מודלים ליניאריים

תוכן העניינים

מודלים ליניאריים

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

שאלות

1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} x-y=0 \\ 2x+y=3 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{matrix}$

2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{matrix}$

בשאלות **3-5** בצע על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$
$R_3 \to R_3+R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2+R_1$
$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3-3R_2$

5) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1+3R_3, R_2 \to R_2+3R_3$
$R_1 \to 5R_1-8R_2$

6) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **7-15** הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת**
(בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$

$F=\mathbb{C}$, $F=\mathbb{R}$

* בשאלה **15**, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{R}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{C}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **16-27** פתור את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

16)
$$\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 5x-4y&=-3 \end{aligned}$$

17)
$$\begin{aligned} 4x+8y&=20 \\ 3x+6y&=15 \end{aligned}$$

18)
$$\begin{aligned} 8x-4y&=10 \\ -6x+3y&=1 \end{aligned}$$

19)
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5 \\ 10x_1-6x_2-2x_3&=32 \end{aligned}$$

20)
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=-11 \\ 2x+3y-z&=-5 \\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}$$

21)
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ 4x+6y+16z&=8 \\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$$

22)
$$\begin{aligned} x+3y&=2 \\ 2x+y&=-1 \\ x-y&=-2 \end{aligned}$$

23)
$$\begin{aligned} 4x-7y&=0 \\ 8x-14y&=2 \\ -16x+28y&=4 \end{aligned}$$

24)
$$\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ -9x+6y&=-3 \\ 6x-4y&=2 \end{aligned}$$

25)
$$\begin{aligned} x+2y-3z+2t&=2 \\ 2x+5y-8z+6t&=5 \\ 6x+8y-10z+4t&=8 \end{aligned}$$

26)
$$\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$$

27)
$$\begin{aligned} x+2y+2z&=2 \\ 3x-2y-z&=5 \\ 2x-5y+3z&=-4 \\ 2x+8y+12z&=0 \end{aligned}$$

28) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל **השדה** $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i \\ iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i \\ (-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i \end{aligned}$$

א. $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

ב. $\mathbf{F}=\mathbb{C}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

2) א. $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

6) א. $R_1 \to 2R_1 + R_2$ ב. $R_2 \to R_2 - 4R_1$ ג. $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15) $\underset{F=\mathbb{C}}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $\underset{F=\mathbb{R}}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

16) $(x,y)=(1,2)$ 17) $(x,y)=(5-2t,t)$ 18) ϕ

19) ϕ 20) $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

21) $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$ 22) $(x,y)=(-1,1)$

23) ϕ 24) $(x,y)=\left(\frac{1+2t}{3},t\right)$

25) $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$ 26) ϕ

27) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

28) א. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$ ב. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מערכות עם פרמטר

שאלות

בשאלות **1-6** מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

1)
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

בשאלות **7-9** מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

7)
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

8)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

9)
$$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

בשאלות **10-12** מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

10)
$$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

11)
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

12)
$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{aligned} x+az&=1 \\ y+2z&=2 \\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצא תנאי עבור a,b,c,d, כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b,c,d, כך שלכל a, למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

14) נתונה המערכת:
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}.$$

א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת:

1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.

ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.

ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$.
האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.

ח. מצא לאיזה ערך של k, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1. $k\neq 1,\ k\neq -2$ 2. $k=1$ 3. $k=-2$

2) 1. $k\neq 1,\ k\neq -2$ 2. $k=-2$ 3. $k=1$

3) 1. $k\neq -1,\ k\neq \frac{4}{7}$ 2. $k=\frac{4}{7}$ 3. $k=-1$

4) 1. $k\neq 1,\ k\neq -0.4$ 2. $k=1,\ k=-0.4$

5) 1. $k\neq \pm 1,\ k\neq -2$ 2. $k=\pm 1, k=-2$

6) 1. $k\neq -1,\ k\neq -3,\ k\neq 2$ 3. $k=-1,\ k=-3,\ k=2$

7) 1. $k=-1$ 2. $k\neq \pm 1$ 3. $k=1$

8) 2. $k=3$ 3. $k\neq 3$

9) 1. $k\neq 1$ 2. $k=1$

10) 1. $a\neq 2$ 2. $a=2,\ b\neq -3$ 3. $a=2, b=-3$

11) 2. $b\neq 2.5$ או $a\neq -6$. 3. $a=-6,\ b=2.5$

12) 2. $a=2,\ b\neq 2$ 3. $a=2,\ b=2$ או $a\neq 2$.

13) א. $ab+2c\neq d$ ב. $b=0,\ c=1.5, d=3$

14) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$

ג. 1. $k\neq 2$, $k\neq -1$. 2. $k=-1$ 3. $k=2$ ד. $(x,y,z)=(1+0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k=\pm 2$ ו. $k=-2$ ז. $k=2$, לא. ח. $k=-2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מערכת משוואות הומוגנית

שאלות

1) פתור את המערכת הבאה. על סמך הפתרון, קבע את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה:
$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ 4x-2y+5z=12 \end{cases}$$

2) פתור את המערכת הבאה. על סמך הפתרון, קבע את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה:
$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

3) נתונה המערכת:
$$\begin{cases} x-y=1 \\ -x+2y-z=k \\ 2x+my+z=3 \end{cases}.$$

א. מצא את ערכי m, עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.

ב. עבור ערך m שמצאת ב-א, מצא את ערכי k, עבורם למערכת פתרון.

ג. עבור ערכי m, k שמצאת בסעיפים הקודמים, מצא את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבע את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

4) נתון שהחמישייה $(4t-2s+4,-t+s,2,t,s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבע אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.

ב. החמישייה $(4,0,2,0,0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.

ג. החמישייה $(4,0,2,1,1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.

ד. לכל a ממשי, החמישייה $(4a,0,2a,0,0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.

ה. החמישייה $(4t-2s,-t+s,0,t,s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ו. החמישייה $(0,1,0,1,2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) פתרון כללי של המערכת $\left(4-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t+2,t\right)$.
פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $\left(-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t,t\right)$.

2) למערכת פתרון יחיד $(x,y,z)=(1,1,2)$.
למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $\left(0,0,0\right)$.

3) א. $m=-3$ ב. $k=-2$. ג. פתרון כללי של המערכת $(x,y,z)=(t,t-1,t)$.
פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא (t,t,t).

4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.
ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.
ז. הטענה לא נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושים של מערכות ליניאריות

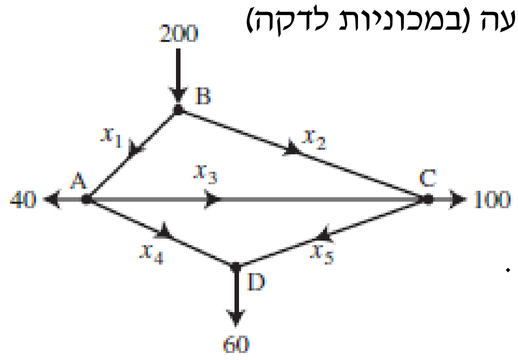
שאלות

1) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.

א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

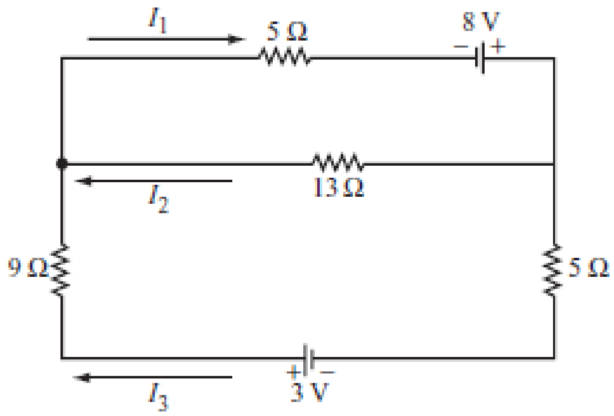
ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת, אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של x_1, אם ידוע ש-$x_4 = 0$.

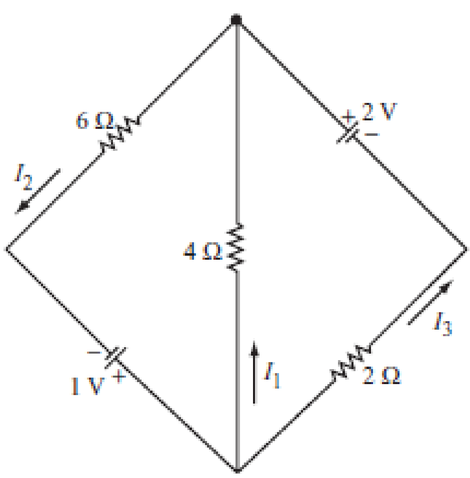


בשאלות **2-3** מצא את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):

2)



3)



*** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות ליניאריות.**

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1 = 100 + x_3 - x_5$, $x_2 = 100 - x_3 + x_5$, $x_4 = 60 - x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1 = 40 + x_3$, $x_2 = 160 - x_3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 60$. ג. 40.

