

מבוא למשוואות דיפרנציאליות



תוכן העניינים

1.	משוואות ליניאריות מסדר שני	1
16.	משוואות מסדר ראשון	16
38.	משוואות ליניאריות מסדר n	38
47.	מערכת משוואות ליניאריות	47
57.	שימושים של משוואות דיפרנציאליות	57
65.	בעיות שטורם ליוביל	65

מבוא למשוואות דיפרנציאליות

פרק 1 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה 1
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים 3
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל" 5
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם" 7
5. וריאציית פרמטרים 9
6. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר (ללא ספר)
7. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל 10
8. הוורונסקיאן ושימושו 11
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני 13
10. השיטה האופרטורית 14

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy'y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y''y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[\frac{c^2 (x + k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k); y = c \quad (8)$$

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-11 :

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 1, \quad 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3; \quad y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2} y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

(12) נתונה המד"ר: $yy'' + (y')^2 = 0$.

א. הראה כי $y_1 = 4$ ו- $y_2 = \sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראה כי הפתרון $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.

האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

(1) $y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x}$

(2) $y = c_1 + c_2 e^{4x}$

(3) $y = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$

(4) $z = e^x$

(5) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$

(6) $x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}}$

(7) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

(8) $y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x]$

(9) $y = e^2 \sin 3x$

(10) $y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[c_1 \cos \left(\frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left(\frac{2}{5} x \right) \right]$

(11) $y = 4e^{-\frac{|x|}{a}}$

(12) שאלת הוכחה.

השוואות מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4\sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

השוואות מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

וריאצית פרמטרים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[\frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} \left[2(x+1)^{3/2} \right] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

משוואה לינארית, כללית – שיטת ד'אלמבר – שיטת הפתרון השני – שיטת אבל

שאלות

(1) פתור $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$,

כאשר ידוע $y_1(x) = e^{2x}$.

(2) פתור $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

(3) הסבר את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגם על המד"ר:

$$(0 < x < 1), \quad (1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}$$

כאשר ידוע ש- $y_1(x) = e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

(1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

(2) $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

(3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיאן ושימושו

שאלות

- (1) האם ייתכן כי $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = \sin x$ הם שני פתרונות של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ עם מקדמים רציפים בקטע $[0, \pi]$?
- (2) הראו כי הפונקציות $y_1(x) = \sin x^2$, $y_2(x) = \cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ בקטע $(-4, \infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x = 0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?
- (3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ הן פתרונות של המשוואה $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$ בקטע $(-\frac{1}{2}, \infty)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?
- (4) נתונות שתי פונקציות $y_1 = x^3$, $y_2 = |x^3|$ בקטע $[-4, 4]$.
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy'' - 2y' = 0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?
- (5) ענה על הסעיפים הבאים:
א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I .
הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$ הם פתרונות שלה.
ב. רשום משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x > 0$, שהפונקציות $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^4$ הן פתרונות שלה.

- (6) נתון כי $y_1(x), y_2(x)$ הם פתרונות של המד"ר $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$,
 בקטע I , כאשר p, q רציפות בקטע I .
 הראו, כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c) = y_2(c) = 0$,
 אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

- (1) לא.
 (2) $W = -2x$
 (3) כן.
 (4) א. $W = 0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.
 (5) א. שאלת הוכחה. ב. $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$
 (6) שאלת הוכחה.

משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

שאלות

(1) נתונה המשוואה $y'' - 4y = 12x$.

א. פתור את המשוואה.

ב. מצא פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$$

ג. נסה למצוא פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תן דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0) = 1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

(2) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

הראה כי $y_1(x) = 0$ ו- $y_2(x) = x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

(3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x = 0$, כך שהפונקציות $y = 4x$ ו- $y = \sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

(1) א. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 3x$ ב. $y = 4e^{2x} - 3e^{-2x} - 3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו ל: www.GooL.co.il.

(2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

משוואה לינארית לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – השיטה האופרטורית

שאלות

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדוק עם מרצה הקורס אם אתה נדרש אליו.

בשאלות אלו הסימון הוא: $ay'' + by' + cy = Q(x) \Leftrightarrow (aD^2 + bD + c)y = Q(x)$.

