

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)



## תוכן העניינים

|     |  |
|-----|--|
| 1   | 1. וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים       |
| 15  | 2. וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב                     |
| 47  | 3. אינטגרלים קוויים ושימושיהם                                    |
| 52  | 4. שדות משמרים - אי תלות במסלול                                  |
| 57  | 5. משפט גרין   |
| 60  | 6. אינטגרלים משטחיים ושימושיהם                                   |
| 63  | 7. משפט הדיברגנץ (גאוס)  |
| 65  | 8. משפט סטוקס (גרין במרחב)                                       |
| 67  | 9. אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל) |
| 76  | 10. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות                         |
| 88  | 11. מטריצות  |
| 109 | 12. דטרמיננטות   |
| 123 | 13. מבוא לטופולוגיה  |

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 1 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

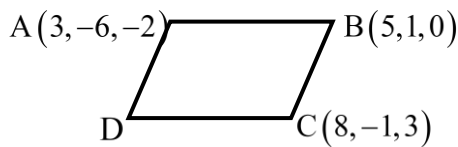
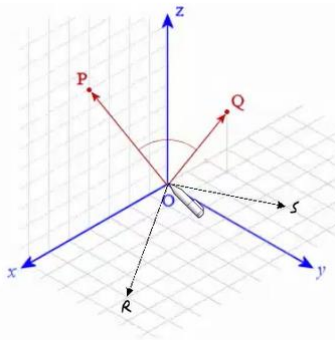
1. וקטורים..... 1
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת..... 6
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב..... 8
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי..... 9
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור..... 13

## וקטורים

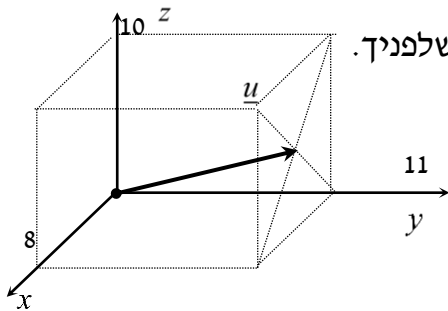
**הערת סימון:** אנו נסמן את הווקטור  $u$  כך  $\underline{u}$ . סימונים מקובלים נוספים הם:  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}$ .  
את גודל הווקטור  $\underline{u}$  נסמן כך  $|\underline{u}|$ . סימון מקובל נוסף הוא  $\|\underline{u}\|$ .  
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

### שאלות

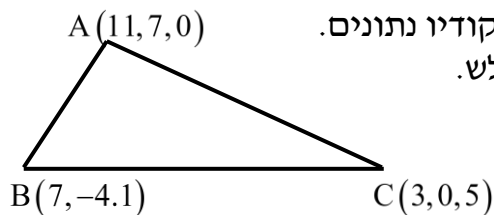
- (1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$  שבאיור. הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצא את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  על פי השרטוט.



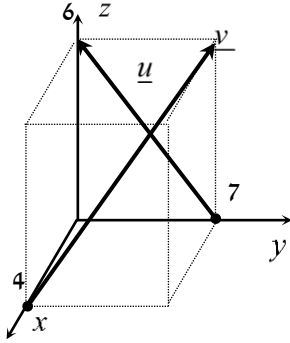
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצא את הווקטור  $\overline{EF}$  אם נתונות הנקודות  $E(2,0,-3)$  ו-  $F(7,-1,-3)$ .

ב. מצא את שיעורי הנקודה  $N$ , אם נתונה הנקודה  $M(0,-4,1)$

והווקטור  $\overline{MN} = (-1,-1,9)$ .



(6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$ .

(7) מצא את  $x$ ,  $y$  ו-  $z$ , אם נתון ש-  $\underline{u} = \underline{v}$  כאשר  $\underline{u} = (4, -1, 2)$ ,

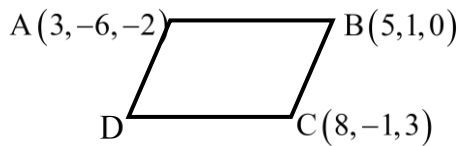
$\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$ .

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$ ,  $B(3,7,-4)$ ,  $C(6,9,0)$ ,  $D(7,4,10)$ ,  $E(9,11,4)$

א. הראה כי  $\overline{AB} = \overline{DE}$ .

ב. האם ניתן לומר גם כי  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

שיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצא את שיעורי הקדקוד  $D$ .

\* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים  $\underline{u} = (-3, 1, 4)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$  ו-  $\underline{w} = (2, 6, -5)$ .  
 \* בשאלות 13, 14, ו-16 הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשב:

א.  $2\underline{u}$       ב.  $-0.5\underline{v}$       ג.  $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשב:

א.  $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$       ב.  $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12)  $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13)  $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14)  $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15)  $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16)  $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$ ,  
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17)  $\overline{AC} + \overline{AB}$

(18)  $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$

(19)  $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$$A(-4, 2, 1), B(0, 2, -1), C(-3, -5, 0), D(-7, -5, 2)$$

הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

**(21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :  
 $A(1, 2, 0)$  ,  $B(-2, 5, 3)$  ,  $C(-1, 8, 4)$  ,  $D(4, 3, -1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**(22)** חשב את הזווית שבין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  :

א.  $\underline{u} = (-2, 2, 5)$  ,  $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב.  $\underline{u} = (6, -3, 1)$  ,  $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג.  $\underline{u} = (-2, 1, 3)$  ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$

**(23)** מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם :  
 $A(-3, 2, 1)$  ,  $B(0, 3, 2)$  ,  $C(5, -1, 0)$

**(24)** נתונים הווקטורים  $\underline{u} = (2, -1, 0)$  ,  $\underline{v} = (5, 0, 3)$

מצא וקטור  $\underline{w}$  שמכפלתו ב- $\underline{u}$  היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$  היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא  $\sqrt{70}$ .

**(25)** ענה על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכח כי  $|\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}| \Leftrightarrow \underline{u} \perp \underline{v}$ .

הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכח כי  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 \Leftrightarrow \underline{u} \perp \underline{v}$ .

הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

**(26)** הוכח :

א.  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ב.  $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ג.  $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$

ד.  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$

תן פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה.  $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

## תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left( \frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (25)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (26)$$

## מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

### שאלות

$$(1) \text{ נתון: } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

חשב:  $(u \times v) \times w$ .

$$(2) \text{ חשב את שטח המשולש שקדקודיו: } A = (8, 2, 3), B(4, -1, 2), C(-8, 0, 4)$$

(3) נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.

$$\text{ידוע כי: } |u| \neq 0, \quad u \cdot w = 0, \quad u \times v = 0,$$

$$\text{הוכח כי: } v \cdot w = 0.$$

(4) נתונים שני וקטורים  $u, v$  במרחב.

$$\text{ידוע כי: } |v| = 4, \quad |u| = 1, \quad u \perp v$$

$$\text{חשב: } |(u + v) \times (u - v)|$$

$$(5) \text{ נתון } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

חשב:

$$\text{א. } u \cdot (v \times w) \quad \text{ב. } v \cdot (w \times u) \quad \text{ג. } (u \times v) \cdot w$$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו  $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$

ב. חשב את נפח הפירמידה שקדקודה  $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$

(7) חשב את נפח הפירמידה שקדקודה  $A(2, 2, 5), B(1, -1, -4), C(3, 3, 10), D(8, 6, 3)$

8 נתון מקבילון הבנוי על וקטורים  $a, b, c$ .  
הוכח כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים  $a, a-b, a+b-4c$ ,  
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9 נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.  
הוכח כי  $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$ .

10 נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.

$$u \cdot (v \times w) = 4$$

חשב:

א.  $u \cdot (w \times v)$     ב.  $(v \times w) \cdot u$     ג.  $w \cdot (u \times v)$     ד.  $v \cdot (u \times w)$

11 נתונים שלושה וקטורים  $a, b, c$  במרחב.

מהי הנוסחה עבור  $a \times b \times c$ ?

### תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$S = 22.5 \quad (2)$$

שאלת הוכחה. (3)

$$8 \quad (4)$$

$$\text{א. } -3 \quad \text{ב. } -3 \quad \text{ג. } -3 \quad (5)$$

$$\text{א. } 6 \quad \text{ב. } 1 \quad (6)$$

$$9 \frac{1}{3} \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

שאלת הוכחה. (9)

$$\text{א. } -4 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 4 \quad \text{ד. } 4 \quad (10)$$

אין לו נוסחה. (11)

## שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

### שאלות

(1) הוכח שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:  
 $A = (1, 2, 1)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C = (2, 1, 2)$ ,  $D(2, 2, 2)$

(2) מצא את מרחק הנקודה  $A(3, -2, 1)$  מהישר  $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$ .

(3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, z=3$$

- א. הוכח שהישרים מצטלבים.  
 ב. מצא את המרחק בין הישרים.

### תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2)  $\sqrt{26}$

(3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

## פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

### שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא את תחום ההגדרה של  $r(t)$  ואת הווקטור  $r(t_0)$ , כאשר  $r(t) = (\cos \pi t, -\ln t, \sqrt{t-2})$  ו- $t_0 = 4$ .
- ב. רשום את המשוואות הפרמטריות  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ ,  $z = \cos^2 t$  כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).
- ג. רשום את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה) הווקטורית  $r(t) = (t, t^2, t^3)$ .

(2) רשום את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א.  $9x^2 + 4y^2 = 36$  (במישור  $xy$ )      ב.  $\begin{cases} -x + y - z + 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$

ג.  $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$       ד.  $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = y + 2 \end{cases}$

ה.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x^2 \end{cases}$       ו.  $\begin{cases} z = x^2 + 4y^2 \\ z = 2x \end{cases}$

(3) נתונה פונקציה וקטורית  $r(t) = (21t^2, 21t^2 - 1, 10e^t)$ .

בסעיפים א-ג, חשב:

א.  $\lim_{t \rightarrow 1} r(t)$

ב.  $r'(t)$

ג.  $\int_0^1 r(t) dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t = 1$ ?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

(4) נתונה:  $r(t) = (\cos 4t, \sin 4t, t^4)$ .

א. חשב:  $\frac{dr}{dt}$ ,  $\left| \frac{dr}{dt} \right|$ ,  $\frac{d|r'|}{dt}$ .

ב. הוכח שהפונקציה מסעיף אי' חלקה.

(5) נתונה הפונקציה הווקטורית  $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$ .

א. גזור את הפונקציה.

ב. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה  $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$  ב- $t = 0$ .

ג. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה  $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$  בנקודה  $A(1,1,1)$ .

ד. מצא משיק יחידה לפונקציה הווקטורית  $r(t) = (\sin t, e^{2t}, t^2)$  ב- $t = 0$ .

(6) נתונה העקומה  $r(t) = (t^2, t, 5)$ .

א. מצא נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור

$$x - 6y + 4z - 3 = 0$$

ב. מצא משוואה של המישור, הניצב לעקומה  $r(t) = (3 \sin t, -2 \cos t, t)$ ,

$$t = 0.5\pi$$

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

(7) נתון  $r(t) = (3 \sin t, 3 \cos t, 4t)$ .

חשב את משיק היחידה (T), נורמל היחידה (N) והבינורמל (B) של  $r$ .

(8) תהי  $r(t)$  פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכח שאם  $|r(t)|$  קבוע לכל  $t$ , אז  $r(t) \cdot r'(t) = 0$ .

כלומר,  $r(t)$  ו- $r'(t)$  ניצבים זה לזה.

ב. הוכח שנורמל היחידה  $N(t)$ , ניצב למשיק היחידה  $T(t)$ .

(9) נתונה פונקציה וקטורית  $r(t) = (t, t^2, t^3)$ .

מצא את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק,

המתאימים ל- $t = 2$ .

10 נתון  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית, הוכח כי  $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ .

11 חלקיק נע לאורך עקום מרחבי  $x = t^3 + 2t$ ,  $y = -3e^{-2t}$ ,  $z = 2\sin 5t$

עבור החלקיק, בזמן  $t = 0$ , חשב את:

א. המהירות.

ב. גודל המהירות.

ג. התאוצה.

ד. גודל התאוצה.

ה. הזווית בין וקטורי המהירות והתאוצה.

12 נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן:  $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k}$

כאשר  $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$  המהירות ההתחלתית.

מצא את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13 חלקיק נע על העקומה  $x = 2\cos t$ ,  $y = 2\sin t$ .

א. חשב את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע  $t$ .

ב. שרטט את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע  $t = 0.25\pi$ , כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.

ג. הראה שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14 מהירות  $v(t)$  של חלקיק נתונה על ידי  $v(t) = (2, -1, -10t)$ .

ברגע  $t = 0$ , החלקיק נמצא בנקודה  $r(0) = (0, 0, 100)$ .

מצא את משוואת התנועה של החלקיק  $r = r(t)$ .

15 תאוצה  $a(t)$  של חלקיק, נתונה על ידי  $a(t) = (18\cos 3t, -18\sin 3t, 0)$ .

ברגע  $t = 0$  החלקיק נמצא בנקודה  $r(0) = (2, 0, 1)$  (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)

ובמהירות  $v(0) = (0, 2, 4)$ .

מצא את משוואת התנועה של החלקיק  $r = r(t)$ .

## תשובות סופיות

$$r(4) = (\cos 4\pi, -\ln 4, \sqrt{2}) \quad \text{א.א.} \quad 0 < t \leq 4 \quad \text{א.1} \quad (1)$$

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \quad \text{ג.} \quad r(t) = (\sin t, \cos t, \cos^2 t) \quad \text{ב.} \quad (2)$$

$$x = 2t - 0.5, y = 3t - 1.5, z = t \quad \text{ב.} \quad x = 2 \cos t, y = 3 \sin t$$

$$r(t) = (2t - 0.5, 3t - 1.5, t) \quad \text{ב.} \quad r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t) \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$x = t, y = \frac{t^2}{4} - 1, z = \frac{t^2}{4} + 1 \quad \text{ד.} \quad x = t, y = t^2, z = t^4 \quad \text{ג.}$$

$$r(t) = \left( t, \frac{t^2}{4} - 1, \frac{t^2}{4} + 1 \right) \quad \text{ד.} \quad r(t) = (t, t^2, t^4) \quad \text{ג.}$$

$$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 9 \cos^2 t \quad \text{ה.}$$

$$r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9 \cos^2 t) \quad \text{ה.}$$

$$(7, 6, 10e - 10) \quad \text{ג.} \quad (42t, 42t, 10e^t) \quad \text{ב.} \quad (21, 20, 10e) \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = (-4 \sin 4t, 4 \cos 4t, 4t^3), \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = 4\sqrt{1+t^6}, \quad \frac{d|r|}{dt} = \frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}} \quad \text{א.} \quad (4)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(4, 1, 0) \quad \text{ב.} \quad r'(t) = (4 \cos 4t, e^t + te^t, 4t^3) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \quad \text{ד.} \quad (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 2, 4) \quad \text{ג.}$$

$$2y + z = 0.5\pi \quad \text{ב.} \quad (9, 3, 5) \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$T(t) = \frac{1}{5}(3 \cos t, -3 \sin t, 4), \quad N(t) = (-\sin t, -\cos t, 0), \quad B(t) = \frac{1}{5}(4 \cos t, -4 \sin t, -3) \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

$$, 24x - 12y + 2z = 16 \quad \text{מישור הנישוק} \quad , x + 4y + 12z = 114 \quad \text{מישור הניצב} \quad (9)$$

$$\text{מישור היישור} \quad 76x + 143y - 54z = 292$$

שאלת הוכחה. (10)

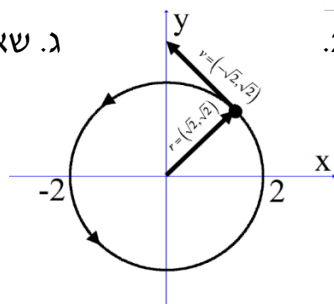
$$120.46^\circ \quad \text{ה.} \quad 12 \quad \text{ד.} \quad (0, -12, 0) \quad \text{ג.} \quad \sqrt{140} \quad \text{ב.} \quad (2, 6, 10) \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$v(t) = (v_{01}, v_{02}, v_{03} - gt), \quad |v(t)| = \sqrt{(v_{01})^2 + (v_{02})^2 + (v_{03} - gt)^2}, \quad a(t) = (0, 0, -g), \quad |a(t)| = g \quad (12)$$

$$v(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$|v(t)| = 2$$

ג. שאלת הוכחה.



$$r(t) = (2t, -t, -5t^2 + 100) \quad (14)$$

$$r(t) = (-2 \cos 3t + 4, 2 \sin 3t - 4t, 4t + 1) \quad (15)$$

## גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

### שאלות

(1) יהיו  $\mathbf{F}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{G}(x, y, z)$  שדות וקטורים כלליים. הוכח:

א.  $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב.  $\nabla(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla(\mathbf{F}) + \nabla(\mathbf{G})$

(2) יהי  $\mathbf{F}(x, y, z)$  שדה וקטורי, ותהי  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  פונקציה.

