

מכניקה לתעשייה וניהול



תוכן העניינים

1.	מבוא מתמטי	1
2.	וקטורים	12
3.	קינמטיקה	31
4.	תנועה יחסית	54
5.	דינמיקה	61
6.	תנועה מעגלית - חלק ראשון	79
7.	תנועה מעגלית - חלק שני	87
8.	עבודה ואנרגיה - חלק ראשון	99
9.	עבודה ואנרגיה - חלק שני	124
10.	מתקף ותנע - חלק ראשון	136
11.	מתקף ותנע - חלק שני	149
12.	כוח גרר וכוח ציפה	163
13.	מרכז מסה	169
14.	תנועה הרמונית	177
15.	מומנט התמד	187
16.	מומנט כוח	191
17.	תנע זוויתי	200
18.	גוף קשיח	205
19.	כבידה וכוח מרכזי	221
20.	תרגילים ברמת מבחן	228

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 1 - מבוא מתמטי

תוכן העניינים

1. מעברי יחידות 1
2. סינוס קוסינוס ומה שביניהם 3
3. נגזרות ואינטגרלים בסיסיים 5
4. צפיפות 9
5. צפיפות אינפיטיסימלית 10
6. חשבון דיפרנציאלי 11

מעברי יחידות:

שאלות:

(1) דוגמה 1

נתון: $A = 2\text{km}$, $B = 10\text{gr}$.

מצא את $C = A \cdot B$ ביחידות של m.k.s.

(2) דוגמה 2

נתון: $A = 2\text{m}^2$, $B = 3\text{gr}$, $C = 5\text{c.m} \cdot \text{s}$.

חשב את הגדלים הבאים ביחידות של m.k.s:

א. $D = 2 \cdot A$

ב. $E = \frac{5 \cdot B \cdot C}{A}$

(3) מעבר יחידות בחזקות

מצא את הגדלים הבאים ביחידות של ס"מ:

א. $A = 1\text{m}^2$

ב. $B = 1\text{m}^3$

(4) סנטימטר בשלישית

הבע את הערכים הנ"ל ביחידות של c.m^3 :

א. 5.2m^3

ב. 320mm^3

ג. 0.0054km^3

(5) ליטר, דוגמה

הבע את הגדלים הבאים ב-Liter:

א. 5m^3

ב. 5mm^3

תשובות סופיות:

(1) $20\text{m} \cdot \text{kg}$

(2) א. 4m^2

(3) א. 10^4cm^2

(4) א. $5.2 \cdot 10^6\text{cm}^3$

(5) א. $5 \cdot 10^3\text{Liter}$

ב. $37.5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{sec} \cdot \text{kg}}{\text{m}}$

ב. 10^6cm^3

ב. 0.32cm^3 ג. $5.4 \cdot 10^{12}\text{cm}^3$

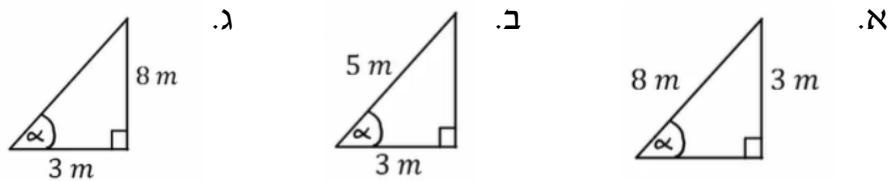
ב. $5 \cdot 10^{-6}\text{Liter}$

סינוס קוסינוס ומה שביניהם:

שאלות:

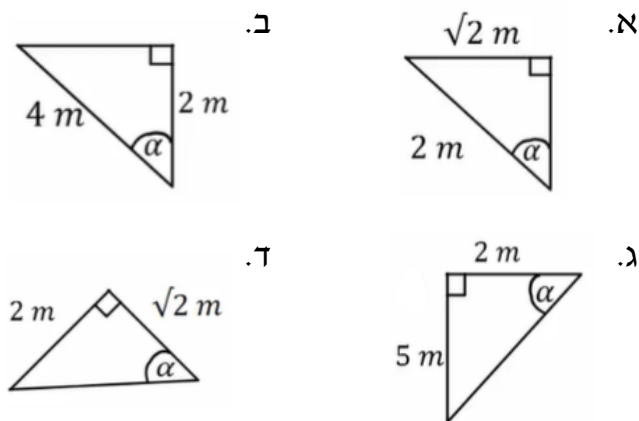
(1) דוגמה 1- חישוב אלפא

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:

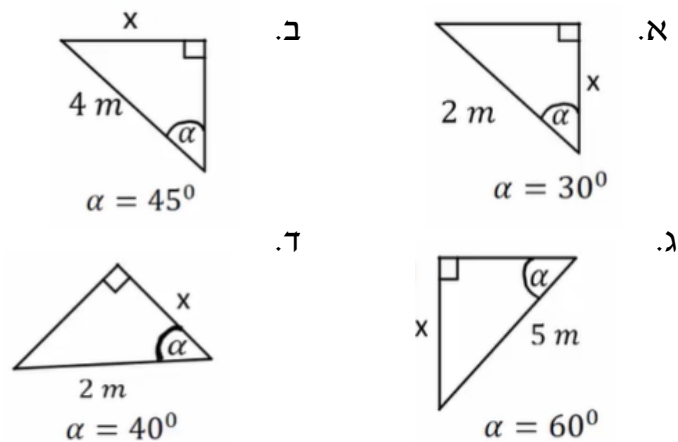


(2) דוגמה 2- משולשים שמסורטטים אחרת

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:



(3) דוגמה 2- מציאת ניצבים



תשובות סופיות:

- (1) א. $\alpha = 22^\circ$ ב. $\alpha = 53^\circ$ ג. $\alpha = 69^\circ$
- (2) א. $\alpha = 45^\circ$ ב. $\alpha = 60^\circ$ ג. $\alpha = 68.2^\circ$ ד. $\alpha = 55^\circ$
- (3) א. $\sqrt{3m}$ ב. $2\sqrt{2m}$ ג. $\frac{5\sqrt{3m}}{2}$ ד. $1.53m$