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (6)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2\cos x \cos 2x \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

מבוא למשוואות דיפרנציאליות

פרק 2 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא	(ללא ספר)
2. הפרדת משתנים	16
3. משוואה הומוגנית	18
4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$	20
5. משוואה מדויקת	21
6. גורם אינטגרציה	23
7. משוואה לינארית מסדר ראשון	26
8. משוואת ברנולי	28
9. משוואת ריקטי	29
10. הצבות שונות ומשונות	30
11. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד	31
12. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון	34
13. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה	36

הפרדת משתנים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2)=1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1)=-1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi)=1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0)=5 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0)=1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

משוואה הומוגנית

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2 y' = xy y' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xy e^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 : \text{נתונה המשוואה} \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n , על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

משוואה מהצורה $(ax + by + c)dx + (dx + ey + f)dy = 0$

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y+2} \quad (1)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} - 1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} + 1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

משוואה מדויקת

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-6:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0 \quad (7)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k , על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

גורם אינטגרציה

שאלות

(1) הראה שהמשוואה $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$ אינה מדויקת,

ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

(2) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$

אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

(3) הראה שהמשוואה $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$ אינה מדויקת,

ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x .

פתור את המשוואות בשאלות 4-9:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0 \quad (5)$$

$$(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0 \quad (6)$$

$$(y^2 - y)dx + xdy = 0 \quad (7)$$

$$(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0 \quad (8)$$

$$y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4} \quad (9)$$

$$(10) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \text{נתונה מד"ר לא מדויקת}$$

א. הוכח: אם $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכח: אם $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

$$(11) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } (y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$$

מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד. כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

$$(12) \quad \text{נתונה המשוואה } (5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0$$

מצא את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

$$(13) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

מצא תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

$$(14) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } (x^2y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0$$

מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$. כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

$$(15) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

א. מצא תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזר בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$.

$$(16) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

מצא תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (10)$$

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{ב.} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2 z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

משוואות ברנולי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

משוואות ריקטי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = 1 + (x - y)^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (1)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (3)$$

הצבות שונות ומשוונות

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y' = \cos(y - x) \quad (1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right); y(1) = 0 \quad (2)$$

$$y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4}, y(0) = 1 \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{\sin z} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right) \quad (2)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

(1) נתונה הבעיה $y(2) = -1$, $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$

- א. הוכח ש- $y_1(x) = -x + 1$, $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.
 קבע באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.
 ב. הסבר מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

(2) נתונה הבעיה $y(0) = 0$, $y' = \sqrt[3]{y} + 4$

- א. הוכח שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.
 ב. הוכח שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.
 ג. הוכח שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצא אותו.

(3) פתור את הבעיה $y(4) = 0$, $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$

(4) נתונה הבעיה $y(0) = 4$, $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$

- א. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.
 ב. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

(5) נתונה המד"ר $ydx = (2x + y^3)dy$

- א. הראו שעבור $x = x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון, ופתרו אותה ככזאת.
 ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית, מהן נקודות ההתחלה (x_0, y_0) , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד, העובר דרך (x_0, y_0) .
 צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
 מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0, y_0) ?

$$(6) \quad \begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו 3 קרובי פיקארד לפתרון הבעיה.
 ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).
 ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \rightarrow \infty$.

$$(7) \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases} \quad \text{כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה? } (x > 0)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה:}$$

- א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.
 ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.
 ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(9) \quad \begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה:}$$

- א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.
 ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.
 ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(10) \quad \begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(11) \quad \begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(12) \quad \begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

תשובות סופיות

- (1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.
- (2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
- (3) $y(x) = 0$
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.
ב. כל נקודת התחלה (x_0, y_0) , שעבורה $y_0 \neq 0$.
הקטע הארוך ביותר: $(0, \infty)$ או $(-\infty, 0)$.
- (6) א. $y_0(x) = 1, y_1(x) = 1 + x^2, y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$
ב. $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$. ג. הוכחה.
- (7) אחד.
- (8) א. $[-0.08, 0.08]$ ב. $[-0.1, 0.1]$ ג. הוכחה.
- (9) א. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5, 0.5]$ ג. הוכחה.
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