2) א. $I_1 = \frac{255}{317}, I_2 = \frac{97}{317}, I_3 = \frac{158}{317}$

3) $I_1 = -\frac{5}{22}, I_2 = \frac{7}{22}, I_3 = \frac{6}{11}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מודלים לינאריים

פרק 2 - מטריצות

תוכן העניינים

מטריצות

שאלות

1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4\times6}, B_{4\times6}, C_{6\times2}, D_{4\times2}, E_{6\times4}$.
קבע אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשום את סדר המטריצה:

א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$

ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. E^TB

ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2) מצא את x, y, z, אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix}$.

בשאלות **3-8** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4) $2tr\left(D^2-2E\right)$

5) א. $4C^T+A$ ב. $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$

6) I_2BC

7) $tr\left(C^TC\right)$

8) $DABC$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא
ו. 6×6 ז. 6×2 ח. לא. ט. 6×4 י. 6×6

2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

4) 230

5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

7) 63

8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T=A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T=-A$.

1) ידוע ש-A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
1. AA^T סימטרית.
2. $A+A^T$ סימטרית.
3. $A-A^T$ אנטי-סימטרית.

2) ידוע ש-A ו-B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
2. A^2-B^2 סימטרית.
3. A^2+B סימטרית.

3) ידוע ש-A ו-B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB=-BA$.
מי מבין הבאים נכון:
1. AB^3 אנטי-סימטרית.
2. AB^2 סימטרית.
3. $(A-B)^2$ סימטרית.

4) ידוע ש-A סימטרית ו-B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB=BA$.
הוכח:
1. AB אנטי-סימטרית.
2. $AB+B$ אנטי-סימטרית.

5) נתון: A,B,AB סימטריות מאותו סדר.
הוכח כי $A^4B^4=B^4A^4$.

תשובות סופיות

1) 1,2,3
2) 2
3) 1,2,3
4) הוכחה.
5) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות **1-9** מצא את ההפוכה של כל מטריצה.
בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ הפיכה?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ איננה הפיכה?

הנח שהמטריצות בשאלות **12-14** הן הפיכות מסדר n, וחלץ את X:

12) א. $AXC=D$ ב. $A^{-1}XC=A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^TP=A$

13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2}=I$ ב. $(A-AX)^{-1}=X^{-1}C$

14) $ABC^TX^{-1}BA^TC=AB^T$

15) נתון $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשב את X, אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1}=B+I$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 8\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$. חשב את Y, אם ידוע כי $BYB^{T}=B^{-1}+B$.

17) נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix}$.

חשב את B, אם נתון בנוסף כי: $5A^{T}B\left(I+2A\right)^{-2}=\left(7A\right)^{-2}$.

18) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^{2}-5A-2I=0$.

הוכח כי A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I.

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.

הוכח כי A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I.

19) נתון כי: $p(x)=x^{3}-4x^{2}-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -2 & -2 & 6\end{pmatrix}$.

א. חשב את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכח ש- A הפיכה,

ובטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^{4}=0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $A-I$ הפיכה, ומצא את ההופכית שלה.

21) נתון: $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\ Q^{-1}BQ=C\end{cases}$.

הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה D, כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C, אז A דומה ל- C.

(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

כתב ופתר – גיא סלומון ©

22) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $AB = BA$.
ב. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח B הפיכה.
ג. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח A הפיכה.
ד. אם $(AB)^{100} = I$, אז בהכרח $(BA)^{100} = I$.
ה. אם $(AB)^{100} = 0$, אז בהכרח $(BA)^{101} = 0$.

23) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n \times n$, עבורן $A^2 + AB = I$.
א. הוכיחו ש-$AB = BA$.
ב. אם נתון בנוסף ש-$B^2 + BA$ היא מטריצת האפס,
הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

24) תהיינה A,B מטריצות כלשהן.
הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
א. אם $AB = I$ אז $B = A^{-1}$.
ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A,B מטריצות ריבועיות.
ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A,B מטריצות ריבועיות.
ד. המכפלה AB לא הפיכה.
ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2 = A$.
הוכח:
א. למעט המקרה בו $A = I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2,
אז $tr(A) = 1$ או ש- A מטריצה אלכסונית.
ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow$ $A^n = A$, לכל n טבעי.

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

10) $k \neq 1,\ k \neq -2$

11) $k = 1,\ k = -4$

12) א. $A^{-1}DC^{-1}$ ב. D ג. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$

13) א. $CD^2 - A$ ב. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$

14) $BA^T C (B^{-1})^T BC^T$

15) $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

16) $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$

17) $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

18) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$

19) א. $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I$

20) א. הוכחה. ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

21) הוכחה.

22) הוכחה.

23) הוכחה.

24) הוכחה.

25) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

דרגה של מטריצה

שאלות

1) אמת את המשפט $rank(A)=rank(A^T)$,

על המטריצה: $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&10\\5&6&7&8&14\\6&8&10&12&24\\3&2&1&0&-6\end{pmatrix}$.

2) אמת את המשפט $rank(AB)\le\min\{rank(A),rank(B)\}$,

עבור: $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\6&8&10&12\\3&2&1&0\end{pmatrix}$.

3) נתונה המטריצה: $A=\begin{pmatrix}1-k&0&0&0\\0&1-k&0&0\\0&0&4-k&1\\0&0&0&10-k\end{pmatrix}$.

חשב את $rank(A)$.

4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n>1$.

הוכח או הפרך:

א. $rank(A)=n-1 \Rightarrow rank(A^2)=n-1$

ב. $rank(A)=n-1 \Leftarrow rank(A^2)=n-1$

5) נתון כי A,B מטריצות ריבועיות מסדר $n>1$.

הוכח או הפרך:

א. אם $rank(A)=rank(AB)$, אז בהכרח B הפיכה.

ב. ייתכן ש-$rank(A)<rank(AB)$.

ג. אם $rank(A)>rank(B)$, אז $rank(AB)>rank(B)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתון $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$.

א. חשב את $rank(A)$, $rank(B)$.

ב. חשב את $rank\left(B^{10}A^{14}\right)$.

7) נניח כי A,B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n .

הוכיחו כי $rank\begin{pmatrix}A&A\\A&B\end{pmatrix}\le 2rank(A)+rank(B)$.

8) תהי A_{8x7} מטריצה, כך ש- $rank(A)=3$.

הוכח כי קיימות 3 מטריצות A_1,A_2,A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A=A_1+A_2+A_3$.

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר mxn שדרגתה k .

9) נתונות שתי מטריצות $A_{3\times5}$, $B_{5\times3}$.

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. $rank(AB)=rank(BA)$

ב. $rank(AB)\neq rank(BA)$

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) אם $k=1$, אז $rank(A)=2$. אם $k=4, k=10$, אז $rank(A)=3$.
אם $k \neq 1,4,10$ $rank(A)=4$.
4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.
ג. הטענה אינה נכונה.
6) א. $rank(B)=3$, $rank(A)=2$. ב. $rank\left(B^{10}A^{14}\right)=2$
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

1) בסעיפים הבאים מצא מטריצה A, $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$, המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$:

א. $\begin{aligned}2x+y-z&=3\\x+2y-4z&=5\\6x+4y+z&=2\end{aligned}$

ב. $\begin{aligned}2x-3y+z+t&=1\\4x+y+2z&=4\\y+z+t&=1\\x-4z-2y&=10\end{aligned}$

בשאלות **2-6** נתון כי: $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\1&-1&1\\1&-6&3\end{pmatrix}$.

בטא כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות לינאריות:

2) $A\underline{x}=\underline{b}$

3) $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$

4) $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$

5) $A\underline{x}=\underline{x}$

6) $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

7) פתור את מערכת המשוואות הבאה,

בעזרת המטריצה ההפוכה: $\begin{aligned}2x-y+z&=3\\3x-2y+2z&=5\\5x-3y+4z&=11\end{aligned}$.

8) פתור את מערכת המשוואות הבאה,

בעזרת המטריצה ההפוכה: $\begin{aligned}x+4y+2z+4t&=1\\x+2y-z&=0\\y+z+t&=1\\x+3y-z-2t&=0\end{aligned}$.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$(x,y,z)=(-1,4,-2)$, $(x,y,z)=(2,-8,4)$.

הוכח שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים:
$(x,y,z)=(-1,4,-2)$, $(x,y,z)=(2,3,4)$.
מצא פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

11) נתונה המערכת: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.
מצא עבור אילו ערכים של הקבוע k, למערכת:
א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* בפתרונך השתמש במושג 'דרגה של מטריצה'.