נגזרות ואינטגרלים בסיסיים:

שאלות:

1) דוגמה 1

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y = 5x^4$, $\frac{dy}{dx} = ?$

ב. $y = ax^5$, $\frac{dy}{dx} = ?$

ג. $y = 5x + 2x^{18}$, $\frac{dy}{dx} = ?$

ד. $f(x) = 8x^2 + 2$, $\frac{df}{dx} = ?$

ה. $y = 6t^2$, $\frac{dy}{dt} = ?$

ו. $x = 5t^3$, $\frac{dx}{dt} = ?$

ז. $x = 5t^4 + t^3 + 4$, $\frac{dx}{dt} = ?$

ח. $f(t) = At^6 + Bt + C$, $\frac{df}{dt} = ?$

2) דוגמה 2

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y = (5x^4 + 2)(5x + 2x^{18})$, $\frac{dy}{dx} = ?$

ב. $y = Ax^5(B + Cx^3)$, $\frac{dy}{dx} = ?$

ג. $y = 5x + 2x^2(4x + 5x^5)$, $\frac{dy}{dx} = ?$

ד. $y = (5t^2 + 1)(2t + 27 + 5t^3)$, $\frac{dy}{dt} = ?$

ה. $x = (2t^3 + 7)(4t + 3 + 6t^2)$, $\frac{dx}{dt} = ?$

(3) דוגמה 3-נגזרת פנימית

חשב את הנגזרות הבאות :

א. $y = (x+2)^4, \frac{dy}{dx} = ?$

ב. $y = 5(8x^2 + x)^5, \frac{dy}{dx} = ?$

ג. $y = 5t + 2(5t^4 + 4)^{14}, \frac{dy}{dx} = ?$

ד. $f(t) = 8(5t^4 + t^3 + 4)^2 + 2, \frac{df}{dt} = ?$

(4) דוגמה 4-כלל שרשרת

חשב את הנגזרות הבאות :

א. $y = (x+2)^4, x = 2t, \frac{dy}{dt} = ?$

ב. $y = 5(8x^2 + x)^5, x = 5t^4 + 4, \frac{dy}{dt} = ?$

ג. $y = 5x + 2(5x^4 + 4)^{14}, x = 3t^2 + t, \frac{dy}{dt} = ?$

ד. $y = x^2, x = t^2, \frac{dy}{dt} = ?$

(5) דוגמה 1-אינטגרלים בסיסיים

חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int x^7 dx$

ב. $\int x dx$

ג. $\int dx$

ד. $\int 3dx$

ה. $\int 7x^4 dx$

ו. $\int (5x^2 + 3) dx$

ז. $\int (8x^7 + 5x) dx$

ח. $\int Ax^7 dx$

ט. $\int (Ax^7 + Bx) dx$

(6) דוגמה 2-אינטגרל מסוים
 חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int_0^2 x^5 dx$

ב. $\int_1^5 4dx$

ג. $\int_{-1}^3 7x^4 dx$

ד. $\int_0^4 (2x^2 + 4) dx$

ה. $\int_{-1}^2 (Ax^7 + Bx) dx$

(7) דוגמה 3-אינטגרל של פונקציות נוספות
 חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int_0^\pi \sin x dx$

ב. $\int_0^\pi \cos(2x) dx$

ג. $\int e^{3x} dx$

ד. $\int_0^5 2e^{-3x} dx$

ה. $\int_3^5 \frac{1}{x} dx$

ו. $\int \frac{1}{x^2} dx$

ז. $\int e^{ax} dx$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 20x^3 \quad \text{ב. } 5a \cdot x^4 \quad \text{ג. } 5 + 36x^{17} \quad \text{ד. } 16x \quad \text{ה. } 12 \cdot t$$

$$\text{ו. } 15t^2 \quad \text{ז. } 20t^3 + 3t^2 \quad \text{ח. } 6At^5 + B$$

$$(2) \quad \text{א. } 20x^3 \cdot (5x + 2x^{18}) + (5x^4 + 2)(5 + 36x^{17}) \quad \text{ב. } 5Ax^4(B + Cx^3) + 3ACx^7$$

$$\text{ג. } 5 + 4x \cdot (4x + 5x^5) + 2x^2(4 + 25x^4)$$

$$\text{ד. } (10t)(2t + 27 + 5t^3) + (5t^2 + 1)(2 + 0 + 15t^2)$$

$$\text{ה. } (6t^2 + 0)(4t + 3 + 6t^2) + (2t^3 + 7)(4 + 0 + 12t)$$

$$(3) \quad \text{א. } 4(x + 2)^3 \cdot 1 \quad \text{ב. } 25(8x^2 + x)^4(16x + 1) \quad \text{ג. } 5 + 560(5t^4 + 4)^{13}$$

$$\text{ד. } 16(5t^4 + t^3 + 4)(20t^3 + 3t^2)$$

$$(4) \quad \text{א. } 8(2t + 2)^3 \quad \text{ב. } 500t^3(8(5t^4 + 4)^2 + 5t^4 + 4) \cdot (16(5t^4 + 4) + 1)$$

$$\text{ג. } (5 + 2 \cdot 14(5x^4 + 4)^{13} \cdot (5 \cdot 4x^3 + 0)) \cdot (3 + 2t + 1) \quad \text{ד. } 4t^3$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{x^8}{8} + C \quad \text{ב. } \frac{x^2}{2} + C \quad \text{ג. } x + C \quad \text{ד. } 3x \quad \text{ה. } \frac{7x^5}{5} + C$$

$$\text{ו. } x^8 + \frac{5}{2}x^2 + C \quad \text{ז. } A \cdot \frac{x^8}{8} + C \quad \text{ח. } A \cdot \frac{x^8}{8} + B \cdot \frac{x^2}{2} + C \quad \text{ט. } A \frac{x^8}{8} + B \frac{x^2}{2} + C$$

$$(6) \quad \text{א. } 10.67 \quad \text{ב. } 16 \quad \text{ג. } 341.6 \quad \text{ד. } 58.67 \quad \text{ה. } 31.875A + 1.5B$$

$$(7) \quad \text{א. } 2 \quad \text{ב. } 0 \quad \text{ג. } \frac{e^{3x}}{3} + C \quad \text{ד. } \frac{2}{3} \quad \text{ה. } \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\text{ו. } -\frac{1}{x} + C \quad \text{ז. } \frac{e^{ax}}{a}$$