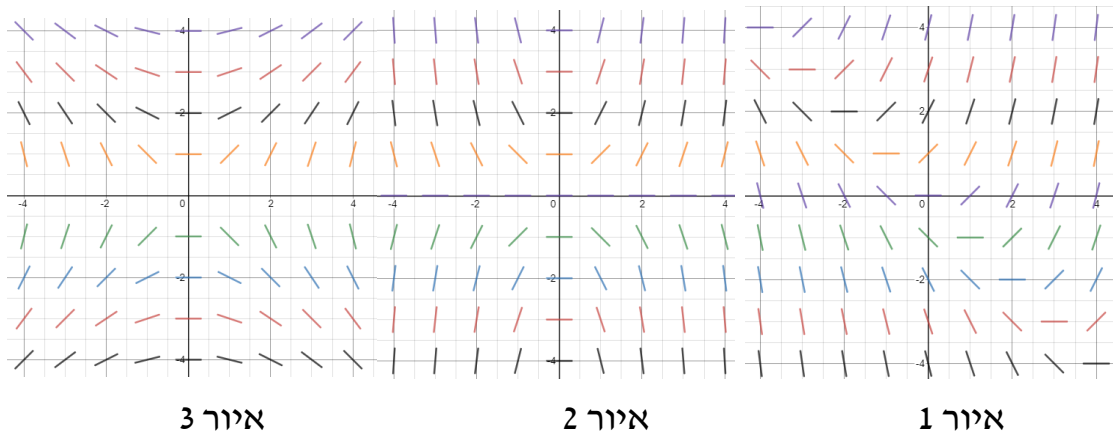
(1) שרטט שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y' = 2y - x$.

(2) התאם כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א. $y' = \frac{x}{y}$

ב. $y' = xy$

ג. $y' = x + y$



(3) נתונה המד"ר: $y' = y - x$, $y(0) = 2$.

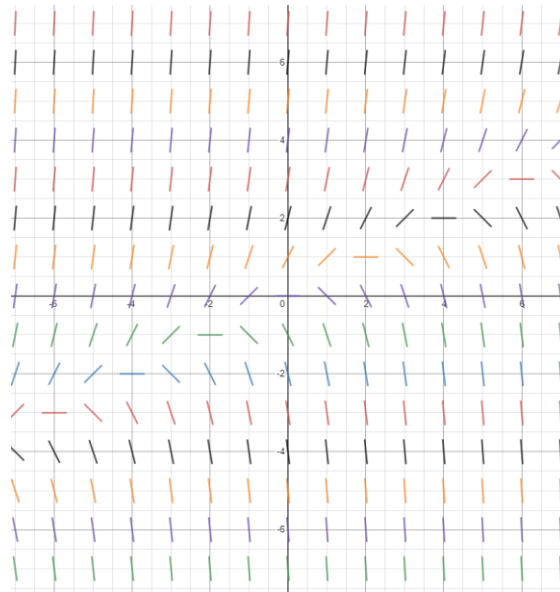
מצא בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.1$.

(4) נתונה המד"ר: $y' = x + y$, $y(1) = 2$.

מצא בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.2$.

תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

(3) $y(1) = 4.593$

(4) $y(2) = 6.95328$

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדוק עם מרצה הקורס אם אתה נדרש אליו.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$(p = y') \quad 4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(p = y') \quad x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$(p = y') \quad xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$(p = y') \quad y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$(p = y') \quad xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$(p = y') \quad (y > 0) \quad 6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left(\ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$\left(y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0 \quad (6)$$

מבוא למשוואות דיפרנציאליות

פרק 3 - משוואות ליניאריות מסדר n

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה מסדר שלישי 38
2. משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים 39
3. שיטת השוואת מקדמים 42
4. שיטת וריאציית הפרמטרים 44
5. משוואת אוילר מסדר שלישי (ללא ספר)
6. הוורונסקיאן ושימושיו 45
7. השיטה האופרטורית 46

משוואה חסרה מסדר שלישי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$(1) \quad y'y''' - (y'')^2 - 3y''(y')^2 - 4(y')^4 = -16y(y')^3$$

עם תנאי ההתחלה : $y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = -12$.