12) נתון $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}$.
ידוע כי $rank(A)=3$, וידוע כי למערכת $Ax=b$ יש פתרון.
מצאו את הקבועים k,m.

13) נתונה מטריצה ריבועית A, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה 0.
הוכח ש-A מטריצה **לא** הפיכה.

14) נתונה מטריצה ריבועית הפיכה A, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה k.
הוכח שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
בטא קבוע זה בעזרת k.

15) מטריצה A מקיימת: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} A=0$.
הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.
א. אם למערכת $(AB)x=0$ קיימים שני פתרונות שונים,
אז בהכרח A לא הפיכה.
ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x=0$,
אז למערכת $(BA)x=0$ קיים פתרון שונה מ-0.
ג. אם למערכת $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.
ד. אם למערכת $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז A לא הפיכה.
ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$,
אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

17) נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$: $Ax=d$ $(d\neq 0)$.
נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $rank(A)=2$.
ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
$u=(x_1,x_2,6,7),\ \ v=(y_1,y_2,1,2),\ \ w=(z_1,z_2,4,3)$.
מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
א. $x=au+bv+cw$
ב. $x=(a+b+1)u-av-bw$
ג. $x=au+bv+w$
ד. $x=(a-b)u+(b-c)v+(c-a)w$
ה. $x=(a+b)u-(av+bw+u)$, כאשר $a,b,c\in\mathbb{R}$.

הערה: בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
בהינתן מערכת הומוגנית $Ax=0$:
1. אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
2. מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות.
בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\underline{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-4\\4&4&1\end{pmatrix}$

ב. $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\10\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2&-3&1&1\\4&1&2&0\\0&1&1&1\\1&-2&-4&0\end{pmatrix}$

2) $$\begin{aligned}4x-2y+4z&=1\\x-y+z&=2\\x-6y+3z&=3\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}-2y+4z&=1\\x-5y+z&=2\\x-6y-z&=3\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}(4+k)x-2y+4z&=1\\x+(k-1)y+z&=2\\x-6y+(3+k)z&=3\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}3x-2y+4z&=0\\x-2y+z&=0\\x-6y+2z&=0\end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned}2x+y+z&=3\\-2x-3y-6z&=6\\4x+y+z&=9\end{aligned}$$

7) $(x,y,z)=(1,2,3)$

8) $(x,y,z,t)=(-13,4,-5,2)$

9) הוכחה.

10) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-6\end{pmatrix}$

11) אם $k\neq 2$ או $k\neq -1$, אז יש פתרון אחד.
אם $k=2$, אז יש אינסוף פתרונות.
אם $k=-1$, אז אין פתרונות.

12) $m=5, k=9$

13) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

17) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מטריצה אלמנטרית

שאלות

1) רשום את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

2) רשום את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

3) הוכח או הפרך כל אחד מסעיפים א-ד.
נתון כי A מטריצה ריבועית, ו-B מתקבלת מ-A ע"י סדרת פעולות דירוג.
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:
א. B^2 מ-A^2.
ב. BA מ-A^2.
ג. B^2 מ-BA.
ד. B^2 מ-AB.

4) תהי $A\in M_3[R]$, כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.
נגדיר את המטריצות האלמנטריות $E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.
למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה E_2E_1A ?
פתור בשתי דרכים:
דרך א' – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.
דרך ב' – בעזרת כפל מטריצות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}}_{e_3}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}_{A}$$

2)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{e_3}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_4}\bullet$$
$$\bullet\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_5}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_6}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_7}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{e_8}=A$$

3) הוכחה.

4) -3

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פירוק LU

שאלות

1) רשום את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}$.

2) רשום את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}$.

3) רשום את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

1) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{U}$$

2) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&-1&1&0\\3&-2&2&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&2&-4\\0&0&0&3\end{pmatrix}}_{U}$$

3) $$\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\\frac{3}{2}&-2&1&0&0\\-3&2&0&1&0\\4&-3&0&0&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\0&-7&5\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{U}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

רגרסיה ליניארית

שאלות

1) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש :

$price(x)$	$Demand / sales(y)$
49	124
69	95
89	71
99	45
109	18

א. מצא את ישר הרגרסיה של הבעיה.

ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54$.

ג. מה משמעות השיפוע של ישר הרגרסיה?

ד. מצא את סכום ריבועי השגיאות בחישוב הנ"ל (SSE).

הערה : הנח שהביקוש הוא ביחידות מוצר והמחיר הוא בדולרים.

תשובות סופיות

1) א. $f(x) = -1.7x + 211$ ב. הביקוש הוא 119.2 יחידות מוצר .

ג. העלאת מחיר המוצר ב-1$ תביא לירידה במכירות של 1.7 יחידות מוצר בחודש. ד. $SSE = 207.65$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מודלים ליניאריים

פרק 3 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

דטרמיננטות

שאלות

בשאלות **1-5** חשב את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

1) א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

2) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

3) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשב את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

6) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

בשאלות **8-10** חשב את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

8) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

בשאלות **11-12** הראה, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

11) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) א. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix}$ ד. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

בשאלות **15-13** נתון כי: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשב:

13) $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16) הוכח כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) הוכח כי: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$.

18) חשב: $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

בכל אחת מהשאלות **19-25**, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n.
חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה:

19) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases}$

20) $a_{ij} = \begin{cases} j & i = j+1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & else \end{cases}$

21) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & else \end{cases}$

22) $a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & else \end{cases}$

23) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

24)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 3(n-1) \end{pmatrix}$$

25)
$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \\ 0 & else \end{cases}$$

* בשאלה **25**:

1. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה.
2. הנח כי $a=3, \quad b=1, \quad c=2$, ומצא:

א. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

ב. את הדטרמיננטה, כאשר $n=20$.

26) חשב:
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix}.$$

בשאלות **27-28** נתון כי A ו-B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$.
חשב:

27) א. $\left|ABA^{-1}B^T\right|$ ב. $|4A^2B^3|$

28) א. $|-A^{-2}B^TA^3|$ ב. $|-2A^2A^T adjB|$

29) נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכח: $|A|=|B|$.

30) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-$2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשב את $|B|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

31) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשב את $|A|,|B|$.

32) הוכח: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

33) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכח ש- $|A|=0$.

34) נתון: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$, ו- B הפיכה.
מצא את n.

35) נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2,\ \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$.
חשב: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $ad-bc$ ב. 29 ג. -1
2) א. -1 ב. -3 ג. -14
3) א. 24 ב. 234 ג. -300
4) 9
5) 6
6) א. 0 ב. 0 ג. 3
7) א. 24 ב. 44 ג. 104
8) 120
9) 114
10) 6
11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
12) פתרונות באתר.
13) -8
14) 16
15) 9
16) הוכחה.
17) הוכחה.
18) $(k-1)^4(k+4)$
19) $n!$
20) $(-1)^{n-1}n!$
21) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$
22) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$
23) 1
24) $2\cdot 3^{n-2}$
25) 1. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$, $D_2=a^2-bc, D_3=a^3-2abc$
2. א. $D_n=2^{n+1}-1$ ב. $D_{20}=2^{21}-1$
26) 0
27) א. 4 ב. 2^{13}
28) א. -8 ב. -2^{11}
29) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

30) $\frac{81}{32}$

31) $|A|=18, |B|=-2/3$

32) הוכחה.

33) הוכחה.

34) 7

35) 4^n

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלל קרמר

שאלות

בשאלות **1-3** פתור את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

1) $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

4) נתונה מערכת המשוואות: $\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ ,x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$.

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש- $x=y=z=t=r$.

5) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

1) $x=1,\ y=2$

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$

3) $x=y=z=t=1$

4) א. $k\neq 1,\ k\neq -4$ ב. $k=-2$ ג. לא. ד. הוכחה.

5) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות **1-3** חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1}:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) נתון: $A=\begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

א. חשב: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשב: $(A^{-1})_{1,5}$.

5) הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים,
אזי כל איברי A^{-1} גם הם מספרים שלמים.

6) נתון ש-A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.
הוכח ש-A^{-1} משולשית תחתונה.

7) נתון ש-A הפיכה.
הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

8) נתון: A,B הפיכות. C,D לא הפיכות.
האם המטריצות הבאות הפיכות:

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. AD ד. CD ה. AB

9) מצא את ערכי k עבור המטריצה הבאה לא הפיכה: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) ידוע ש- A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם $AB=0$, אז $A=0$.
ב. אם $|AB|=0$, אז $A=0$.
ג. אם $|AB|=0$, אז $|A|=0$.
ד. אם $AB=0$, אז $|A|=0$.