צפיפות:

שאלות:

(1) דיסקה עם חור

- א. מצא את הצפיפות של דיסקה בעלת רדיוס R ומסה M ?
- ב. בדיסקה קדחו חור ברדיוס r .
מצא את המסה שהוצאה מהדיסקה.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \frac{M}{\pi R^2} \quad \text{ב. } M \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

צפיפות אינפיטיסימלית:

שאלות:

(1) מוט עם צפיפות לא אחידה

חשב את המסה הכוללת של מוט בעל אורך L וצפיפות מסה $\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x}{L}$ כאשר x הוא המרחק מהקצה השמאלי של המוט והפרמטרים: λ_0 , L הם קבועים.

תשובות סופיות:

$$\frac{\lambda_0 L}{2} \quad (1)$$

חשבון דיפרנציאלי:

שאלות:

(1) נגזרת סתומה**

נתונה הפונקציה הבאה: $f(x, y) = y^{\sin x} + 6y + e^{x^2+y^2} = 0$

מצא את: $\frac{dy}{dx}$

(2) אלמנט אורך בהחלפת קואורדינטות**

נתונות קואורדינטות חדשות: $r' = \frac{1}{r^2}$, $\theta' = \frac{1}{2}\theta$

כאשר r ו- θ הם הקואורדינטות הפולריות.
מצא את גודלו של אלמנט אורך dl כפונקציה של הקואורדינטות החדשות.

תשובות סופיות:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\ln y)(\cos x)(y^{\sin x}) + 2xe^{x^2+y^2}}{\sin x \cdot y^{(\sin x-1)} + 6 + 2ye^{(x^2+y^2)}} \quad (1)$$

$$dl^2 = \frac{1}{4}r'^{-3}dr'^2 + \frac{1}{r'}4d\theta'^2 \quad (2)$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 2 - וקטורים

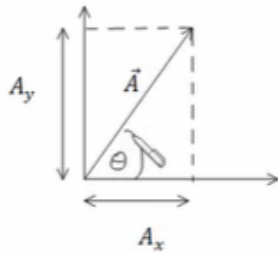
תוכן העניינים

12	1. הגדרות ופעולות בסיסיות
16	2. מכפלה סקלרית
20	3. וקטור יחידה
22	4. מכפלה וקטורית בדו מימד
24	5. וקטור בשלושה מימדים
26	6. מכפלה וקטורית בשלושה מימדים
28	7. וקטורים קולינריים
29	8. גרדיאנט ורוטור

הגדרות ופעולות בסיסיות:

רקע:

פירוק וקטור לרכיבים:



היטל על ציר ה- x או רכיב ה- x של A : $A_x = |\vec{A}| \cos \theta$.

היטל על ציר ה- y או רכיב ה- y של A : $A_y = |\vec{A}| \sin \theta$.

המעבר ההפוך: $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$.

הצגת וקטור באמצעות גודל וכיוון נקראת **הצגה פולרית**.
 הצגת וקטור באמצעות רכיבי ה- x וה- y נקראת **הצגה קרטזית**.

שאלות:

(1) חיבור וחסור בקרטזי

נתונים 3 וקטורים: $\vec{A}(1,3)$, $\vec{B}(4,2)$, $\vec{C}(3,5)$.

א. חשב מהו $A+B+C$?

ב. חשב מהו $A-B-C$?

ג. חשב מהו $2A+3B-4C$?

(2) מקרטזי לפולרי

נתון הוקטור: $\vec{A}(4,6)$.

א. הצג את הוקטור בצורתו הפולרית (גודל וכיוון).

ב. מהו וקטור היחידה?

(3) מפולרי לקרטזי עם יחידה

נתון הוקטור $\vec{A}$ בהצגה פולרית.

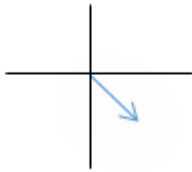
גודלו $\sqrt{52}$ וכיוונו 56.3° מעלות.

א. הצג את הוקטור בצורת קרטזית.

ב. מהו וקטור היחידה?

(4) מקרטזי לפולרי ברביע שנינתון הוקטור: $\vec{A}(3, -4)$.

- א. הצג את הוקטור בצורתו הפולרית (גודל וכיוון).
 ב. מהו וקטור היחידה?

**(5) מפולרי לקרטזי**

נתון הוקטור $\vec{A}$ בצורתו הפולרית.
 גודלו 5 וכיוונו 120° .

- א. הצג את הוקטור בצורתו הקרטזית.
 ב. מצא את וקטור היחידה.

**(6) מקרטזי לפולרי רביע שלישי**נתון הוקטור: $\vec{A}(-2, -4)$.

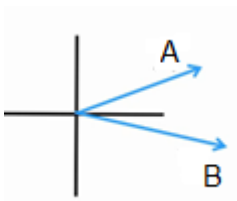
הצג את הוקטור בצורתו הפולרית.

**(7) חיבור בפולרי**

נתונים שני וקטורים:

הוקטור A שגודלו 10 וכיוונו 30° ,הוקטור B שגודלו לא ידוע וכיוונו 350° .