הוכח כי:  $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$ .

(3) יהי  $\mathbf{F}(x, y, z)$  שדה וקטורי ותהי  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  פונקציה.

א. הוכח כי  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$ . או בניסוח אחר  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ .

ב. הוכח כי  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$ . או בניסוח אחר  $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$ .

(4) יהיו  $\mathbf{F}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{G}(x, y, z)$  שדות וקטורים כללים

הוכח כי:  $\operatorname{curl}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{curl}(\mathbf{F}) + \operatorname{curl}(\mathbf{G})$ .

(5) יהי  $\mathbf{F}(x, y, z)$  שדה וקטורי.

הוכח כי  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ .

\* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

### הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ .

הגרדיאנט של  $\varphi$  המסומן  $\text{grad } \varphi$  מוגדר על ידי  $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ .

### הגדרה (דיברגנץ וקורל של שדה וקטורי)

יהי  $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$  מגדירים את הדיברגנץ של  $\mathbf{F}$  המסומן  $\text{div } \mathbf{F}$ , כך:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \text{div } \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f, g, h) \\ \text{div } \mathbf{F} &= f_x + g_y + h_z \end{aligned}$$

מגדירים את ה- $\text{curl } \mathbf{F}$  של  $\mathbf{F}$  המסומן  $\text{curl } \mathbf{F}$ , על ידי:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f, g, h) \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{aligned}$$

הערה: יש הרושמים  $\text{rot } \mathbf{F}$  במקום  $\text{curl } \mathbf{F}$ .

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 2 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

|           |   |
|-----------|---|
| 15        | 1. הצגה פרמטרית של ישר                            |
| 18        | 2. מצב הדדי בין ישרים                             |
| 20        | 3. הצגה פרמטרית של מישור                          |
| 21        | 4. משוואת מישור                                   |
| 22        | 5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור |
| 23        | 6. מישורים המקבילים לצירים                        |
| 24        | 7. מצב הדדי בין ישר ומישור                        |
| 25        | 8. מצב הדדי בין מישורים                           |
| 26        | 9. ישר חיתוך בין מישורים                          |
| (ללא ספר) | 10. חישובי זוויות שונות                           |
| 27        | 11. זווית בין שני ישרים                           |
| 28        | 12. זווית בין ישר ומישור                          |
| 29        | 13. זווית בין שני מישורים                         |
| (ללא ספר) | 14. חישובי מרחקים                                 |
| 30        | 15. מרחק בין שתי נקודות במרחב                     |
| 31        | 16. מרחק בין נקודה לישר                           |
| 32        | 17. מרחק בין נקודה למישור                         |
| 33        | 18. מרחק בין ישרים מקבילים                        |
| 34        | 19. מרחק בין ישר למישור                           |
| 35        | 20. מרחק בין מישורים מקבילים                      |
| 36        | 21. מרחק בין ישרים מצטלבים                        |
| (ללא ספר) | 22. סיכום מרחקים                                  |
| 37        | 23. היטלים ונקודות סימטריה                        |
| 38        | 24. שאלות מסכמות                                  |

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

## הצגה פרמטרית של ישר

### שאלות

- (1) האם הנקודה  $A(7,0,3)$  נמצאת על הישר  $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$  ?
- (2) האם הנקודה  $B(4,-2,-10)$  נמצאת על הישר  $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$  ?
- (3) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור, שעובר בנקודות  $A(-5,-2)$  ו-  $B(1,6)$ .
- (4) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב, שעובר בנקודות  $C(3,0,-2)$  ו-  $D(4,1,1)$ .
- (5) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה  $G(2,-7,1)$ , ומקביל לישר  $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$ .
- (6) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה  $(1,2,3)$ , ומאונך לישר  $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$ .
- (7) ענה על הסעיפים הבאים:
  - א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר:  $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$ . כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות  $x, y$  ו-  $z$ .
  - ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות:  $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$ . כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.
- (8) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה-  $y$  במרחב.
- (9) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה  $M(3,-1,4)$  ומקביל לציר ה-  $z$ .
- (10) מצא את נקודת החיתוך של הישר  $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$  עם המישור  $[xy]$ .

**11** ישר עובר בנקודה  $(1, -1, 4)$  וכיוונו  $(4, 10, 2)$ .

מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א.  $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(4, 10, 2)$

ב.  $\underline{x} = (3, 4, 5) + t(4, 10, 2)$

ג.  $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 5, 1)$

ד.  $\underline{x} = (5, 9, 6) + t(8, 20, 4)$

ה. כל התשובות נכונות.

**12** ישר עובר דרך הנקודות  $A(1, -1, 2)$  ו-  $B(4, 0, 1)$ .

תאר את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

**13** הצג כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

$$l: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2t \\ z = 2 + 10t \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$l: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 10t \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$l: \frac{x-1}{2} = y+1 = z-4 \quad \text{ג.}$$

$$l: x-1 = y+10, z = 4 \quad \text{ד.}$$

$$l: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

## תשובות סופיות

(1) כן.

(2) לא.

(3)  $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$

(4)  $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$

(5)  $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$

(6)  $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$

(7) א.  $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$  ב.  $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$

(8)  $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$

(9)  $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$

(10)  $(7, -5, 0)$

(11) ה

(12) א.  $\ell : \underline{x} = (1, -1, 2) + t \cdot (3, 1, -1)$  ב.  $\ell : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

ג.  $\ell : \frac{x-1}{3} = y+1 = 2-z$  ד.  $\ell : \begin{cases} x - 3y = 4 \\ y + z = 1 \end{cases}$

(13) א.  $\underline{x} = (1, 0, 2) + t(-4, 2, 10)$  ב.  $\underline{x} = (1, 4, 0) + t(1, 0, 10)$

ג.  $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 1, 1)$  ד.  $(x, y, z) = (1, -10, 4) + t(1, 1, 0)$

ה.  $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(-2, -1, 1)$

## מצב ההדדי בין ישרים

### שאלות

- (1) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$ ,  $l_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$
- (2) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$ ,  $l_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$
- (3) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$ ,  $l_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$
- (4) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$ ,  $l_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$
- (5) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$ ,  $l_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$
- (6) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$ ,  $l_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$
- (7) מצא את ערכו של הפרמטר  $k$  שבעבורו הישרים הבאים:  
 $l_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$ ,  $l_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$   
 א. מקבילים.  
 ב. מתלכדים.
- (8) נתונות הנקודות:  $A(3, -1, 5)$ ,  $B(k, -1, 3)$ ,  $C(-6, 3, -1)$ ,  $D(-2, 3, k)$   
 הראה כי לכל ערך של  $k$  הישרים  $l_{AB}$  ו- $l_{CD}$  מצטלבים.

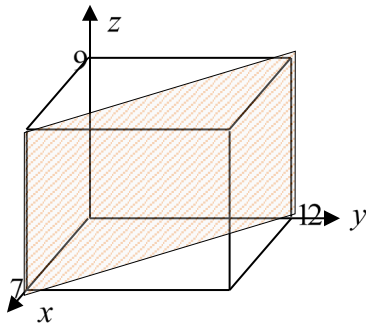
**תשובות סופיות**

- (1) מתלכדים.
- (2) מקבילים.
- (3) נחתכים,  $(1, 5, 0)$ .
- (4) מצטלבים.
- (5) מקבילים.
- (6) נחתכים,  $(1, 8, -1)$ .
- (7) א.  $k = 2$       ב.  $k = -2$
- (8) שאלת הוכחה.

## הצגה פרמטרית של מישור

### שאלות

- (1) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא :  
 $A(1, -4, 0)$  ,  $B(3, 6, 2)$  ,  $C(0, -3, 1)$
- (2) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה  $Q(6, 7, -1)$ ,  
 ומכיל את הישר  $l : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$
- (3) נתונים שני ישרים :  $l_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$  ,  $l_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$   
 הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.
- (4) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה  $D(5, -2, -1)$  ומכיל  
 את ציר ה- $x$ .
- (5) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור  $[xz]$ .
- (6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.



### תשובות סופיות

- (1)  $\pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1)$
- (2)  $\pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6)$
- (3)  $\pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6)$
- (4)  $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1)$
- (5)  $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)$
- (6)  $\pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 9) + s(-7, 12, 0)$

## משוואת מישור

---

### שאלות

- (1) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור  $\pi : 2x - y + 3z - 6 = 0$  :  
 א.  $D(5, 7, 1)$       ב.  $E(2, -1, 1)$
- (2) מצא את ערכו של  $k$  שבעבורו הנקודה  $A(1, k, -1)$  נמצאת על המישור :  $\pi : kx - 2y + (1 + k)z + 7 = 0$ .
- (3) נתונה משוואת מישור :  $\pi : 3x + 2y - z - 9 = 0$ . מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.
- (4) נתונה משוואת מישור :  $\pi : 4x + y - 2z + 8 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור  $[yz]$ .

### תשובות סופיות

- (1) א. על המישור. ב. לא על המישור.
- (2)  $k = 3$
- (3)  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 4\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(0, 0, -9)$
- (4)  $\ell : \underline{x} = (0, -8, 0) + t(0, 2, 1)$

## מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

### שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור:  $\pi : 2x + 3z - 12 = 0$ . כתוב הצגה פרמטרית של המישור.
- (2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\pi : \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$ . מצא את משוואת המישור.
- (3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$ . מצא את משוואת המישור.
- (4) המישור  $\pi$  עובר בנקודות:  $A(1, 0, -3)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(4, -1, 0)$ . מצא את משוואת המישור.
- (5) ענה על הסעיפים הבאים:  
 א. לפניך הנקודות הבאות:  $(2, -5)$ ,  $(0, 1, -2)$ ,  $(1, 1, 0)$ .  
 1. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.  
 2. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.  
 ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.  
 ג. האם הנקודה  $(4, 2, 1)$  נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

### תשובות סופיות

- (1)  $\pi : \underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$
- (2)  $\pi : -2x + 3y + z + 19 = 0$
- (3)  $\pi : x - 3y + 8z = 0$
- (4)  $\pi : 3x + 6y - z - 6 = 0$
- (5) א. 1.  $\pi : \underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$  2.  $-2x + 3y + z - 1 = 0$   
 ב. למשל:  $(0, 0, 1)$ ,  $(-0.5, 0, 0)$ . ג. לא.

## מישורים המקבילים לצירים

---

### שאלות

(1) נתונה משוואת מישור:  $(k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$ .  
 לאיזה ערך של  $k$  המישור מקביל לציר ה- $y$  (ולא מכיל אותו)?

(2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  ו- $x+3y+2z-6=0$ . מצא את נפח הטטראדר.

### תשובות סופיות

(2) 6 יח"נ.

(1)  $k=3$

## מצב הודדי בין ישר ומישור

- (1) נתונים הישר והמישור הבאים :  
 $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$  ,  $\ell : \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$   
 קבע את המצב ההודדי שביניהם.  
 אם הישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך.
- (2) נתונים הישר והמישור הבאים :  
 $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$  ,  $\ell : \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$   
 קבע את המצב ההודדי שביניהם.  
 אם הישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך.
- (3) נתונים הישר והמישור הבאים :  
 $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$  ,  $\ell : \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$   
 קבע את המצב ההודדי שביניהם.  
 אם הישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך.
- (4) נתונים הישר והמישור הבאים :  
 $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$  ,  $\ell : \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$   
 מצא את ערכי  $a$  ו- $b$  בעבורם הישר מוכל במישור.

### תשובות סופיות

- (1) הישר חותך,  $(1, -1, 3)$ .
- (2) מקבילים.
- (3) הישר מוכל.
- (4)  $a = 1$  ,  $b = -7$

## מצב הדדי בין מישורים

---

### שאלות

(1) נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א.  $\pi_1 : 2x - y + 4z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב.  $\pi_3 : x + 3y - z + 1 = 0$ ,  $\pi_4 : 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג.  $\pi_5 : 5x - 2y - 2z + 3 = 0$ ,  $\pi_6 : 2x + 3y + z - 5 = 0$

(2) נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1 : 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$

מצא את ערכי  $k$  עבורם המישורים:

א. נחתכים                      ב. מקבילים                      ג. מתלכדים

### תשובות סופיות

(1) א. מתלכדים.                      ב. מקבילים.                      ג. נחתכים.

(2) א.  $k \neq 2, -3$                       ב.  $k = -3$                       ג.  $k = 2$

## ישר חיתוך בין מישורים

---

### שאלות

- (1) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$ ,  $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (2) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$ ,  $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (3) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$ ,  $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (4) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$ ,  $\pi_8 : z - 2 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (5) מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור  $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$  עם המישור  $[xz]$ .
- (6) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

### תשובות סופיות

- (1)  $\ell : \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12)$
- (2)  $\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4)$
- (3)  $\ell : \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right)$
- (4)  $\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0)$
- (5)  $\ell : \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18)$
- (6)  $\ell : \underline{x} = t(1, 9, 13)$

## זווית בין שני ישרים

### שאלות

- (1) מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:
- א.  $\ell_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$  ,  $\ell_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$
- ב.  $\ell_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$  ,  $\ell_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$
- (2) מצא את הזווית, שבין ישר העובר דרך הנקודות  $A(3, 4, 6)$  ,  $B(6, 0, -2)$  , וישר העובר דרך הנקודות:  $C(6, 5, 1)$  ,  $D(-1, 4, 2)$  , וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.
- (3) נתונות הנקודות  $A(1, -3, 0)$  ,  $B(4, 2, -1)$  ,  $C(3, -1, 2)$  .
- א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב, העובר דרך הנקודות:
1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.
- ב. מי מבין הנקודות  $D(4, 2, -1)$  ו- $E(7, 7, -3)$  , נמצאת על הישר AB, שמצאת בסעיף הקודם?
- ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC.
- (4) נתון מישור שמשוואתו:  $3x - 4y + 6 = 0$  . הנקודות  $A(x, 6, 1)$  ,  $B(-2, y, -1)$  . נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור  $[yz]$  ומקיימת:  $z_C = 11$  . מצא את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא:  $\sqrt{\frac{13}{76}}$  .