11) נתונות שתי מטריצות $A_{3\times 5}$, $B_{5\times 3}$.
הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
א. $|AB|=|BA|$
ב. $adj(AB) \neq adj(BA)$

12) אם B מתקבלת ממטריצה $A_{3\times 3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4,
אז $|adj(A)\cdot B|$ שווה ל:
א. $4^3|A|^3$
ב. $4^3|B|^3$
ג. $4|B|^3$
ד. $4|A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית $A=(a_{ij})$ מסדר $n \geq 3$ המקיימת $a_{ij}=i+j-1$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $|A|=4$
ב. A הפיכה.
ג. $adj(A)=0$
ד. $|A|=0$

14) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A , אז:
א. בהכרח $\det(A)=\det(G)$ וגם $adj(A)=adj(G)$.
ב. בהכרח $\det(A)=\det(G)$, אך ייתכן ש $adj(A)\neq adj(G)$.
ג. ייתכן ש- $\det(A)\neq\det(G)$, אך בהכרח $adj(A)=adj(G)$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) תהי $A=\left(a_{ij}\right)$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 2$, כך ש- $a_{ij}=\begin{cases} i & i=j \\ 1 & i\neq j \end{cases}$.

לכל $1\leq i,j\leq n$, אז בהכרח מתקיים:

א. $|A|=n!-1$

ב. A הפיכה.

ג. $adj\left(A\right)$ לא הפיכה.

ד. אם $n=4$, אז $|Adj(A)|>214$.

16) תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 4$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $rank\left(A\right)=n-2$, אז בהכרח $adj\left(A\right)=0$.

ב. אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $adj\left(A\right)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $adj\left(A\right)=0$, אז בהכרח $A=0$.

17) A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ-A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4,

אז $adjB$ מתקבלת מ-$adjA$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $|Adj\left((-1+i)A\right)|=i$.

חשב $|\det(A)|$.

19) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.

הוכח את הטענות הבאות:

א. A הפיכה $\Leftrightarrow$ $Adj(A)$ הפיכה.

ב. $Adj\left(A^{-1}\right)=\left(Adj(A)\right)^{-1}$

ג. $|Adj(A)|=|A|^{n-1}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $adj(A)=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix}$

2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\-10&1&4\end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix}0&0&-1&1\\0&-1&0&0\\-1&0&1&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&1&0&0\\1&0&-1&1\\-1&0&1&0\end{pmatrix}$

4) א. 240 ב. 0.5

5) הוכחה.

6) הוכחה.

7) הוכחה.

8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.
ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

9) אם ורק אם $k=0$.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) ד

13) הוכחה.

14) ד

15) ד

16) הוכחה.

17) ד

18) $2^{\frac{-5}{2}}$

19) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

1) א. חשב את שטח המקבילית שקדקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$ 2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$

ב. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(1,1,-1),\ (-1,3,1),\ (3,3,-2)$.

ד. חשב את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

1) א.1. 13. א.2. 14 ב. 22 ג. $3x-y+4z+2=0$ ד. 2

מודלים ליניאריים

פרק 4 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

מרחבים ותת-מרחבים

סימון

R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R.

$M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R.

$F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה R.

שאלות

בשאלות **1-7** בדוק האם W תת-מרחב של R^3 :

1) $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$

2) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$

3) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$

4) $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$

5) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$

6) $W=\{(a,b,c)\,|\,c-b=b-a\}$

כלומר, a , b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

7) $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$

כלומר, a , b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

בשאלות **15-8** בדוק האם W תת-מרחב של $M_n[R]$:

8) W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W = \{A \mid A = A^T\}$.

9) W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B.
כלומר, $W = \{A \mid AB = BA\}$.

10) W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.
כלומר, $W = \{A \mid |A| = 0\}$.

11) W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W = \{A \mid A^2 = A\}$.

12) W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

13) W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס.
כלומר, $W = \{A \mid AB = 0\}$.

14) W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W = \{A \mid tr(A) = 0\}$.

15) W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות **21-16** בדוק האם W הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

16) W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$.

17) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

18) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≤ 4.
כלומר, $W = \{p(x) \mid \deg(p) \leq 4\}$.

19) W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

20) W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n, כאשר $4 \leq n \leq 7$.

21) $W = \{p(x) \mid p(0) = 1\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **22-30** בדוק האם W הוא תת-מרחב של $F[R]$:

22) W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\}$.

23) W מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid |f(x)|\le M\}$.

24) W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

25) W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

26) W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

27) $W=\left\{f(x)\mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

28) $W=\{f(x)\mid f'(x)=0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

29) $W=\{f(x)\mid f'(x)=1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

30) $W=\{f(x)\mid f(x)=f(x+1)\}$

31) בדוק האם $W=\left\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\overline{z}_1, z_3=z_1+\overline{z}_1\right\}$ הוא תת-מרחב של C^3 :
א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.
ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

32) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&1&-1\\1&-1&1&-1&-1\\1&3&-1&1&1\end{pmatrix}$.
א. מצא וקטור b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.
ב. מהי קבוצת כל הווקטורים b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון?
ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של R^5 ?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

33) יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה F.

א. מצאו תנאי על k, עבורו הקבוצה $W=\{p\in V \mid p(0)=p(1)=p(2)=k\}$, הינה תת-מרחב של V.

ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- V, שפורשים את W.

הערה: לפתרון סעיף זה עבור קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

תשובות סופיות

1)	כן	**2)**	כן	**3)**	כן	**4)**	לא	**5)**	לא
6)	כן	**7)**	לא	**8)**	כן	**9)**	כן	**10)**	לא
11)	לא	**12)**	כן	**13)**	כן	**14)**	כן	**15)**	כן
16)	כן	**17)**	לא	**18)**	כן	**19)**	כן	**20)**	לא
21)	לא	**22)**	כן	**23)**	כן	**24)**	כן	**25)**	כן
26)	כן	**27)**	לא	**28)**	כן	**29)**	לא	**30)**	כן

31) א. כן ב. לא

32) א. $u=(1,0,0,0,0)$ ב. $B=\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) \mid -b_1+b_2+2b_3\neq 0\}$
ג. לא.

33) א. $k=0$ ב. $W=span\{2x-3x^2+x^3, 6x-7x^2+x^4\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

שאלות

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1=(4,1,1,5),\quad u_2=(0,11,-5,3),\quad u_3=(2,-5,3,1),\quad u_4=(1,3,-1,2)$$

1) א. האם u_1 הוא צירוף ליניארי של u_4?
ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

2) א. האם u_3 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?
במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

3) א. האם u_4 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?
במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

4) נתון $v=(4,12,k,-2k)$.
א. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

5) נתון $v=(a,b,c,d)$.
א. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) הבע את הווקטור $v=(10,8,0,14)$ כצירוף ליניארי של u_1, u_2 ו-u_3.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הבע את הווקטור $v=(7,10,-2,11)$ כצירוף ליניארי של u_1, u_2, u_3 ו-u_4.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 11\\ -5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

א. בדוק האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.
ב. במידה והמטריצות תלויות, רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף ליניארי של יתר המטריצות.
ג. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

9) נתונים הפולינומים הבאים:

$$p_1(x)=4+x+x^2+5x^3\ ,\ p_2(x)=11x-5x^2+3x^3\ ,$$
$$p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3\ ,\ P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3\ .$$

א. בדוק האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.
ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשום כל פולינום כצירוף ליניארי של שאר הפולינומים.
ג. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

10) עבור איזה ערכים של a,b,c, הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$$

בשאלות **11-13** נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשום כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

11) $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

12) $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

13) $\{u+v,v+w,w\}$

בשאלות **14-15** בדוק האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- C^3 :

14) מעל $\mathbb{C}$.

15) מעל $\mathbb{R}$.

16) נתבונן ב- $V=R$ כמרחב וקטורי מעל השדה Q.
הוכיחו כי הקבוצה $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- R, כשהוא מרחב וקטורי מעל Q.

17) תהי $A_{m\times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1,A_2,...A_n$.
הוכיחו את הטענה הבאה:
למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in span\{A_1,A_2,...,A_n\}$.

18) לפניכם 3 תת-קבוצות של R^4 :

$$U=span\{(1,2,2,1),(1,1,-1,-1),(0,0,1,1)\}$$
$$W=span\{(1,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1)\}$$
$$V=span\{(2,3,1,0),(1,2,1,0),(1,4,3,1)\}$$

א. א. האם $U=W$?
ב. ב. האם $U=V$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 2u_3 + u_2,\ \ u_2 = u_1 - 2u_3$.
3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 4u_4 - u_2,\ \ u_2 = 4u_4 - u_1$.
4) א+ב+ג. $k = -4$
5) $a = 5t + 3s,\ b = 4t - 13s,\ c = 7s,\ d = 7t$
6) $v = 2u_1 + u_2 + u_3$, אינסוף.
7) $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$, אינסוף.
8) א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$
ב. $A = B + 2C,\quad B = A - 2C,\quad C = 0.5A - 0.5B,\quad D = 0.25A + 0.25B$
9) א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$
ב. $p_1 = p_2 + 2p_3,\ \ p_2 = p_1 - 2p_3,\ \ p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2,\ \ p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2$
10) לכל ערך של a, b, c.
11) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z,\ \ y = 0.5x + 0.5z,\ \ z = 2y - x$.
12) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z,\ \ y = 0.5x + 0.5z,\ \ z = 2y - x$.
13) בלתי תלויים ליניארית.
14) תלויים.
15) בלתי תלויים ליניארית.
16) הוכחה.
17) הוכחה.
18) א. כן. ב. לא.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

בסיס וממד, דרגה של מטריצה

שאלות

1) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

2) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2x2}[R]$:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&16\\7&8\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

3) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

א. $\{1+x,\ x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

4) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3 ?

ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה ליניארית ב- T .

ג. השלם את T' לבסיס של R^3 .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

5) לפניך 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

.1 $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ .2 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ .3 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
מצא בסיס וממד ל- W, U ו- V.

6) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

7) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

8) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

9) נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

10) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \;\middle|\; A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

11) נתון $U=\left\{p(x)\in P_3[R] \;\middle|\; p(1)=0\right\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

12) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$
$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U.
ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V.

13) לפניכם תת-מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right\}$$

מצא בסיס וממד ל- U.

14) לפניכם תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות **15-16** מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציין את דרגת המטריצה (rank) :

15) $\begin{pmatrix}4 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 11 & -5 & 3\\ 2 & -5 & 3 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 5\\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6\\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1\end{pmatrix}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. לא. ב. לא. ג. כן.

3) א. לא. ב. לא. ג. כן.

4) א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$

5) א. W - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.

U - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.

V - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

6) בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.

7) בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.

8) בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

9) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3.

10) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 0.

11) בסיס: $\{(p_1(x)=-1+x^3,\ \ p_2(x)=-1+x^2,\ \ p_3(x)=-1+x)\}$, ממד: 3.

12) א. בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.

ב. בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.

13) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\3&-7\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2.

14) בסיס: $\{1+x-x^2+2x^3,-3x+3x^2-7x^3\}$, ממד: 2.

15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.

16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.

חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מחבים

שאלות

1) לפניך 3 מערכות של משוואות ליניאריות הומוגניות:

$$1)\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$$

נסמן ב- $V,\ U,\ W$ את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 2,1 ו-3 בהתאמה.

א. מצא בסיס וממד ל- U, W ו- V.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

2) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב R^4:

$$U=sp\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$
$$V=sp\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U.
ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.
ד. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$ (פתור בשתי דרכים שונות).
ה. האם $U+V=R^4$?
ו. האם $U\oplus V=R^4$?

3) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x-x^2+2x^3, 3-x+7x^2+4x^3, -5+3x-15x^2-6x^3\}$$
$$V=sp\{1-x+x^2+x^3, 1+2x^2-x^3, 1+x+3x^2-3x^3, 5+x+5x^2+8x^3\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

4) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x+x^3, 1+2x+x^2+2x^3, -1+2x+3x^2+2x^3\}$$
$$V=\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=p(-1)=0\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U = sp\left\{1+x, x+x^2, 1+x^3\right\}$$
$$V = \left\{ p(x) \in P_3[R] \middle| p'(0) = 0 \right\}$$

מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

6) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $M_2[R]$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y-5z & x-y+3z \\ -x+7y-15z & 2x+4y-6z \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in R \right\}$$

$$W = sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- U ול- W.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. אשר את משפט הממד עבור תרגיל זה.

7) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_2[R]$:

$$U = \left\{ A \in V \mid A = -A^T \right\} \ , \ W = \left\{ A \in V \mid A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- U ול- W.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. האם $U+W=V$?
ה. האם $U \oplus W = V$?

8) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_3[R]$:

$U = \left\{ A \in V \mid A = A^T \right\}$, $W = \{A \in V \mid$ משולשית עליונה $A\}$

א. מצא בסיס וממד ל- U.
ב. מצא בסיס וממד ל- W.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ה. $U \oplus W = V$

9) יהיו U ו- W שני תת-מרחבים ממימד 2 של R^3.
הוכח כי $\dim(U \cap W) \neq 0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) יהי V מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V ממימד 9.
א. הוכח כי $U+W=V$.
ב. חשב $\dim(U\cap W)$.

11) יהי V מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V ממימד 7.
מצא את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

12) יהי V מרחב וקטורי ממימד 7.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים של V, כך ש- $\dim U=4,\ \dim W=5$ $(U\not\subseteq W)$.
מצא את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

13) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. $\phi\neq A,B\subseteq V$.
נגדיר: $A+B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}$.
הוכח או הפרך:
א. $sp(A+B)=sp(A)\cup sp(B)$
ב. $sp(A\cup B)=sp(A)\cup sp(B)$
ג. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$
ד. $sp(A+B)=sp(A)+sp(B)$
ה. $sp(A\cap B)=sp(A)\cap sp(B)$

14) יהיו U ו- W תת-מרחבים של R^3, המוגדרים על ידי:
$U=\{(a,b,c)\mid a=b=c\},\ W=\{(0,b,c)\}$.
הוכח כי $U\oplus W=R^3$.

15) יהי $V=M_n[R]$.
א. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות הסימטריות.
יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות האנטי-סימטריות.
הוכח כי $U\oplus W=V$.
ב. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות העליונות.
יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות התחתונות.
הוכח כי $U\oplus W\neq V$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\dim W=2$, $B_W=\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$

$\dim U=2$, $B_U=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$

$\dim V=3$, $B_V=\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$

ב. $\dim(U+V)=3$ $B_{U+V}=\{(0,0,-1,1),(0,1,1,0),(1,1,0,0)\}$

ג. $\dim(U\cap V)=2$, $B_{U\cap V}=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$

2) א. $\dim U=2$, $B_U=\{(1,1,-1,2),\ (0,2,-5,1)\}$, $\begin{cases}-3x+5y+2z=0\\ -3x-y+2t=0\end{cases}$

ב. $\dim V=3$, $B_V=\{(1,-1,1,1),\ (0,1,1,-2),\ (0,0,2,-5)\}$, $-8x-y+5z+2t=0$

ג. $\dim(U+V)=4$, $B_{U+V}=\{(1,1,-1,2),\ (0,-4,10,-2),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$

ד. $\dim(U\cap V)=1$, $B_{U\cap V}=\{(5,1,5,8)\}$ ה. כן. ו. לא.

3) א. $\dim(U+V)=4$, $U+V=sp\{1+x-x^2+2x^3,2x-5x^2+x^3,x^2,x^3\}$

ב. $\dim(U\cap V)=1$, $B_{U\cap V}=\{5+x+5x^2+8x^3\}$

4) א. $\dim(U+V)=3$, $B_{U+V}=\{1+x+x^3,x+x^2+x^3,x^2+2x^3\}$

ב. $\dim(U\cap V)=1$, $B_{U\cap V}=\{-1+x^2\}$

5) $\dim(U\cap V)=2$, $B_{U\cap V}=\{-1+x^2,1+x^3\}$

6) א. $\dim(U)=2$, $B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-4\\10&-2\end{pmatrix}\right\}$

$\dim(W)=3$, $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-6&15\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\dim(U+W)=4$, $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\-5&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\dim(U\cap W)=1$, $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}5&1\\5&8\end{pmatrix}\right\}$

ד. ראו בווידאו.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) א. $\dim W=2$, $B_W=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim U=1,$ $B_U=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\dim(U+W)=3$ $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\},$

ג. $\dim(U\cap W)=0$, $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

ד. לא. ה. לא.

8) א.

$$B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim U=6$

ב.

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim W=6$

ג.

$$B_{U+W}=\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

$\dim(U+W)=9$

ד. $\dim(U\cap W)=3$, $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

ה. לא.

9) הוכחה.

10) א. הוכחה. ב. 8

11) $\dim(U\cap W)=4,5,6\ or\ 7$, $\dim(U+W)=8,\ 9\ or\ 10$

12) $\dim(U+W)=6\ or\ 7$, $\dim(U\cap W)=2,3\,or\,4$

13) הוכחה.

14) הוכחה.

15) הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

(1 נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2 = \{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 .
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

1. $[M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$
2. $[M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$
3. $[M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

(2 נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1 = \{1+x, x,\ x+x^2\}\ ,\quad B_2 = \{\ 1+x^2, x+x^2,\ x^2\ \}\ .$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

3) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B.
סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E.
סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_B^E$.