$$(2) \quad \begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y''y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y''y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = -1, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} 3y'''y - y'y'' &= 0 \\ y(1) &= 1, y'(1) = 3, y''(1) = 6 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} (y'y''' - 2(y'')^2)y^2 &= -(y')^4 \\ y &> 0 \\ y(1) &= y'(1) = y''(1) = 1 \end{aligned}$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \frac{1}{4} \ln |-3 + 4y| = x + \frac{1}{4} \ln 3$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$(3) \quad y = \tan x - 1$$

$$(4) \quad y = x^3$$

$$(5) \quad y = e^{x-1}$$

משוואות לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-15 :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (4)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (7)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (8)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (10)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (11)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (12)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (13)$$

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} y'''' - 3y''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = -19 \\ y'''(0) = -47 \end{cases} \quad (15)$$

16 נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6,

אשר אחד הפתרונות שלה הוא $x^2 e^x \cos 2x$.

א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה.

ב. מצא את המשוואה.

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (5)$$

$$y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \quad (6)$$

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x} \quad (9)$$

$$y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x] \quad (10)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \quad (11)$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x \quad (12)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \quad (13)$$

$$y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (14)$$

$$y = e^x - 2e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (15)$$

$$y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x] \quad (16)$$

$$y'''' - 6y''' + 27y'' - 68y' + 135y - 150y' + 125y = 0 \quad \text{ב.}$$

שיטת השוואת מקדמים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2\sin x - 4\cos x \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (3)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (4)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 2 \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (5)$$

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \quad (7)$$

שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x| \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x + 1 - \ln(e^x + 1)) + e^x (-\ln(e^x + 1)) + e^{2x} \left(-\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right) \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln |x| \quad (3)$$

הוורונסקיאן ושימושי

שאלות

- (1) האם קיימת מד"ר מהצורה $y'''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$, בעלת מקדמים רציפים בקטע $[-1, 1]$, כך שהפונקציות $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$ הן פתרונות שלה?
- (2) נתונות הפונקציות: $y_1(x) = 4 - x$, $y_2(x) = 4 + x$, $y_3(x) = 20 + x$.
 א. חשב את הוורונסקיאן של הפונקציות.
 ב. קבע האם הפונקציות תלויות בקטע $(-\infty, \infty)$.
 ג. ענה שוב על סעיף ב', בידיעה ששלוש הפונקציות הן פתרון של המד"ר $y'' = 0$.
- (3) פתור את הסעיפים הבאים:
 א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמים בקטע I , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I . הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע I , כך ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ הם פתרונות שלה.
 ב. רשום משוואה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$ הן פתרונות שלה.

תשובות סופיות

- (1) לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודה אחת $x = 0$.
 (2) א. $W = 0$. ב. הפונקציות תלויות. ג. הפונקציות תלויות.
 (3) א. שאלת הוכחה. ב. $x \neq 0$, $y'''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$.

השיטה האופרטורית

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 4e^x - 10e^{-2x} \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 10e^{4x} + 2e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)y = 10e^x + 4e^{2x} \quad (3)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = 24e^x + 81e^{4x} \quad (4)$$

$$(D^6 + D^4 + D^2)y = 104\sin(2x+1) + \cos(x+10) \quad (5)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = -5\sin 2x \quad (6)$$

$$(D^4 - 3D^3 + 6D^2 - 12D + 8)y = 30\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 48\cos^2 x - 16 \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1e^{0x} + c_2e^{-x} + c_3e^{3x} - e^x + e^{-2x} \quad (1)$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-5x} + \frac{5}{81}e^{4x} - \frac{1}{18}xe^x - \frac{1}{30} \quad (2)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{2x} + c_4xe^{2x} + 5x^2e^x + 2x^2e^{2x} \quad (3)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x + c_5e^{4x} - \frac{1}{3}x^4e^x + xe^{4x} \quad (4)$$

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x} + c_5e^{3x} + c_6e^{-3x} - 2\sin(2x+1) - \cos(x+10) \quad (5)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x + c_5e^{4x} + \frac{1}{500}[4\sin 2x - 22\cos 2x] \quad (6)$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x + \frac{5\sin x + 25\cos x}{26} + \frac{-3\cos 2x - 18\sin 2x}{37} + 1 \quad (7)$$