### תשובות סופיות

- (1) א.  $78.521^\circ$  ב.  $90^\circ$
- (2)  $63.37^\circ$  . הישרים מצטלבים.
- (3) א. 1.  $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$  א. 2.  $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$
- א. 3.  $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$  ב. הנקודה D. ג.  $35.477^\circ$
- (4) C(0, 2, 11) או C(0, 28.45, 11)

## זווית בין ישר ומישור

### שאלות

- (1) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:  
 $\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2)$  ,  $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$
- (2) נתונות הנקודות  $A(1, -1, 2)$  ,  $B(0, 2, -1)$  ,  $C(1, 2, 5)$  ,  $D(-7, 3, -1)$ .  
 מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.
- (3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה היא:  $2x + y - 2z - 6 = 0$ . קדקוד הפירמידה הוא  $S(3, 1, -2)$ .  
 מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה, אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים:  $x_B = z_B = -1$ .

### תשובות סופיות

(3)  $14.9^\circ$ (2)  $44.83^\circ$ (1)  $18.87^\circ$

## זווית בין שני מישורים

### שאלות

(1) מצא את הזווית שבין המישורים  $\pi_1 : 4x + 3y + z - 12 = 0$  ו- $\pi_2 : 4x - 7y + 5z + 3 = 0$ .

(2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקודקודה הם:  $A(0, 2, -5)$ ,  $B(3, -1, 1)$ ,  $C(7, -1, -5)$ ,  $D(3, 2, 0)$ . מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

(3) מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו  $3x + 5y - z + 4 = 0$  למישור  $[xz]$ .

### תשובות סופיות

(3)  $32.312^\circ$

(2)  $87.539^\circ$

(1)  $90^\circ$

## מרחק בין שתי נקודות במרחב

---

### שאלה

- (1) נתונות הנקודות:  $A(2, 4, -5)$ ,  $B(0, -2, 6)$  ו-  $C(k, -1, 13-k)$ . מצא ערכי  $k$  עבורם המשולש  $ABC$  יהיה שווה-שוקיים:  $AB = AC$ .

### תשובה

- (1)  $k = 8$  או  $k = 12$ .

## מרחק בין נקודה לישר

---

### שאלות

- (1) מצא את המרחק שבין הנקודה  $A(13, -1, -19)$  לישר  $\ell : \underline{x} = t(2, 0, -7)$ .
- (2) נתונות הנקודות  $A(1, 6, -1)$ ,  $B(2, -1, 0)$ ,  $C(6, -4, 0)$ .  
חשב את שטח המשולש ABC.
- (3) על הישר  $\ell : \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$  מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.  
אחד מקודקודי הריבוע הוא  $D(5, 4, 2)$ . מצא את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

### תשובות סופיות

- (1)  $\sqrt{54}$
- (2) 12.75 יח"ש.
- (3)  $B(5, -4, 2)$  או  $B(5, 4, -6)$ .

## מרחק בין נקודה למישור

---

### שאלות

- (1) מצא את מרחקו של המישור  $4x - 2y - 4z + 15 = 0$  מראשית הצירים.
- (2) מצא משוואת מישור המאונך לישר  $\ell : \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$  ונמצא במרחק  $\sqrt{14}$  מהנקודה  $A(4, 5, -9)$ .
- (3) נתונים ישר ומישור:  $\pi : 2x + 4y - 4z + 15 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$ . מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

### תשובות סופיות

- (1)  $2\frac{1}{2}$
- (2)  $\pi : 3x - 2y + z - 7 = 0$  או  $\pi : 3x - 2y + z + 21 = 0$
- (3)  $(1, -9, 5)$  או  $(4, 5, 1)$

## מרחק בין ישרים מקבילים

---

### שאלות

(1) נתונות הנקודות  $A(15,0,-4)$ ,  $B(12,-5,2)$ ,  $C(6,1,4)$ ,  $D(12,11,-8)$ .

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

(2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1), \quad l_2: \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2), \quad l_4: \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

### תשובות סופיות

(1) א. מקבילים. ב.  $\sqrt{76}$  יח"א.

(2) א. הוכחה. ב.  $\sqrt{824}$  יח"ש.

## מרחק בין ישר למישור

---

### שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור:  $4x - z + 6 = 0$ .
- א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- $y$  ובין המישור הנתון.  
 ב. מצא את המרחק בין ציר ה- $y$  ובין המישור הנתון.
- (2) נתונים ישר ומישור:  $\pi: 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$ ,  $l: \underline{x} = (1, k - 1, 5) + t(4, -2, -3)$ .
- א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.  
 ב. מצא את ערכו של הפרמטר  $k$  שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

### תשובות סופיות

(1) א. הישר מקביל למישור. ב.  $\frac{6}{\sqrt{17}}$

(2) א. הוכחה. ב.  $k = 2, 4$

## מרחק בין מישורים מקבילים

### שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור:  $\pi : 3x - 4y + 5z - 10 = 0$ . מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק  $\sqrt{8}$  ממנו.
- (2) נתונים שני מישורים מקבילים:  $\pi_1 : x - 2y - 2z + 6 = 0$ ,  $\pi_2 : x - 2y - 2z - 12 = 0$ . מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים, והנמצא במרחק שווה משניהם.
- (3) נתונים שישה מישורים:  
 $\pi_1 : 2x + y - 2z - 11 = 0$ ,  $\pi_2 : x + 2y + 2z + 5 = 0$ ,  $\pi_3 : 2x - 2y + z + 3 = 0$   
 $\pi_4 : 2x + y - 2z + 7 = 0$ ,  $\pi_5 : x + 2y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_6 : kx + qy + z + p = 0$   
 מצא את ערכי הפרמטרים  $k, q, p$ , שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה, שנפחה 60 יחידות נפח.
- (4) כדור, שמרכזו בנקודה  $O(3, 8, -1)$ , חסום בקובייה, שבסיסה התחתון מונח על מישור, שמשוואתו  $12x + 4y - 3z - 6 = 0$ . מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

### תשובות סופיות

- (1)  $\pi_1 : 3x - 4y + 5z + 10 = 0$ ,  $\pi_2 : 3x - 4y + 5z - 30 = 0$
- (2)  $\pi_3 : x - 2y - 2z - 3 = 0$
- (3)  $k = 2, q = -2, p = 18, -12$
- (4)  $12x + 4y - 3z - 136 = 0$

## מרחק בין ישרים מצטלבים

---

### שאלות

- (1) נתונים שני הישרים הבאים:  $l_1 : \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$  ו- $l_2 : \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$ .  
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.
- (2) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים:  $l_1 : \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$  ו- $l_4 : \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$ .  
מצא את המרחק שביניהם.
- (3) מצא את מרחק הישר  $l : \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ , מציר ה- $z$ .

### תשובות סופיות

- (1)  $\frac{10}{\sqrt{6}}$  יח"א.
- (2) 1.567 יח"א.
- (3)  $\sqrt{2}$  יח"א.

## היטלים ונקודות סימטריה

### שאלות

- (1) נתונה נקודה  $A(1, -1, 3)$  ונתון הישר  $\ell: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ .
- א. מצא את היטל הנקודה  $A$  על הישר.  
 ב. מצא את הנקודה הסימטרית ל- $A$  ביחס לישר.
- (2) נתונה נקודה  $A(0, 0, 1)$  ונתון מישור  $7x + 7y - z = 8$ .
- א. מצא את היטל הנקודה  $A$  על המישור.  
 ב. מצא את הנקודה  $C$ , הסימטרית ל- $A$ , ביחס למישור.
- (3) ענה על הסעיפים הבאים:
- א. מצא את הנקודות הסימטריות לנקודה  $A(1, 3, 2)$  ביחס למישורי הצירים.  
 ב. מצא את הנקודות הסימטריות לנקודה  $A(x, y, z)$  ביחס למישורי הצירים.
- (4) נתונות 4 נקודות במרחב:  $A(0, 2, 4)$ ,  $B(-2, 6, 2)$ ,  $C(2, -4, 8)$ ,  $D(10, 2, 0)$ .  
 מצא את היטל הישר  $AD$  על המישור  $ABC$ .

### תשובות סופיות

- (1) א.  $B(0, 1.5, -1.5)$  ב.  $C(-1, 4, -6)$
- (2) א.  $B\left(\frac{7}{11}, \frac{7}{11}, \frac{10}{11}\right)$  ב.  $C\left(\frac{14}{11}, \frac{14}{11}, \frac{9}{11}\right)$
- (3) א.  $B_{xy}(1, 3, -2)$ ,  $C_{xz}(1, -3, 2)$ ,  $D_{yz}(-1, 3, 2)$   
 ב.  $B_{xy}(x, y, -z)$ ,  $C_{xz}(x, -y, z)$ ,  $D_{yz}(-x, y, z)$
- (4)  $\underline{x} = (0, 2, 4) + t(0, 1, 1)$

## שאלות מסכמות

- (1) נתונות הנקודות  $A(1,1,3)$ ,  $B(1,2,0)$ ,  $C(1,1,1)$ .
- מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C. הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.
  - חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.
  - מצא את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.
- (2) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
- במקרה בו הישרים נחתכים, מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
- במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצא גם את המרחק ביניהם.
- $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$ ,  $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
  - $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$ ,  $\underline{x} = (2,3,1) + s(12,-3,1)$
  - $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$ ,  $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
  - $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$ ,  $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- (3) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
- במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
- במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.
- $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ ,  $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
  - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ,  $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
  - $2x - 14y + 10z = -6$ ,  $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- (4) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים.
- במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם.
- במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- $x - 2y + 2z - 10 = 0$ ,  $2x + y + 2z - 4 = 0$
  - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ,  $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
  - $2x - 14y + 10z = -6$ ,  $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה  $ABCD A'B'C'D'$ , שנפחה הוא 8.  
 משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא:  $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$ .  
 משוואת המישור שעליו מונחת הפאה  $ABB'A'$  היא:  $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$ .  
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה  $A(4, 0, -1)$  נמצאת על כדור, שמרכזו  $O(1, 1, 2)$ .  
 מצא את משוואת המישור, המשיק לכדור בנקודה A.
- (7) נתונים מישור וישר:  $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (1, 5, 5) + t(1, 1, 0)$ .  
 מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- $z$ , הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$ .  
 מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור  $\pi_1$  ובמרחק 6 ממישור  $\pi_2$  (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור:  $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$ ,  $\ell_1 : \underline{x} = (0, -3, 0) + t(1, 1, -8)$ .  
 ישר נוסף,  $\ell_2$ , המקביל למישור  $\pi$ , עובר בנקודה  $P(1, 0, -4)$  וחותך את הישר  $\ell_1$  בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור  $\pi$ , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.  
 מצא את שטח המלבן PQQ'P'.  
 (הדרכה: הבע באמצעות  $t$  את וקטור הכיוון של  $\ell_2$ )
- (10) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$ .  
 $\ell_1$  הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.  
 המישור  $\pi_3$  מכיל את הישר  $\ell_1$  ויוצר זווית של  $60^\circ$  עם הישר  $\ell_2 : \underline{x} = (1, 3, -4) + t(1, 1, 0)$ .  
 מצא את משוואת המישור  $\pi_3$ .

## תשובות סופיות

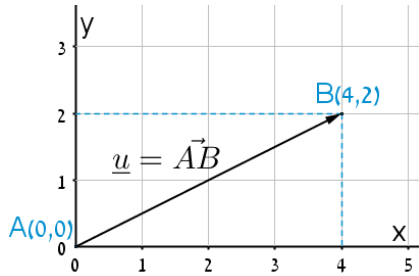
- (1) א.  $\underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$  ב.  $\sqrt{2}$  ג.  $y - z + 2 = 0$
- (2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07. ג. מתלכדים. ד. נחתכים בנקודה  $(1, -3, 4)$ . הזווית היא:  $47.6^\circ$ .
- (3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל. ג. חותך בנקודה  $(3.5, -0.5, -2)$ , הזווית היא:  $40.78^\circ$ .
- (4) א. נחתכים. ישר חיתוך:  $\underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$ , זווית:  $63.6^\circ$ . ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.
- (5)  $\ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75)$ ,  $\ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$
- (6)  $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$
- (7)  $(0, 0, 4)$  או  $(0, 0, 14\frac{4}{5})$
- (8)  $\ell: \underline{x} = (0, -14, -15\frac{3}{4}) + t(-14, 14, 21)$
- (9) 10.467 יח"ש.
- (10)  $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$  או  $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$

## סיכום כללי

---

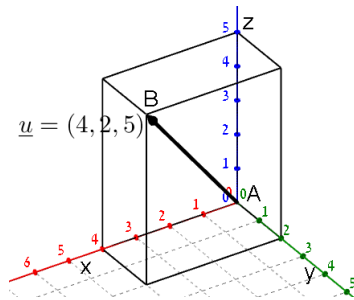
### הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים  $(0,0)$  וסופו בנקודה  $(x,y)$  במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא:  $\underline{u} = (x,y)$ .



דוגמאות:

- הוקטור  $\underline{u} = (4,2)$  נמצא במישור  $[xy]$ , מוצאו בנקודה  $A(0,0)$  וסופו בנקודה  $B(4,2)$ .



- הוקטור:  $\underline{u} = (4,2,5)$  נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים  $A(0,0,0)$  וסופו בנקודה:  $B(4,2,5)$ .

### וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

וקטור שמוצאו בנקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  וסופו בנקודה  $B(x_2, y_2, z_2)$  ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא:  $\underline{u} = \overline{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ .

### אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצותיו הם  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  הוא:  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$ .
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  ביחס של  $k:l$  הם:  $x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$ .

### מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

מכפלה סקלרית של שני וקטורים  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  תסומן:  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$  כאשר  $\alpha$  היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים:  $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$  תחושב באופן הבא:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ .

גודלו של וקטור  $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$  נתון ע"י:  $|\underline{u}| = \sqrt{u^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ .

### הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.

הווקטור  $\underline{a}$  נקרא **ווקטור ההעתקה**.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור  $\underline{u}$  נקרא **ווקטור הכיוון של הישר**.

זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

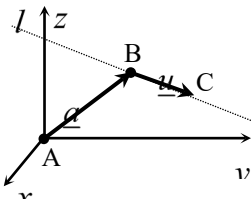
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י:  $\ell: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$

כאשר  $t$  הוא מספר ממשי כלשהו ו-  $\underline{x}$  הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של  $t$  שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר  $\ell$ .

