכחה.



$$r(t) = (2t, -t, -5t^2 + 100) \quad (14)$$

$$r(t) = (-2 \cos 3t + 4, 2 \sin 3t - 4t, 4t + 1) \quad (15)$$

גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

(1) יהיו $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכח:

א. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב. $\nabla(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla(\mathbf{F}) + \nabla(\mathbf{G})$

(2) יהי $F(x, y, z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi = \varphi(x, y, z)$ פונקציה.

הוכח כי: $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{F}) = (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{F}$.

(3) יהי $F(x, y, z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi = \varphi(x, y, z)$ פונקציה.

א. הוכח כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$. או בניסוח אחר $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

ב. הוכח כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$. או בניסוח אחר $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$.

(4) יהיו $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ שדות וקטורים כללים

הוכח כי: $\operatorname{curl}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{curl}(\mathbf{F}) + \operatorname{curl}(\mathbf{G})$.

(5) יהי $F(x, y, z)$ שדה וקטורי.

הוכח כי $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x, y, z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\text{grad } \varphi$ מוגדר על ידי $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$.

הגדרה (דיברגנץ וקורל של שדה וקטורי)

יהי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ מגדירים את הדיברגנץ של $\mathbf{F}$ המסומן $\text{div } \mathbf{F}$, כך:

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \text{div } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f, g, h) \\ \text{div } \mathbf{F} &= f_x + g_y + h_z\end{aligned}$$

מגדירים את ה- curl של $\mathbf{F}$ המסומן $\text{curl } \mathbf{F}$, על ידי:

$$\begin{aligned}\text{curl } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f, g, h) \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}\end{aligned}$$

הערה: יש הרושמים $\text{rot } \mathbf{F}$ במקום $\text{curl } \mathbf{F}$.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 2 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

15	1. הצגה פרמטרית של ישר
18	2. מצב הדדי בין ישרים
20	3. הצגה פרמטרית של מישור
21	4. משוואת מישור
22	5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור
23	6. מישורים המקבילים לצירים
24	7. מצב הדדי בין ישר ומישור
25	8. מצב הדדי בין מישורים
26	9. ישר חיתוך בין מישורים
(ללא ספר)	10. חישובי זוויות שונות
27	11. זווית בין שני ישרים
28	12. זווית בין ישר ומישור
29	13. זווית בין שני מישורים
(ללא ספר)	14. חישובי מרחקים
30	15. מרחק בין שתי נקודות במרחב
31	16. מרחק בין נקודה לישר
32	17. מרחק בין נקודה למישור
33	18. מרחק בין ישרים מקבילים
34	19. מרחק בין ישר למישור
35	20. מרחק בין מישורים מקבילים
36	21. מרחק בין ישרים מצטלבים
(ללא ספר)	22. סיכום מרחקים
37	23. היטלים ונקודות סימטריה
38	24. שאלות מסכמות

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

הצגה פרמטרית של ישר

שאלות

- (1) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$?
- (2) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$?
- (3) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור, שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.
- (4) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב, שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.
- (5) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$, ומקביל לישר $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$.
- (6) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$, ומאונך לישר $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$.
- (7) ענה על הסעיפים הבאים :
 - א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר : $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$. כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x, y ו- z .
 - ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות : $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$. כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.
- (8) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.
- (9) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$ ומקביל לציר ה- z .
- (10) מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

11 ישר עובר בנקודה $(1, -1, 4)$ וכיוונו $(4, 10, 2)$.
מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(4, 10, 2)$

ב. $\underline{x} = (3, 4, 5) + t(4, 10, 2)$

ג. $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 5, 1)$

ד. $\underline{x} = (5, 9, 6) + t(8, 20, 4)$

ה. כל התשובות נכונות.

12 ישר עובר דרך הנקודות $A(1, -1, 2)$ ו- $B(4, 0, 1)$.
תאר את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

13 הצג כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2t \\ z = 2 + 10t \end{cases}$

ב. $\ell: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 10t \end{cases}$

ג. $\ell: \frac{x-1}{2} = y+1 = z-4$

ד. $\ell: x-1 = y+10, z=4$

ה. $\ell: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$

תשובות סופיות

(1) כן.

(2) לא.

(3) $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$

(4) $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$

(5) $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$

(6) $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$

(7) א. $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$

(8) $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$

(9) $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$

(10) $(7, -5, 0)$

(11) ה

$$(12) \text{ א. } \ell : \underline{x} = (1, -1, 2) + t \cdot (3, 1, -1) \quad \text{ב. } \ell : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

$$\ell : \frac{x-1}{3} = y+1 = 2-z \quad \text{ג. } \ell : \begin{cases} x-3y=4 \\ y+z=1 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$(13) \text{ א. } \underline{x} = (1, 0, 2) + t(-4, 2, 10) \quad \text{ב. } \underline{x} = (1, 4, 0) + t(1, 0, 10)$$

$$\text{ג. } \underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 1, 1) \quad \text{ד. } (x, y, z) = (1, -10, 4) + t(1, 1, 0)$$

$$\text{ה. } (x, y, z) = (2, 1, 0) + t(-2, -1, 1)$$

מצב ההדדי בין ישרים

שאלות

- (1) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$
- (2) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$, $\ell_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$
- (3) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$, $\ell_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$
- (4) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$, $\ell_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$
- (5) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$, $\ell_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$
- (6) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$
- (7) מצא את ערכו של הפרמטר k שבעבורו הישרים הבאים :
 $\ell_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$
א. מקבילים.
ב. מתלכדים.
- (8) נתונות הנקודות : $A(3, -1, 5)$, $B(k, -1, 3)$, $C(-6, 3, -1)$, $D(-2, 3, k)$
הראה כי לכל ערך של k הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

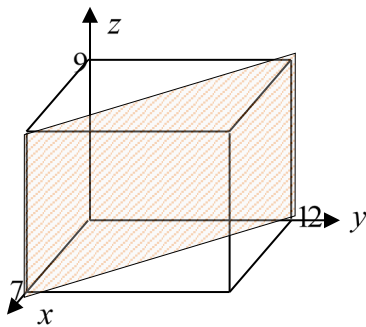
תשובות סופיות

- (1) מתלכדים.
- (2) מקבילים.
- (3) נחתכים, $(1, 5, 0)$.
- (4) מצטלבים.
- (5) מקבילים.
- (6) נחתכים, $(1, 8, -1)$.
- (7) א. $k = 2$ ב. $k = -2$
- (8) שאלת הוכחה.

הצגה פרמטרית של מישור

שאלות

- (1) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא :
 $A(1, -4, 0)$, $B(3, 6, 2)$, $C(0, -3, 1)$
- (2) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6, 7, -1)$,
 ומכיל את הישר $\ell : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$
- (3) נתונים שני ישרים : $\ell_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$, $\ell_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$
 הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.
- (4) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5, -2, -1)$ ומכיל
 את ציר ה- x
- (5) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.



- (6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.

תשובות סופיות

- (1) $\pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1)$
- (2) $\pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6)$
- (3) $\pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6)$
- (4) $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1)$
- (5) $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)$
- (6) $\pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 9) + s(-7, 12, 0)$

משוואת מישור

שאלות

- (1) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x - y + 3z - 6 = 0$:
 א. $D(5, 7, 1)$ ב. $E(2, -1, 1)$

- (2) מצא את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1, k, -1)$ נמצאת על המישור : $\pi : kx - 2y + (1+k)z + 7 = 0$.

- (3) נתונה משוואת מישור : $\pi : 3x + 2y - z - 9 = 0$.
 מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

- (4) נתונה משוואת מישור : $\pi : 4x + y - 2z + 8 = 0$.
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות

- (1) א. על המישור. ב. לא על המישור.

(2) $k = 3$

(3) $(3, 0, 0)$, $\left(0, 4\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 0, -9)$

(4) $\ell : \underline{x} = (0, -8, 0) + t(0, 2, 1)$

מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור: $\pi : 2x + 3z - 12 = 0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.
- (2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$. מצא את משוואת המישור.
- (3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$. מצא את משוואת המישור.
- (4) המישור π עובר בנקודות: $A(1, 0, -3)$, $B(2, 0, 0)$, $C(4, -1, 0)$. מצא את משוואת המישור.
- (5) ענה על הסעיפים הבאים:
 - א. לפניך הנקודות הבאות: $(2, -5)$, $(0, 1, -2)$, $(1, 1, 0)$.
 1. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
 2. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.
 - ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.
 - ג. האם הנקודה $(4, 2, 1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

תשובות סופיות

- (1) $\pi : \underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$
- (2) $\pi : -2x + 3y + z + 19 = 0$
- (3) $\pi : x - 3y + 8z = 0$
- (4) $\pi : 3x + 6y - z - 6 = 0$
- (5) א. 1. $\pi : \underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$ 2. $-2x + 3y + z - 1 = 0$
 ב. למשל: $(0, 0, 1)$, $(-0.5, 0, 0)$ ג. לא.

מישורים המקבילים לצירים

שאלות

(1) נתונה משוואת מישור: $\pi : (k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$. לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

(2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$ ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות

(2) 6 יח"נ.

(1) $k=3$

מצב הדדי בין ישר ומישור

- (1) נתונים הישר והמישור הבאים :
 $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$, $\ell : \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$
 קבע את המצב ההדדי שביניהם.
 אם הישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך.
- (2) נתונים הישר והמישור הבאים :
 $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$, $\ell : \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$
 קבע את המצב ההדדי שביניהם.
 אם הישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך.
- (3) נתונים הישר והמישור הבאים :
 $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$, $\ell : \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$
 קבע את המצב ההדדי שביניהם.
 אם הישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך.
- (4) נתונים הישר והמישור הבאים :
 $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$, $\ell : \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$
 מצא את ערכי a ו- b בעבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות

- (1) הישר חותך, $(1, -1, 3)$.
- (2) מקבילים.
- (3) הישר מוכל.
- (4) $a = 1$, $b = -7$

מצב הדדי בין מישורים

שאלות

(1) נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם :

א. $\pi_1 : 2x - y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב. $\pi_3 : x + 3y - z + 1 = 0$, $\pi_4 : 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג. $\pi_5 : 5x - 2y - 2z + 3 = 0$, $\pi_6 : 2x + 3y + z - 5 = 0$

(2) נתונים שני המישורים הבאים :

$\pi_1 : 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$

מצא את ערכי k עבורם המישורים :

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

תשובות סופיות

(1) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

(2) א. $k \neq 2, -3$ ב. $k = -3$ ג. $k = 2$

ישר חיתוך בין מישורים

שאלות

(1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$, $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$, $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$, $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$, $\pi_8 : z - 2 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(5) מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$ עם המישור $[xz]$.

(6) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות

$$\ell : \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12) \quad (1)$$

$$\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4) \quad (2)$$

$$\ell : \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right) \quad (3)$$

$$\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0) \quad (4)$$

$$\ell : \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18) \quad (5)$$

$$\ell : \underline{x} = t(1, 9, 13) \quad (6)$$

זווית בין שני ישרים

שאלות

- (1) מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:
 א. $\ell_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$
 ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$
- (2) מצא את הזווית, שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3, 4, 6)$, $B(6, 0, -2)$,
 וישר העובר דרך הנקודות: $C(6, 5, 1)$, $D(-1, 4, 2)$,
 וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.
- (3) נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$.
 א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב, העובר דרך הנקודות:
 1. A ו-B.
 2. B ו-C.
 3. A ו-C.
 ב. מי מבין הנקודות $D(4, 2, -1)$ ו- $E(7, 7, -3)$, נמצאת על הישר AB,
 שמצאת בסעיף הקודם?
 ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC.
- (4) נתון מישור שמשוואתו: $3x - 4y + 6 = 0$. הנקודות $A(x, 6, 1)$, $B(-2, y, -1)$,
 נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.
 מצא את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים
 AB ו-AC הוא: $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות

- (1) א. 78.521° ב. 90°
 (2) 63.37° . הישרים מצטלבים.
 (3) א. 1. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$ א. 2. $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$
 א. 3. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$ ב. הנקודה D. ג. 35.477°
 (4) C(0, 2, 11) או C(0, 28.45, 11)

זווית בין ישר ומישור

שאלות

- (1) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים :
 $\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2)$, $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$
- (2) נתונות הנקודות $A(1, -1, 2)$, $B(0, 2, -1)$, $C(1, 2, 5)$, $D(-7, 3, -1)$
 מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.
- (3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה היא : $2x + y - 2z - 6 = 0$. קדקוד הפירמידה הוא $S(3, 1, -2)$.
 מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
 אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים : $x_B = z_B = -1$.