מבוא למשוואות דיפרנציאליות

פרק 4 - מערכת משוואות לינאריות

תוכן העניינים

1. חזרה מאלגברה לינארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים 47
2. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הלכסון 49
3. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת וריאציית הפרמטרים 54
4. מערכת משוואות כללית - שיטת ההצבה 56

חזרה מאלגברה לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

שאלות

בשאלות הבאות מצא את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$x = 0, x = 1, x = 2, v_{x=0} = (-1, 0, 1), v_{x=1} = (0, 1, 0), v_{x=2} = (1, 0, 1) \quad (1)$$

$$x = 6, x = 2, x = -4, v_{x=6} = (0, 0, 1), v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=-4} = (-1, 1, 0) \quad (2)$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 3, v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), x_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0) \quad (3)$$

$$x = 1, x = 3, x = -2, v_{x=1} = (-1, 4, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=-2} = (-1, 1, 1) \quad (4)$$

$$x = 1, x = 4, x = -1, v_{x=1} = (1, -2, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=-1} = (-1, 0, 1) \quad (5)$$

$$x = -1, x = 3, v_{x=-1} = (-1, 2), v_{x=3} = (1, 2) \quad (6)$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = (1+i, 2), v_{x=1-2i} = (1-i, 2) \quad (7)$$

$$x = 1, x = 1 + \sqrt{3}i, x = 1 - \sqrt{3}i, v_{x=1} = (1, 1, 1),$$

$$v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, -2), v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -2) \quad (8)$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון

שאלות

פתור את מערכות המשוואות בשאלות 1-2 :

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (1)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ , כך ש-} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

הוכח כי $z(t) = y(t)$.

פתור את מערכות המשוואות בשאלות 4-5 :

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases} \quad (4)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (5)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ , כך ש-} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\text{חשב: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

$$(7) \quad \text{פתור את מערכת המשוואות: } \begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2' = 0 \\ 3y_2' - 4y_1' - 5y_2 = 0 \end{cases}$$

$$(8) \quad \text{פתור: } \vec{x}'(t) = A \cdot \vec{x}(t), \text{ כאשר } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: בשאלות 7 ו-8 יש להגיע לפתרון המרוכב מהפתרון ממשי.

פתור את מערכות המשוואות המופיעות בשאלות 9-14:
(שים לב שכל המערכות אינן ניתנות ללכסון)

$$(9) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(10) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(11) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(12) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(13) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(14) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(15) \text{ דני פתר את המערכת } x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} x(t)$$

$$\text{וקיבל } x(t) = c_1 e^{-1t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{0t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{נתון תנאי התחלה: } x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

עבור אילו ערכים של הקבועים הממשיים, a, b, c , הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה הנתון יהיה חסום לכל t ממשי?

תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$z(t) = y(t) \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$0 \quad (6)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad (7)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[\cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \quad (8)$$

$$+ c_3 e^t \left[\sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ 2t-1 \\ t \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 0.5t^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} t^2-t+2 \\ \frac{t^2}{2}+1 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t-1 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + c_4 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ t-2 \\ \frac{t^2}{2}-t+1 \\ \frac{t^3}{6} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ -4t \\ -2t \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$a = -c, \quad b = 2a \quad (15)$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות

פתור את מערכת המשוואות בשאלות 1-4:

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 2e^{-t} \\ x_2' = 4x_1 + x_2 + 4e^{-t} \end{cases} \\ (2) \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^{at} \\ x_2' = 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \end{cases} \quad (a \text{ קבוע}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \begin{cases} x' = x + y + 2z + e^t \\ y' = x + 2y + z \\ z' = 2x + y + z + e^t \end{cases} \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5) המר את המשוואה $y'' + y''' - 2y = t^2$, במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

$$(6) \quad \text{פתור את מערכת המשוואות: } \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 8t+3 \\ -3t+3 \\ t+3 \end{pmatrix}$$

(7) נתונה המד"ר $e^{-x}y'''(x) - y''(x) + e^x x^2 y'(x) = 5e^{-x}$.
רשום את המד"ר כמערכת משוואות לינאריות מסדר ראשון,
בהצגה מטריצינית.