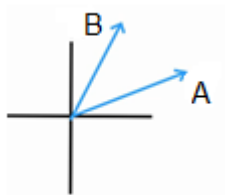
מהו גודלו של הוקטור B אם נתון שסכום הוקטורים
 ייתן וקטור ללא רכיב לציר ה-y?

**(8) חיבור וקטורים בפולרי**

נתונים שני וקטורים בהצגה פולרית:

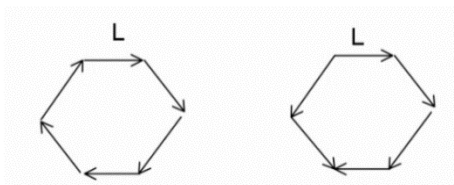
 $\vec{A}$ בגודל 10 ובכיוון 30° , $\vec{B}$ בגודל 8 ובכיוון 60° .נתון: $A + B = C$.

מצא את וקטור C.

**(9) משושה של וקטורים**

מצא את הוקטור השקול לשני המצבים
 הבאים:

הנח כי הוקטורים יוצרים משושה שווה
 צלעות וגודל כל צלע הוא L.



(10) וקטור בין שתי נקודות

הוקטור $\vec{A}$ הוא וקטור מהנקודה (x_1, y_1, z_1) אל הנקודה (x_2, y_2, z_2) .
רשום ביטוי לרכיבים של הוקטור ומצא את גודלו.

(11) חיבור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$.

גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא: $\theta_A = 130^\circ$.
גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא: $\theta_B = 60^\circ$.
שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את $\vec{A} + \vec{B}$ באמצעות שיטת המקבילית.

(12) חיסור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$.

גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא $\theta_A = 130^\circ$.
גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא $\theta_B = 60^\circ$.
שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את $\vec{A} - \vec{B}$ באמצעות שיטת המקבילית.

(13) מציאת אורך של שקול

אורכם של שני וקטורים הוא 5 ו-10 ס"מ.
הזווית ביניהם היא 30 מעלות.
מהו אורכו של הוקטור השקול שלהם (סכום הוקטורים)?

(14) מציאת זווית בין שני וקטורים

נתונים שני וקטורים שאורכם 10 ו-13 מטר.
אורך השקול שלהם הוא 20 מטר.
מצא את הזווית בין הוקטורים.

תשובות סופיות:

- (1) א. $(8,10)$ ב. $(-6,-4)$ ג. $(2,-8)$
- (2) א. $|A| = \sqrt{52}$, $\alpha = 56.3$ ב. $\hat{A} = \left(\frac{4}{\sqrt{52}}, \frac{6}{\sqrt{52}} \right)$
- (3) א. $\vec{A}(4,6)$ ב. $\hat{A} = 1$
- (4) א. $|A| = 5$, $\alpha = 306.88$ ב. $\hat{A} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right)$
- (5) א. $\vec{A}(-2.5, 4.33)$ ב. $\hat{A} = \left(\frac{-2.5}{5}, \frac{4.33}{5} \right)$
- (6) $|A| = \sqrt{20}$, $\alpha = 243.4$
- (7) $B = 28.79$
- (8) $\vec{C}(12.66, 11.92)$
- (9) $L \cdot 4 \cos(30)$
- (10) $|\vec{A}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, $\vec{A} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
- (11) $C = 10.1$, $\theta_c = 108.1^\circ$
- (12) $C = 7.62$, $\theta_c = 159.5^\circ$
- (13) $|\vec{d}| = 14.6 \text{ c.m}$
- (14) $\theta = 60^\circ$

מכפלה סקלרית:

רקע:

שתי דרכים לביצוע המכפלה:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

α - זווית בין הוקטורים.

הערות:

תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).

$$\cos \alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \quad \text{נוסחה למציאת זווית בין שני וקטורים:}$$

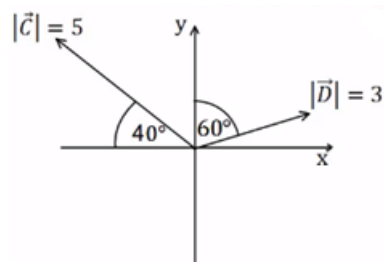
שאלות:

(1) דוגמה 1

מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית בין הוקטורים הנתונים בכל המקרים הבאים:

א. $\vec{A} = (-1, 2)$, $\vec{B} = (2, 2)$

ב.



(2) דוגמה 2

בדוק עבור זוגות הוקטורים הבאים האם הם מאונכים:

א. $\vec{A} = (1, 4)$, $\vec{B} = (-2, 5)$

ב. $\vec{A} = (1, 4)$, $\vec{B} = (8, -2)$

ג. $\vec{A} = (-1, -2)$, $\vec{B} = (-2, 1)$

ד. שרטט כל זוג וקטורים מאונכים על מערכת צירים, חשב את זוויות הוקטורים עם הצירים והראה שהזווית בין הוקטורים היא 90° .

(3) דוגמה 3

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-3, 1)$, $\vec{B} = (2, -4)$

- א. מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.
- ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.
- ג. מצא את המכפלה הסקלרית שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בקוסינוס הזווית. בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א'.

(4) דוגמה 4

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-3, 1)$, $\vec{B} = (2, -4)$

- א. הראה כי החישוב של $\vec{A} \cdot \vec{B}$ זהה לחישוב $\vec{B} \cdot \vec{A}$.
- ב. הוכח בצורה כללית כי המכפלה הסקלרית היא פעולה קומוטטיבית. (הדרכה : רשום את הוקטורים בצורה כללית עם נעלמים).