תשובות סופיות

- | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|
| (1) 18.87° | (2) 44.83° | (3) 14.9° |
|-------------------|-------------------|------------------|

זווית בין שני מישורים

שאלות

(1) מצא את הזווית שבין המישורים $\pi_1 : 4x + 3y + z - 12 = 0$ ו- $\pi_2 : 4x - 7y + 5z + 3 = 0$.

(2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקודקודה הם: $A(0, 2, -5)$, $B(3, -1, 1)$, $C(7, -1, -5)$, $D(3, 2, 0)$. מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

(3) מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x + 5y - z + 4 = 0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות

(1) 90° (2) 87.539° (3) 32.312°

מרחק בין שתי נקודות במרחב

שאלה

- (1) נתונות הנקודות: $A(2, 4, -5)$, $B(0, -2, 6)$ ו- $C(k, -1, 13-k)$. מצא ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה-שוקיים: $AB = AC$.

תשובה

- (1) $k = 8$ או $k = 12$.

מרחק בין נקודה לישר

שאלות

- (1) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13, -1, -19)$ לישר $\ell : \underline{x} = t(2, 0, -7)$.
- (2) נתונות הנקודות $A(1, 6, -1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(6, -4, 0)$.
חשב את שטח המשולש ABC .
- (3) על הישר $\ell : \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע $ABCD$.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5, 4, 2)$. מצא את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות

- (1) $\sqrt{54}$
- (2) 12.75 יח"ש.
- (3) $B(5, -4, 2)$ או $B(5, 4, -6)$

מרחק בין נקודה למישור

שאלות

- (1) מצא את מרחקו של המישור $4x - 2y - 4z + 15 = 0$ מראשית הצירים.
- (2) מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell : \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$ ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4, 5, -9)$.
- (3) נתונים ישר ומישור: $\pi : 2x + 4y - 4z + 15 = 0$, $\ell : \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$. מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות

- (1) $2\frac{1}{2}$
- (2) $\pi : 3x - 2y + z + 21 = 0$ או $\pi : 3x - 2y + z - 7 = 0$
- (3) $(4, 5, 1)$ או $(1, -9, 5)$

מרחק בין ישרים מקבילים

שאלות

(1) נתונות הנקודות $A(15, 0, -4)$, $B(12, -5, 2)$, $C(6, 1, 4)$, $D(12, 11, -8)$.

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

(2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1), \quad l_2: \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2), \quad l_4: \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

תשובות סופיות

(1) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

(2) א. הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

מרחק בין ישר למישור

שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור: $4x - z + 6 = 0$.
- א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.
 ב. מצא את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.
- (2) נתונים ישר ומישור: $\pi: 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$, $l: \underline{x} = (1, k-1, 5) + t(4, -2, -3)$.
- א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.
 ב. מצא את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות

- (1) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$.
- (2) א. הוכחה. ב. $k = 2, 4$.

מרחק בין מישורים מקבילים

שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$. מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.
- (2) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$, $\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$. מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים, והנמצא במרחק שווה משניהם.
- (3) נתונים שישה מישורים:
 $\pi_1: 2x + y - 2z - 11 = 0$, $\pi_2: x + 2y + 2z + 5 = 0$, $\pi_3: 2x - 2y + z + 3 = 0$
 $\pi_4: 2x + y - 2z + 7 = 0$, $\pi_5: x + 2y + 2z - 1 = 0$, $\pi_6: kx + qy + z + p = 0$
 מצא את ערכי הפרמטרים k, q ו- p , שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה, שנפחה 60 יחידות נפח.
- (4) כדור, שמרכזו בנקודה $O(3, 8, -1)$, חסום בקובייה, שבסיסה התחתון מונח על מישור, שמשוואתו $12x + 4y - 3z - 6 = 0$. מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות

- (1) $\pi_1: 3x - 4y + 5z + 10 = 0$, $\pi_2: 3x - 4y + 5z - 30 = 0$
- (2) $\pi_3: x - 2y - 2z - 3 = 0$
- (3) $k = 2$, $q = -2$, $p = 18, -12$
- (4) $12x + 4y - 3z - 136 = 0$

מרחק בין ישרים מצטלבים

שאלות

- (1) נתונים שני הישרים הבאים : $\ell_1 : \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$ ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.
- (2) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים : $\ell_1 : \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$ ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$.
מצא את המרחק שביניהם.
- (3) מצא את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$, מציר ה- z .

תשובות סופיות

- (1) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.
- (2) 1.567 יח"א.
- (3) $\sqrt{2}$ יח"א.

היטלים ונקודות סימטריה

שאלות

- (1) נתונה נקודה $A(1, -1, 3)$ ונתון הישר $\ell: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1}$.
 א. מצא את היטל הנקודה A על הישר.
 ב. מצא את הנקודה הסימטרית ל- A ביחס לישר.
- (2) נתונה נקודה $A(0, 0, 1)$ ונתון מישור $7x + 7y - z = 8$.
 א. מצא את היטל הנקודה A על המישור.
 ב. מצא את הנקודה C , הסימטרית ל- A , ביחס למישור.
- (3) ענה על הסעיפים הבאים:
 א. מצא את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(1, 3, 2)$ ביחס למישורי הצירים.
 ב. מצא את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(x, y, z)$ ביחס למישורי הצירים.
- (4) נתונות 4 נקודות במרחב: $A(0, 2, 4)$, $B(-2, 6, 2)$, $C(2, -4, 8)$, $D(10, 2, 0)$.
 מצא את היטל הישר AD על המישור ABC .

תשובות סופיות

- (1) א. $B(0, 1.5, -1.5)$ ב. $C(-1, 4, -6)$
- (2) א. $B\left(\frac{7}{11}, \frac{7}{11}, \frac{10}{11}\right)$ ב. $C\left(\frac{14}{11}, \frac{14}{11}, \frac{9}{11}\right)$
- (3) א. $B_{xy}(1, 3, -2)$, $C_{xz}(1, -3, 2)$, $D_{yz}(-1, 3, 2)$
 ב. $B_{xy}(x, y, -z)$, $C_{xz}(x, -y, z)$, $D_{yz}(-x, y, z)$
- (4) $\underline{x} = (0, 2, 4) + t(0, 1, 1)$

שאלות מסכמות

- (1) נתונות הנקודות $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.
- מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C .
הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.
 - חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C .
 - מצא את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C .
- (2) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
- במקרה בו הישרים נחתכים, מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
- במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצא גם את המרחק ביניהם.
- $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$, $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
 - $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$, $\underline{x} = (2,3,1) + s(12,-3,1)$
 - $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$, $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
 - $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$, $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- (3) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
- במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
- במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.
- $2x - 3y + 4z - 5 = 0$, $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
 - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
 - $2x - 14y + 10z = -6$, $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- (4) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים.
- במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם.
- במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- $x - 2y + 2z - 10 = 0$, $2x + y + 2z - 4 = 0$
 - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
 - $2x - 14y + 10z = -6$, $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$, שנפחה הוא 8.
 משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא: $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$.
 משוואת המישור שעליו מונחת הפאה $ABB'A'$ היא: $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$.
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה $A(4, 0, -1)$ נמצאת על כדור, שמרכזו $O(1, 1, 2)$.
 מצא את משוואת המישור, המשיק לכדור בנקודה A.
- (7) נתונים מישור וישר: $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$, $\ell : \underline{x} = (1, 5, 5) + t(1, 1, 0)$.
 מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z , הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$.
 מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור: $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$, $\ell_1 : \underline{x} = (0, -3, 0) + t(1, 1, -8)$.
 ישר נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה $P(1, 0, -4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
 מצא את שטח המלבן PQQ'P'.
 (הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2)
- (10) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$.
 ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
 המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של 60° עם הישר $\ell_2 : \underline{x} = (1, 3, -4) + t(1, 1, 0)$.
 מצא את משוואת המישור π_3 .

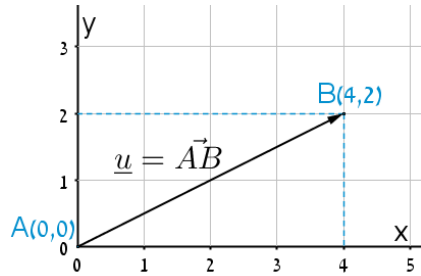
תשובות סופיות

- (1) א. $\underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y - z + 2 = 0$
- (2) א. מקבילים, 1.095 ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1, -3, 4)$. הזווית היא: 47.6°
- (3) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל.
ג. חותך בנקודה $(3.5, -0.5, -2)$, הזווית היא: 40.78°
- (4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$, זווית: 63.6° .
ב. מקבילים. המרחק: 0.324 ג. מתלכדים.
- (5) $\ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75)$, $\ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$
- (6) $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$
- (7) $(0, 0, 4)$ או $(0, 0, 14\frac{4}{5})$
- (8) $\ell: \underline{x} = \left(0, -14, -15\frac{3}{4}\right) + t(-14, 14, 21)$
- (9) 10.467 יח"ש.
- (10) $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$ או $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$

סיכום כללי

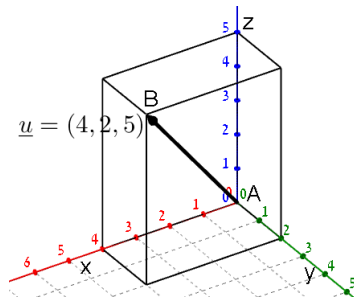
הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u} = (x,y)$.



דוגמאות:

- הוקטור $\underline{u} = (4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הוקטור: $\underline{u} = (4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(4,2,5)$.

וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

וקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ וסופו בנקודה $B(x_2, y_2, z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ הוא: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$.

מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של ווקטורים: $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

גודלו של וקטור $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני ווקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ נקרא **ווקטור ההעתקה**.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור $\underline{u}$ נקרא **ווקטור הכיוון של הישר**.

זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

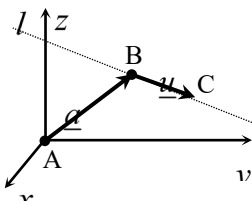
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$

כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר ℓ .

דוגמא: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים

הבאים: $\underline{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,3,1)$; $\underline{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $\ell: \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$



***הערות:**

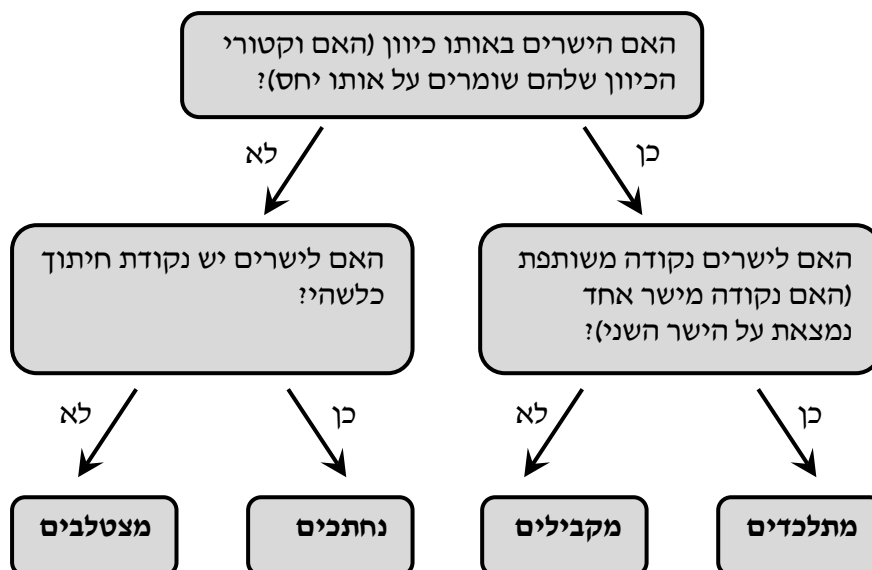
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l: \underline{x} = (7, 0, 10) + t(-6, 9, -27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים

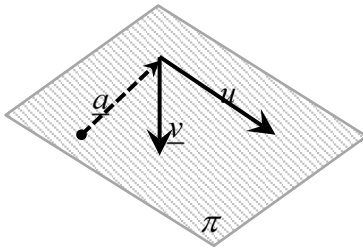
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ הוא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם ווקטורי הכיוון של המישור.

אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t, s הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר

מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π .

משוואת מישור

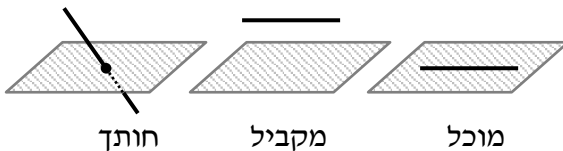
ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi : ax + by + cz + d = 0$,

כאשר: (x, y, z) היא נקודה על המישור והמקדמים a, b, c הם שיעורי ווקטור הנורמל

של המישור המסומן: $\underline{h} = (a, b, c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



• הישר חותך את המישור.

• הישר מקביל למישור.

• הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

• אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.

• אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.

• אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
כל מצב אחר	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$.
- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos \alpha = \left| \frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|} \right|$.
- זווית חדה α בין ישר $l = \underline{a} + t\underline{u}$ ומישור $\pi: ax + by + cz + d = 0$ תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin \alpha = \left| \frac{\underline{u} \cdot \underline{h}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|} \right|$.
- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ תחושב ע"י: $\cos \alpha = \left| \frac{\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|} \right|$.

חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
2. מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.
3. מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ למישור: $\pi: ax + by + cz + d = 0$ יחושב ע"י: $d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$.
4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.
5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.
6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
 - א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
 - ב. שימוש בנוסחה: $d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$.
7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 3 - המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל) 47

המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכח כי אם $f(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו- $b(x)$ גזירות, אזי:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזור את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^2+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשב את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

$$(10) \text{ חקור את הפונקציה } F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt, \text{ לפי הפירוט הבא:}$$

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

$$(3) \quad I'(x) = e^{-x^2}$$

$$(4) \quad I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2$$

$$(5) \quad I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1) \ln(x^3 + x)$$

$$(6) \quad I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$$

$$(7) \quad \frac{1}{2}$$

$$(8) \quad \frac{2}{3}$$

$$(9) \quad 4e^{16}$$

(10) תחום הגדרה: כל x .

נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל x .

נקודות פיתול: $x = -1, 1, -\frac{3}{7}$.

תחומי קמירות: $x > 1$, $-1 < x < -\frac{3}{7}$.

תחומי קעירות: $-\frac{3}{7} < x < 1$, $x < -1$.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 4 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון 49
2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני 51
3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי 52
4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים 53
5. מבחני השוואה 54
6. התכנסות בהחלט 56
7. מבחן דיריכלה 57
8. התכנסות בתנאי 58

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-5:

$$(1) \quad \int_1^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$$

$$(2) \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

$$(3) \quad \int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$(4) \quad \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx$$

$$(5) \quad \int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx$$

$$(6) \quad \text{הוכח כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ עבור } |\alpha| < 1.$$

$$(7) \quad \text{הוכח כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \text{ עבור } |\alpha| > 1.$$

תשובות סופיות

(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{\pi}{2}$

(3) $\frac{1}{2e}$

(4) מתבדר : ∞ .

(5) $\frac{5}{4e^2}$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

(1) מתבדר : ∞ .

(2) מתבדר : ∞ .

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

(1) חשב את האינטגרל הבא : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

תשובה

(1) מתבדר : ∞ .

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

(1) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x = 1$ וציר ה- x , עבור $x \leq 1$.

(2) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x = 5$.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$.

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0 \leq x \leq k$, שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x \geq k$. מצא את הקבוע k .

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

מבחני השוואה

שאלות

בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1 + x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

תשובות סופיות

- | | |
|-------------|-------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתבדר. |
| (3) מתכנס. | (4) מתכנס. |
| (5) מתבדר. | (6) מתבדר. |
| (7) מתכנס. | (8) מתכנס. |
| (9) מתבדר. | (10) מתכנס. |
| (11) מתכנס. | (12) מתבדר. |
| (13) מתכנס. | (14) מתבדר. |
| (15) מתכנס. | (16) מתכנס. |

התכנסות בהחלט

שאלות

בשאלות 1-3 בדוק אם האינטגרלים מתכנסים:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{הוכח: אם } \int_a^{\infty} |f(x)| dx \text{ מתכנס, אז } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס.}$$

תשובות סופיות

(1) מתכנס.

(2) מתכנס.

(3) מתכנס.

(4) שאלת הוכחה.

מבחן דיריכלה

שאלות

הוכח כי האינטגרלים הבאים מתכנסים :

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (2) \quad \text{א.}$$

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \quad (3) \quad \text{ב.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

התכנסות בתנאי

שאלות

קבע האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים :

$$(1) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$$

$$\text{ב.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx$$

$$(4) \quad \int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$(5) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx$$

תשובות סופיות

- (1) א. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.
 ב. מתכנס בהחלט.
 ג. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.
- (2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.
- (3) א. מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$,
 מתבדר עבור $p \geq 2$.
 ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 5$,
 מתבדר עבור $p \geq 5$.
- (4) מתכנס בתנאי.
- (5) מתכנס בתנאי.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 5 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים 60
2. מבחן ההתבדרות של טורים 63
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים 64
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים 66
5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי 68
6. תרגילי תיאוריה 69

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} & (3) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n & (1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} & (5) & \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} & (4) \end{array}$$

טור טלסקופי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} & (8) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} & (7) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} & (10) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) & (9) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} & (11) \end{array}$$

טור הרמוני מוכלל

(12) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} & \text{ג.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{ב.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} & \text{א.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} & \text{ו.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} & \text{ה.} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} & \text{ד.} \end{array}$$

תכונות אלגבריות של טורים

(13) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

(14) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(15) מצא את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.123123123... + 0.141414...$.

תשובות סופיות

$$(1) \text{ מתכנס ל- } \frac{11}{14} \quad (2) \text{ מתכנס ל- } \frac{1}{3} \quad (3) \text{ מתבדר.}$$

$$(4) \text{ מתכנס ל- } -\frac{64}{7} \quad (5) \text{ מתכנס ל- } \frac{11}{12} \quad (6) \text{ מתכנס ל- } 8.$$

$$(7) \text{ מתכנס ל- } \frac{1}{2} \quad (8) \text{ מתכנס ל- } \frac{1}{12} \quad (9) \text{ מתבדר.}$$

$$(10) \quad S = \frac{1}{\ln 2} \quad (11) \quad \frac{1}{12}$$

$$(12) \text{ א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.}$$

$$\text{ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.}$$

$$(13) \text{ א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.}$$

$$(14) \quad \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$$

$$(15) \quad \frac{323}{1221}$$

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$	ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$	ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$
ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}$	ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$	ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n} \right)^n$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$.

ב. מצא את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$.

מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sin^2 n}{n!} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן ראפה

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (26) \quad \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------|-------------|-------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתבדר. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתבדר. | |
| (6) א. מתכנס. | ב. 0 | |
| (7) מתכנס. | (8) מתבדר. | (9) מתכנס. |
| (10) מתבדר. | (11) מתכנס. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר. | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתבדר. | (17) מתכנס. | (18) מתכנס. |
| (19) מתכנס. | (20) מתכנס. | (21) מתכנס. |
| (22) מתכנס. | (23) מתכנס. | (24) מתכנס. |
| (25) מתבדר. | (26) מתבדר. | |

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבע אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{הוכח שהטורים } \sum \sin n\theta, \sum \cos n\theta, \text{ כאשר } \theta \neq 2\pi k, \text{ חסומים.}$$

(7) הוכח את התכנסות הטורים הבאים :

$$. (\theta \neq 2\pi k) \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}$$

$$(8) \quad \text{בדוק התכנסות הטור } \sum \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$(9) \quad \text{הוכח שאם הסדרה } b_n \text{ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור } \sum b_n \sin n \text{ מתכנס.}$$

(10) ענה על שני הסעיפים הבאים :

$$\text{א. הוכח שהטור } \sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\bmod 7) \text{ הוא טור חסום.}$$

$$\text{ב. בדוק את התכנסות הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}.$$

מבחן אבל

בשאלות הבאות קבע אם הטור מתכנס או מתבדר:

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|----------------|-------------|-------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתכנס. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתכנס. | (6) הוכחה. |
| (7) הוכחה. | (8) מתבדר. | (9) הוכחה. |
| (10) א. הוכחה. | ב. מתכנס. | (11) מתכנס. |
| (12) מתכנס. | (13) מתכנס. | (14) מתכנס. |

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתכנס בהחלט. | (3) מתכנס בתנאי. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |

תרגילי תיאוריה

(1) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

(2) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

(3) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ מתבדר.

(4) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

(5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

(6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכח ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

(7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכח כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

(8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכח כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

(9) הוכח או הפרך :

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל n , אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

(10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

(11) הוכח או הפרך :

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

(12) הוכח : אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

(13) הוכח או הפרך :

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכח או הפרך :

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n , אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

16 נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכח כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכח כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

17 הוכח :

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

18 הוכח כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

19 נתון $a_n \geq 0$ לכל n .

א. נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכח כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכח כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

20 הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

$$(21) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכח כי הטור מתכנס.

$$(22) \text{ נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n,$$

ונתון כי לכל n מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$.

הוכח כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

$$(23) \text{ נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1$$

האם $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1)$ מתכנס?

$$(24) \text{ נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיימת } a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}, a_n > 0 \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

הוכח כי $\sum a_n$ מתבדר.

$$(25) (a_n) \text{ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.}$$

הוכח כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

$$(26) \text{ נתון טור חיובי } \sum a_n.$$

הוכח או הפרך:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

$$(27) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

א. הוכח כי הסדרה a_n מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ מתכנס.

ב. בדוק האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדוק האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמד את הנושא טורי מקלורן עם שארית לגראנז'.

(28) פונקציה f מוגדרת לכל x , גזירה ב-0 ומקיימת $f(0) = 0$.
הוכח כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

(29) נתון $p(x)$ פולינום.
 $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
הוכח כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow p(0) = 0$.

(30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.
נתון כי:

$$(1) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ מתכנס.} \quad (2) \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 6 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

74	1. סדרות פונקציות
77	2. טורי פונקציות
79	3. טורי חזקות
81	4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות 1-11 :

א. בדוק התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצא את הפונקציה הגבולית.

ב. בדוק התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$(1) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} [0, 0.5] \quad (2) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} (0, 1)$$

$$(3) \quad f_n(x) = \arctan(nx) \quad \text{ב-} (0, \infty) \quad (4) \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(5) \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{ב-} [0, 1] \quad (6) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{ב-} [0.5, 4]$$

$$(7) \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+n} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (8) \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{ב-} \mathbb{R}$$

$$(9) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (10) \quad f_n(x) = n(1-x)x^n \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(11) \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1) + 1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(12) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0, 4]$?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0, 4]$?
 ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(13) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0, \infty)$?
 ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0, \infty)$?
 ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1, \infty)$?

$$(14) \text{ נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(15) \text{ נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = \left[1 - \chi_n(x) \right] \left(x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\text{כאשר } \chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1, \infty)$?
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?
 ב. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1, \infty)$?

תשובות סופיות

- (1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- (14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1, \infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.
ב. רק אם $\alpha < 0$.

טורי פונקציות

שאלות

מצא את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-6 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידן :

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{3}}}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (12)$$

תשובות סופיות

(1) $x > 0$

(2) $x \neq 5$

(3) $x < 3\frac{9}{10} \text{ or } 4\frac{1}{10}$

(4) $0 < x \neq \frac{1}{n}$

(5) $x > 0$

(6) $x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

(7) מתכנס במידה שווה.

(8) מתכנס במידה שווה.

(9) מתכנס במידה שווה.

(10) מתכנס במידה שווה.

(11) מתכנס במידה שווה.

(12) מתכנס במידה שווה.

טורי חזקות

שאלות

מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצא את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבע את תחום ההתכנסות :

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא "פירוק לשברים חלקיים".