**דוגמא:** עבור הנקודות:  $A(0,0,0)$ ,  $B(5,3,1)$  ו-  $C(7,0,10)$  נקבל את הווקטורים

הבאים:  $\underline{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,3,1)$ ;  $\underline{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא:  $\ell: \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$



**\*הערות:**

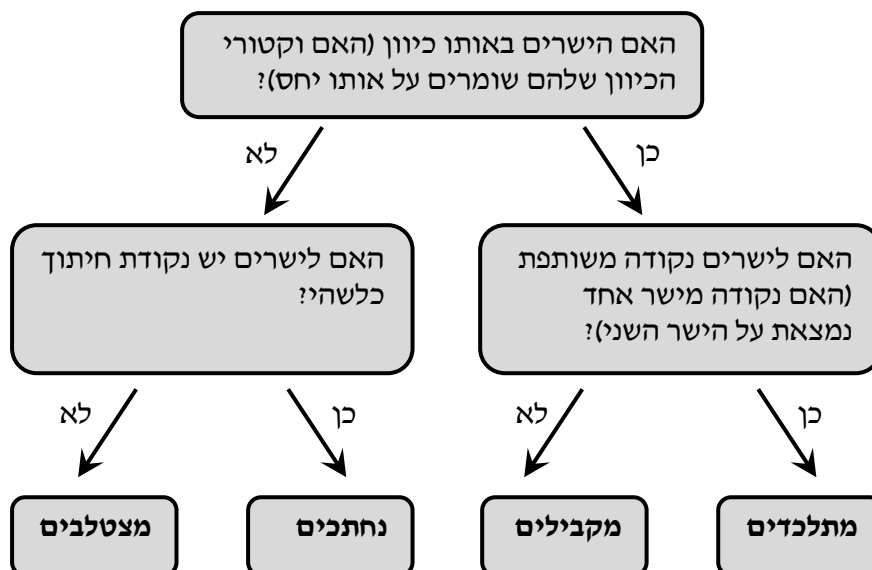
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא:  $l: \underline{x} = (7, 0, 10) + t(-6, 9, -27)$
- הווקטור  $\underline{x}$  המתקבל ע"י הצבת  $t_0$  בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת  $t_1$  בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור  $\underline{a}$  ומוצאו של הווקטור  $\underline{u}$ .
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור  $\underline{u}$  (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור  $\underline{a}$ .
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

**מצב הדדי בין ישרים**

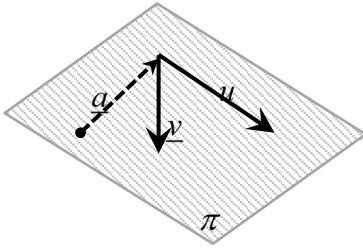
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



## הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.

הווקטור  $\underline{a}$  הוא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור

הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  הם וקטורי הכיוון של המישור.

אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י:  $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר  $t, s$  הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$  הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר

מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור  $\pi$ .

## משוואת מישור

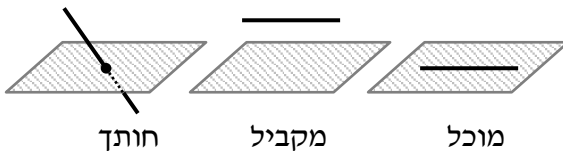
ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא:  $\pi : ax + by + cz + d = 0$ ,

כאשר:  $(x, y, z)$  היא נקודה על המישור והמקדמים  $a, b, c$  הם שיעורי ווקטור הנורמל

של המישור המסומן:  $\underline{h} = (a, b, c)$ .

## מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



• הישר חותך את המישור.

• הישר מקביל למישור.

• הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

• אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.

• אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.

• אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

## מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים:  $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  ו-  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

| נחתכים     | מקבילים  | מתלכדים   |
|------------|--|---|
| כל מצב אחר | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$ |

## חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית  $\alpha$  בין שני וקטורים  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  תחושב ע"י:  $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$ .
- זווית חדה  $\alpha$  בין שני ישרים  $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$  ו-  $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$  תחושב:  $\cos \alpha = \frac{|\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2|}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|}$ .
- זווית חדה  $\alpha$  בין ישר  $l = \underline{a} + t\underline{u}$  ומישור  $\pi: ax + by + cz + d = 0$  תחושב ע"י הנוסחה הבאה:  $\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{h}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|}$ .
- זווית חדה  $\alpha$  בין שני מישורים:  $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  ו-  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  תחושב ע"י:  $\cos \alpha = \frac{|\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2|}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|}$ .

### חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  במרחב יחושב באופן הבא:  $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ .
2. מרחק בין נקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  לישר הנתון בהצגה פרמטרית:  $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$  יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.
3. מרחק בין נקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  למישור:  $\pi: ax + by + cz + d = 0$  יחושב ע"י:  $d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$ .
4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.
5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.
6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
  - א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
  - ב. שימוש בנוסחה:  $d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$ .
7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 3 - אינטגרלים קווים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים קווים ושימושיהם ..... 47

## אינטגרלים קויים ושימושיהם

\* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

### שאלות

#### אינטגרל קוי מסוג I

בשאלות 1-4 חשב את האינטגרל  $\int_C f(x, y) ds$ , כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi ; f(x, y) = 1 - x^2 \quad (1)$$

$$C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq \pi ; f(x, y) = x \quad (2)$$

$$C: \text{קטע של ישר המחבר את } O(0,0) \text{ עם } A(1,2) ; f(x, y) = x + y \quad (3)$$

$$C: \text{היקפו של } \Delta OAB \text{ של } O(0,0), A(0,1), B(1,0) ; f(x, y) = x + y^2 \quad (4)$$

בשאלות 5-6 חשב את האינטגרל  $\int_C f(x, y, z) ds$ , כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, z = t \quad 0 \leq t \leq \pi ; f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

$$C: x = t, y = \frac{1}{\sqrt{2}} t^2, z = \frac{1}{3} t^3 \quad 0 \leq t \leq 3 ; f(x, y, z) = x^3 + 3z \quad (6)$$

$$(7) \text{ חשב את אורך העקום } x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

$$(8) \text{ סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי } x = \cos t, y = \sin t, z = 2t \quad (0 \leq t \leq \pi) \\ \text{חשב את מסת הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא } \delta(x, y, z) = kz \quad (k > 0).$$

## אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות 9-10 חשב:

$$C: x = \cos t, y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy \quad (9)$$

$$C: x = t, y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 1; \int_C (2x + y) dx + (x^2 - y) dy \quad (10)$$

$$(11) \text{ חשב } \int_C y dx + x^2 dy, \text{ כאשר } C \text{ המסלול מנקודה } (0,0) \text{ לנקודה } (2,4),$$

ו- $C$  נתון ע"י המשוואה:

$$א. y = 2x$$

$$ב. y = x^2$$

$$(12) \text{ חשב } \int_{(1,1)}^{(4,2)} (x + y) dx + (y - x) dy, \text{ אם העקום נתון על ידי:}$$

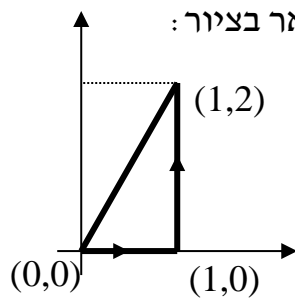
$$א. הפרבולה  $y^2 = x$ .$$

ב. קו ישר.

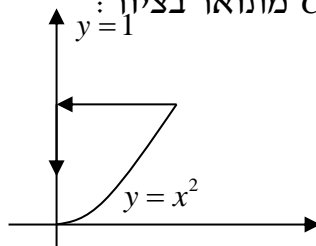
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$  ל- $(1,2)$  ומשם ל- $(4,2)$ .

$$ד. העקום:  $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ .$$

$$(13) \text{ חשב } \int_C x^2 y dx + x dy, \text{ כאשר המסלול } C \text{ מתואר בציור:}$$



$$(14) \text{ חשב } \int_C (x - y^2) dx + dy, \text{ כאשר המסלול } C \text{ מתואר בציור:}$$



$$(15) \text{ אם } \mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$$

חשב את האינטגרל הקווי  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , מ- $(0,0,0)$  ל- $(1,1,1)$ , לאורך המסלולים:

$$\text{א. } x=t, y=t^2, z=t^3$$

ב. הקוים הישרים מ- $(0,0,0)$  ל- $(0,0,1)$ , משם ל- $(0,1,1)$  ומשם ל- $(1,1,1)$ .

ג. הישר המחבר את  $(0,0,0)$  ו- $(1,1,1)$ .

בשאלות 16-17 חשב את האינטגרל הקווי  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , כאשר:

$$(16) \mathbf{F}(x, y) = (x^2 y^3, -y\sqrt{x}), \quad \mathbf{r}(t) = (t^2, -t^3), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(17) \mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz), \quad \mathbf{r}(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(18) \text{ נתון שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y) = x^3 y \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$$

א. חשב את העבודה שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה  $y = x^2$

מ- $(-2, 4)$  עד  $(1, 1)$ .

ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1, 1)$  עד  $(-2, 4)$ ?

$$(19) \text{ חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

על חלקיק הנע לאורך העיקול  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 1$ )

### הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f, g, h) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f dx + g dy + h dz$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_1, A_2, A_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

## תשובות סופיות

- (1)  $\pi$
- (2)  $\frac{16}{3}$
- (3)  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
- (4)  $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$
- (5)  $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$
- (6)  $\frac{567}{2}$
- (7) 6
- (8)  $\sqrt{5}k\pi^2$
- (9)  $\frac{1}{3}$
- (10)  $\frac{4}{3}$
- (11) א.  $\frac{28}{3}$  ב.  $\frac{32}{3}$
- (12) א.  $\frac{34}{3}$  ב. 11 ג. 14 ד.  $\frac{32}{3}$
- (13)  $\frac{1}{2}$
- (14)  $\frac{4}{5}$
- (15) א. 2 ב. -3 ג.  $\frac{6}{5}$
- (16)  $-\frac{59}{105}$
- (17)  $\frac{6}{5} - \sin 1 - \cos 1$
- (18) א. 3 ב. -3
- (19) 1

## הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

| דוגמה   | הצגה פרמטרית  | עקום  |
|---|---|---|
| $y = x^2 (1 \leq x \leq 2)$ $\Downarrow$ $x = t, y = t^2 (1 \leq t \leq 2)$                                 | $x = t, y = f(t) (a \leq t \leq b)$   | $y = f(x) (a \leq x \leq b)$  |
| $x = y^2 (1 \leq y \leq 2)$ $\Downarrow$ $y = t, x = t^2 (1 \leq t \leq 2)$                                 | $y = t, x = f(t) (a \leq t \leq b)$   | $x = f(y) (a \leq y \leq b)$  |
| $x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$                              | $x = r \cos t, y = r \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">נגד כיוון השעון</p>    | $x^2 + y^2 = r^2$ <p style="text-align: center;">מעגל</p>                         |
| $x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = -2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$                             | $x = r \cos t, y = -r \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">עם כיוון השעון</p>    | $x^2 + y^2 = r^2$ <p style="text-align: center;">מעגל</p>                         |
| $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$      | $x = a \cos t, y = b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">נגד כיוון השעון</p>    | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p style="text-align: center;">אליפסה</p> |
| $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = -5 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$     | $x = a \cos t, y = -b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">עם כיוון השעון</p>    | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p style="text-align: center;">אליפסה</p> |
| ישר פרמטרי מהנק' (1, 2) לנק' (3, 4)<br>$x = 1 + 2t$<br>$y = 2 + 2t$<br>$(0 \leq t \leq 1)$                  | $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$<br>$y = y_0 + t(y_1 - y_0)$<br>$(0 \leq t \leq 1)$                             | ישר פרמטרי<br>במישור<br>מהנק' $(x_0, y_0)$<br>לנק' $(x_1, y_1)$                   |
| ישר פרמטרי מ- (1, 2, 3) ל- (4, 7, 9)<br>$x = 1 + 3t$<br>$y = 2 + 5t$<br>$z = 3 + 6t$<br>$(0 \leq t \leq 1)$ | $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$<br>$y = y_0 + t(y_1 - y_0)$<br>$z = z_0 + t(z_1 - z_0)$<br>$(0 \leq t \leq 1)$ | ישר פרמטרי<br>במרחב<br>מהנק'<br>$(x_0, y_0, z_0)$<br>לנק' $(x_1, y_1, z_1)$       |

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 4 - שדות משמרים - אי תלות במסלול

תוכן העניינים

1. שדות משמרים - אי תלות במסלול.....52

## שדות משמרים - אי-תלות במסלול

### שאלות

בשאלות 1-6 קבע האם  $\mathbf{F}$  הוא שדה משמר; אם כן, מצא פונקציה  $\phi$ , כך ש-  $\nabla\phi = \mathbf{F}$ .

$$\mathbf{F}(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y) \quad (1)$$

$$\mathbf{F}(x, y) = xe^y \mathbf{i} + ye^x \mathbf{j} \quad (2)$$

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y - y \cos x, -x^2 \sin y - \sin x) \quad (3)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 \mathbf{i} + e^{-y} \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k} \quad (4)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 3z^2) \mathbf{k} \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 2yz, y^2) \quad (6)$$

$$(7) \quad \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy \quad \text{נתון האינטגרל}$$

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את (1,2) ו-(3,4).  
 ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

$$(8) \quad \int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1 + 3x^2y^2) dy \quad \text{חשב את האינטגרל}$$

$$(9) \quad \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy \quad \text{חשב את האינטגרל}$$

(10) יהי  $\mathbf{F}(x, y) = e^y \mathbf{i} + xe^y \mathbf{j}$ . מצא את העבודה שמבצע השדה על חלקיק הנע על  $y = \sqrt{1-x^2}$ , מ- (1,0) ל- (-1,0).

11) חשב את האינטגרל  $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)} (2xz^3 + 6y)dx + (6x - 2yz)dy + (3x^2z^2 - y^2)dz$  תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

12) נתון שדה וקטורי  $\mathbf{F} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$ , ונתונים 3 מסלולים:

$$L_1: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

$$L_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{בכיוון השלילי (עם כיוון השעון).}$$

$$L_3: (x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

חשב:

$$\oint_{L_3} \mathbf{F} dr \quad \text{ג.} \quad \oint_{L_2} \mathbf{F} dr \quad \text{ב.} \quad \oint_{L_1} \mathbf{F} dr \quad \text{א.}$$

13) ענה על הסעיפים הבאים:

א. שרטט את השדה הווקטורי  $\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  ברביע הראשון.

ב. בתחום  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$  נסמן  $f = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ,  $g = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .

1. הוכח כי  $f_y = g_x$  בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכח שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום  $D$  (מסעיף ב).

ד. הוכח שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ ,

ומצא את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ ,

חשב  $\oint_C \mathbf{F} \cdot dr$ , כאשר  $C$  עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה  $(0, 0)$ .

$$(14) \text{ נתון השדה הווקטורי } \mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\text{בתחום } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

א. שרטט את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

$$\text{ב. נסמן } f = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad g = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

1. הוכח כי  $f_y = g_x$  בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכח שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

### הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\hat{x} + g(x, y, z)\hat{y} + h(x, y, z)\hat{z}$$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

## תשובות סופיות

$$\phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 \quad (1)$$

(2) השדה אינו משמר.

$$\phi(x, y) = x^2 \cos y - y \sin x \quad (3)$$

$$\phi(x, y, z) = xz^2 - e^{-y} \quad (4)$$

$$\phi(x, y, z) = xyz + z^3 \quad (5)$$

(6) השדה אינו משמר.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. 236

(8) -58

(9) 5

(10) -2

(11) = 15 עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- (1, -1, 1) ל- (2, 1, -1), לאורך C.