(5) דוגמה 5

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (2, 1)$, $\vec{B} = (-3, 2)$, $\vec{C} = (1, -3)$

חשב את :

א. $\vec{A} \cdot \vec{C}$

ב. $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C}$

ג. $\vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$

ד. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$

ה. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$

ו. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B}$

ז. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$

(6) דוגמה 6

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-2, 2)$, $\vec{B} = (1, -3)$, $\vec{C} = (1, 5)$

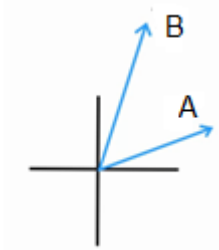
חשב את :

א. $\frac{(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{|\vec{B}|^2}$

ב. $\frac{(\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{C}}{|\vec{C}|^2}$

(7) דוגמה 7

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-2, 2)$, $\vec{B} = (1, -3)$, $\vec{C} = (1, 5)$
 מצא את הזווית בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$ לבין $\vec{B}$ ל- $\vec{C}$.

**(8) מכפלה סקלרית בשתי השיטות**

נתונים שני וקטורים :

הוקטור $\vec{A}$ שגודלו 7 וכיוונו 30°.

והוקטור $\vec{B}$ שגודלו 10 וכיוונו 70°.

מצא את תוצאת המכפלה הסקלארית שלהם בעזרת שתי שיטות שונות.

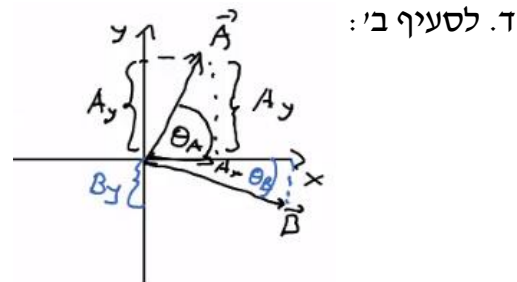
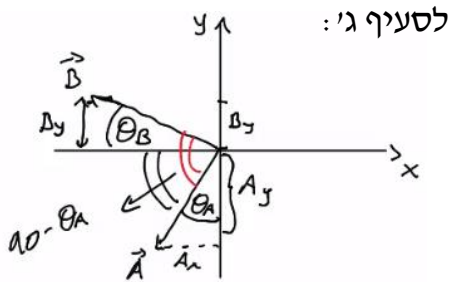
(9) הוכחת משפט פיתגורס המורחב

הוכח את משפט פיתגורס המורחב (במשולש שאינו ישר זווית) :

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \alpha$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $\vec{A} \cdot \vec{B} = 2$ ב. $\vec{C} \cdot \vec{D} = -5.13$
- (2) א. $\vec{A}$ לא מאונך ל- $\vec{B}$ ב. הוקטורים מאונכים. ג. הוקטורים מאונכים.



הזוויות: $\theta_A = 75.96^\circ$, $\theta_B = 14.04^\circ$ הזוויות: $\theta_A = 26.57^\circ$, $\theta_B = 26.57^\circ$

- (3) א. $\vec{A} \cdot \vec{B} = -10$ ב. $|\vec{B}| = \sqrt{20}$, $\theta_B = -63.43^\circ$, $|\vec{A}| = \sqrt{10}$, $\theta_A = 161.57^\circ$

ג. $\vec{A} \cdot \vec{B} = -10$

- (4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

- (5) א. $\vec{A} \cdot \vec{C} = -1$ ב. $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = -10$ ג. $\vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C} = -10$

- ד. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} = (-4, 12)$ ה. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) = (-18, -9)$ ו. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} = (12, -8)$

ז. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) = 36$

- (6) א. $\frac{(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{|\vec{B}|^2} = \left(\frac{-8}{10}, \frac{24}{10} \right)$ ב. $\frac{(\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{C}}{|\vec{C}|^2} = (-0.54, -2.69)$

(7) $\alpha_{\vec{BC}} = 150.26^\circ$, $\alpha_{\vec{AB}} = 153.43^\circ$

(8) שיטה 1: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 53.62$

שיטה 2: $A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = 53.58$

- (9) שאלת הוכחה.

וקטור יחידה:

רקע:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

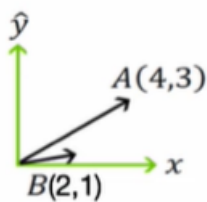
שאלות:

(1) דוגמה וקטור יחידה

מצא וקטורי יחידה בכיוון של הוקטורים הבאים:

א. $\vec{A} = (-2, -3)$

ב. $\vec{B} = (3, 4)$



(2) הטלת וקטור יחידה על וקטור יחידה

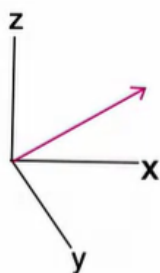
נתון הוקטור $\vec{A}$ שבשרטוט.

א. מהו היטל הוקטור על ציר ה- x (וקטור יחידה)?

ב. מהו היטל הוקטור על ציר ה- y (וקטור יחידה)?

ג. הסבר כיצד מחשבים היטל הוקטור על הוקטור $\vec{B}(2,1)$.

ד. הסבר במילים את משמעות ההטלה של וקטור על וקטור.



(3) חישוב וקטור יחידה

נתון הוקטור: $\vec{A}(2,3,4)$.

א. מהו גודלו של הוקטור?

ב. מהו וקטור היחידה?

(4) וקטור בזמן

נתון הוקטור $\vec{A}(t)$ במישור דו מימדי כך ש- $|\vec{A}(t)| = A_0 \sin(t)$

ו- $\theta(t) = t$ כאשר $t \in [0, \pi]$ ו- A_0 קבוע.

א. מצא את הרכיבים הקרטזיים של $\vec{A}(t)$ כתלות בזמן.

ב. מצא את $\frac{d\vec{A}}{dt}$.