תשובות סופיות

$$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad (2)$$

$$-1 \leq x \leq 1, R = 1 \quad (4)$$

$$-1 < x < 1, R = 1 \quad (6)$$

$$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad (8)$$

$$-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3 \quad (10)$$

$$-7 < x < -3, R = 2 \quad (12)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (14)$$

$$(|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (16)$$

$$(|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (18)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (20)$$

$$-1 \leq x < 1, R = 1 \quad (1)$$

$$-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2 \quad (3)$$

$$-3 < x \leq -1, R = 1 \quad (5)$$

$$x = 1, R = 0 \quad (7)$$

$$-5 < x \leq 3, R = 4 \quad (9)$$

$$-9 \leq x \leq 11, R = 10 \quad (11)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (13)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (15)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (17)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (19)$$

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתח לטור חזקות את הפונקציות בשאלות 1-7 :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{חשב את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$$

$$(9) \quad \text{חשב את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n)x^{n-1}$$

(10) ענה על הסעיפים הבאים :

$$א. \text{ חשב את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$ב. \text{ מהו סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)} ?$$

(11) ענה על הסעיפים הבאים :

א. חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

ב. חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$

(12) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$

(13) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

תשובות סופיות

$$(1) \quad (|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (2) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$(3) \quad (-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (4) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(5) \quad (-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (6) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2}$$

$$(7) \quad (|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (8) \quad \frac{20}{27}$$

$$(9) \quad \frac{2}{(1-x)^3} \quad |x| < 1 \quad (10) \quad \text{א. } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad |x| < 1 \quad \text{ב. } \frac{1}{4} \ln 3$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x \quad |x| < 1 \quad \text{ב. } \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right)$$

$$(12) \quad \frac{1}{10} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right) \quad (13) \quad \arctan x \quad |x| \leq 1$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 7 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

1. טור טיילור וטור מקלורן 83
2. טור טיילור סביב $X=X_0$ 85
3. חישוב סכום של טור 86
4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן 87
5. חישובים מקורבים של פונקציות 88
6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים 90
7. השארית של לגראנז 91

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = 0$ (טור מקלורן) בשאלות 1-24 :

$$(1) \quad f(x) = \sin 2x \quad (2) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (3) \quad f(x) = \sinh x$$

$$(4) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (5) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (6) \quad f(x) = 2^x$$

$$(7) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (8) \quad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (9) \quad f(x) = \arcsin x$$

$$(10) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (11) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (12) \quad f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$$

$$(13) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (14) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{9+x^2}$$

$$(16) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (17) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (18) \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$(19) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (21) \quad f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$(22) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (23) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (24) \quad f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, עליך להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24, עליך להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
תוכל להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח שבעמוד האחרון.

מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות בשאלות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$(25) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (26) \quad f(x) = \tan x \quad (27) \quad f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$$(-1 < x < 1)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

$$(0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$(0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

חישוב סכום של טור

שאלות

חשב את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$\pi/4 \quad (5)$$

$$2e \quad (4)$$

$$\sqrt{e} \quad (3)$$

$$e^{-2} \quad (2)$$

$$e \quad (1)$$

$$\ln \frac{3}{2} \quad (9)$$

$$\ln 2 \quad (8)$$

$$\cos 1 \quad (7)$$

$$\sin 1 \quad (6)$$

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות 1-3 חשב את ערך הגבול:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$(4) \quad \text{נתון כי } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k \text{ כאשר } k \text{ קבוע שונה מאפס. מצאו את } n \text{ ואת } k.$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \frac{1}{120} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{1}{3} \quad (4) \quad k=1, n=3$$

חישובים מקורבים של פונקציות

שאלות

בשאלות 1-3 חשב בשגיאה הקטנה מ-0.001 :

$$\frac{1}{e} \quad (1) \quad \sin 3^\circ \quad (2) \quad \arctan 0.25 \quad (3)$$

בשאלות 4-6 חשב בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והערך את השגיאה בחישוב :

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4) \quad \cos 4^\circ \quad (5) \quad \ln 1.5 \quad (6) \quad (n=3) \quad (n=1) \quad (n=4)$$

$$(7) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ עבור } |x| \leq \frac{\pi}{6} ?$$

$$(8) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \ln(1+x) \cong x \text{ עבור } |x| < 0.01 ?$$

$$(9) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \text{ עבור } |x| \leq 0.2 ?$$

$$(10) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.001 ?}$$

$$(11) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.01 ?}$$

תשובות סופיות

(1) $\frac{53}{144}$

(2) $\frac{\pi}{60}$

(3) $\frac{47}{192}$

(4) $\frac{5}{8}, \frac{1}{48}$ בשגיאה הקטנה מ-

(5) $1, \frac{\pi \cdot \pi}{4050}$ בשגיאה הקטנה מ-

(6) $\frac{77}{192}, \frac{1}{160}$ בשגיאה הקטנה מ-

(7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

(8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

(9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

(10) $|x| < \sqrt[5]{3/25}$

(11) $|x| < \sqrt[9]{9/100}$

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

השארית של לגראנז'

- (1) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את $\sqrt[3]{66}$ והערך את השגיאה בקירוב.
- (2) רשום את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את $\tan 0.1$ והערך את השגיאה בקירוב.
- (3) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את $\sqrt{5}$ והערך את השגיאה בקירוב.
- (4) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב $x_0 = 16$, כולל שארית לגראנז'.
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את $\sqrt[4]{15}$ והערך את השגיאה בקירוב.

הערה לגבי קירובים

אם מבקשים קירוב שהוא מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה, אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} . למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.0005 = 0.5 \times 10^{-3}$. בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

תשובות סופיות

$$(1) \text{ נוסחה: } \sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81 \cdot \sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{5}{663552}$$

$$(2) \text{ נוסחה: } \tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2, \tan 0.1 = \frac{1}{10}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{970}$$

$$(3) \text{ נוסחה: } \sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16 \sqrt{(c+4)^8}}x^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{512}$$

$$(4) \text{ נוסחה: } \sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128 \cdot \sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{3130}$$

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$ $-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$ $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 8 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

94	1. קווים נפוצים במישור
98	2. מבוא לפונקציה של שני משתנים
100	3. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים
102	4. משטחים נפוצים במרחב
104	5. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים
105	6. גופים במרחב
108	7. הצגה פרמטרית של עקום
110	8. הצגה פולרית של עקום
112	9. הצגה פרמטרית של משטח

קווים נפוצים במישור

שאלות

1) שרטט במישור את התחומים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

2) שרטט במישור את התחומים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצא את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים :

א. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב. $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטט אותו.

א. $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג. $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה. $0 \leq x \leq 1, y = \sqrt{1 - x^2}$

ו. $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}, y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטט אותו.

א. $y = 2 + \sqrt{1 - (x - 3)^2}$

ב. $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג. $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\}$

ז. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ח. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

8) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9) שרטט את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$.

א. הוכח שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטט אותה.

ב. רשום את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.

ג. רשום את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.

ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?

ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשוני שלה?

11) שרטט את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2\}$

12) שרטט את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

13) שרטט את התחומים הבאים במישור :

א. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצא את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטט סקיצה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x-4y}{x+4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y-4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

$$f(x, y) = \tan \frac{y}{x} \quad (12)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

$$f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)} \quad (13)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x+1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x+1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו, ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטט מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2\ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטט את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

א. שרטט את קו הגובה $f(x, y) = 0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף? ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
 ** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

(1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

(2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור.

(4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.

(5) $y < x^2$

(6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר : GooL.co.il

משטחים נפוצים במרחב

שאלות

זהה ושרטט את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהה ושרטט את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהה כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

מצא את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
 הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$:

א. זהה את המשטח.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$.

מצא את החיתוך בין המשטחים $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$ ו- $x^2 + y^2 + z^2 = 64$.
 הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$:

א. זהה את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשום הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור,
 ושנמצאים כולם על המשטח.

- בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

- (1) אליפסואיד.
- (2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- (3) היפרבולואיד חד יריעתי.
- (4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.
- (5) א. אליפסואיד.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.
- (6) החיתוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$, שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.
- (7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12)$, $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$.
- (8) החיתוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$, שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.
- (9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
ב. $\ell_1 : (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2 : (x, y, z) = (3, 2t, t)$

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

- (1) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - z$. מצא את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטט אותו.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$. מצא את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטט אותו.
- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא את משטחי הרמה:
 - א. $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$
 - ב. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$
- (4) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$. מצא את משטחי הרמה של הפונקציה.
- (5) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$. מצא את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- (1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0, 0, -2)$ ורדיוסה 2.
- (2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 4)$ ונפתח כלפי מטה.
- (3) א. מישורים.
ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה $(0, 0, k)$ ונפתח כלפי מעלה.
- (4) עבור $k < 0$ לא קיים משטח רמה k .
עבור $k = 0$ נקודה $(0, 0, 0)$. עבור $k = 1$ מישורים.
עבור $k > 1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y .
עבור $0 < k < 1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z .
- (5) עבור $k < 0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k = 0$ חרוט אליפטי.
עבור $k < 0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

גופים במרחב

שאלות

1) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו. $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד. $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\}$

3) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2+y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2+z^2 \leq 4\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$

4) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

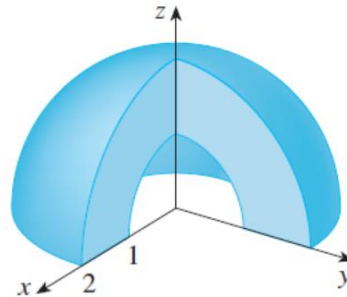
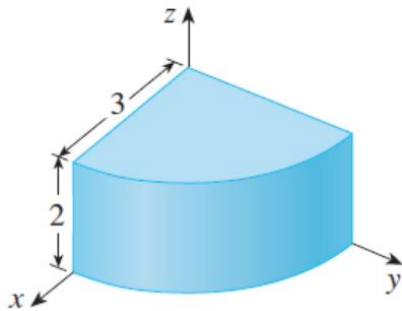
ה. $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף V במרחב.

תאר במילים את הגוף וכתוב אותו לפי התבנית $V = \{(x, y, z) \mid \dots\}$.

א.

ב.



7) נתונים המשטחים $z = x^2 + y^2$ ו- $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהה כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטט את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצא את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

8 נתונים שני משטחים: $z = x^2 + y^2 + z^2$ ו- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהה כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטט את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצא את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

1) עבור מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x = t^2 + 1, y = t^2, t \geq 0$

ב. $x = \sin t, y = \cos^2 t, 0 \leq t \leq \pi$

ג. $x = \cos t, y = 4 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$

2) עבור מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $y = x^4 + 1, 1 \leq x \leq 4$

ב. $y = -\sqrt{4 - x^2}, -2 \leq x \leq 2$

ג. $y = +\sqrt{4 - x^2}, -2 \leq x \leq 2$

3) לפניך תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.

על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצא משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

4) חשב את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

5) חשב את אורך העקום $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}, -\pi \leq t \leq 2\pi$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad \text{ב. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{ג. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$$

$$(3) \quad \text{א. } y = (x + 4)^2 \quad \text{ב. } (x + 4)^2 + \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

$$(4) \quad 8$$

$$(5) \quad 6\pi\sqrt{29}$$

הצגה פולרית של עקום

שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

(2) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית $(0, -4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המר את הנקודה הקרטזית $(-2, 2)$ לנקודה קוטבית.

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $4x - x^2 = 1 + xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המר את המשוואה $r = -4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $x^2 + y^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המר את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המר את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

(5) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המר את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המר את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המר את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

תשובות סופיות

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \quad \text{א.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \quad \text{ב.}$$

$$(2) \quad (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \quad \text{א.} \quad (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2} \right) \quad \text{ב.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \quad \text{ג.}$$

$$(3) \quad 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \quad \text{א.} \quad (x+2)^2 + y^2 = 2^2 \quad \text{ב.}$$

$$(4) \quad r = 4 \sin \theta \quad \text{א.} \quad r \cos \theta = 10 \quad \text{ב.} \quad r \sin \theta = 4 \quad \text{ג.}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 4^2 \quad \text{א.} \quad y = x \quad \text{ב.} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \quad \text{ג.}$$

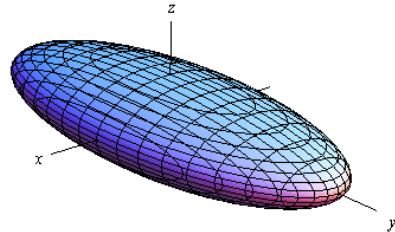
$$6 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \cdot y = 4 \sqrt{x^2 + y^2} - x \quad \text{ד.}$$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

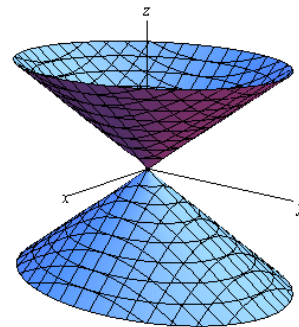
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;
כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$,
נקבל כדור עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

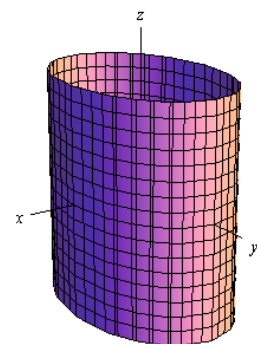
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות.
החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו
הם היפרבולות.
* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע
לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים
במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו-
 yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים
מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא
 $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.
* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע
במשוואת הגליל.