4) יהי V מרחב וקטורי ויהי B בסיס של V.
הוכח כי הווקטורים $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ בת"ל,
אם ורק אם וקטורי הקואורדינטות שלהם,
לפי הבסיס B, $\{[u_1],[u_2],...,[u_m]\}$ הם בת"ל.
הסבר כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

תשובות סופיות

1) א. $(x,y-x-z,z)$ ב. $(x,y,z-x-y)$ ג. $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $\left[M\right]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

2) א. $(a,b-a-c,c)$ ב. $(a,b,c-a-b)$ ג. $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

3) א. $(x,y-x,z-y+x,t-z+y-x)$ ב. (x,y,z,t) ג. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$

4) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגילי תיאוריה מתקדמים

שאלות הוכחה

1) יהי V מרחב, ותהי $A=\{v_1,v_2\cdots,v_k\}$ קבוצה; $b\in V$.
הוכיחו כי: $b\in sp(A)\Leftrightarrow sp(A\cup\{b\})=sp(A)$.

2) יהיו u,v,w וקטורים, כך ש-$\{u,v\}$ בלתי-תלויה ליניארית ו-$u\in sp(\{v,w\})$.
א. הוכיחו ש-$w\in sp(\{u,v\})$.
ב. נתון גם כי עבור וקטור נוסף z, הקבוצה $\{u,w,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו שגם הקבוצה $\{u,v,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.

3) יהי U מרחב, תהי $A=\{u_1,u_2\dots,u_n\}\subseteq U$ ויהי $u\in U$ וקטור כלשהו.
הוכח כי אם $u\in sp(A)$, וכן $u\notin sp(A-\{u_n\})$, אז $u_n\in sp(u_1,u_2,\dots,u_{n-1},u)$.

4) יהי V מרחב, $b\in V$ ו-$A=\{v_1,v_2\dots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו כי $A\cup\{b\}=\{v_1,v_2\dots,v_k,b\}$ בת"ל $\Leftrightarrow b\in sp(A)$.

5) יהי V מרחב n מימדי, תהי $A=\{v_1,v_2\dots,v_k\}\subseteq V$ ויהי $b\in sp(A)$.
למשוואה $x_1v_1+x_2v_2+\dots x_kv_k=b$ **אין** פתרון יחיד.
הוכח או הפרך:
א. $k\ge n$
ב. A פורשת את V.
ג. A בהכרח תלויה ליניארית.

6) יהי V מרחב, $b\in V$ ו-$A=\{v_1,v_2\dots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכח או הפרך:
א. אם $b\notin sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\dots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ב. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\dots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ג. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\dots v_n+b\}$ היא ת"ל.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v_1,v_2,v_3 \in V$.

נסמן: $T=\{av_1+v_2+v_3, v_1+av_2+v_3, v_1+v_2, av_3\}$, $S=\{v_1,v_2,v_3\}$.

הוכח או הפרך:

א. $spS \subseteq spT$

ב. אם S בלתי תלויה ליניארית ואם $a \neq -2,1$, אז בהכרח $sp(T)=sp(S)$.

ג. $\dim(spT) \leq 2$

ד. $\dim(sp(T))=\dim(sp(S))$

8) יהי V מרחב ותהיינה $A=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$, $B=\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$ קבוצות וקטורים ב- V.

הוכח או הפרך:

א. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$

ב. אם $A\cup B$ בת״ל, אז A,B שתיהן בת״ל.

ג. אם $\dim V=m+k$ וגם A,B שתיהן בת״ל, אז $A\cup B$ בת״ל.

ד. אם $A\cup B$ בת״ל, אז $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

9) יהי V מרחב ויהיו $U,W\subseteq V$ תמר״ים.

תהיינה $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$, $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}\subseteq U$ שתי קבוצות בת״ל.

הוכח כי אם $U\cap W=\{0\}$, אז $A\cup B$ בת״ל.

10) יהי V מרחב ויהיו U,W תמר״ים שלו.

הוכח כי $U\cup W$ מרחב $\Leftrightarrow$ $W\subseteq U$ או $U\subseteq W$.

לפתרונות המלאים בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

שאלות אמריקאיות

11) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
אז בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של A^2 מוכל במרחב השורות של A.
ב. אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
ג. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

12) נסמן $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$, $W=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}\right\}$
שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. $U=W$
ב. $\dim U=\dim W$
ג. $U\subseteq W$
ד. אם $U+W=\mathbb{R}^3$, אז $U\cap W=\{0\}$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

13) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.
ב. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.
ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
ד. A תלויה ליניארית.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) במרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ מעל שדה $\mathbb{R}$,

תהי $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ- $\mathbb{R}^2$.

אז מטריצה P המקיימת $[v]_A=Pv$ לכל $v\in\mathbb{R}^2$, שווה ל:

א. $P=\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}$

ב. $P=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$

ג. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}$

ד. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\-3&1\end{pmatrix}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

15) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהיינה A,B קבוצות שונות לא ריקות וזרות של וקטורים מ- V. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה ליניארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם $A\cup B$ תלויה ליניארית,
אז בהכרח A תלויה ליניארית או B תלויה ליניארית.

ג. אם A,B בלתי תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה ליניארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה ליניארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

16) אם W תת מרחב של מרחב וקטורי V, אז:

א. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W, וכל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V.

ב. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W, אבל לא כל בסיס של W מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של V.

ג. לא כל בסיס של V מכיל בהכרח בסיס כלשהו של W, אבל כל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) יהיו U,W שני תתי-מרחבים של מרחב V,
כך ש- $\dim V=n,\ \dim U=\dim W=n-1$.
אז:
א. $n-2\le \dim(U\cap W)$
ב. אם $U\ne W$, ייתכן ש- $U\subset W$.
ג. קיים $v\in V$, כך ש- $V=U+sp\{v\}$ ו- $U\cap sp\{v\}=\{0\}$.
ד. אם $U+sp\{v\}=V$ ו- $U\cap sp\{v\}=\{0\}$, אז $v\in W$.

18) נניח כי v_1,v_2,v_3,v_4 הם וקטורים במרחב ליניארי V.
הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם $Span\{v_1,v_2\}\cap Span\{v_3,v_4\}$ והווקטורים v_1,v_2,v_3,v_4 שונים זה מזה,
אז הווקטורים v_1-v_2 ו- v_3-v_4 הם בת"ל.
ב. אם v_1,v_2 בת"ל וגם v_3,v_4 בת"ל, וכן $Span\{v_1,v_2\}\cap Span\{v_3,v_4\}=\{\underline{0}\}$,
אז v_1,v_2,v_3,v_4 הם בת"ל.

19) אם V,W תת מרחבים של מרחב וקטורי U, ומתקיים:
$\dim U=6, \dim V=5, \dim W=3$,
אז $\dim(V\cap W)$ יכול להיות:
א. 0
ב. 1
ג. 2
ד. 3
ה. 4
ו. 5

20) V,W תת-מרחבים ממימד 3 של $I\mathbb{R}^7$, $\{w_1,w_2,w_3\}$ בסיס של W ו- $\{v_1,v_2,v_3\}$
בסיס של V, אז:
א. $\{v_1,w_1,v_2,w_2,v_3,w_3\}$ בלתי תלויה ליניארית.
ב. $\{v_1,w_1,v_2,w_2,v_3,w_3\}$ פורשת את $V+W$.
ג. $\{v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3\}$ בת"ל.
ד. $\{v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3\}$ פורשת את $V+W$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

21) אם A מטריצה **לא** ריבועית, אז בהכרח:

א. מרחב השורות של A^t שווה למרחב השורות של A.

ב. מרחב השורות של A^t שונה ממרחב השורות של A.

ג. ממד מרחב השורות של A^t שווה לממד מרחב השורות של A.

ד. ממד מרחב השורות של A^t שונה מממד מרחב השורות של A.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

22) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \ge 2$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של AB מוכל במרחב השורות של A.

ב. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.

ג. אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.

ד. אם $AB=2I_n$, אז בהכרח $BA=2I_n$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

23) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.

ב. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.

ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.

ד. A בלתי תלויה ליניארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

24) יהי a מספר ממשי ויהיו $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a\\a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a\\1\\a\end{pmatrix}\right\},W=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\a\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\1\\a\\1\end{pmatrix}\right\}$

שני תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^4$. בהכרח מתקיים:

א. $U\cap W=\{0\}$ לכל ערכי a.

ב. $U\cap W\ne\{0\}$ לכל ערכי a.

ג. $\dim(U\cap W)=3$ לכל ערכי $a\ne\pm1$.

ד. $\dim(U\cap W)=1$ לכל ערכי $a\ne\pm1$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

25) נתונות המטריצות $R=\begin{bmatrix}2&5&5\\-1&-1&0\\2&4&3\end{bmatrix}$ $T=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&6&9\\2&4&6\end{bmatrix}$.

אז בהכרח מתקיים:

א. $rank(T)=1,\ \ rank(R)=2$

ב. $rank\left(R^3T^5\right)=1$

ג. מרחב השורות של R^3T^5 שווה למרחב השורות של T^5.