ג. מצא את $\frac{dA}{dt}$.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \hat{A} = (-0.55, -0.83) \text{ א.} \quad \hat{B} = (0.6, 0.8) \text{ ב.}$$

$$(2) \quad \vec{A}_x = (4, 0) \text{ א.} \quad \vec{A}_y = (0, 3) \text{ ב.} \quad \text{ג. ראה סרטון}$$

$$(3) \quad |A| = \sqrt{29} \text{ א.} \quad \hat{A} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}} \right) \text{ ב.}$$

$$(4) \quad A_x(t) = \frac{1}{2} A_0 \sin 2t, \quad A_y(t) = A_0 \sin^2 t \text{ א.} \quad A_0 (\cos 2t\hat{x} + \sin 2t\hat{y}) \text{ ב.}$$

$$\text{ג. } -\sin t\hat{x} + \cos t\hat{y}$$

מכפלה וקטורית בדרך מימד:

רקע:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z}$$

הערות:

התוצאה של המכפלה הוקטורית היא תמיד וקטור (בניגוד לסקלרית).

נוסחה נוספת לגודל של המכפלה הוקטורית:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin \alpha$$

α - זווית הקטנה בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$.

שאלות:

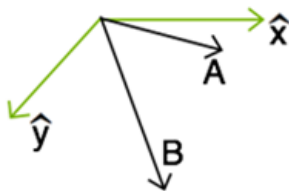
(1) דוגמה-מכפלה וקטורית

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A} = (-4, 1)$, $\vec{B} = (2, -3)$

א. חשב את $\vec{A} \times \vec{B}$ באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות. מהו גודל המכפלה?

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. חשב את $|\vec{A} \times \vec{B}|$ שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בסינוס הזווית. (בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א).



(2) מכפלה סקלרית ווקטורית בפולרי

נתונה מערכת צירים כבשרטוט.

נתונים שני וקטורים:

גודל 10, זווית 20° - $\vec{A}$.

גודל 15, זווית 60° - $\vec{B}$.

א. חשב $A \cdot B$ (מכפלה סקלרית).

ב. חשב $A \times B$ (מכפלה וקטורית).

ג. הסבר מדוע המכפלה הוקטורית נותנת את שטח המקבילית שיוצרים הווקטורים.

תשובות סופיות:

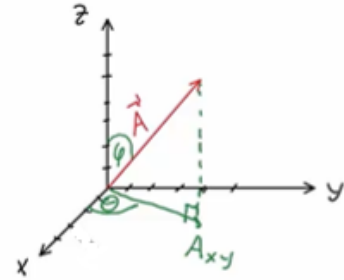
$$(1) \quad \text{א. } \vec{A} \times \vec{B} = 10\hat{z} \text{ וכן } |\vec{A} \times \vec{B}| = 10$$

$$\text{ב. } |\vec{A}| = \sqrt{17}, \theta_A = 165.96^\circ, |\vec{B}| = \sqrt{13}, \theta_B = -56.31^\circ \quad \text{ג. } |\vec{A} \times \vec{B}| = 10$$

$$(2) \quad \text{א. } \vec{A} \cdot \vec{B} = 150 \cdot \cos(40) \quad \text{ב. } \vec{A} \times \vec{B} = -150 \cdot \sin(40) \cdot \hat{z} \quad \text{ג. ראה סרטון.}$$

וקטור בשלושה מימדים:

רקע:



$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

מציאת גודל הוקטור: $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

פירוק לרכיבים:

$$A_z = |\vec{A}| \cos \varphi$$

$$A_{xy} = |\vec{A}| \sin \varphi$$

$$A_x = |\vec{A}| \sin \varphi \cos \theta$$

$$A_y = |\vec{A}| \sin \varphi \sin \theta$$

שאלות:

- (1) **שהסכום מאונך להפרש**
הוכח- אם סכום של שני וקטורים מאונך להפרשם אזי אורכם שווה.
- (2) **מציאת וקטור מאונך**
נתונים 2 וקטורים: $\vec{A}(1,4,8)$, $\vec{B}(B_x, B_y, 0)$
מצא את מרכיבי וקטור B אם נתון כי הוא ניצב לוקטור A וגודלו 10.
- (3) **מציאת שקול וזווית עם הצירים**
שני כוחות נתונים פועלים על גוף: $\vec{A}(1,4,5)$, $\vec{B}(3,6,7)$
א. מהו הכוח השקול?
ב. מהו גודלו של הכוח השקול?
ג. מהי הזווית בין הכוח השקול ובין כל אחד מהצירים?
- (4) **חישוב גודל וזווית בקרטזי**
נתונים שני וקטורים: $\vec{A}(1,5,10)$, $\vec{B}(3,4,5)$
א. מהו גודלו של כל וקטור?
ב. מהי הזווית בין שני הוקטורים?

תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) $\vec{B} = \left(-4\sqrt{\frac{100}{17}}, \sqrt{\frac{100}{17}}, 0 \right)$
- (3) א. $\vec{C} = (4, 10, 12)$ ב. $|\vec{C}| = \sqrt{260}$ ג. $\alpha = 75.63$, $\beta = 51.67$, $\gamma = 41.90$
- (4) א. $|\vec{A}| = \sqrt{126}$, $|\vec{B}| = \sqrt{50}$ ב. $\alpha = 23^\circ$

מכפלה וקטורית בשלושה מימדים:

רקע:

שתי דרכים לביצוע המכפלה:

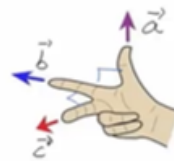
דרך 1 – דטרמיננטה:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

דרך 2 – לפי גודל וכיוון בנפרד:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

כיוון לפי כלל יד ימין -



הערה:

יש כמה דרכים לבצע את הכלל, אם מחליפים אצבעות לכל שלושת הוקטורים הכלל נשאר נכון (אם מחליפים מקום רק לשני וקטורים – טעות).

דרך נוספת לכלל יד ימין נקראת כלל הבורג



מסובבים את האצבעות מ- a ל- b והתוצאה בכיוון האגודל.