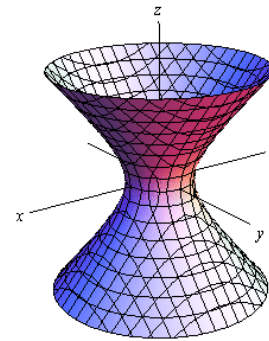


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

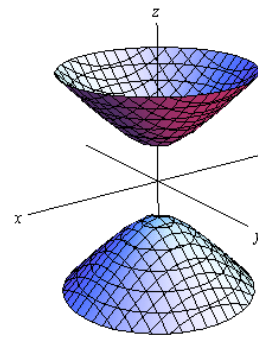
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

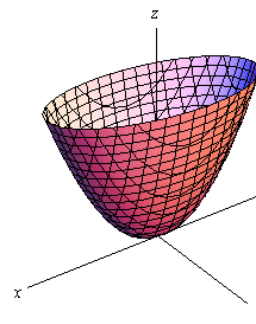
פרבולואיד אליפטי

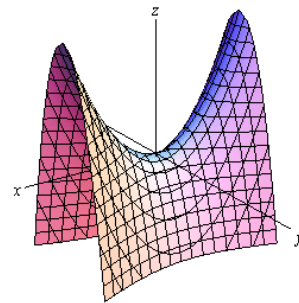
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



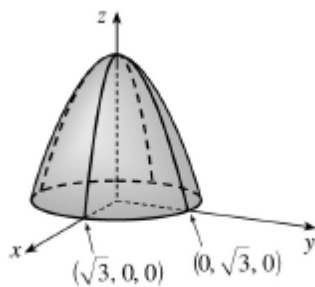
פרבולואיד היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

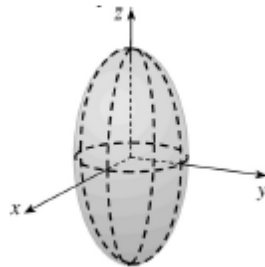
תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

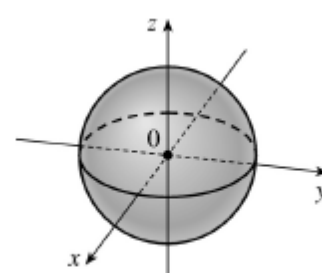
* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

דוגמאות שונות

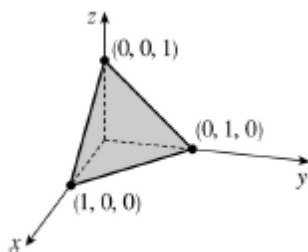
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



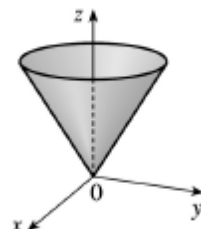
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



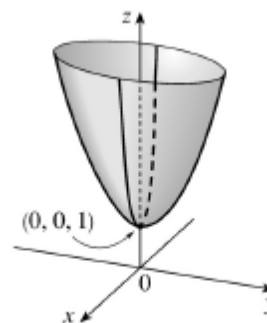
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 9 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. גבול של פונקציה של שני משתנים 115
2. רציפות של פונקציה של שני משתנים 118

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 9-1:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (9)$$

חשב את הגבולות בשאלות 10-17 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשב את הגבולות בשאלות 18-25 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

* בשאלות 18, 20-23 ו-25 מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

(26) ענה על הסעיפים הבאים :

א. חשב את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$

ב. העזר בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, וחשב את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$

ג. העזר בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, וחשב את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$

ד. העזר בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$, וחשב את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$

* קחו בחשבון שייתכן שכותב השאלה לא ייתן את הגבול הידוע בגוף השאלה.

(27) הוכח לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$.

(28) הוכח לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$.

(29) הוכח לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$.

תשובות סופיות

1 (1)

$\frac{1}{12}$ (2)

1 (3)

0 (4)

אינסוף (5)

$\frac{1}{2}$ (6)

2 (7)

5 (8)

0 (9)

(10) – (17) אין לפונקציה גבול.

0 (18)

0 (19)

0 (20)

0 (21)

3 (22)

0 (23)

0 (24)

0 (25)

0 א-ד. (26)

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות 1-3 בדוק את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלות 4-5 בדוק את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון}$$

כאשר m קבוע.

עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7) נתונה פונקציה ממשית רציפה $f = f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0, 0)$?

8) הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y) \quad \text{לכל } y$$

$$\text{וגם } \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0) \quad \text{לכל } x$$

$$\text{אז } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$$

9) פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $|f(x, y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$, לכל (x, y) .

הוכח שהפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$.

10) מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ k & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל המרחב?

11) נתון כי:

לכל x מתקיים $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq |x_2 - x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה x).

הוכח כי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

12) הוכח או הפרך:

נתון כי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

$$z(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ידוע כי $z(1, 14) < 0$, $z(14, 1) > 0$.

אז בתחום ההגדרה של z קיימת נקודה (c_1, c_2) , כך ש- $z(c_1, c_2) = 0$.

תשובות סופיות

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0)=1$, הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור $m > 1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m \leq 1$ הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\arctan(0) = 0$	$\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 10 - נגזרות חלקיות דיפרנציאבילות

תוכן העניינים

122	1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון
124	2. נגזרות חלקיות מסדר שני
128	3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה
130	4. דיפרנציאבילות

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות 1-10 חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \quad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \quad (רק f_x)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \quad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \quad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \quad f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (11) \quad \text{נתון}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \quad \text{הוכח כי}$$

$$f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad (12) \quad \text{נתון}$$

$$\text{חשב} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

(11) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (12)$$

הערת סימון

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f &= f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{aligned}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-14 חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$.

16) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

17) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

18) נתון $f(x,y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$.

חשב $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e)$.

הערת סימון

$$\begin{array}{lcl}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & & f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x,y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & & f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & & f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll}
f_y = -2x^2y + 10 & f_{xx} = 8 - 2y^2 & f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \\
f_{yx} = -4xy & f_{xy} = -4xy & f_{yy} = -2x^2 \\
f_y = \frac{x^4}{y} & f_{xx} = 12x^2 \ln y & f_x = 4x^3 \ln y \quad (2) \\
f_{yx} = \frac{4x^3}{y} & f_{xy} = \frac{4x^3}{y} & f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \\
f_y = 3y^2 - 6x & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 - 6y \quad (3) \\
f_{yx} = -6 & f_{xy} = 6 & f_{yy} = 6y \\
f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4) \\
& f_{xy} = -3 & f_{yy} = 6y - 6 \\
f_y = x^2 - 2xy & f_{xx} = 2y & f_x = 2xy - y^2 \quad (5) \\
& f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y & f_{yy} = -2x \\
& f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] \quad (6) \\
& f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0] \\
& f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24] \\
& f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0] \\
f_y = e^{xy}(x^2 + xy + 1) & f_x = e^{xy}(xy + y^2 + 1) \quad (7) \\
f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} & f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy} \\
& f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy} \\
f_y = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) & f_x = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) \quad (8) \\
& , f_{xx} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y} \\
& f_{yy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y} \\
& f_{xy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y} \\
f_y = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) & f_x = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9) \\
& f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2} \\
& f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2} \\
& f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}
\end{array}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \quad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \quad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y) \quad f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y) \quad f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x+4y) \quad f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x \quad f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) \quad (18)$$

נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

שאלות

$$(1) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$?
 ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$(2) \quad \text{מצא את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

$$(3) \quad \text{מצא את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y + x^2)^2}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכח שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. הוכח שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0, 0)$ וחשב אותן.

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.
 ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה $(0, 0)$?

$$(6) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. בדוק האם $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0, 0)$?

ג. האם $f_{xyxy}(1, 4) = f_{xyxy}(1, 4)$.

הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

(1) א. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. ב. לא רציפה בנקודה $(0, 0)$.

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(2) $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 0$

(3) $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$

(4) א. שאלת הוכחה. ב. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$.

(5) א. $f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
ב. לא רציפות.

$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(6) א. $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0, 0)$. ג. כן.

דיפרנציאביליות

שאלות

בשאלות 1-4 בדוק האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x + y}{y + 4x} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (5) \quad \text{בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון } m, \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$(7) \quad \text{נתון} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad m, f(x, y) \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

(8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה חדשה}$$

$$\text{נתון} \quad f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f(0, 0) = 0$$

הוכח ש- ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

$$(9) \quad \text{בדוק דיפרנציאביליות} \quad f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0, 0)$.

$$(10) \quad \text{נתונה } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ המוגדרת על ידי} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases}$$

האם f דיפרנציאבילית בנקודה $x = 0$?

תשובות סופיות

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
- (6) א. $m > 1$ ב. $m > 0$ ג. $m > 2$
- (7) א. $m < 1$ ב. לכל m ג. $m < 0.5$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 11 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט 133

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

(1) תהי $f(x, y) = x^2 + y^2$.

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3, 4)$.

(2) תהי $f(x, y) = 3x^2y$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

(3) תהי $f(x, y) = x - \sin(xy)$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$,

בכיוון הווקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

(4) תהי $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x .

(5) תהי $f(x, y) = xy^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון לנקודה $(4, 5)$.

(6) תהי $f(x, y, z) = x^2y^2z$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2, 1, 4)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x, y) , נתון על ידי $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, מצא את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון לנקודה $(2, 6)$.

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$ בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית, וחשב את ערכה.

(9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$ בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית, וחשב את ערכה.

(10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$, ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

(11) נתונה הפונקציה $f(x, y) = 4x^2y$.

- מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .
- מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

(12) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = x^2yz^4$.

- מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2, -1)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , ו- 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- z . הנח שהזווית עם ציר ה- y חדה.

(13) נתונה הפונקציה $f(x, y) = xy^2 - x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1, 1)$.

- חשב את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q , בכיוון וקטור שיוצר זווית 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- מצא וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 0$.
- האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 6$.

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + 4y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכח כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$.
- ב. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
- ג. חשב את $\nabla f(0, 0)$.
- ד. בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
- ה. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0, 0)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = (1, -1)$.
- ו. הסבר מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

$$(15) \text{ הפונקציה } f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2, \text{ מתארת טמפרטורה בנקודה } (x, y, z).$$

- א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2, 4, 1)$?
- ב. אוסף הנקודות (x, y, z) , בהן הטמפרטורה שווה 20° , מהווה משטח מפורסם. מהו?
- ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2, 4, 1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר. באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?
- ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$), בנקודה $(2, 4, 1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר, אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן. באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

$$(16) \text{ גֵּלָה מוחזקת בנקודה } (2, 1, 14), \text{ שעל המשטח } z = 20 - x^2 - 2y^2.$$

משחררים את הגֵּלָה והיא מתחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

- א. מהו המשטח הנתון?
- ב. מצא את הווקטור $\vec{u} = (a, b, c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֵּלָה.

$$(17) \text{ תהי } f = f(x, y) \text{ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:}$$

$$1. f(x, x^2) = \frac{x^2}{2} + x^4 \text{ לכל } x.$$

$$2. \text{ הנגזרת המכוונת של } f(x, y) \text{ בנקודה } (1, 1), \text{ בכיוון הווקטור } \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

שווה 1.

חשב את הגרדיאנט של f בנקודה $(1, 1)$.

(18) נתונה $f = f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f(x, y, x^2 + y^2) = 2x + y$.

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 2, 4) = -\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u} = (-2, 1, 2)$.
חשב את $\nabla f(0, 2, 4)$.

(19) נתונה הפונקציה $f(x, y) = 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשב את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8, 1)$ בכיוון הווקטור $\vec{u} = (3, 4)$.

ב. בדוק האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

ג. חשב $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית α

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ד. באיזה כיוון α , הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ תהיה מקסימלית?

מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

(20) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 20x + 21y & x \neq 0 \\ 21y & x = 0 \end{cases}$

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) < m$, לכל וקטור יחידה $\vec{u}$?