(8) נתונה המד"ר $x^2 y''(x) + 10xy'(x) + (1 + 4x^2)y(x) = \ln x$.
רשום את המד"ר כמערכת משוואות לינאריות מסדר ראשון,
בהצגה מטריצינית.

הערה: בשאלות 7 ו-8 המערכת המתקבלת היא לא עם מקדמים קבועים.
יחד עם זאת, אתם מתבקשים רק להציג את המערכת ולא לפתור אותה.

תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} : \text{ עבור } a = -1 \text{ נקבל:} \quad (2)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} e^{at} \\ -2e^{at} \end{pmatrix} : \text{ עבור } a \neq 1 \text{ נקבל:}$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3t+2) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - (3t+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3t+1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3} te^t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{9} e^t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} \\ (2t-1)e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t-1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -e^{2t}t^2 & e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{1}{t^2} + 4\right) & -\frac{10}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\ln t}{t^2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

מערכת משוואות כללית – שיטת ההצבה

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} y'' + 2z' = e^{3x} \\ y' - z'' + 3z = x^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$. z(0) = y(0) = y'(0) = 0 \text{ בהינתן } \begin{cases} y'' + z' = e^{-2x} \\ y + z = \sin x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 6x - 3y + e^{-t} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + \sin 2t \\ x_2' = x_1 + x_2 + \cos 2t \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} z'' - 3z' + 2z + y' - y = 0 \\ z' - 2z + y' + y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{24} e^{3x} + x^2, \quad y = \frac{1}{12} e^{3x} - \frac{2}{3} x^3 - 2c_2 e^x + 2c_3 e^{-x} + kx + l \quad (1)$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^x - \frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x, \quad y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{6} e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \quad (2)$$

$$x = c_1 + c_2 e^t + 4te^t - e^{-t}, \quad y = 2c_1 + \frac{3}{2} c_2 e^t + 6te^t - \frac{3}{2} e^t - \frac{5}{2} e^{-t} \quad (3)$$

$$x_1 = c_1 + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad x_2 = -c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{4} \sin 2t \quad (4)$$

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}, \quad y = 2c_1 + \frac{1}{2} c_2 e^x \quad (5)$$

מבוא למשוואות דיפרנציאליות

פרק 5 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

57	1. בעיות גיאומטריות.....
59	2. עקומות אורתוגונליות.....
61	3. בעיות גדילה ודעיכה.....
63	4. בעיות שונות.....

בעיות גיאומטריות

שאלות

(1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x, y) על העקום,

$$\text{שווה ל-} -\frac{x}{y}.$$

מצא את משוואת העקום.

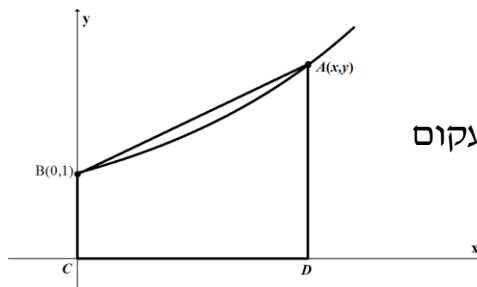
(2) מצא את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

(3) מצא את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

(4) נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2, 4)$.
נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x, y)$ שעליו, ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים, שווה לשיעור ה- y של הנקודה A .

(5) מצא את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3, 4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

(6) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x, y) שבין נקודה זו וציר ה- x , נחצה על ידי ציר ה- y .
מצא את משוואת עקום זה.



(7) נתון עקום העובר בנקודה $B(0,1)$.
בכל נקודה A שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$, הנראה בציור.
מהי משוואת העקום?

(8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1, 3)$, ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x, y) שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$.
מצא את משוואת העקום.

(9) מצא את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(1,2)$,

ושבכל נקודה (x, y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$.

(10) מצא את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(0,1)$, כך שהמשולש המוגבל

על ידי ציר ה- y , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x, y)$ והקטע OM ,

מהראשית O ל- M , הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע MN

(כאשר N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה- y).