שאלות:

(1) מכפלה וקטורית

נתונים הוקטורים: $\vec{A}(1, 2)$, $\vec{B}(1, -3)$, $\vec{C}(-1, 2, -2)$, $\vec{D}(2, 0, 1)$

א. מצא את $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

ב. מצא את $\vec{A} \times \vec{B}$.

ג. מצא את $\vec{C} \times \vec{D}$.

(2) מקבילון

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{a} = 2\hat{x} - 3\hat{y} + \hat{z}$, $\vec{b} = \hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$, $\vec{c} = 2\hat{x} - \hat{y}$

מרכיבים מהוקטורים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ מקבילית ובוחרים את ראשית הצירים בקודקוד המקבילית (הנח כל היחידות בס"מ).

א. מצאו את מיקומו של הקודקוד שמול הקודקוד שבראשית הצירים.

ב. מצאו את אורכי האלכסונים של המקבילית.

ג. מצאו את שטח המקבילית.

ד. יוצרים מקבילון על ידי הוספת הוקטור $\vec{c}$ למקבילית.

חשבו את גובה המקבילון המאונך למקבילית.

רמז: השתמש ב- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = -5 \quad \text{א.} \quad \vec{A} \times \vec{B} = -5\hat{z} \quad \text{ב.} \quad \vec{C} \times \vec{D} = 2\hat{x} - 3\hat{y} - 4\hat{z} \quad \text{ג.}$$

$$(2) \quad \vec{r}_1 = (3, -1, 0) \quad \text{א.} \quad |\vec{r}_1| = \sqrt{10}, \quad |\vec{r}_2| = \sqrt{30} \quad \text{ב.} \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{59} \text{c.m}^2 \quad \text{ג.}$$

$$\text{ד.} \quad \tilde{h} = 0.13 \text{c.m}$$

וקטורים קולינריים:

רקע:

וקטורים מקבילים ומתקיים הקשר $\vec{B} = \alpha \vec{A}$ כאשר α סקלר כלשהו.

שאלות:

(1) וקטורים קולינאריים

עבור אילו ערכים של α ו- β הוקטורים הבאים קולינאריים (מצביעים באותו כיוון)?

$$\vec{A} = 3\hat{i} + a\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + a\hat{j} - 2\beta\hat{k}$$

(2) מציאת וקטורים מאונכים

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A}(A_x, 4)$, $\vec{B}(6, B_y)$, $\vec{C}(5, 8)$.

מצא את ערכי הוקטורים כך שהוקטור A והוקטור B יהיו מאונכים לוקטור C. האם שני הוקטורים שמצאת מקבילים?

תשובות סופיות:

$$\alpha = -\frac{9}{2}, \beta = \frac{5}{3} \quad (1)$$

$$\vec{A} = \left(-\frac{32}{5}, 4\right), \vec{B} = \left(6, -\frac{30}{8}\right) \quad (2)$$

גרדיאנט ורוטור:

רקע:

גרדיאנט בקואורדינטות השונות:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} : \text{גרדיאנט בקואורדינטות קרטזיות}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} : \text{גרדיאנט בקואורדינטות גליליות}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} : (*) \text{ גרדיאנט בקואורדינטות כדוריות}$$

(*) שימו לב שהזווית φ היא עם ציר ה- z והזווית θ עם ציר ה- x .

רוטור (Rot/Curl) בקואורדינטות השונות:

בקרטזיות:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

בגליליות:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$$

בכדוריות (*):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} = & \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta} \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\theta) \right) \hat{\varphi} \end{aligned}$$

(*) שימו לב שהזווית φ היא עם ציר ה- z והזווית θ עם ציר ה- x .

שאלות:

(1) חישוב גרדיאנט

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} : f \text{ נתונה פונקציית המיקום}$$

חשב את הגרדיאנט של הפונקציה f .

(2) חישוב השיפוע בכיוון השונה

חשב את גודל השיפוע של הפונקציה $f(x, y) = 2x^2y$ בנקודה $(1, 2)$

$$\hat{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) : \text{בכיוון}$$

תשובות סופיות:

$$\vec{D}f = \frac{-xz\hat{x} - yz\hat{y} + (x^2 + y^2)\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla}f \cdot \hat{n} = \frac{8}{\sqrt{2}} + -\frac{2}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 3 - קינמטיקה

תוכן העניינים

- 1. תנועה בקו ישר (מימד אחד) 31
- 2. תנועה במישור וזריקה משופעת 42
- 3. משוואת מסלול 46
- 4. תרגילים נוספים 47
- 5. תאוצה נורמלית ומשיקית ורדיוס עקמומיות 51

תנועה בקו ישר (מימד אחד):

רקע:

$$v_{(t)} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \text{ - מהירות רגעית}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \text{ - מהירות ממוצעת}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \text{ - תאוצה רגעית}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \text{ - תאוצה ממוצעת}$$

מיקום ומהירות כתלות בזמן בתאוצה קבועה -

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v(t) = v_0 + at$$

שאלות:

(1) דני ודנה רצים זה לקראת זה

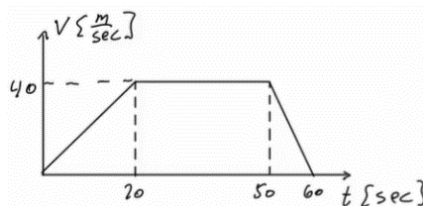
- דני ודנה רצים זה לקראת זה.
 שניהם מתחילים לרוץ ממנוחה.
 דני רץ בתאוצה של 0.5 מטר לשנייה בריבוע ודנה בתאוצה של 1 מטר לשנייה בריבוע.
 המרחק ההתחלתי ביניהם הוא 50 מטר.
 א. מתי והיכן יפגשו דני ודנה?
 ב. מה מהירות כל אחד מהם ברגע המפגש?