(12) א.  $2\pi$  ב.  $-2\pi$  ג. 0

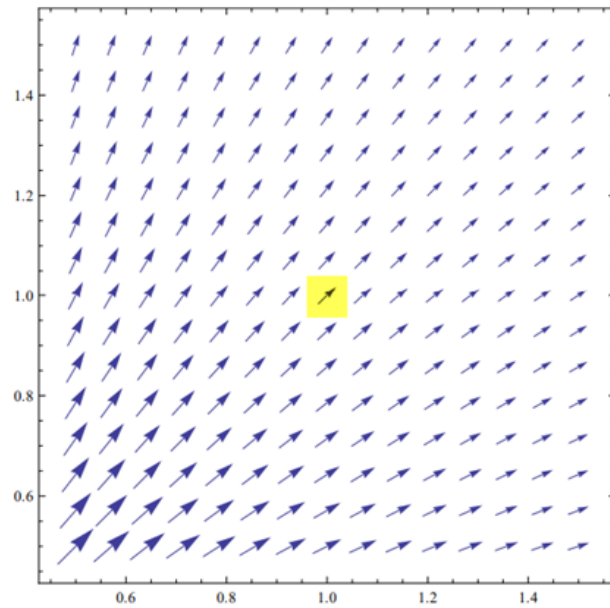
(13) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. שאלת הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.

ג. שאלת הוכחה. ד. שאלת הוכחה;  $\phi = \arctan \frac{y}{x} + k$ ; ה.  $2\pi$

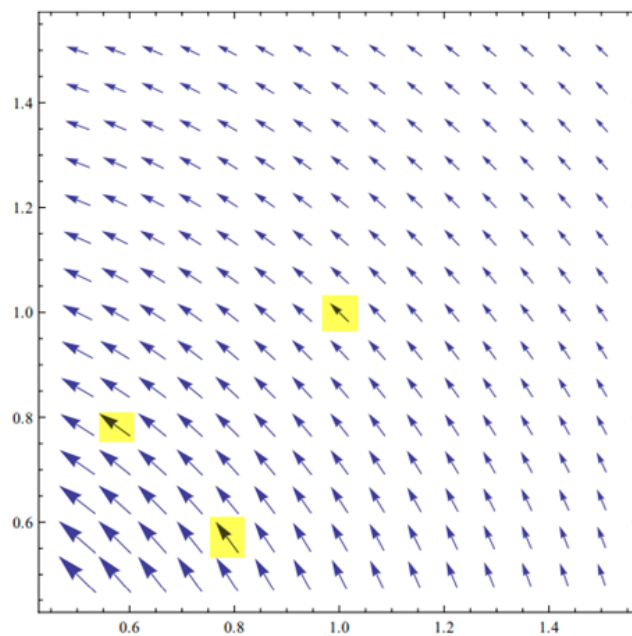
(14) א. ראו בעמוד הבא. ב. 1. שאלת הוכחה. 2. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר. ג. שאלת הוכחה.

## שרטוטים

שאלה 13 סעיף א:



שאלה 14 סעיף א:



# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 5 - משפט גרין

תוכן העניינים

1. משפט גרין..... 57

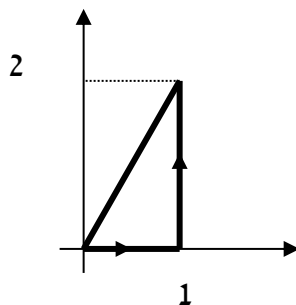
## משפט גרין

## שאלות

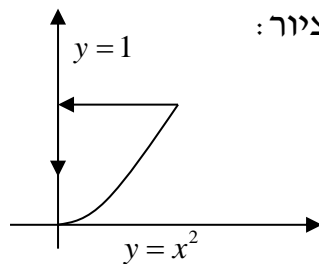
בשאלות 1-3 אשר את משפט גרין.

כלומר, חשב את האינטגרל  $\oint_C f dx + g dy$  ואת האינטגרל  $\iint_R (g_x - f_y) dA$ ,

והראה שהם שווים זה לזה.



(1)  $\oint_C x^2 y dx + x dy$ ; המסלול  $C$  מתואר בציור:



(2)  $\oint_C (x - y^2) dx + dy$ ; המסלול  $C$  מתואר בציור:

(3)  $\oint_C (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$ ; הוא ריבוע שקדקודיו:

$(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$  בכיוון החיובי.

(4) חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח  $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה  $x^2 + y^2 = 1$ , בכיוון הפוך לכיוון השעון, ומשלים הקפה אחת.

(5) חשב את האינטגרל  $\int_C \left( e^y - \tan \frac{x}{2} \right) dx + \left( x e^y + y \cos y^2 \right) dy$ , כאשר  $C$  הוא

האיחוד של העקומים  $y = 8 - x^2$ ,  $y = x^2$  ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

$$(6) \quad \int_C -2e^{2x-y} \cos y dx + (e^{2x-y} (\sin y + \cos y) + 2xy) dy$$

כאשר  $C$  הוא חצי האליפסה  $\{x^2 + 4y^2 = 4, y \geq 0\}$  מהנקודה  $(2, 0)$  לנקודה  $(-2, 0)$ .

(7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט  $C$ ,

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

$$ב. \quad \text{חשב את שטח האליפסה } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(8) \quad \oint_C (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx + (3x^2y + 3x - \sin y) dy$$

כאשר  $C$  מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון. מהו הערך המקסימלי של האינטגרל? עבור איזו מסילה  $C$  הוא מתקבל?

(9) הוכח שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין  $C$ ,

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dy = 0$$

$$(10) \quad \text{חשב: } \oint_C \frac{4x-y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dx + \frac{x-4y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dy, \text{ כאשר:}$$

$$א. \quad C \text{ הוא המעגל } (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$ב. \quad C \text{ הוא המעגל } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 144$$

ג.  $C$  היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

## תשובות סופיות

- (1) הערך המשותף הוא 0.5.
- (2) הערך המשותף הוא 0.8.
- (3) הערך המשותף הוא 8.
- (4)  $1.5\pi$
- (5)  $0.5 \sin 64$
- (6)  $\frac{8}{3} + e^4 - \frac{1}{e^4}$
- (7) א. הוכחה. ב.  $\pi ab$
- (8) הערך המקסימלי הוא  $\frac{6\pi}{4}$ , עבור המסילה  $C: x^2 + y^2 = 1$ .
- (9) הוכחה.
- (10) א. 0. ב.  $\frac{\pi}{2}$ . ג.  $\frac{\pi}{2}$ .

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 6 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של משטח ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים משטחיים מסוג 1 ..... 60
3. אינטגרלים משטחיים מסוג 2 ..... 62

## אינטגרלים משטחיים מסוג I

### שאלות

בשאלות 5-1 חשב את האינטגרל המשטחי:

$$(1) \quad \iint_S x^2 y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = 1 + 2x + 3y,$$

$$\text{מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2].$$

$$(2) \quad \iint_S x dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח } y = x^2 + 4z, \text{ } 0 \leq x \leq 2, \text{ } 0 \leq z \leq 2.$$

$$(3) \quad \iint_S y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = y + 3, \text{ שכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1.$$

$$(4) \quad \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ } z \geq 0.$$

$$(5) \quad \iint_S x y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט } \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$$

$$\text{המקיים } 1 \leq u \leq 2, \text{ } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$(6) \quad \text{חשב את שטח הפנים של כדור בעל רדיוס } R.$$

$$(7) \quad \text{היריעה הדקה } S \text{ היא חלק הפרבולואיד } z = x^2 + y^2, \text{ שמתחת למישור } z = 1,$$

$$\text{וצפיפותה } \delta(x, y, z) = \delta_0, \text{ קבועה.}$$

חשב את מסת היריעה.

**תשובות סופיות**

$$171\sqrt{14} \quad (1)$$

$$\frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6} \quad (2)$$

$$\pi\sqrt{2}/4 \quad (3)$$

$$16\pi \quad (4)$$

$$93/\sqrt{10} \quad (5)$$

$$4\pi R^2 \quad (6)$$

$$\frac{\pi\delta_0}{6}(5\sqrt{5}-1) \quad (7)$$

## אינטגרל משטחי מסוג II

### שאלות

בשאלות הבאות חשב את האינטגרל  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$  ( $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ ).

בניסוח אחר: חשב את השטף של שדה הזרימה  $\mathbf{F}$  דרך  $S$ .

$$(1) \quad S; \mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} - xz^2 \mathbf{k} \quad \text{הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים:} \\ x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$$

$$(2) \quad S; \mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k} \quad \text{הוא פני הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$(3) \quad S; \mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k} \quad \text{הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי} \\ \text{המישורים: } 2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$$

$$(4) \quad S; \mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{חלק הפרבולואיד } z = 4 - x^2 - y^2, \text{ שבו } z \geq 0$$

$$(5) \quad S; \mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k} \quad \text{הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4} \\ \text{והוא נמצא מעל המישור } xy$$

### תשובות סופיות

$$\frac{11}{6} \quad (1)$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad (2)$$

$$27 \quad (3)$$

$$12\pi \quad (4)$$

$$-16\pi \quad (5)$$

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 7 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

תוכן העניינים

1. משפט הדיברגנץ ..... 63

## משפט הדיברגנץ (גאוס)

## שאלות

בשאלות 1-3 אשר את משפט הדיברגנץ.

כלומר, חשב את האינטגרל  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ , ואת האינטגרל  $\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV$ ,

והראה שהם שווים זה לזה ( $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ ).  
(ראה הערת סימון בעמוד הבא)

(1)  $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} - xz^2 \mathbf{k}$ ;  $S$  הוא פני הקובייה  $G$ ,  
הנקבעת ע"י המישורים:  $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$ .

(2)  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ ;  $S$  הוא פני הכדור  $G$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

(3)  $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$ ;  $S$  הוא פני הפירמידה  $G$ ,  
הנקבעת ע"י המישורים:  $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$ .

(4) יהי  $S$  פני הגוף הכלוא בגליל  $x^2 + y^2 = 9$ , בין המישורים  $z=0$  ו- $z=2$ .  
חשב את השטף של השדה הווקטורי  $\mathbf{F} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$  דרך  $S$ .  
כלומר, חשב את  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ , כאשר  $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ .

(5) חשב את  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ , כאשר  $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ .

$\mathbf{F} = (z^2 - x)\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ ;  $S$  הוא פני הגוף החסום על ידי:  
 $x=0, x=3, z=4 - y^2, z=0$ .

(6) חשב את  $\iint_S xz^2 dydz + (x^2 y - z^3) dzdx + (2xy + y^2 z) dx dy$   
כאשר  $S$  הוא פני הגוף החסום על ידי  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,  $z=0$ .

(7) יהי  $S$  משטח פתוח  $x^2 + z^2 = 16$ ,  $0 \leq y \leq 4$  (גליל ללא הבסיסים).  
חשב את השטף דרך  $S$  של השדה הווקטורי  $\mathbf{F} = z^2 \mathbf{i} + 5y \mathbf{j} + x^5 \mathbf{k}$ .  
כלומר, חשב את  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ , כאשר  $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ .

(8) חשב את  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ , כאשר  $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ .

$$\mathbf{F} = \left( \frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2 \right) \mathbf{i} + 2x \arctan y \mathbf{j} - \frac{2xz(1+y) + 1 + y^2}{1+y^2} \mathbf{k}$$

$S$  הוא חלק הפרבולואיד  $z = 4 - x^2 - y^2$ , שבו  $z \geq 0$  (המשטח פתוח).

### הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי  $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ ,

$$\text{מתקיים: } \iiint_G \text{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\begin{aligned} \iiint_G \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ \iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ \iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV &= \iint_S f dydz + g dzdx + h dx dy \end{aligned}$$

### תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא  $\frac{11}{6}$ .

(2) הערך המשותף הוא  $\frac{8}{3}\pi$ .

(3) הערך המשותף הוא 27.

(4)  $279\pi$

(5) 16

(6)  $\frac{2\pi a^5}{5}$

(7) 0

(8)  $-4\pi$

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 8 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

1. משפט סטוקס.....65

## משפט סטוקס

## שאלות

בשאלות 1-3 בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים.  
 כלומר, חשב את האינטגרל  $\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} ds$ , ואת האינטגרל  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ,  
 והראה שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בעמוד הבא).

$$(1) \quad \mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}; \quad S \text{ חלק הפרבולואיד } z = 4 - x^2 - y^2, \text{ שבו } z \geq 0.$$

$$(2) \quad \mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + (-3xy)\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}; \quad S \text{ הוא שפת חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור } xy.$$

$$(3) \quad \mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}; \quad S \text{ הוא משטח התחום בשמינית הראשונה, החסום על ידי המישורים } y = 2, 2x + z = 6, \text{ ושאינו כלול א. במישור } xy \text{ ב. במישור } y = 2 \text{ ג. במישור } 2x + z = 6.$$

$$(4) \quad \text{חשב את האינטגרל } \oint_C x^2 dx + 4xy^3 dy + y^2 x dz, \text{ כאשר } C \text{ עקומה בצורת מלבן מ-}(0,0,0) \text{ ל-}(0,3,3) \text{, משם ל-}(1,3,3) \text{ ומשם ל-}(1,0,0) \text{.$$

$$(5) \quad \text{חשב את האינטגרל } \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \text{ כאשר } \mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}; \text{ ו-} C \text{ היא שפת המשולש, שקדקודיו הם } (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \text{ וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה-} z \text{.)}$$

$$(6) \quad \text{חשב את } \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS, \text{ כאשר } \mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}; \text{ ו-} S \text{ הוא החלק של הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ הכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1, \text{ ומעל למישור } xy.$$

$$(7) \quad \text{חשב את } \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS, \text{ כאשר } \mathbf{F} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$$

ו- $S$  הוא משטח החרוט  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , מעל למישור- $xy$ .

### הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי  $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ ,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים:}$$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = \iint_S ((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS$$

### תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא  $12\pi$ .

(2) הערך המשותף הוא  $-16\pi$ .

(3) הערך המשותף הוא: א.  $-6$       ב.  $-9$       ג.  $-18$

(4)  $-90$

(5)  $-1$

(6)  $0$

(7)  $12\pi$

## מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 9 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

1. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) ..... 67
2. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) ..... 69
3. אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר ..... 70
4. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) ..... 72
5. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) ..... 74

## גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

### שאלות

$$(1) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^4 - x}{\ln x} dx$$

$$(2) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx \quad (m, n > 0)$$

$$(3) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$(4) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx$$

$$(5) \text{ הוכח כי } \int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx = \pi \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \right) \text{ עבור } |\alpha| < 1$$

$$(6) \text{ חשב } \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx \text{ עבור } \alpha \neq \pm 1$$

$$(7) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(8) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^1 x^p (\ln x)^m dx \quad (p > 0, m \in \mathbb{N})$$

$$(9) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^\pi \frac{1}{(2 - \cos x)^2} dx$$

## תשובות סופיות

$$\ln 2.5 \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{8} \ln 2 \quad (3)$$

$$2\pi \quad (4)$$

שאלת הוכחה. (5)

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \begin{cases} 0 & |\alpha| < 1 \\ 2\pi \ln |\alpha| & |\alpha| > 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\pi + 2}{8} \quad (7)$$

$$\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}} \quad (8)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{27}} \quad (9)$$

## אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

### שאלות

$$(1) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \text{ עבור } b > a > 0.$$

$$(2) \text{ חשב את האינטגרל } \int_0^\pi \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x} dx \text{ עבור } b, a > 1.$$

$$(3) \text{ הוכח כי } \int_0^{2\pi} [(b - \sin x)^2 - (a - \sin x)^2] dx = 2\pi(b^2 - a^2) \text{ לכל } a, b > 1.$$

הערה: פתור בשתי דרכים, גם ע"י אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם ע"י חישוב ישיר.

$$(4) \text{ בהינתן הנוסחה: } \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \sin x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \text{ עבור } \alpha > 1,$$

$$\text{ הוכח כי: } \int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{5 + 3 \sin x}{5 + 4 \sin x} \right) dx = 2\pi \ln \left( \frac{9}{8} \right).$$

### תשובות סופיות

$$(1) \ln \left( \frac{b+1}{a+1} \right)$$

$$(2) \pi \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$$

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

## אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר

### הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שילמדו בהמשך. חלק מהמרצים מסתפק רק בצד הטכני החישובי ולא נכנס לנושא זה כלל. בררו עם מתרגל ו/או מרצה הקורס האם אתם נדרשים לנושא זה. במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים. בהצלחה!