צייר ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

תשובות סופיות

$$x^2 + y^2 = k \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = k \quad (2)$$

$$y^2 = ax \quad (3)$$

$$y = 2xe^{x-2} \quad (4)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} \quad (5)$$

$$2x^2 + y^2 = k \quad (6)$$

$$y = 2e^{x^2/4} - 1 \quad (7)$$

$$2xy + x^2 = 7 \quad (8)$$

$$x^3 - 3y^2x = 11 \quad (9)$$

$$2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad (10)$$

עקומות אורתוגונליות

שאלות

מצא את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות 1-4:

(1) $2 \ln x + \ln y = c$

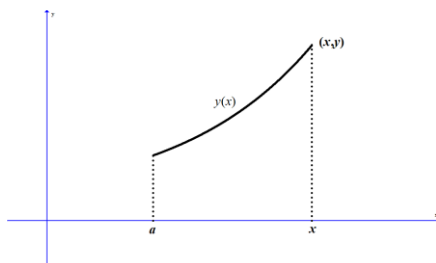
(2) $xy = c$

(3) א. $x^2 + 2y^2 = c$

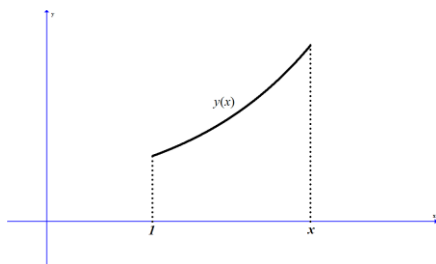
ב. מצא את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2 + 2y^2 = 9$, בנקודה $(1, 2)$ שעליה.

(4) $x^2 + y^2 = cx$

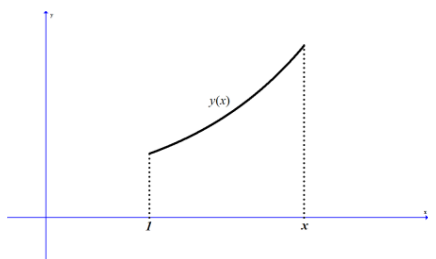
(5) מצא את משפחת העקומות, היוצרות זווית של 45° עם משפחת המעגלים $x^2 + y^2 = c$.



(6) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = a$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות $(a, y(a))$ ו- $(x, y(x))$. מצא את משוואת העקום.



(7) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי $y(1) = 2$. האם קיים עקום כזה, כך ששטחו של S שווה ל- $2y(x)$?



(8) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי $y(1) = 2$. האם קיים עקום כזה, כך שהשטח של S שווה ל- $2 - y(x)$?

תשובות סופיות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

$$y = ax^2, \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x-c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c \quad (5)$$

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k} x + C\right) \quad (6)$$

$$\text{לא.} \quad (7)$$

$$\text{כן.} \quad (8)$$

בעיות גדילה ודעיכה

שאלות

- (1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה.
 ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
 א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
 ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
 ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?
 *הנח שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- (2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית.
 בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים,
 ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.
 א. מצא את אחוז הגידול השנתי.
 ב. מצא כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת),
 היו בעיר 550 אלף תושבים.
- (3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%.
 כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.
 א. כמה כסף הפקיד האדם?
 ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש"ח?
- (4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית.
 בספירה הראשונית היו 1,000 חיות.
 בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר.
 מצא אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה,
 היו בשמורה 2,000 חיות בר.
- (5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים.
 ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד,
 פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
 א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים,
 מכמות התחלתית של 100 גרם?
 ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם,
 מכמות התחלתית של 100 גרם?

- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע.
 בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.
 א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
 ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------------|------------------|----------------|
| 1) א. 7.28 מיליארד. | ב. 3.54 מיליארד. | ג. בשנת 2,106. |
| 2) א. 2% | ב. 15.92 שנים. | |
| 3) א. 4093.65 ₪. | ב. 13.41 שנים. | |
| 4) 40.77 חודשים. | | |
| 5) א. 88.69 גרם. | ב. 19,188 שנים. | |
| 6) א. 3.04 שבועות. | ב. 14.6 שבועות. | |