ד. $T^{100}=0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

26) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהי $A=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ קבוצה של וקטורים מ- V $(1\le n)$. נניח בנוסף ש- $\dim(V)=n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם A בלתי תלויה לינארית, אז A פורשת את V.

ב. אם A קבוצה פורשת ל- V, אז A בלתי תלויה לינארית.

ג. ייתכנו מקרים בהם A פורשת את V, אך A תלויה לינארית.

ד. ייתכנו מקרים בהם A בלתי תלויה לינארית, אך A אינה פורשת את V.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

27) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהיינה A,B קבוצות שונות לא ריקות של וקטורים מ- V. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם A,B תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cap B$ תלויה לינארית.

ג. אם A,B בלתי תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

28) וקטור הקואורדינטות של הפולינום $2x^3+12x^2-x+11$,

ביחס לבסיס $\{2x^3+3x^2+2,x+1,x^3+x^2,2x^2+2\}$, הוא:

א. $(2,2,-2,4)$

ב. $(4,-2,-1,2)$

ג. $(2,-1,-2,4)$

ד. $(4,-1,2,2)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

29) תהי A מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:

א. אם שורות A בת"ל, אזי עמודות A בת"ל.
ב. אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה ריבועית.
ג. אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה הפיכה.
ד. אם שורות A בת"ל, אזי בהכרח למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

30) נתונים תת-מרחבים של $\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$:

$$U=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a+b+c=d\}$$

$$W=sp\{(1,0,1,1),(0,2,1,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0)\}$$

א. מצאו בסיס וממד עבור $U,\ W,\ U\cap W$.
ב. עבור תת מרחבים K,L של מרחב וקטורי V, הגדירו את $K+L$.

31) A מטריצה **לא** ריבועית, כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית $Ax=0$ פתרון יחיד, אז:

א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ ללא פתרון.
א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.
ב. יש מערכת לא הומוגנית $A^t y=c$ ללא פתרון.
ג. יש מערכת לא הומוגנית $A^t y=c$ עם יותר מפתרון אחד.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

32) תהי A מטריצה ממשית **לא ריבועית** מסדר $m\times n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$, אז בהכרח $m<n$.
ב. ייתכן ש- $A^tA=I_m$ וגם $AA^t=I_n$.
ג. אם $rank(A)=m$, אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות.
ד. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

33) נתונות מטריצות ממשיות A מסדר 2×4 ו- B מסדר 4×4, כך ש- $rank(A)=2,\quad rank(B)=3$.

הוכיחו כי $AB\neq 0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

34) תהי A מטריצה ממשית מגודל $m\times n$, כאשר $m<n$.
נסמן ב- A^T את המטריצה המוחלפת. בהכרח ש :
א. מימד מרחב הפתרונות של המערכת $AX=0$ הוא $n-m$.
ב. למערכת $\left(A^TA\right)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
ג. ייתכן מצב בו למערכת $\left(A^TA\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ד. ייתכן מצב בו למערכת $\left(AA^T\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

35) A מטריצה 3×3, כך ש- $A^2=0$ אבל $A\neq 0$, אז הדרגה של A יכולה להיות :
א. 0
ב. 1
ג. 2
ד. 3
ה. אף תשובה אינה נכונה.

36) תהיינה A מטריצה מסדר 3×5 ו- B מטריצה 5×3 אז :
א. AB הפיכה אם ורק אם BA הפיכה.
ב. AB בהכרח לא הפיכה.
ג. BA בהכרח הפיכה.
ד. אם $AB=0$, אז $rank\left(A\right)+rank\left(B\right)\leq 5$.

37) אם A מטריצה, כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד, אז בהכרח :
א. A הפיכה.
ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^t פתרון יחיד.
ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.
ד. מרחב העמודות של A שונה ממרחב הפתרונות של A.

38) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m\times n$, אזי בהכרח מתקיים :
א. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$, אז בהכרח למערכת $A^tx=b$, יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ב. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.
ג. ייתכן ש- $A^tA=I_n$ וגם $AA^t=I_m$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

39) נתון כי $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$ הפיכה.

אז בהכרח:

א. למערכת
$$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y&=\alpha_{13}\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y&=\alpha_{23}\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y&=\alpha_{33}\end{aligned}$$
פתרון יחיד.

ב. למערכת
$$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+w&=0\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z-4w&=1\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+3w&=-4\end{aligned}$$
אינסוף פתרונות.

ג. למערכת
$$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z&=3\\ \alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z&=1\\ \alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z&=1\end{aligned}$$
אין פתרון.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

תשובות סופיות

11) א　　**12)** ב　　**13)** א　　**14)** ד

15) א+ד　　**16)** ג　　**17)** א+ג　　**18)** הוכחה.

19) ג+ד　　**20)** ב　　**21)** ב+ג　　**22)** ד

23) ה　　**24)** ב+ד　　**25)** ב+ג　　**26)** א+ב

27) א　　**28)** ג　　**29)** ג

30)
$$B_U=\{(-1,1,00),(-1,010),(1,001)\}$$
$$B_W=\{(100-1),(010-1),(0012)\}$$
$$U\cap W=sp\{(1,0,2,3),(0,1,2,3)\}$$
$$\dim U=3,\qquad \dim W=3,\qquad \dim(U\cap W)=2$$

31) ד　　**32)** א+ב+ג　　**33)** הוכחה.

34) ב+ד　　**35)** ב　　**36)** ד

37) ד　　**38)** א+ג　　**39)** ב

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מודלים ליניאריים

פרק 5 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-4**:

א. מצא מטריצה אופיינית.

ב. מצא פולינום אופייני.

ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.

ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ה. מצא וקטורים עצמיים.

ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.

ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.
כלומר, מצא מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.

ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשב A^{2009}.

ט. מצא את הפולינום המינימלי.

י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
במידה והמטריצה הפיכה, בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד,
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

(1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **5-6** מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.
כלומר, מצא מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP = D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
פתור פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

5) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **7-11** מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

7) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

11) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

12) נתון $A=\begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$.
לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A?

13) נתונה המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את ערכי a ו- b, עבורם הערכים העצמיים של A יהיו **1** ו-**-1 בלבד**.
ב. עבור ערכי a ו- b שמצאת בסעיף א, קבע האם המטריצה לכסינה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=6,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=-4$.

מצא את המטריצה A.

15) קבע האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3,

בעלת וקטורים עצמיים $v_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצא אותה.

16) הוכח או הפרך:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix}4\\1\\10\end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

17) נתונה מטריצה ריבועית A.

הוכח או הפרך:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו-λ ע"ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.

ג. ל-A ול-A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל-A ול-A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע"ע של A.

ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=\pm1$.

ז. אם $A^2=A$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

18) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו- B, מסדר n. הוכח או הפרך:

א. ל- AB ו- BA אותם ערכים עצמיים.

ב. נניח ש- v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו- B,
אז v גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

19) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.

א. הוכיחו כי לכל סקלר k, המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.

ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A, מצא את הערך העצמי
של המטריצה $A+kI$.

20) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3.

ידוע כי v_1,v_2 הם ו״ע של A, שונים מאפס, המתאימים לע״ע $\lambda=1$,
וכי v_3 הוא ו״ע, שונה מאפס, המתאים לע״ע $\lambda=-1$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות:

א. אם הווקטורים v_1,v_2 בת״ל, אז $A^{2018}=I$.

ב. A ניתנת ללכסון.

ג. v_3 הוא צרוף לינארי של הווקטורים v_1,v_2.

21) נתונות שתי מטריצות מסדר n: מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה.
הוכח או הפרך:

א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.

ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.

22) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n, שעבורן v הוא ו״ע.

א. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n.

ב. עבור $v=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $n=2$, מצאו בסיס ל- W.

23) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4.
נתונה המטריצה $B=A^4-2A^2+10A-4I$.
הוכח ש- v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשב את הערך
העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש- v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ.
יהי $p(x)$ פולינום.
הוכח ש- v ו״ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) תהי $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, כאשר a קבוע ממשי.

א. עבור $a=3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A.

ב. עבור איזה ערך של a, הזוג $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A?

ג. יהי $0\neq u\in\mathbb{R}^2$ וקטור שאינו ו"ע של A.
הוכיחו כי הקבוצה $\{u, Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

25) תהיינה A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$ כך ש-$AB=BA$.
נניח כי $\text{rank}(A)=n-1$, ו-v הוא וקטור עצמי של המטריצה A,
השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.
הוכח כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B.

26) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.

1. הוכח כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל-$p(x)=x^2-\text{tr}(A)x+|A|$.
2. נתון כי $\text{tr}(A)=4$. חשב את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה
יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
נניח כי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^1+a_0$ הפולינום האופייני של A.
הוכח כי $a_{n-1}=-\text{tr}(A)$, $a_0=(-1)^n|A|$.

27) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $\text{rank}(B)=1$.
הוכח:

א. 0 ע"ע של המטריצה B.

ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0, הוא 3.

ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0, הוא 3 או 4.

ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.

ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0, אז הוא שווה ל-$\text{tr}(B)$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר n.
ידוע כי $\operatorname{rank}(B)=k$, כאשר $k<n$.
הוכח כי 0 ערך עצמי של B ומצא את הריבוי הגיאומטרי והאלגברי שלו.

29) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.
ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי שונה מ-0.
הוכח שהמטריצה ניתנת לליכסון.

30) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ (מטריצה עם שורה אחת).
מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A^TA (הנח $n>1$).

31) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2=A$.
תהי A מטריצה אידמפוטנטית.
א. הוכח כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.
ב. רשום את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.
ג. הוכח כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים.
ד. הוכח כי A ניתנת ללכסון.
ה. הוכח כי $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5.
הוכח או הפרך:
א. קיים תת מרחב $W_\alpha=\{u\mid Au=\alpha u\}$ של R^5, כך ש-$\dim W_\alpha\ge 1$.
ב. אם u_1,u_2 ו״ע של A, אז גם הווקטור u_1+u_2 ו״ע של A.
ג. אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A, אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.
ד. אם A לכסינה מעל R, אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.
ה. אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R.

33) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3.
נתון כי $\det(A)=tr(A)=0$ וכי $\lambda=1$ ערך עצמי של המטריצה.
הוכח כי המטריצה ניתנת לליכסון ומצא את כל הערכים העצמיים שלה.

34) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2,
והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4.
מכאן נובע ש :

א. $\operatorname{rank}(A)=4$

ב. A לכסינה.

ג. $\operatorname{tr}(A)>10$

ד. $|A|\le 127$

ה. קיים וקטור עצמי v של A, כך ש- $A^2v=2v$.

35) תהי A מטריצה מסדר 3, המקיימת $0<\operatorname{rank}(A-10I)<\operatorname{rank}(A-4I)<3$.

א. מצא את הפולינום האופייני של המטריצה A.

ב. מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A, ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.

ג. קבע האם A הפיכה.

ד. האם נכון לומר ש- $A=10I$, או ש- $A=4I$?

ה. קבע האם A לכסינה.

36) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי.
הוכח או הפרך :

א. אם v וקטור עצמי של A, אז v וקטור עצמי גם של A^n.

ב. אם v וקטור עצמי של A^n, אז v וקטור עצמי גם של A.

ג. אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.

ד. אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

37) נתונה מטריצה A, שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x)=(x-1)^2$.
הוכח כי המטריצה $A^2+4A+3I$ הפיכה.

38) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x)=x^2+bx+c$.
מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.

ב. מטריצה $A\in M_2[R]$ מקיימת $|A|<0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)^2$ ג. $x=0,\ x=1$,

הריבוי האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוי האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

$V_{x=0}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 1,1,1\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=x(x-1)^2$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. לא הפיכה.

2) א. $\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-1)^2(x-2)$ ג. $x=1,\ x=2$

הריבוי האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוי האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=(x-1)^2(x-2)$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. הפיכה.

3) א. $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)(x-2)$ ג. $x=0,\ x=1,\ x=2$

$x=0$ – ריבוי אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוי אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוי אלגברי: 1.

ד. $V_{x=0}=sp\{\langle -1,0,1\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

$V_{x=1}=sp\{\langle 0,1,0\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,1,0\rangle,\ \langle 1,0,1\rangle,\ \langle -1,0,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח. $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=x(x-1)(x-2)$ י. לא הפיכה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) א. $\begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

ג. $x=6,\ x=2,\ x=-4$

$x=-4$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=6$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=6}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=-4}=sp\{\langle -1,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle -1,1,0\rangle,\ \langle 1,1,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ח. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{2017}+(-4)^{2017} & 2^{2017}-(-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017}-(-4)^{2017} & 2^{2017}+(-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017}+2^{2017} & -6^{2017}+2^{2017} & 2\cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

י. הפיכה.

5) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$

6) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

7) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,

וקטורים עצמיים: $V_{x=2}=(1,1,1),\ v_{x=3}^{(2)}=(1,1,0),\ v_{x=3}^{(1)}=(1,0,1)$

8) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1}=(-1,4,1)$, $v_{x=3}=(1,2,1)$, $v_{x=-2}=(-1,1,1)$

9) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1}=(1,-2,1)$, $v_{x=4}=(1,1,1)$, $v_{x=-1}=(-1,0,1)$

10) $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1}=(-1,2)$, $v_{x=3}=(1,2)$

11) $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right)$,

$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$

12) $k_1=3,\ k_2=-\frac{32}{9}$

13) א. $a=3,\ b=-4$ או $a=1,\ b=0$ ב. לא לשתיהן.

14) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) אין כזו מטריצה.

16) א. הפרכה: $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. ב. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ ג. $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ ד. הוכחה.

17) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.
ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.

18) א. הוכחה. ב. הוכחה.

19) א. הוכחה. ב. $4+k$ הוא ערך עצמי של $A+kI$.

20) א. הפרכה. ב. הוכחה. ג. הפרכה.

21) א. הפרכה. ב. הוכחה.

22) א. הוכחה. ב. הוכחה.

23) א. הערך העצמי הוא 260. ב. הוכחה.

24) א. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

25) הוכחה

26) א.1. הוכחה. א.2. $|A|=4$ ב. הוכחה.

27) הוכחה.

28) הוכחה.

29) הוכחה.

30) 0 ו- $tr(A)$.

31) א. הוכחה. ב. $p(x)=x,\ p(x)=x-1,\ p(x)=x(x-1)$ ג. הוכחה.
ד. הוכחה. ה. הוכחה.

32) הוכחה.

33) הערכים העצמיים הם: $0,1,-1$.

34) הוכחה.

35) א. $p(x)=(x-10)^2(x-4)$
ב. 10 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 2;
4 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 1.
ג. לא הפיכה. ד. לא. ה. לכסינה.

36) הוכחה.

37) הוכחה.

38) א. $p_{4A}(x)=x^2+4bx+16c$ ב. הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

דמיון מטריצות

שאלות

1) ידוע ש-A ו-B מטריצות דומות. הוכח כי:

א. $|A|=|B|$

ב. $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$

ג. ל-A ו-B אותו פולינום אופייני.

2) הוכח באינדוקציה: אם $P^{-1}AP=B$, אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$.
הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $4A=\begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ דומות.

4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&7&0\\9&-17&6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\-1&3&2\\2&-8&-5\end{pmatrix}$.

האם קיימים קבועים ממשיים a, b, כך שהמטריצה A דומה למטריצה B?

5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n: A, B, C. הוכח כי:

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל-B, אז B דומה ל-A.

ג. אם A דומה ל-B ו-B דומה ל-C, אז A דומה ל-C.

ד. אם A דומה ל-B ושתיהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל-B^{-1}.

ה. אם A דומה ל-B, אז A^k דומה ל-B^k, לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל-B ו-$q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל-$q(B)$.

ז. אם A דומה ל-B, אז A^T דומה ל-B^T.

ח. אם A דומה ל-B, אז $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

ט. אם A דומה ל-B, אז $\operatorname{Null}(A)=\operatorname{Null}(B)$.

הערה – $\operatorname{Null}(A)=$ מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

6) הוכח או הפרך:

א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.

ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.

ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2.
חשב כל אחד מהבאים או הסבר מדוע לא ניתן לעשות זאת:

א. $\operatorname{rank}(A)$

ב. $\dim\operatorname{Ker}(A)$

ג. $\operatorname{tr}(A)$

ד. $|A^T A|$

ה. ע"ע עבור $A^T A$.

ו. ע"ע עבור $(4A^2+10A+I)^{-1}$.

הערה – $\dim\operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Nullity}(A)$

8) הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

תשובות סופיות

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) לא.

5) הוכחה.

6) הוכחה.

7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1, \frac{1}{15}, \frac{1}{37}$

8) הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מודלים ליניאריים

פרק 6 - רגרסיה ליניארית חד משתנית

תוכן העניינים

מודלים ליניאריים

פרק 7 - קו הרגרסיה במדגם

תוכן העניינים

מודלים ליניאריים

פרק 8 - מובהקות הרגרסיה באוכלוסיה

תוכן העניינים

מודלים ליניאריים

פרק 9 - מאפייני קו הרגרסיה המרובה במדגם

תוכן העניינים

מודלים ליניאריים

פרק 10 - מובהקות קו הרגרסיה המרובה ומקדמיו באוכלוסיה

תוכן העניינים

מודלים לינאריים

פרק 11 - שיטות להרצת רגרסיה רבת משתנים

תוכן העניינים