### שאלות

$$(1) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(kx) dx \text{ , כאשר } k \text{ ממשי.}$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור  $0 < a \leq \alpha$ .

$$(2) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + \alpha)^n} dx \text{ , כאשר } n \text{ טבעי.}$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור  $\alpha \geq 1$ .

$$(3) \text{ הוכח שהאינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \text{ מתכנס במידה שווה עבור } \alpha \geq 0.$$

$$(4) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2} dx.$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל  $\alpha$ .

$$(5) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \text{ עבור } \alpha \geq k > 0.$$

א. חשב את האינטגרל והוכח שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל  $\alpha$  המקיים  $\alpha \geq k > 0$ .

$$(6) \quad \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx \quad \text{נתון האינטגרל}$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל  $n$  טבעי ולכל  $\alpha$  המקיים  $\alpha \geq k > 0$ .

$$(7) \quad \phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2} dx \quad \text{נתון כי , כאשר } \alpha \geq k > 0$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

$$(8) \quad \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2} dx \quad \text{נתון האינטגרל}$$

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל  $\alpha \geq k > 0$ .

### תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

### שאלות

(1) חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$

(2) הוכח שלכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) 2}$$

(3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

ב. חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

(4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$ , כאשר  $n \in \mathbb{N}$ .

ב. חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} x^{10} e^{-x^2} dx$

ג. חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $(\alpha > 0)$

ב. בעזרת סעיף א' חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

### תשובות סופיות

(1)  $n!$

(2) שאלת הוכחה.

(3) א.  $\sqrt{2\pi}$       ב.  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(4) א. אם  $n$  אי-זוגי אז 0, ואם  $n$  זוגי אז  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot \sqrt{2\pi}$

ב.  $\frac{945}{64} \sqrt{\pi}$       ג.  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(5) א.  $-\arctan \alpha + \frac{\pi}{2}$       ב.  $\frac{\pi}{2}$

## אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

### שאלות

(1) חשב:  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ , עבור  $b > a \geq k > 0$ .

(2) חשב:  $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$ , עבור  $b > a \geq k > 0$ .

(3) חשב:  $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$ .

(4) הוכח כי עבור  $b > a > 0$  ו-  $r \in \mathbb{R}$ , מתקיים  $\int_0^{\infty} \cos rx \frac{a^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}$ .

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin rx}{x} dx = \arctan \frac{r}{a}$  ( $\alpha, r > 0$ ).

ב. הוכח כי  $\int_0^{\infty} \left[ e^{-ax} \frac{1 - \cos rx}{x^2} \right] dx = \arctan \frac{r}{a} - \frac{a}{2} \ln \left( 1 + \frac{r^2}{a^2} \right)$  ( $\alpha, r > 0$ ).

ג. הוכח כי  $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \arctan \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)$  ( $\alpha > 0$ ).

(6) הוכח:

א.  $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ .

ב.  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ .

(7) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח כי  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. חשב את האינטגרל  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$

(8) חשב:  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

### תשובות סופיות

(1)  $\ln \frac{b}{a}$

(2)  $\frac{\pi}{2}(b-a)$

(3)  $\pi$

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) א. שאלת הוכחה. ב.  $\frac{\pi}{4}$

(8)  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 10 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות..... 76
2. מערכות עם פרמטר..... 81
3. מערכת משוואות הומוגנית..... 84
4. שימושים של מערכות ליניאריות..... 86

## פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

### שאלות

1 מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות :

$$\begin{array}{llll} 2x+y=4 & x-y=0 & x-4y=-7 & x+10y=11 \\ x+y=3 \quad \text{ד.} & 2x+y=3 \quad \text{ג.} & x-y=-1 \quad \text{ב.} & 2x-2y=0 \quad \text{א.} \end{array}$$

2 רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{llll} x=3 & 2x+y+z=3 & x-4y+z=-7 & x+10y=11 \\ 2x+y=4 \quad \text{ד.} & x-z=0 \quad \text{ג.} & x-y=-1 \quad \text{ב.} & 2x-2y=0 \quad \text{א.} \\ z+t=8 & & x+y+z=5 & x+y=3 \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצע על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{5} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{4} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{3} \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

6 מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין :

$$\begin{array}{l} \text{א.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

בשאלות 7-15 הבא את המטריצות הבאות לצורה מדורגת  
(בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה מדורגת קנונית):

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (14) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

\* בשאלה 15, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה  $\mathbb{R}$  ופעם מעל השדה  $\mathbb{C}$ .

בשאלות 16-27 פתור את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה  $\mathbf{F}$ :

$$z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 = 1 + 4i$$

$$iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 = 2 + i$$

$$(-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 = 5 - i$$

א.  $\mathbf{F} = \mathbb{R}$

ב.  $\mathbf{F} = \mathbb{C}$

## תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} (5) \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} (3)$$

6) א.  $R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2$  ב.  $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$  ג.  $R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (10)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R} \qquad F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \qquad (x, y) = (5 - 2t, t) \quad (17) \qquad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \qquad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \qquad (x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left( \frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \qquad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \qquad (x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t + 1+i, 3, t) \cdot \beta \qquad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1) \cdot \alpha \quad (28)$$

## מערכות עם פרמטר

### שאלות

בשאלות 1-6 מצא לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \quad (2) \\ kx+y+z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 5x-7y+(k^2+3)z=k^2+1 \quad (1) \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \quad (4) \\ 5x+(1-k)y+k^2z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2ky+z=0 \\ 3x+y+kz=2 \quad (3) \\ x+9ky+5z=-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+ky+3z=2 \\ kx-y+z=4 \quad (6) \\ 3x+y+(2+k)z=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} kx-y=1 \\ (k-2)x+ky=-2 \quad (5) \\ (k^2-1)z=9 \end{array}$$

בשאלות 7-9 מצא לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} 2x-3y+z=1 \\ 4x+(k^2-5k)y+2z=k \quad (8) \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+ky=3 \\ (k+3)x+2y=k^2+5 \quad (7) \\ 6x+3ky=7k^2+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x+4y-z=2 \\ kx-2y+z=-1 \\ x+8y-3z=k \quad (9) \\ 2x+6y-2z=0.5k+1 \end{array}$$

בשאלות 10-12 מצא לאילו ערכים של  $a$  ושל  $b$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+y-z+t=1 \\ ax+y+z+t=b \quad (12) \\ 3x+2y+at=1+a \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+4y+az=-1 \\ x+2y+4z=-4 \\ x+2y-4z=0 \\ x+2y+6z=-2b \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2y-4z=b \\ 7x-10y+16z=7 \quad (10) \\ 2x-ay+3z=1 \end{array} \quad (11)$$

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2 \quad (13) \text{ נתונה מערכת המשוואות:}$$

$$bx + cy + dz = 3$$

- א. מצא תנאי עבור  $a, b, c, d$ , כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.  
 ב. מצא תנאי עבור  $b, c, d$ , כך שלכל  $a$ , למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

$$(14) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.  
 ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.  
 ג. מצא לאילו ערכי  $k$  יש למערכת:  
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.  
 ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.  
 ה. מצא לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון שבו  $z = 0$ .  
 ו. מצא לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון יחיד שבו  $z = 0$ .  
 ז. מצא עבור איזה ערך של  $k$  פתרון של המשוואה השלישית הוא  $(1, 2, 3)$ .  
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.  
 ח. מצא לאיזה ערך של  $k$ ,  $(1, 0, 0)$  הוא הפתרון היחיד של המערכת.

## תשובות סופיות

$$(1) \quad 1. \ k \neq 1, k \neq -2 \quad 2. \ k = 1 \quad 3. \ k = -2$$

$$(2) \quad 1. \ k \neq 1, k \neq -2 \quad 2. \ k = -2 \quad 3. \ k = 1$$

$$(3) \quad 1. \ k \neq -1, k \neq \frac{4}{7} \quad 2. \ k = \frac{4}{7} \quad 3. \ k = -1$$

$$(4) \quad 1. \ k \neq 1, k \neq -0.4 \quad 2. \ k = 1, k = -0.4$$

$$(5) \quad 1. \ k \neq \pm 1, k \neq -2 \quad 2. \ k = \pm 1, k = -2$$

$$(6) \quad 1. \ k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2 \quad 2. \ k = -1, k = -3, k = 2 \quad 3. \ k = -1, k = -3, k = 2$$

$$(7) \quad 1. \ k = -1 \quad 2. \ k \neq \pm 1 \quad 3. \ k = 1$$

$$(8) \quad 1. \ k = 3 \quad 2. \ k = 3 \quad 3. \ k \neq 3$$

$$(9) \quad 1. \ k \neq 1 \quad 2. \ k = 1$$

$$(10) \quad 1. \ a \neq 2 \quad 2. \ a = 2, b \neq -3 \quad 3. \ a = 2, b = -3$$

$$(11) \quad 1. \ a \neq -6 \text{ או } b \neq 2.5 \quad 2. \ a = -6, b = 2.5 \quad 3. \ a = -6, b = 2.5$$

$$(12) \quad 1. \ a = 2, b \neq 2 \quad 2. \ a = 2, b = 2 \quad 3. \ a \neq 2 \text{ או } a = 2, b = 2$$

$$(13) \quad 1. \ ab + 2c \neq d \quad 2. \ ab + 2c = d \quad 3. \ b = 0, c = 1.5, d = 3$$

$$(14) \quad 1. \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix} \quad 2. \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix} \quad 3. \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) = (1+0.2t, 0.8t, t) \quad 1. \ k \neq 2, k \neq -1 \quad 2. \ k = -1 \quad 3. \ k = 2 \quad 4. \ (x, y, z) = (1+0.2t, 0.8t, t)$$

$$5. \ k = \pm 2 \quad 6. \ k = -2 \quad 7. \ k = 2 \text{ , לא} \quad 8. \ k = -2$$

## מערכת משוואות הומוגנית

### שאלות

(1) פתור את המערכת הבאה. על סמך הפתרון, קבע את הפתרון של המערכת

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{ההומוגנית המתאימה: } x + y + 2z = 6$$

(2) פתור את המערכת הבאה. על סמך הפתרון, קבע את הפתרון של המערכת

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{ההומוגנית המתאימה: } x + y + 2z = 6$$

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת: } -x + 2y - z = k$$

- א. מצא את ערכי  $m$ , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.  
 ב. עבור ערך  $m$  שמצאת ב-א, מצא את ערכי  $k$ , עבורם למערכת פתרון.  
 ג. עבור ערכי  $m, k$  שמצאת בסעיפים הקודמים, מצא את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבע את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(4) נתון שהחמישייה  $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$  מהווה פתרון כללי של מערכת

ליניארית נתונה. קבע אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

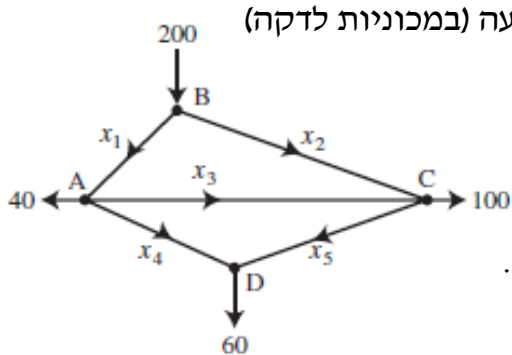
- א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.  
 ב. החמישייה  $(4, 0, 2, 0, 0)$ , היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.  
 ג. החמישייה  $(4, 0, 2, 1, 1)$ , היא פתרון של המערכת הנתונה.  
 ד. לכל  $a$  ממשי, החמישייה  $(4a, 0, 2a, 0, 0)$  אינה פתרון של המערכת הנתונה.  
 ה. החמישייה  $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$ , היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.  
 ו. החמישייה  $(0, 1, 0, 1, 2)$ , היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.  
 ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

## תשובות סופיות

- (1) פתרון כללי של המערכת  $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$ .  
 פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$ .
- (2) למערכת פתרון יחיד  $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ .  
 למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד  $(0, 0, 0)$ .
- (3) א.  $m = -3$       ב.  $k = -2$       ג. פתרון כללי של המערכת  $(x, y, z) = (t, t - 1, t)$ .  
 פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(t, t, t)$ .
- (4) א. הטענה לא נכונה.      ב. הטענה נכונה.      ג. הטענה לא נכונה.  
 ד. הטענה לא נכונה.      ה. הטענה נכונה.      ו. הטענה לא נכונה.  
 ז. הטענה לא נכונה.

## שימושים של מערכות ליניאריות

## שאלות



1) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.

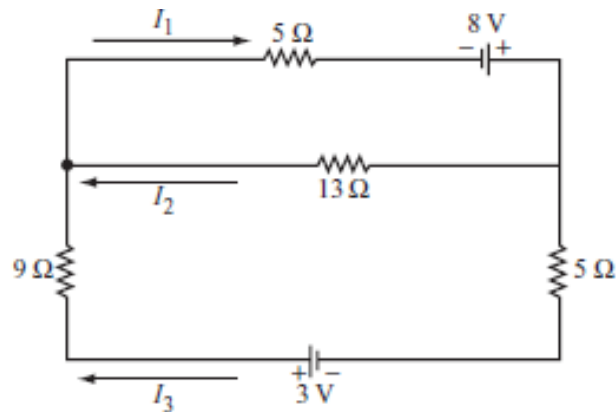
א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת,

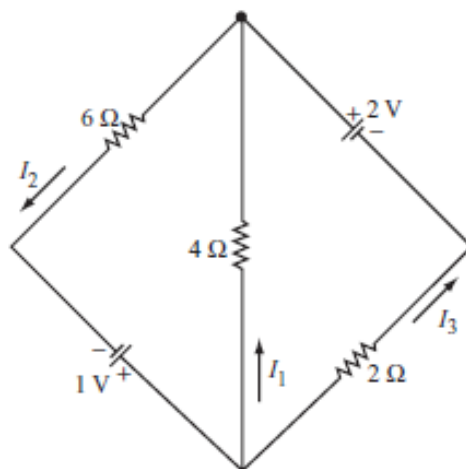
אם ידוע שהכביש שהזרם שלו  $x_4$  סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של  $x_1$ , אם ידוע ש- $x_4 = 0$ .

בשאלות 2-3 מצא את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):



2)



3)

\* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות ליניאריות.

### תשובות סופיות

(1) א.  $x_3$  ו-  $x_5$  חופשיים.  $x_1 = 100 + x_3 - x_5$ ,  $x_2 = 100 - x_3 + x_5$ ,  $x_4 = 60 - x_5$ .

ב.  $x_3$  חופשי.  $x_1 = 40 + x_3$ ,  $x_2 = 160 - x_3$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 60$ . ג. 40.