ב. מצא וקטור יחידה $\vec{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = 0$.

הערות סימון

(1) במישור $\mathbb{R}^2$: $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ או } \vec{u} = (x, y)$$

$$\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

במרחב $\mathbb{R}^3$: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ או $\vec{v} = (x, y, z)$.

$$\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\cdot\vec{i} + 4\cdot\vec{j} + 5\cdot\vec{k}$$

(2) יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם $\underline{u}$ או $\mathbf{u}$.

(3) וקטור יחידה יסומן $\hat{u}$.

תשובות סופיות

- (1) א. הגרדיאנט $(6, 8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.
- (2) $\frac{48}{5}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $7.5\sqrt{2}$
- (5) $3\sqrt{13}$ (6) $\frac{88}{3}$ (7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
- (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1, 1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.
- (9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(12, 14, -12)$ ושווה ל-22.
- (10) בכיוון הווקטור $(-2, 2, -2)$.
- (11) א. $8\sqrt{3} + 2$. ב. $8 + 2\sqrt{3}$. ג. $\ell: (1, 2, 4) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 + 2\sqrt{3}\right)$
- (12) $\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$
- (13) א. $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}$. ב. $\vec{u} = (5, 1)$ (יש עוד). ג. לא.
- (14) א. הוכחה. ב. $f_x = 1, f_y = 0$. ג. $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$
- (15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8, 32, 2)$. ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0.
- (16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u} = (4, 4, -32)$. ד. בכיוון הווקטור $(8, 32)$.
- (17) $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (18) $\nabla f(0, 2, 4) = (2, -3, 1)$
- (19) א. $\frac{67}{5}$. ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)^{\frac{1}{3}}$
- ד. $\text{Max} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = 12\left(2 / \sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}, \alpha = 54.73^\circ$
- (20) א. $m > 29$. ב. $\hat{u} = (21/29, -20, 29)$ (יש אחרים).

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 12 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

1. פונקציות סתומות - הפן הטכני 138
2. פונקציות סתומות - הפן התאורטי 141
3. שימושים גאומטריים 147

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

- (1) מצא את y' , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$, וחשב את $y'(0)$.
- (2) מצא את $y'(1)$, כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.
- (3) מצא את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.
- (4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$ חשב את $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.
- (5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$ חשב את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.
- (6) נתונה המשוואה $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$ הוכח כי $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$.
- (7) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^3 - 2xz + y = 0$ מצא $z_{xx}(1,1)$.
- (8) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצא :
 - א. $z_{xx}(2,1)$
 - ב. $z_{xy}(2,1)$
 - ג. $z_{yy}(2,1)$

$$(9) \quad \begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשב את u_x, v_x, u_y, v_y .

ב. הראה כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

$$(10) \quad \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשב את w_x, w_y .

ב. חשב y_x, y_w .

$$(11) \quad \begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

הוכח כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

$$(12) \quad \begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = f(u) \\ -x \sin u + y \cos u = f'(u) \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

הוכח כי:

$$a. \quad (z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$$

$$b. \quad z_{xy} = z_{yx}$$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (6)$$

$$z_x(1,1) = -16 \quad (7)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, z_{yy}(2,1) = 4 \quad (8)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left(uv \neq \frac{1}{8} \right) \text{ א.} \quad (9)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3uv, \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2}(v+u) \quad (u \neq v) \text{ א.} \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2uv}{v+u}, \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{2}{3(v+u)} \quad (u \neq \pm v) \text{ ב.}$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (11)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (12)$$

פונקציות סתומות – הפן התאורטי

שאלות

(1) נתונה המשוואה $y^5 + y^3 + y = x^2 - 1$.

א. הוכח שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מגדירה

פונקציה $y = f(x)$.

ב. חשב את $f'(2)$.

ג. בדוק האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס בנקודה $(-2,1)$.

ד. הוכח שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

(2) נתונה המשוואה $x^2 + y + e^y = 17$.

א. הוכח שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מגדירה

פונקציה $y = y(x)$.

ב. בדוק האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורד בנקודה בה $x = 4$.

ג. הוכח ש-מ.פ.ס מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.

ד. הוכח שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

ה. השווה בין התוצאות של סעיף ג' ושל סעיף ד'.

(3) נתונה המשוואה $y^3 - x^3 - 3y^2 + 6x^2 + 3y - 12x + 7 = 0$.

א. בדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.

ב. האם המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה?

ג. האם תשובתך בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובתך בסעיף א'?

(4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדר פונקציה $F(x, y)$ מתאימה,

ובדוק האם קיימת נקודה (x_0, y_0) , כך שמתקיימים תנאי מ.פ.ס.

בדוק בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2 + y^2 + 4 = 0$

ב. $xy - 40x = 100$

ג. $x^2 - y^2 = 3$

- (5) נתונה המשוואה $2x^3 + y^3 - 6xy = 0$.
- מצא את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - חשב את y' עבור נקודות אלה.
 - מה תוכל לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
 - השתמש בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבע, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
- (6) נתונה המשוואה הבאה: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$).
- מצא את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - חשב את y'' עבור נקודות אלה.
- (7) נתונה המשוואה $x^2 + y^2 = R^2$.
- מצא את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתומות, קבע האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשוואה מתארת פונקציה $y = f(x)$. עשה זאת בשתי דרכים:
- על ידי תיאור גרפי של העקום.
 - על ידי חישוב.
- (8) נתונה המשוואה $ax^4 + y^4 - xy = 0$, כאשר a קבוע ממשי.
- ידוע שהנקודה $(x_0, 0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה.
- מצא את x_0 ואת הקבוע a .
 - האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצא אותן.
 - השתמש בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבע, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
 - הוכח, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x .

(9) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

- מצא את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
- חשב את y' עבור נקודות אלה.
- מה תוכל לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- השתמש בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבע, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
- ללא שימוש בתוכנה גרפית, קבע האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

(10) נתונה המשוואה $(e-2)\ln x + \ln y = y-1$.

- בדוק האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה (e, e) .
- כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $x = e$?
- האם תשובתך בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובתך בסעיף א'?
- מצא את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.
- חשב את הנגזרת בנקודות הנ"ל.
- השתמש בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$.
- חזור על סעיף ו', רק הפעם תן הוכחה ללא איור.

(11) נתונה המשוואה $y^3 + 6x \sin y = -8$, ונתונה נקודה $(0, -2)$.

- הוכח שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x)$ בסביבת הנקודה.
- פתח את $y(x)$ לטור מקלורן מסדר 2.

(12) ענה על הסעיפים הבאים:

- נסח את משפט הפונקציות הסתומות עבור $x = g(y)$.
- נתונה המשוואה $x = \ln(x^2 + y^2)$.
- הוכח כי קיימת סביבה של הנקודה $(0, 1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y , $x = g(y)$.
- חשב את $g'(1)$.

13 נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. הראה כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x

כפונקציה של y , $x = g(y)$.

ב. הוכח שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $g(y)$.

14 בסעיפים א-ב, האם המשוואה $3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(-1, 1, 2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x, z)$ בסביבת הנקודה $(-1, 1, 2)$?

ג. הוכח שהפונקציה $y = y(x, z)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1, 2)$.

15 נתונה המשוואה $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 3z - 1$.

בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(1, 2, 0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(4, 4, 1)$?

ג. הוכח, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתומה

$z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(4, 4, 1)$.

16 נתונה המשוואה $\sin(x + y) + \sin(y + z) = 1$.

מצא נקודה שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x, z)$,

ומצא את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

17 נתונה מערכת המשוואות:

$$1) x = u + v, \quad 2) y = u^2 + v^2, \quad 3) w = u^3 + v^3$$

א. בדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x, y)$,

בנקודה $(x, y, u, v, w) = (1, 1, 0, 1, 1)$.

במידה שכן, חשב בנקודה את w_x, w_y .

ב. חזור על סעיף א', עבור הנקודה $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$, שבה מערכת

המשוואות מגדירה פונקציה $w = w(x, y)$?

במידה שכן, חשב בנקודה את w_x, w_y .

ד. מצא את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה

עבור $w = w(x, y)$.

18) נתונה מערכת המשוואות :

$$1) x = a \cos \phi \cos \theta, \quad 2) y = b \sin \phi \cos \theta, \quad 3) z = c \sin \theta \quad (a, b, c > 0)$$

א. בדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi = \phi(x, y)$,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשב בנקודה את ϕ_x, ϕ_y .

בדוק תשובתך על ידי חישוב ישיר.

ב. בדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z = z(\phi, x)$,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשב בנקודה את z_ϕ, z_x .

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$. ג. כן. ד. הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. העקום יורד. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. תוצאת סעיף ד' טובה יותר.

3) א. לא מתקיימים. ב. כן. ג. לא.

- 4 א. לא קיימת. ב. הנקודה (1,140) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
ג. הנקודה (2,1) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
- 5 א. כל נקודה (x, y) שעל המשוואה, ואשר שונה מהנקודות $(0,0)$, $(2,2)$.
ב. $y' = -\frac{2x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$ ג. כלום! ד. לא.
- 6 א. כל נקודה על העקום הנתון אשר שונה מהנקודות $(0,0)$, $(\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a})$.
ב. $y'' = -\frac{\left[2x - a\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)\right](y^2 - ax) - \left[2y\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right) - a\right](x^2 - ay)}{(y^2 - ax)^2}$
- 7 א. כל הנקודות על המעגל אשר שונות מהנקודות $(R,0)$, $(-R,0)$.
ב. לא קיימת סביבה כנדרש.
- 8 א. $x_0 = \frac{1}{2}$, $a = 3$ ב. כן, $(0,0)$, $(-0.5, -0.5)$.
ג. לא. ד. שאלת הוכחה.
- 9 א. כל נקודה (x, y) שעל $xy = \ln y - \ln x + 1$, ואשר שונה מהנקודה $(1,1)$.
ב. $y' = -\frac{y + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{y}}$ ג. כלום! ד.ה. לא קיימת.
- 10 א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא. ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה $(1,1)$.
- ה. $y'(x) = \frac{(2-e)y}{x(1-y)}$ $(x > 0, y > 0, (x, y) \neq (1,1))$
ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.
- 11 א. שאלת הוכחה. ב. $p_2(x) = -2 + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot x + \frac{1}{8} \sin 2(\sin 2 - 2 \cos 2)x^2$
- 12 א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה. ג. $g'(1) = -2$
- 13 א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- 14 א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.
- 15 א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.
- 16 הנקודה היא $(0,0,0.5\pi)$ והנגזרות הן: $y_x(0,0,0.5\pi) = -1$, $y_z(0,0,0.5\pi) = 0$
- 17 א. $\frac{\partial w}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{2}$, $\frac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0$ ב. לא מתקיימים.
- ג. $w_x(2,2) = -3$, $w_y(2,2) = 3$ ד. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{2}x^2\right\}$
- 18 א. $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{b}{a\sqrt{3}}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{b}$ ב. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2c}{a}$, $\frac{\partial z}{\partial \phi} = -c\frac{\sqrt{3}}{2}$

שימושים גאומטריים

שאלות

- (1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ ($z < 0$).
מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה $x = -2, y = 1$.
- (2) מצא משוואה של מישור משיק למשטח $xyz = 8$ בנקודה $(-2, 2, -2)$,
וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.
- (3) מצא מישור המשיק למשטח $x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2$,
המקביל למישור $x + 8y + 18z = 0$.
- (4) למשטח $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.
מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C, בהתאמה.
נסמן: $O = (0, 0, 0)$.
הוכח: $OA + OB + OC = a$.
(למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)
- (5) נתון המשטח $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$, ונתונה הנקודה $(1, 2, -1)$.
הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x + 3y - 2z = 10$.
בנקודה Q.
מצא את הנקודה Q.
- (6) הראה שהמשטח $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
המשטחים $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$, בנקודת החיתוך $(1, -1, 2)$.
- (7) מצא משוואת הישר המשיק לעקום $C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$,
בנקודה בה $t = \frac{1}{4}\pi$.

(8) ענה על הסעיפים הבאים :

א. נתון עקום $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$,

ונתונה נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$, המתקבלת מהצבת $t = t_0$ במשוואת העקום.

הוכח כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

ב. מצא את משוואת המישור הנורמל לעקום

$$C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$$

בנקודה בה $t = 0.25\pi$.

(9) נתונות שתי העקומות :

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

נתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח S , וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy .

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצא את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

(10) נתונות שלוש עקומות :

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

$$C_3: x = u + 2, y = u, z = u^2 - 1$$

נתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח S , וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy .

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח S ? נמק!

(11) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח שמשוואת הישר המשיק לעקום :

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה P שעליו, היא $\ell: P + t \cdot \nabla F(P) \times \nabla G(P)$.

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצא את משוואת הישר המשיק לעקום :

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

12) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח שמשוואת המישור הנורמלי לעקום $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

בנקודה P שעליו, היא $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$,

כאשר $(a, b, c) = \overrightarrow{\nabla F}(P) \times \overrightarrow{\nabla G}(P)$.

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצא את משוואת המישור הנורמלי לעקום :

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, על ידי $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2 + v^2$.

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u, v) = (1, 0)$.

14) מצא ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u$$

$$u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi]$$

באיזה משטח מדובר?

תשובות סופיות

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (1)$$

$$x - y + z + 6 = 0, \quad (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (2)$$

$$x + 8y + 18z = 21, \quad x + 8y + 18z = -21 \quad (3)$$

שאלת הוכחה. (4)

$$Q(7, -9, -15) \quad (5)$$

שאלת הוכחה. (6)

$$\ell: (x, y, z) = (3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + s(3\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \quad (7)$$

$$3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2} \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (8)$$

$$x - 2z = 1 \quad \text{ב.} \quad P(1, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (9)$$

(10) א. נקבל שנקודת החיתוך היא $P(1, -1, 0)$. ב. לא.

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(3, 16, 2) \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (11)$$

$$3x + 16y + 2z = -11 \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (12)$$

$$-2x + z = -1 \quad (0, 0, 0) \quad \text{כל נקודה, למעט} \quad (13)$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1,} \quad (14)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{שנוסחתו:}$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 13 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים 151
2. הדיפרנציאל השלם - נוסחת הקירוב הליניארי 153

נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

שאלות

פתח את הפונקציות בשאלות 1-4 לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a, b) :

$$(a, b) = (1, 2) \quad f(x, y) = x^2 y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = (1 + y) \ln(1 + x - y) \quad (2)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (3)$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y}{x + y^2}} \quad (4)$$

(5) בעזרת התוצאה של שאלה 2, חשב בקירוב את $\ln(1.5)$.

(6) בעזרת התוצאה של שאלה 3, חשב בקירוב את e^3 .

(7) בעזרת התוצאה של שאלה 4, חשב בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

תשובות סופיות

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 14y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

הדיפרנציאל השלם – נוסחת הקירוב הליניארי

שאלות

- (1) חשב בקירוב: $\ln(0.01^2 + 0.99^2)$.
- (2) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצא בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.
- (3) מחשבים את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו. ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%, ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.
- (4) נתונות שתי צלעות במלבן $a = 10\text{cm}$, $b = 24\text{cm}$. חשב את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב-4mm ואת הצלע b יקצרו ב-1mm.
- (5) מודדים את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

תשובות סופיות

- (1) $\cong -0.01$
- (2) $2\frac{7}{3200}$
- (3) 8%
- (4) שינוי מדויק: 0.06472, שינוי מקורב: 0.06153.
- (5) 5%

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 14 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 154

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-8,

מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \quad \text{נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4.$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$, וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

- 12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 144 + 16P_1 - 24P_2$, $Q_2 = 116 - 30P_1 + 20P_2$. כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

- 13) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$.
 א. הוכח שהנקודה $(0, 0)$ היא נק' קריטית.
 ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבע עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכל, או שלא ניתן לדעת.

- 14) מצא שני מספרים, $b > a$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

- 1) $(-0.5, 1)$ אוכל; $(1.5, -3)$ מינימום.
 2) $(1, 2)$ מינימום; $(-1, -2)$ מקסימום; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכל.
 3) $(0, 0)$ אוכל; $(1, 1)$ מינימום.
 4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום; $(1, 0)$ מקסימום; $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$ אוכל.
 5) $(0, 2)$ מקסימום.
 6) $(4, 4)$ מקסימום.
 7) $(-0.5, 4)$ מקסימום.
 8) אין נקודות קריטיות.
 9) $z = 4$, $z = 3$
 10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
 11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
 12) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$ רווח מקסימלי 288\$.
 13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = 2$, $a = -2$, לא ניתן לדעת; $a > 2$, $a < -2$ אוכל; $-2 < a < 2$ מינימום.
 14) $a = -6$, $b = 4$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 15 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) - ריבועים פחותים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה רבת משתנים.....156

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות 1-5 :

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

(6) מצא מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 1$, לפרבולה $y = -x^2 + 2x$.
 * לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות 7-11 נתונות n נקודות, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y = h(x)$, כך ששכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

$$(7) \quad h(x) = ax + b, \text{ הדגם עבור הנקודות } (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5).$$

$$(8) \quad h(x) = ax^2 + bx, \text{ הדגם עבור הנקודות } (-1, 2), (2, 0), (0, -2).$$

$$(9) \quad h(x) = ax + \frac{b}{x}, \text{ הדגם עבור הנקודות } (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4).$$

$$(10) \quad h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}, \text{ הדגם עבור הנקודות } (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90).$$

(11) $h(x) = ax^2 + bx + c$, הדגם עבור הנקודות
 $(1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12)$.

(12) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.
מצא ישר $y = ax + b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר
והנקודות יהיה מינימלי.
עליך להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות 11 ו-12 ניתן להניח ש- a ו- b , המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a = 0, f_b = 0$,
נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$.

תשובות סופיות

(1) (t, t) לכל t ממשי, מקסימום.

(2) $(0, 0)$ מקסימום.

(3) אין קיצון. $(1, 2)$ אוקף.

(4) אין קיצון. $(1, 2)$ אוקף.

(5) $(0.5, 1, 1)$ מינימום.

(6) 0.375

(7) $y = 0.88x + 0.3$

(8) $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$

(9) $y = 2.032x + \frac{1.5039}{x}$

(10) $y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2}$

(11) $y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824$

(12)
$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 16 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ.....158

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות 1-4 מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון :

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$$

$$(2) \quad f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(3) \quad f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$(4) \quad f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$$

$$(5) \quad \text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12, \text{ כאשר } x, y > 0.$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \quad \text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \text{ כאשר } x, y \geq 0.$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12,$$

מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$(8) \quad \text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצא את הנקודות}$$

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית

הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \quad \text{מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0,$$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax + by + c = 0, \text{ הוא } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- (10)** מוישליה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$. מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח. מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$, והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישליה.
- (11)** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$. מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח. לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.
- (12)** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$. לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$. דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.
- (13)** ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2$, $P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) , המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).
- (14)** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x, y)\} \text{ s.t. } p_1x + p_2y = I$. תהי (x^*, y^*) נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה. הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda = \frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$(6, 2) \quad (7)$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (8)$$

$$7 / \sqrt{45} \quad (9)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (10)$$

$$\max(6, 2) \quad (11)$$

$$\max(2, 3) \quad (12)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13)$$

$$(14) \text{ שאלת הוכחה.}$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 17 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים 161

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

- (1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.
- (2) מצא על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.
- (3) ענה על הסעיפים הבאים :
 - א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.
 - ב. מצא נק' על המישור $-2x - 2y + z = 0$ שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1, 2, 3)$.
 - ג. בדוק תשובתך על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.
- (4) מצא את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.
- (5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ למישור $3x + 4y + 12z = 288$. רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- (6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.
- (7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2, 4, 4)$, והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2, -4, -4)$.
- (3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$
- (5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 18 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 163

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

- (1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$.
- (2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$.
- (3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$.
- (5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$.

תשובות סופיות

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 19 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים כפולים.....164
2. החלפת סדר אינטגרציה.....167

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-3 :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr \quad (3)$$

באינטגרל $\iint_D f(x,y) dx dy$, הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(1,1), A(1,0), O(0,0) \quad (4)$$

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(-2,1), A(2,1), O(0,0) \quad (5)$$

$$D - \text{טרפז בעל הקודקודים : } C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0) \quad (6)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq 1 \quad (7)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq y \quad (8)$$

$$D = \{ (x,y) \mid y \leq 1, y \geq x^2 \} \quad (9)$$

$$D = \{ (x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} \quad (10)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 11-15 :

$$(11) \iint_D xy^2 dx dy, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י הפרבולה } y^2 = 4x \text{ והישר } x = 1.$$

$$(12) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}}, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה } (2, 2).$$

$$(13) \iint_D |xy| dx dy, \text{ כאשר } D \text{ עיגול בעל הרדיוס } a, \text{ שמרכזו בראשית.}$$

$$(14) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ כאשר } D \text{ מקבילית בעלת הצלעות } y = 3a, y = a, y = x + a, y = x \text{ (} a > 0 \text{).}$$

$$(15) \iint_D \frac{\cos y}{y^2 + \pi^2} dA, \text{ כאשר } D \text{ התחום הכלוא בין } x = -1, y = 0, y = \pi, y = \pi\sqrt{x}.$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad 1$$

$$(2) \quad \frac{1}{40}$$

$$(3) \quad \frac{a^3}{3}\pi$$

$$(4) \quad \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$

$$(5) \quad \int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$$

$$(6) \quad \int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx$$

$$(7) \quad \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(8) \quad \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(9) \quad \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

$$(10) \quad \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \\ + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(11) \quad \frac{32}{21}$$

$$(12) \quad 8 - \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$(13) \quad \frac{a^4}{2}$$

$$(14) \quad 14a^4$$

$$(15) \quad 0$$

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החלף סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות 1-6 :

$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx \quad (6)$$

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx \quad (5)$$

חשב את האינטגרלים הבאים (רמז : שנה את סדר האינטגרציה) :

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy \quad (8)$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy \quad (7)$$

$$\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2) dy dx \quad (10)$$

$$(x, y \geq 0) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2} y dx dy \quad (9)$$

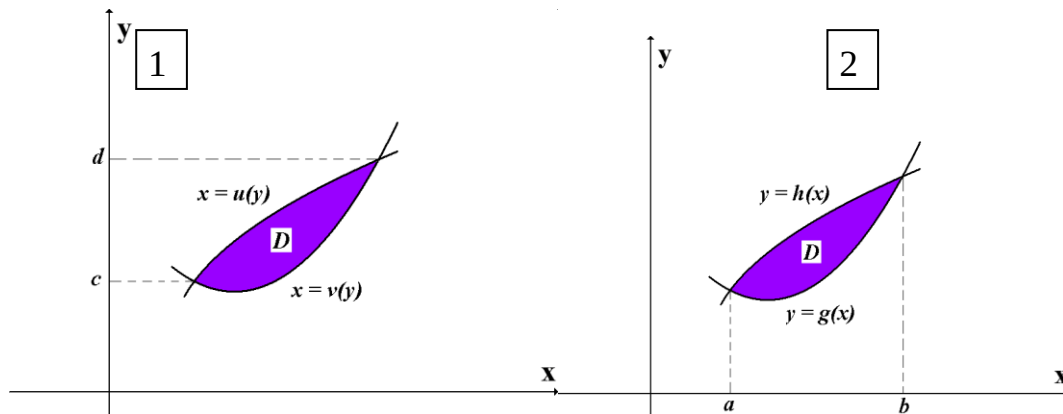
הערות סימון

1

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

2

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



לתשומת ליבכם, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dx dy \quad \text{כך:} \quad \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

הוא חילופי. כלומר הרישומים $dx dy$ ו- $dy dx$ זהים.

תשובות סופיות

$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx \quad (6)$$

$$\frac{1}{3}(e^8 - 1) \quad (7)$$

$$\frac{241}{60} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4}(e - 2) \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 16) \quad (10)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 20 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

1. שימושי האינטגרל הכפול.....170

שימושי האינטגרל הכפול

שאלות

בשאלות 1-4 חשב את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים:

$$x + y = 2, \quad x^2 - 4y = 4 \quad (1)$$

$$(a > 0) \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (2)$$

$$y^2 = 9 - x, \quad y^2 = 9 - 9x \quad (3)$$

$$x + y = 3, \quad y^2 = 4x \quad (4)$$

בשאלות 5-10 חשב את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים:

$$z = 1 + x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (5)$$

$$z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = 1, \quad y = x^2 \quad (6)$$

$$(x > 0) \quad z = 0, \quad z = x^2 + y, \quad y = 0.5x, \quad y = 2x, \quad y = \frac{2}{x} \quad (7)$$

$$z = 0, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \quad 2y^2 = x \quad (8)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y \quad (9)$$

$$z = x + y, \quad z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (10)$$

11 ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$,

יש פונקציית צפיפות $\delta(x, y) = xy$.