בעיות שונות

שאלות

- (1) בזמן $t = 0$, יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.
 - א. חשב את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.
 - ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- (2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש.
 - ברגע $t = 0$, כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחתור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה.
 - משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$, כאשר v נמדדת במטר/שנייה.
 - א. מצא את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.
 - ב. מצא כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.
 - ג. מצא את המהירות הסופית.
- (3) חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה.
 - חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
 - א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?
 - ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- (4) נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים.
 - ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם.
 - נסמן ב- $h(t)$ את גובה פני המים, וב- k את קבוע הפרופורציה.
 - א. רשום מד"ר עבור גובה פני המים, $h(t)$.
 - מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?
 - ב. ידוע כי $k = -2\pi$.
 - פתור את המד"ר.
 - תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

- (5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.
לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.
א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t .
ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $\frac{1}{64}$ מנפחו ההתחלתי?
- (6) מבלון מלא אוויר, שרדיוסו R , מתחיל לצאת אוויר.
קצב יציאת האוויר הוא $3V(t)$, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t .
הוכח, כי כעבור $\ln 2$ שניות נפח הבלון ייקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.
הערה: בשאלות 5 ו-6 נדרש ידע בהפרדת משתנים.

תשובות סופיות

- (1) א. 26.75 ק"ג. ב. 0.942 דקות.
- (2) א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.
- (3) א. $43\frac{1}{3}^{\circ}$. ב. 1.13 שעות.
- (4) א. $h(0) = 4$; $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$. ב. $h = (2-t)^2$; $t = \sqrt{2} + 2$.
- (5) א. $R(t) = \frac{12}{2t+3}$. ב. 4.5 שעות.
- (6) שאלת הוכחה.

מבוא למשוואות דיפרנציאליות

פרק 6 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 65

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

(1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית

$$(p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0$$

א. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$ (משוואת בסל)

(2) הראה שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y'' + e^{2x}y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + 4y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

(3) הראה שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

פתור את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות 4-7:

(עבור כל בעיה עליך למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) - y'(\pi) = 0 \\ y(\pi) - y'(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הבעיה הבאה:}$$

- א. הוכח שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
ב. פתור את הבעיה.

(9) פתור את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$ב. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 1 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

1. פתח את הפונקציה $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

התחל את הטור מ- $n=1$.

2. מה סכום הטור ב- $x=0$?

האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$?

$$ג. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 2 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

פתח את הפונקציה $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

(10) פתור את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ב. פתח את הפונקציה $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq \pi$

לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.

התחל את הטור מ- $n=1$.

$$(11) \text{ נתונה הבעיה: } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < e \\ y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$$

- א. הוכח שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
 ב. מצא את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.
 ג. הראה שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתח את $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \leq x \leq e \end{cases}$ לטור פונקציות עצמיות.

- ה. הראה שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.
 ה. חשב את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x = \sqrt{e}$, $x = 1.5$, $x = 2$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\begin{aligned} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\pi n) = 0 \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (e^{-x^2} y')' + (\lambda e^{-x^2} - 0)y = 0 \quad \text{ב. } (xy')' + \left(\lambda \left(-\frac{1}{x} \right) - (-x) \right) y = 0$$

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \text{פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(5) \quad \text{פונקציות עצמיות : } \phi_n(x) = n \cos nx + \sin nx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \text{ בנוסף, } \lambda = -1 \text{ הוא עי"ע של הבעיה,}$$

$$\text{המתאים לפונקציה העצמית } \varphi(x) = e^x.$$

$$(6) \quad \text{פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = \sin(\omega_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(7) \quad \text{פונקציות עצמיות : } y_n(x) = \sin(\omega_n x) - \omega_n \cos(\omega_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{בנוסף, } \lambda_0 = 0 \text{ הוא עי"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית } \varphi(x) = x - 1.$$

$$(8) \quad \text{א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = e^x \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(9) \quad \text{א. פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. סכום הטור ב- } x=0 \text{ הוא } 0, \text{ והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- } x=0.$$

$$\text{ג. } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right) \quad (0 < x < 2).$$

$$(10) \quad \text{א. פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. } e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)} (-1)^{n+1} - 1}{1^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) \quad \text{כאשר } 0 < x < \pi.$$

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות : $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \ln x\right)$$

ערכים עצמיים : $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_n = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

ג. שאלת הוכחה.

ד.
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2\cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\ln x\right)$$

ה. סכום הטור ב- $x = \sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x = 1.5$ הוא 1 ; וב- $x = 2$ הוא 0.