(2) א.  $I_1 = \frac{255}{317}$ ,  $I_2 = \frac{97}{317}$ ,  $I_3 = \frac{158}{317}$

(3)  $I_1 = -\frac{5}{22}$ ,  $I_2 = \frac{7}{22}$ ,  $I_3 = \frac{6}{11}$

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 11 - מטריצות

תוכן העניינים

|     |  |
|-----|--|
| 88  | 1. מטריצות                                 |
| 90  | 2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות |
| 91  | 3. המטריצה ההופכית                         |
| 95  | 4. דרגה של מטריצה                          |
| 98  | 5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית           |
| 103 | 6. מטריצה אלמנטרית                         |
| 105 | 7. פירוק LU                                |
| 106 | 8. תרגילי תיאוריה מתקדמים                  |
| 108 | 9. רגרסיה ליניארית                         |

## מטריצות

## שאלות

1 נתונות המטריצות הבאות:  $A_{4 \times 6}$ ,  $B_{4 \times 6}$ ,  $C_{6 \times 2}$ ,  $D_{4 \times 2}$ ,  $E_{6 \times 4}$ .  
קבע אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.  
במידה והמטריצה מוגדרת, רשום את סדר המטריצה:

- א.  $A+B$     ב.  $AB$     ג.  $AC-D$     ד.  $AE-B$   
ה.  $B+AB$     ו.  $E(B+A)$     ז.  $(E+A^T)D$     ח.  $E^T B$   
ט.  $E(AC)$     י.  $E(B-A)$

2 מצא את  $x, y, z$ , אם ידוע כי:  $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

3 א.  $E+D$     ב.  $E-D+I_3$

ג.  $5C$     ד.  $2D+4EI_3$

4  $2tr(D^2 - 2E)$

5 א.  $4C^T + A$     ב.  $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6  $I_2 BC$

7  $tr(C^T C)$

8  $DABC$

## תשובות סופיות

- (1) א.  $4 \times 6$  ב. לא. ג.  $4 \times 2$  ד. לא. ה. לא
- (2) א.  $6 \times 6$  ב.  $6 \times 2$  ח. לא. ט.  $6 \times 4$  י.  $6 \times 6$
- (3) א.  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$  ב.  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$  ג.  $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$
- (4) 230 ד.  $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$
- (5) א.  $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$  ב.  $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$
- (6)  $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$  (7) 63 (8)  $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

## מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

### שאלות

מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא סימטרית אם  $A^T = A$ , ואנטי-סימטרית אם  $A^T = -A$ .

(1) ידוע ש- $A$  מטריצה ריבועית.  
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):

1.  $AA^T$  סימטרית.
2.  $A + A^T$  סימטרית.
3.  $A - A^T$  אנטי-סימטרית.

(2) ידוע ש- $A$  ו- $B$  אנטי-סימטריות מאותו סדר.  
מי מבין הבאים נכון:

1.  $BABABA$  אנטי-סימטרית.
2.  $A^2 - B^2$  סימטרית.
3.  $A^2 + B$  סימטרית.

(3) ידוע ש- $A$  ו- $B$  סימטריות מאותו סדר ונתון כי  $AB = -BA$ .  
מי מבין הבאים נכון:

1.  $AB^3$  אנטי-סימטרית.
2.  $AB^2$  סימטרית.
3.  $(A - B)^2$  סימטרית.

(4) ידוע ש- $A$  סימטרית ו- $B$  אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי  $AB = BA$ .  
הוכח:

1.  $AB$  אנטי-סימטרית.
2.  $AB + B$  אנטי-סימטרית.

(5) נתון:  $A, B, AB$  סימטריות מאותו סדר.

הוכח כי  $A^4 B^4 = B^4 A^4$ .

### תשובות סופיות

(1) 1,2,3

(2) 2

(3) 1,2,3

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

## המטריצה ההופכית

## שאלות

בשאלות 1-9 מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(1)} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(4)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(7)} \end{array}$$

(10) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה הבאה:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$  הפיכה?

(11) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  איננה הפיכה?

הנח שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר  $n$ , וחלץ את  $X$ :

(12) א.  $AXC = D$  ב.  $A^{-1}XC = A^{-1}DC$  ג.  $P^{-1}X^T P = A$

(13) א.  $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$  ב.  $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

(14)  $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

(15) נתון  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ .

חשב את  $X$ , אם ידוע כי  $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$ .

(16) נתון  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  . חשב את  $Y$  , אם ידוע כי  $BYB^T = B^{-1} + B$  .

(17) נתון  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$  .

חשב את  $B$  , אם נתון בנוסף כי:  $5A^T B(I+2A)^{-2} = (7A)^{-2}$  .

(18) ענה על הסעיפים הבאים :

א. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^2 - 5A - 2I = 0$  .

הוכח כי  $A$  הפיכה ובטא את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$  .

ב. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $(A-3I)(A+2I) = 0$  .

הוכח כי  $A$  הפיכה ובטא את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$  .

(19) נתון כי:  $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$  ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$  .

א. חשב את  $p(A)$  .

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכח ש- $A$  הפיכה, ובטא את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד.

(20) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^4 = 0$  .

א. הוכח כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה  $I - A$  הפיכה, ומצא את ההופכית שלה.

(21) נתון:  $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$  .

הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה  $D$  , כך ש- $D^{-1}AD = C$  .

\* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.  
 \*\* לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:  
 הוכח: אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$  , אז  $A$  דומה ל- $C$  .  
 (כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

**(22)** תהיינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ . הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- א.  $AB = BA$ .
- ב. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.
- ג. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $A$  הפיכה.
- ד. אם  $(AB)^{100} = I$ , אז בהכרח  $(BA)^{100} = I$ .
- ה. אם  $(AB)^{100} = 0$ , אז בהכרח  $(BA)^{101} = 0$ .

**(23)** תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , עבורן  $A^2 + AB = I$ .

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$ .
- ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$  היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם  $B$  היא מטריצת האפס.

**(24)** תהיינה  $A, B$  מטריצות כלשהן.

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

- א. אם  $AB = I$  או  $B = A^{-1}$ .
- ב. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה ריבועית, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.
- ג. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה הפיכה, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.
- ד. המכפלה  $AB$  לא הפיכה.
- ה. אם  $A$  מטריצה ריבועית והמכפלה  $AB$  מוגדרת, אזי  $B$  מטריצה ריבועית.

**(25)** מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא אידמפוטנטית אם  $A^2 = A$ . הוכח:

- א. למעט המקרה בו  $A = I$ , מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
- ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
- ג. אם  $A$  מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז  $tr(A) = 1$  או ש- $A$  מטריצה אלכסונית.
- ד.  $A$  אידמפוטנטית  $\Leftrightarrow A^n = A$ , לכל  $n$  טבעי.

**הערה:** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

## תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \lambda \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad \text{ב.}$$

$$A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ב.}$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.}$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{ב. הוכחה.} \quad (21)$$

$$\text{ג. הוכחה.} \quad (22)$$

$$\text{ד. הוכחה.} \quad (23)$$

$$\text{ה. הוכחה.} \quad (24)$$

$$\text{ו. הוכחה.} \quad (25)$$

## דרגה של מטריצה

## שאלות

(1) אמת את המשפט  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} : \text{על המטריצה:}$$

(2) אמת את המשפט  $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \text{עבור:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix} : \text{נתונה המטריצה:}$$

חשב את  $\text{rank}(A)$ .

(4) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n > 1$ .  
הוכח או הפרך:

א.  $\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

ב.  $\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

(5) נתון כי  $A, B$  מטריצות ריבועיות מסדר  $n > 1$ .  
הוכח או הפרך:

א. אם  $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.

ב. ייתכן ש- $\text{rank}(A) < \text{rank}(AB)$ .

ג. אם  $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$ , אז  $\text{rank}(AB) > \text{rank}(B)$ .

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשב את  $rank(A)$ ,  $rank(B)$ .

ב. חשב את  $rank(B^{10}A^{14})$ .

(7) נניח כי  $A, B$  שתי מטריצות ריבועיות מסדר  $n$ .

$$\text{הוכיחו כי } rank \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2rank(A) + rank(B)$$

(8) תהי  $A_{8 \times 7}$  מטריצה, כך ש- $rank(A) = 3$ .

הוכח כי קיימות 3 מטריצות  $A_1, A_2, A_3$ , שלכל אחת מהן דרגה 1,

$$\text{כך ש-} A = A_1 + A_2 + A_3$$

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר  $m \times n$  שדרגתה  $k$ .

(9) נתונות שתי מטריצות  $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$ .

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

$$\text{א. } rank(AB) = rank(BA)$$

$$\text{ב. } rank(AB) \neq rank(BA)$$

ג. המטריצה  $BA$  לא הפיכה.

## תשובות סופיות

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) אם  $k=1$ , אז  $\text{rank}(A)=2$ . אם  $k=4, k=10$ , אז  $\text{rank}(A)=3$ .
- אם  $\text{rank}(A)=4$   $k \neq 1, 4, 10$ .
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה. ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א.  $\text{rank}(A)=2$ ,  $\text{rank}(B)=3$ . ב.  $\text{rank}(B^{10}A^{14})=2$ .
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.
- (9) הוכחה.

## בחזרה למערכת משוואות ליניארית

### שאלות

(1) בסעיפים הבאים מצא מטריצות  $A$ , ו- $\underline{x}$ ,  $\underline{b}$ , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה  $A\underline{x} = \underline{b}$ :

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5 \quad \text{א.}$$

$$6x + 4y + z = 2$$

בשאלות 2-6 נתון כי:  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

בטא כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4)$$

$$A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6)$$

$$A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

(7) פתור את מערכת המשוואות הבאה,

$$2x - y + z = 3$$

בעזרת המטריצה ההפוכה:  $3x - 2y + 2z = 5$ .

$$5x - 3y + 4z = 11$$

(8) פתור את מערכת המשוואות הבאה,

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

(9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (2, -8, 4), \quad (x, y, z) = (-1, 4, -2)$$

הוכח שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

**10** למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :  
 $(x, y, z) = (2, 3, 4)$  ,  $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$   
 מצא פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases} \quad \text{11 נתונה המערכת :}$$

מצא עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$ , למערכת :  
 א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

\* בפתרון השתמש במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$\text{12 נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

ידוע כי  $rank(A) = 3$ , וידוע כי למערכת  $Ax = b$  יש פתרון.  
 מצאו את הקבועים  $k, m$ .

**13** נתונה מטריצה ריבועית  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה 0.  
 הוכח ש- $A$  מטריצה לא הפיכה.

**14** נתונה מטריצה ריבועית הפיכה  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה  $k$ .  
 הוכח שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.  
 בטא קבוע זה בעזרת  $k$ .

$$\text{15 מטריצה } A \text{ מקיימת : } A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

הוכיחו כי הווקטור  $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$  הוא פתרון של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

- 16** יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ . עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת  $(AB)x = 0$  קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח  $A$  לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת  $(AB)x = 0$ , אז למערכת  $(BA)x = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת  $Ax = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$ .
- ד. אם למערכת  $(A^t A)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז  $A$  לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$ , אז למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל  $\mathbb{R}$ :  $Ax = d$  ( $d \neq 0$ ). נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת  $\text{rank}(A) = 2$ . ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א.  $x = au + bv + cw$
- ב.  $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג.  $x = au + bv + w$
- ד.  $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה.  $x = (a + b)u - (av + bw + u)$ , כאשר  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**הערה:** בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:

בהינתן מערכת הומוגנית  $Ax = 0$ :

- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
- מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות. בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

## תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad \text{(2)}$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad \text{(3)}$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad \text{(4)}$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{(5)}$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad \text{(6)}$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad \text{(7)}$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad \text{(8)}$$

הוכחה. (9)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{(10)}$$

(11) אם  $k \neq 2$  או  $k \neq -1$ , אז יש פתרון אחד.

אם  $k = 2$ , אז יש אינסוף פתרונות.

אם  $k = -1$ , אז אין פתרונות.

$$m = 5, k = 9 \quad \text{(12)}$$

הוכחה. (13)

14) סכום האיברים בכל שורה של  $A^{-1}$  הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$ .

15) הוכחה.

16) הוכחה.

17) הוכחה.

## מטריצה אלמנטרית

### שאלות

(1) רשום את המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(2) רשום את המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$  כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(3) הוכח או הפרך כל אחד מסעיפים א-ד.  
נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית, ו- $B$  מתקבלת מ- $A$  ע"י סדרת פעולות דירוג.  
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א.  $A^2$  מ- $B^2$ .

ב.  $BA$  מ- $A^2$ .

ג.  $BA$  מ- $B^2$ .

ד.  $AB$  מ- $B^2$ .

(4) תהי  $A \in M_3[R]$ , כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה  $E_2 E_1 A$ ?

**פתור בשתי דרכים:**

**דרך א'** – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.

**דרך ב'** – בעזרת כפל מטריצות.

## תשובות סופיות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{e_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \quad (1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \cdot \quad (2)$$

$$\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_5} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_6} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_7} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{e_8} = A$$

(3) הוכחה.

(4) -3

## פירוק LU

### שאלות

$$(1) \text{ רשום את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ רשום את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ רשום את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

### תשובות סופיות

$$(1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U$$

$$(2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_U$$

$$(3) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

## תרגילי תיאוריה מתקדמים

### שאלות

(1) תהיינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ .

- אזי בהכרח מתקיים:  $AB = BA$ .
- אם  $A^2 - AB = I_n$  אז בהכרח  $B$  הפיכה.
- אם  $(AB)^{100} = I$  אז בהכרח  $(BA)^{100} = I$ .
- אם  $(AB)^{100} = 0$  אז בהכרח  $(BA)^{101} = 0$ .
- האף תשובה אינה נכונה.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

- תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , עבורן  $A^2 + AB$  היא מטריצה היחידה. הוכיחו ש- $AB = BA$ .
- אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$  היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם  $B$  היא מטריצת האפס.

(3) תהיינה  $A, B$  מטריצות כלשהן. אזי בהכרח:

- אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה ריבועית, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.
- אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה הפיכה, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.
- אם  $A$  מטריצה ריבועית והמכפלה  $AB$  מוגדרת, אזי  $B$  מטריצה ריבועית.
- אם  $A, B$  מטריצות ריבועיות מאותו סדר, וכן  $rank(A) > rank(B)$ , אזי  $rank(AB) > rank(B)$ .
- האף תשובה אינה נכונה.

(4) תהינה  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות מסדר  $n \times n$ , כך ש- $BA = AB$ .  
 א. אם  $A, B$  סימטריות הוכיחו כי  $AB^2$  סימטרית.

ב. נניח כי  $rank A = n - 1$  ו- $v \neq 0$  הוא וקטור המקיים  $Av = 0$ ,  
 הוכח כי  $Bv$  הוא כפולה של  $v$  בסקלר.

(5) תהינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ .  
 אזי בהכרח מתקיים:

א.  $AB = BA$

ב. אם  $A^2 - AB = I_n$  אז בהכרח  $AB = BA$ .

ג. אם  $(AB)^{100} = I$  אז בהכרח  $(BA)^{100} = I$ .

ד. אם  $(AB)^{100} = 0$  אז בהכרח  $(BA)^{100} = 0$ .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(6)  $A$  מטריצה ריבועית,  $B$  מתקבלת מ- $A$  ע"י סדרת פעולות דירוג (בשורות).  
 ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א.  $B^2$  מ- $A^2$ .

ב.  $BA$  מ- $A^2$ .