א. חשב את מסת הלוח.

ב. חשב את מרכז הכובד של הלוח.

12 ללוח דק בצורת מלבן $R = \left\{ (x, y) \mid -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \right\}$,

יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).

חשב את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- z .

בטא את תשובתך באמצעות המסה של הלוח, M .

13 מצא את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2 + z^2 = 4$, הנמצא מעל למלבן

$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}$, שבמישור xy .

תשובות סופיות

(1) $\frac{64}{3}$

(2) $a^2 \left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2 \right)$

(3) 32

(4) $\frac{64}{3}$

(5) $\frac{5}{6}$

(6) $\frac{88}{105}$

(7) $\frac{17}{6}$

(8) $16\frac{1}{5}$

(9) $\frac{8}{3}$

(10) 36

(11) א. $\frac{1}{24}$ ב. $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)$

(12) $\frac{M(a^2 + b^2)}{12}$

(13) $\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5}-1)$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 21 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות 173

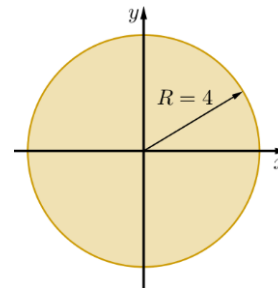
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

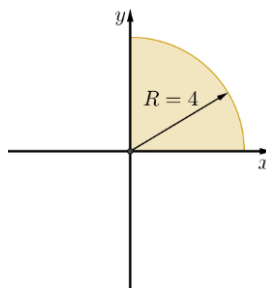
(1) חשב $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשב את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

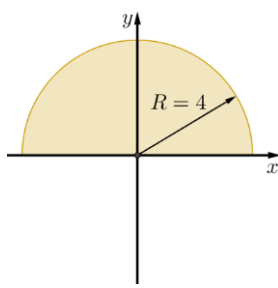
א.



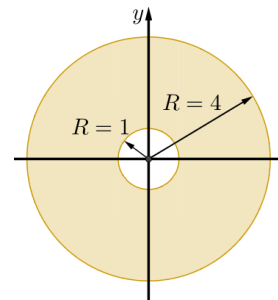
ב.



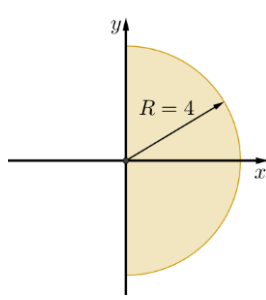
ג.



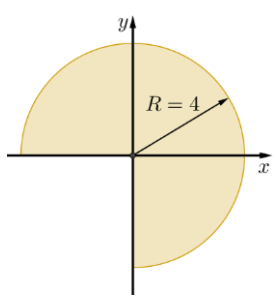
ד.



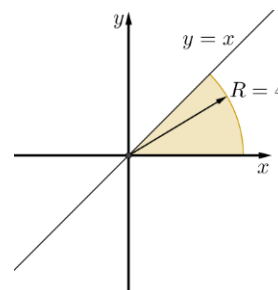
ה.



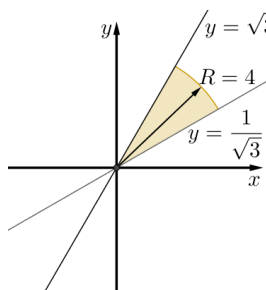
ו.



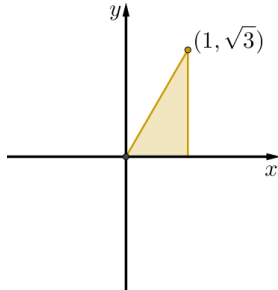
ז.



ח.



ט.



חשב את האינטגרלים בשאלות 2-17, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות :

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (7)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad (6)$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad (9)$$

$$\int_0^6 \int_0^y x dx dy \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (11)$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad (13)$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (12)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy \quad (15)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx \quad (17)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy \quad (16)$$

בשאלות 18-20 חשב את נפח הגוף המתואר :

(18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ לבין הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

(19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 2y$, בין החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

(20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = x$, בין הפרבולואיד $z = 1 - x^2 - y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

(21) חשב את שטח התחום החסום על ידי $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

- (1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$
- ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$
- (2) א. $\frac{\pi}{2}$ ב. π ג. $\frac{\pi}{8}$ ד. $\frac{\pi}{2}$
- (3) π (4) $\frac{\pi}{8}$ (5) $\frac{\pi}{2}$
- (6) πa^2 (7) 2π (8) 36 (9) $\frac{4}{3}$
- (10) $\pi \ln \frac{e}{2}$ (11) $\pi(4-\pi)$ (12) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e}$ (13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$
- (14) $\frac{\pi}{2} + 1$ (15) $-\frac{4}{5}$ (16) $\pi \ln \frac{4}{e}$ (17) π
- (18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (19) $\frac{32}{9}$
- (20) $\frac{5\pi}{32}$
- (21) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 22 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרל כפול.....176

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

(1) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=3-x$, $y=1-x$, $y=x-1$, $y=x$.

(2) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy} dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=x$, $y=0.5x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$.

(3) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$, כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

(4) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y) dA$, כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $A(-1,3)$, $B(1,-3)$, $C(3,-1)$, $D(1,5)$.

(5) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2} dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(6) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2 dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$, $xy^2=1$, $xy^2=2$.

(7) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y} dA$, כאשר $R = \{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 1\}$.

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(e^2 - e) \ln 2 \quad (2)$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin 2 \quad (3)$$

$$192 \quad (4)$$

$$96\pi \quad (5)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$e - \frac{1}{e} \quad (7)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 23 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים ושימושיהם 178

אינטגרלים משולשים ושימושיהם

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-4 :

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz dy dx dz \quad (1)$$

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dx dz dy \quad (2)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}, \iiint_B xyz^2 dV \quad (3)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq 1 + x + y\}, \iiint_B 6xy dV \quad (4)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 5-8, על ידי שינוי סדר אינטגרציה :

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy dx dz \quad (6)$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz \quad (7)$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx \quad (8)$$

בשאלות 9-14 חשב את נפחי הגופים החסומים על ידי המשטחים:

$$z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0 \quad (9)$$

$$z = 0, z = x^2 + y^2, y = 1, y = x^2 \quad (10)$$

$$(x \geq 0) \quad z = 0, z = x^2 + y, y = 0.5x, y = 2x, y = \frac{2}{x} \quad (11)$$

$$z = 0, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, 2y^2 = x \quad (12)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = y \quad (13)$$

$$z = x + y, z = 6, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (14)$$

(15) חשב את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r . הנח שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל, כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x, y, z) = kz$ ($k > 0$).

(16) חשב את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה) $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$, סביב ציר ה- z . בטא את תשובתך באמצעות המסה של התיבה, M .

תשובות סופיות

(1) 1

(2) $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$

(3) $\frac{27}{4}$

(4) $\frac{65}{28}$

(5) $2 \sin 4$

(6) $3e - 6$

(7) 4

(8) $\frac{\sin^2 4}{2}$

(9) $\frac{5}{6}$

(10) $\frac{88}{100}$

(11) $\frac{17}{6}$

(12) $16\frac{1}{5}$

(13) $\frac{8}{3}$

(14) 36

(15) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{2h}{3}\right), M = \frac{1}{2}\pi k h^2 r^2$

(16) $\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 24 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

181	1. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)
183	2. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)
184	3. אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר
186	4. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)
188	5. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

$$(1) \quad \text{חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^4 - x}{\ln x} dx$$

$$(2) \quad \text{חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx \quad (m, n > 0)$$

$$(3) \quad \text{חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$(4) \quad \text{חשב את האינטגרל } \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx$$

$$(5) \quad \text{הוכח כי } \int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx = \pi \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \right) \quad \text{עבור } |\alpha| < 1$$

$$(6) \quad \text{חשב } \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx \quad \text{עבור } \alpha \neq \pm 1$$

$$(7) \quad \text{חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(8) \quad \text{חשב את האינטגרל } \int_0^1 x^p (\ln x)^m dx \quad (p > 0, m \in \mathbb{N})$$

$$(9) \quad \text{חשב את האינטגרל } \int_0^\pi \frac{1}{(2 - \cos x)^2} dx$$

תשובות סופיות

$$\ln 2.5 \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{8} \ln 2 \quad (3)$$

$$2\pi \quad (4)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \begin{cases} 0 & |\alpha| < 1 \\ 2\pi \ln |\alpha| & |\alpha| > 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\pi + 2}{8} \quad (7)$$

$$\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}} \quad (8)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{27}} \quad (9)$$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

(1) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, עבור $b > a > 0$.

(2) חשב את האינטגרל $\int_0^\pi \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x} dx$, עבור $b, a > 1$.

(3) הוכח כי $\int_0^{2\pi} [(b - \sin x)^2 - (a - \sin x)^2] dx = 2\pi(b^2 - a^2)$, לכל a ו- b .

הערה: פתור בשתי דרכים, גם ע"י אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם ע"י חישוב ישיר.

(4) בהינתן הנוסחה: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \sin x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$, עבור $\alpha > 1$,

הוכח כי: $\int_0^{2\pi} \ln \left(\frac{5 + 3 \sin x}{5 + 4 \sin x} \right) dx = 2\pi \ln \left(\frac{9}{8} \right)$.

תשובות סופיות

(1) $\ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right)$

(2) $\pi \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה

אינטגרל לא אמיתי תלוי בפרמטר

הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שילמדו בהמשך. חלק מהמרצים מסתפק רק בצד הטכני החישובי ולא נכנס לנושא זה כלל. בררו עם מתרגל ו/או מרצה הקורס האם אתם נדרשים לנושא זה. במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים. בהצלחה!

שאלות

(1) נתון האינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(kx) dx$, כאשר k ממשי.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $0 < a \leq \alpha$.

(2) נתון האינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + \alpha)^n} dx$, כאשר n טבעי.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha \geq 1$.

(3) הוכח שהאינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ מתכנס במידה שווה עבור $\alpha \geq 0$.

(4) נתון האינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2} dx$.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α .

(5) נתון האינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$ עבור $\alpha \geq k > 0$.

א. חשב את האינטגרל והוכח שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \geq k > 0$ המקיים.

$$(6) \quad \text{נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל n טבעי ולכל α המקיים $\alpha \geq k > 0$.

$$(7) \quad \text{נתון כי } \phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2} dx, \text{ כאשר } \alpha \geq k > 0.$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

$$(8) \quad \text{נתון האינטגרל } \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2} dx$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \geq k > 0$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר GooL.co.il

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

(1) חשב את האינטגרל $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$

(2) הוכח שלכל n טבעי מתקיים:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{\pi}{2}$$

(3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

(4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^{\infty} x^{10} e^{-x^2} dx$

ג. חשב את האינטגרל $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$ ($\alpha > 0$).

ב. בעזרת סעיף א' חשב את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

תשובות סופיות

(1) $n!$

(2) שאלת הוכחה.

(3) א. $\sqrt{2\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(4) א. אם n אי-זוגי אז 0, ואם n זוגי אז $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot \sqrt{2\pi}$

ב. $\frac{945}{64} \sqrt{\pi}$ ג. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(5) א. $-\arctan \alpha + \frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{2}$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

(1) חשב: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, עבור $b > a \geq k > 0$.

(2) חשב: $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$, עבור $b > a \geq k > 0$.

(3) חשב: $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.

(4) הוכח כי עבור $b > a > 0$ ו- $r \in \mathbb{R}$, מתקיים $\int_0^{\infty} \cos rx \frac{a^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}$.

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin rx}{x} dx = \arctan \frac{r}{\alpha}$, $(\alpha, r > 0)$.

ב. הוכח כי $\int_0^{\infty} \left[e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos rx}{x^2} \right] dx = \arctan \frac{r}{\alpha} - \frac{a}{2} \ln \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right)$, $(\alpha, r > 0)$.

ג. הוכח כי $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \arctan \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)$, $(\alpha > 0)$.

(6) הוכח:

א. $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

ב. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

(7) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$

(8) חשב : $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

תשובות סופיות

(1) $\ln \frac{b}{a}$

(2) $\frac{\pi}{2}(b-a)$

(3) π

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{4}$

(8) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$