ג.  $B^2$  מ- $BA$ .

ד.  $B^2$  מ- $AB$ .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

### תשובות סופיות

- |         |            |       |            |
|---------|------------|-------|------------|
| (1) ג+ד | (2) הוכחה. | (3) ה | (4) הוכחה. |
| (5) ב+ג | (6) ב+ד    |       |            |

## רגרסיה לינארית

### שאלות

1) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש :

| $price(x)$ | $Demand / sales(y)$ |
|------------|---------------------|
| 49         | 124                 |
| 69         | 95                  |
| 89         | 71                  |
| 99         | 45                  |
| 109        | 18                  |

- מצא את ישר הרגרסיה של הבעיה.
- בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא \$54.
- מה משמעות השיפוע של ישר הרגרסיה?
- מצא את סכום ריבועי השגיאות בחישוב הנ"ל (SSE).

הערה: הנח שהביקוש הוא ביחידות מוצר והמחיר הוא בדולרים.

### תשובות סופיות

- $f(x) = -1.7x + 211$
  - הביקוש הוא 119.2 יחידות מוצר.
  - העלאת מחיר המוצר ב-\$1 תביא לירידה במכירות של 1.7 יחידות מוצר בחודש.
  - $SSE = 207.65$

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 12 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

- 109 ..... 1. חישוב דטרמיננטות
- 117 ..... 2. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות
- 118 ..... 3. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה
- 122 ..... 4. שימושי הדטרמיננטה

## דטרמיננטות

## שאלות

בשאלות 1-5 חשב את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \text{ א. } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב. } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג. } \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \text{ א. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב. } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג. } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \text{ א. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג. } \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשב את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \text{ א. } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב. } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג. } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ א. (7)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ ג.}$$

בשאלות 8-10 חשב את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix} \text{ (8)}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \text{ (9)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix} \text{ (10)}$$

בשאלות 11-12 הראה, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix} \text{ ג.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \text{ ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ א. (11)}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \cdot \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשב:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad \text{(13)}$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad \text{(14)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(15)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{(16) הוכח כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) : \text{ הוכח כי : (17)}$$

$$\text{. det } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : \text{ חשב : (18)}$$

בכל אחת מהשאלות 19-25, נתונה מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .  
חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad (19)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (20)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (21)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & \text{else} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$(24) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 3(n-1) \end{pmatrix}$$

$$(25) a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

\* בשאלה 25:

1. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה.
2. הנח כי  $a=3$ ,  $b=1$ ,  $c=2$ , ומצא:
  - א. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
  - ב. את הדטרמיננטה, כאשר  $n=20$ .

$$(26) \text{חשב: } \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

בשאלות 27-28 נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות מסדר 3,  $|A|=4$ ,  $|B|=2$ .  
חשב:

$$(27) \text{א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(28) \text{א. } |-A^{-2}B^T A^3| \quad \text{ב. } |-2A^2 A^T \text{adj}B|$$

$$(29) \text{נתון: } (PQ)^{-1}APQ = B$$

הוכח:  $|A|=|B|$ .

(30) נתון:  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש- $2AB+3I=0$ ,  $|A|=2$ .  
חשב את  $|B|$ .

**(31)** נתון:  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $A + 3B = 0$ ,  $B^2 - 2A^{-1} = 0$ .  
 חשב את  $|A|$ ,  $|B|$ .

**(32)** הוכח: 1.  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$  . 2.  $|\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$ .

**(33)** נתון כי  $A$  מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.  
 הוכח ש- $|A| = 0$ .

**(34)** נתון:  $A$  מטריצה מסדר  $n$ ,  $|A| = 128$ ,  $2AB = B^T A^2$ , ו- $B$  הפיכה.  
 מצא את  $n$ .

**(35)** נתון:  $\det(A_{n \times n}) = 2$ ,  $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$ .

חשב:  $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $ad - bc$     ב. 29    ג. -1
- (2) א. -1    ב. -3    ג. -14
- (3) א. 24    ב. 234    ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0    ב. 0    ג. 3
- (7) א. 24    ב. 44    ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) הוכחה.
- (17) הוכחה.
- (18)  $(k-1)^4(k+4)$
- (19)  $n!$
- (20)  $(-1)^{n-1}n!$
- (21)  $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$
- (22)  $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$
- (23) 1
- (24)  $2 \cdot 3^{n-2}$
- (25) 1.  $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$ ,  $D_2 = a^2 - bc$ ,  $D_3 = a^3 - 2abc$
- א.  $D_n = 2^{n+1} - 1$     ב.  $D_{20} = 2^{21} - 1$
- (26) 0
- (27) א. 4    ב.  $2^{13}$
- (28) א. -8    ב.  $-2^{11}$
- (29) הוכחה.

$$\frac{81}{32} \quad (30)$$

$$|A|=18, |B|=-2/3 \quad (31)$$

(32) הוכחה.

(33) הוכחה.

$$7 \quad (34)$$

$$4^n \quad (35)$$

## כלל קרמר

## שאלות

בשאלות 1-3 פתור את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{l} x+2z+5t=8 \\ -2x-6y=-8 \\ 5x+3y-7z+4t=5 \\ 2x+5y+44z=51 \end{array} \quad (3) \quad \begin{array}{l} x+z=3 \\ 4x+y+8z=21 \\ 2x+3z=8 \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ 3x+4y=11 \end{array} \quad (1)$$

$$kx+y+z+t+r=1$$

$$x+ky+z+t+r=1$$

(4) נתונה מערכת המשוואות:  $x+y+kz+t+r=1$ .

$$x+y+z+kt+r=1$$

$$,x+y+z+t+kr=1$$

א. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{2}$ ?

ג. האם קיים  $k$  עבורו למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{5}$ ?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים  $x=y=z=t=r$ .

(5) יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ .

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית  $Ax=0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$ .

ב. אם למערכת ההומוגנית  $(A^t A)x=0$  קיים פתרון יחיד, אז  $|A|=0$ .

ג. אם למערכת ההומוגנית  $(AB)x=0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$ .

## תשובות סופיות

$$x=1, y=2 \quad (1)$$

$$x=1, y=1, z=2 \quad (2)$$

$$x=y=z=t=1 \quad (3)$$

(4) א.  $k \neq 1, k \neq -4$     ב.  $k = -2$     ג. לא    ד. הוכחה.

(5) א. לא נכונה.    ב. לא נכונה.    ג. לא נכונה.

## מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

### שאלות

בשאלות 1-3 חשב את הצמודה הקלאסית  $adj(A)$ , ובעזרתה את  $A^{-1}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \text{נתון:}$$

א. חשב:  $(adjA)_{1,5}$ .

ב. חשב:  $(A^{-1})_{1,5}$ .

(5) הוכח שאם  $|A|=1$  וכל איברי  $A$  הם מספרים שלמים, אזי כל איברי  $A^{-1}$  גם הם מספרים שלמים.

(6) נתון ש- $A$  מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- $A^{-1}$  משולשית תחתונה.

(7) נתון ש- $A$  הפיכה. הוכח שגם  $adj(A)$  וגם  $A^T$  הפיכות.

(8) נתון:  $A, B$  הפיכות.  $C, D$  לא הפיכות. האם המטריצות הבאות הפיכות:

א.  $C+D$     ב.  $A+B$     ג.  $AD$     ד.  $CD$     ה.  $AB$

$$(9) \quad \text{מצא את ערכי } k \text{ עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

**10** ידוע ש- $A, B$  מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$ . הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם  $AB = 0$ , אז  $A = 0$ .

ב. אם  $|AB| = 0$ , אז  $A = 0$ .

ג. אם  $|AB| = 0$ , אז  $|A| = 0$ .

ד. אם  $AB = 0$ , אז  $|A| = 0$ .

**11** נתונות שתי מטריצות  $A_{3 \times 5}$ ,  $B_{5 \times 3}$ .

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א.  $|AB| = |BA|$ .

ב.  $adj(AB) \neq adj(BA)$ .

**12** אם  $B$  מתקבלת ממטריצה  $A_{3 \times 3}$  על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4,

אז  $|adj(A) \cdot B|$  שווה ל:

א.  $4^3 |A|^3$ .

ב.  $4^3 |B|^3$ .

ג.  $4 |B|^3$ .

ד.  $4 |A|^3$ .

**13** נתונה מטריצה ריבועית  $A = (a_{ij})$  מסדר  $n \geq 3$  המקיימת  $a_{ij} = i + j - 1$ .

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $|A| = 4$ .

ב.  $A$  הפיכה.

ג.  $adj(A) = 0$ .

ד.  $|A| = 0$ .

**14** אם  $G$  היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית  $A$ , אז:

א. בהכרח  $\det(A) = \det(G)$  וגם  $adj(A) = adj(G)$ .

ב. בהכרח  $\det(A) = \det(G)$ , אך ייתכן ש  $adj(A) \neq adj(G)$ .

ג. ייתכן ש- $\det(A) \neq \det(G)$ , אך בהכרח  $adj(A) = adj(G)$ .

ד. אף תשובה אינה נכונה.

15) תהי  $A = (a_{ij})$  מטריצה ריבועית מסדר  $n \geq 2$ , כך ש- $a_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$ .

לכל  $1 \leq i, j \leq n$ , אז בהכרח מתקיים:

א.  $|A| = n! - 1$

ב. הפיכה  $A$ .

ג.  $adj(A)$  לא הפיכה.

ד. אם  $n = 4$ , אז  $|Adj(A)| > 214$ .

16) תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n \geq 4$ .

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם  $rank(A) = n - 2$ , אז בהכרח  $adj(A) = 0$ .

ב. אם  $A$  אנטי-סימטרית, אז בהכרח  $adj(A)$  אנטי-סימטרית.

ג. אם  $adj(A) = 0$ , אז בהכרח  $A = 0$ .

17)  $A$  מטריצה ריבועית,  $B$  מתקבלת מ- $A$  ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4,

אז  $adjB$  מתקבלת מ- $adjA$  ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת  $|Adj((-1+i)A)| = i$ .

חשב  $|\det(A)|$ .

19) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

הוכח את הטענות הבאות:

א.  $A$  הפיכה  $\Leftrightarrow Adj(A)$  הפיכה.

ב.  $Adj(A^{-1}) = (Adj(A))^{-1}$

ג.  $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$

## תשובות סופיות

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{adj}(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(4) א. 240 ב. 0.5

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.

ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

(9) אם ורק אם  $k = 0$ .

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) ד

(13) הוכחה.

(14) ד

(15) ד

(16) הוכחה.

(17) ד

(18)  $\frac{-5}{2}$

(19) הוכחה.

## שימושי הדטרמיננטה

### שאלות

- 1) א. חשב את שטח המקבילית שקדקודיה :  
 1.  $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$   
 2.  $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$   
 ב. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו :  $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$   
 ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות :  $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$   
 ד. חשב את שטח המשולש שקדקודיו :  $(1,2), (3,4), (5,8)$ .
- הערה : בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

### תשובות סופיות

- 1) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג.  $3x - y + 4z + 2 = 0$ . ד. 2

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 13 - מבוא לטופולוגיה

תוכן העניינים

1. מבוא לטופולוגיה ..... 123

## מבוא לטופולוגיה

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה  $f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה  $D$  של הפונקציה.
- ב. שרטט סקיזה של הקבוצה  $D$ .
- ג. האם הקבוצה חסומה?
- ד. האם הקבוצה קשירה?
- ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.
- ו. האם הקבוצה פתוחה?
- ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה: אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה. הערה: נקודת שפה של קבוצה נקראת גם נקודה גבולית של הקבוצה.
- ח. האם הקבוצה סגורה?
- ט. האם הפונקציה  $f(x, y)$  חסומה בקבוצה  $D$ ?
- י. האם הפונקציה רציפה ב- $D$ ?

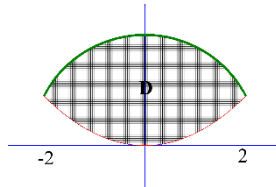
(2) נתונה הפונקציה  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה  $D$  של הפונקציה.
- ב. שרטט סקיזה של הקבוצה  $D$ .
- ג. האם הקבוצה חסומה?
- ד. האם הקבוצה קשירה?
- ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.
- ו. האם הקבוצה פתוחה?
- ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה: אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.
- ח. האם הקבוצה סגורה?
- ט. האם הפונקציה  $f(x, y)$  חסומה בקבוצה  $D$ ?
- י. האם הפונקציה רציפה ב- $D$ ?

(3) נתונה הפונקציה  $f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y}$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה  $D$  של הפונקציה.
- ב. שרטט סקיצה של הקבוצה  $D$ .
- ג. האם הקבוצה חסומה?
- ד. האם הקבוצה קשירה?
- ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.
- ו. האם הקבוצה פתוחה?
- ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:  
אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.
- ח. האם הקבוצה סגורה?
- ט. האם הפונקציה  $f(x, y)$  חסומה בקבוצה  $D$ ?
- י. האם הפונקציה רציפה ב- $D$ ?

## תשובות סופיות



א. (1)  $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 5, y > \frac{1}{4}x^2 \right\}$ . ב.

ג. הקבוצה חסומה. ד. הקבוצה קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D למעט הנקודות:  $C = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 5, -2 < x < 2 \right\}$

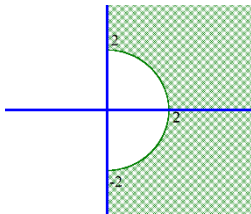
ו. הקבוצה אינה פתוחה.

ז.  $\partial D = \underbrace{\left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 5, -2 < x < 2 \right\}}_C \cup \underbrace{\left\{ (x, y) \mid 4y = x^2, -2 < x < 2 \right\}}_E$

ח. נק' שפה ששייכת לקבוצה.  $(0, \sqrt{5})$  נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ט. הקבוצה אינה סגורה. הפונקציה לא חסומה בקבוצה.

י. הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.



א. (2)  $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\}$ . ב.

ג. הקבוצה לא חסומה. ד. הקבוצה קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D למעט הנקודות  $C = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, -2 < y < 2 \right\}$

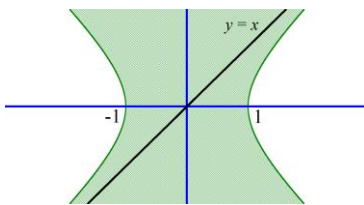
ו. הקבוצה איננה פתוחה.

ז.  $\partial D = \underbrace{\left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, -2 < y < 2 \right\}}_C \cup \underbrace{\left\{ (x, y) \mid x = 0, |y| > 2 \right\}}_E$

ח. נק' שפה ששייכת לקבוצה.  $(2, 0)$  נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ט. הקבוצה אינה סגורה. הפונקציה לא חסומה בקבוצה D.

י. הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.



א. (3)  $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\}$ . ב.

ג. הקבוצה לא חסומה. ד. הקבוצה לא קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D פנימיות למעט הנקודות:  $\left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 = 1 \text{ or } y = x \right\}$

ו. הקבוצה איננה פתוחה.

ז.  $\partial D = \underbrace{\left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 = 1 \right\}}_C \cup \underbrace{\left\{ (x, y) \mid y = x \right\}}_E$

ח. נק' שפה ששייכת לקבוצה.  $(-1, 0)$  נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ט. הקבוצה אינה סגורה. הפונקציה  $f(x, y)$  לא חסומה בקבוצה D.

י. הפונקציה היא פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה בכל תחום הגדרתה.