(2) דני שכח את הפלאפון

- דני רץ בקו ישר במהירות קבועה שגודלה 14 מטר לשנייה.
 ברגע מסוים מבחין יוסי כי דני שכח את הפלאפון שלו.
 באותו הרגע נמצא דני כבר במרחק של 64 מטר מיוסי.
 יוסי מתחיל לרוץ אחר דני ממנוחה בתאוצה קבועה של 8 מטר לשנייה בריבוע.
 א. מצא ביטוי למהירות כתלות בזמן עבור דני ויוסי.
 שרטט גרפים עבור שני הביטויים שמצאת על אותה מערכת צירים.
 ב. מתי מהירותו של יוסי שווה לזו של דני? האם הוא משיג את דני ברגע זה?
 ג. מצא ביטוי למיקום כתלות בזמן עבור דני ויוסי.
 שרטט גרפים עבור שני הביטויים שמצאת על אותה מערכת צירים.
 ד. מתי ישיג יוסי את דני? כמה מרחק עבר יוסי עד אז?

(3) גרף של מהירות אופנוע בזמן

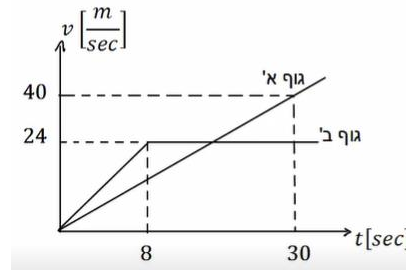
- בגרף הבא נתונה מהירותו של אופנוע כתלות בזמן. האופנוע נע על קו ישר.
 קבע את ראשית הצירים במיקום ההתחלתי של האופנוע.



- א. תאר את סוג התנועה של האופנוע בכל אחד מקטעי התנועה.
 ב. מצא את תאוצת האופנוע כתלות בזמן.
 ג. מהי מהירות האופנוע ברגעים: $t = 15, 40, 55$?
 ד. מצא את מיקום האופנוע באותם רגעים של סעיף ג'.

4) גרף מהירויות של שני גופים

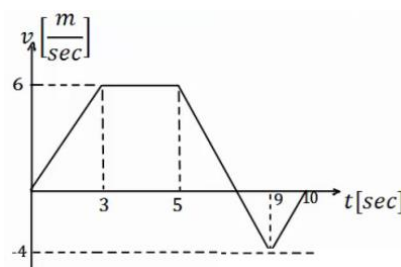
בגרף הבא מתוארות המהירויות של שני גופים כתלות בזמן. הנח ששני הגופים נעים לאורך קו ישר ויוצאים מהראשית.



- א. תאר את תנועתו של כל גוף.
- ב. רשום נוסחת מקום זמן לכל גוף.
- ג. מצא את המרחק בין הגופים ברגעים: $t = 3s$, $24s$ וציין מי מקדים את מי.
- ד. מתי מהירויות שני הגופים שוות?
- ה. מתי מיקום שני הגופים זהה?

5) תרגיל עם הכל

- הגרף הבא מתאר את מהירותו של גוף הנע בקו ישר. הנח שהגוף מתחיל את תנועתו מהראשית. הגוף נע במשך 10 שניות ונעצר.
- א. תאר את התנועה של הגוף במילים.
 - ב. שרטט גרף של התאוצה כתלות בזמן של הגוף.
 - ג. מתי נמצא הגוף במרחק הגדול ביותר (בכיוון החיובי) מהראשית? מהו מרחק זה?
 - ד. מהו המרחק הכולל שעבר הגוף?
 - ה. מהו ההעתק הכולל שעשה הגוף?
 - ו. מהי המהירות הממוצעת של הגוף בתנועה?
 - ז. מהו מרחק הגוף מהראשית ב- $t = 6s$?
 - ח. מתי נמצא הגוף במרחק 12 מטרים מהראשית?
 - ט. שרטט גרף של מיקומו של הגוף כתלות בזמן, אין צורך לסמן ערכים בציר האנכי של הגרף.



(6) תפוח עץ

- תפוח נופל מעץ בגובה 15 מטרים.
 (הנח שהתפוח נופל ממנוחה והזנח את התנגדות האוויר).
 א. מצא את המהירות בה יפגע התפוח בקרקע.
 ב. מצא את המהירות בה יפגע התפוח בראשו של ניטון היושב מתחת לעץ.
 הנח שגובה הראש של ניטון בישיבה הוא אחד מטר.

(7) חסידה מביאה חבילה

- חסידה מרחפת במנוחה באוויר ומפילה חבילה מגובה של 320 מטרים.
 א. מצא את ההעתק שמבצעת החבילה בשנייה הרביעית של תנועתה.
 ב. מצא את ההעתק שמבצעת החבילה בשנייה האחרונה של תנועתה.

(8) דני זורק כדור מחלון גבוה

- דני זורק כדור כלפי מעלה מחלון בביתו הנמצא בגובה 105 מטרים מעל הקרקע (בניין גבוה). מהירות הכדור ישר אחרי הזריקה היא 20 מטר לשנייה.
 סמן את כיוון הציר החיובי כלפי מעלה ואת ראשית הצירים בנקודת הזריקה.
 א. רשום נוסחאות מקום זמן ומהירות זמן עבור הכדור.
 ב. הכן טבלה ורשום בטבלה את הערכים של המיקום והמהירות ב-6 השניות הראשונות.
 ג. צייר את מיקום הכדור בכל שנייה ב-6 השניות.
 ד. מתי יפגע הכדור בקרקע?
 ה. חזור על סעיפים א' ו-ד' במקרה שבו ראשית הצירים בקרקע.

(9) גוף נזרק אנכית מגג בניין

- גוף נזרק אנכית כלפי מעלה מגג בניין שגובהו 40 מטר.
 מהירותו ההתחלתית של הגוף היא 30 מטר לשנייה.
 בחר ציר y שראשיתו בקרקע וכיוונו החיובי כלפי מעלה.
 א. רשום את פונקציית המקום-זמן, מהירות-זמן ותאוצה-זמן של הגוף.
 ב. ערוך טבלה של מהירותו ומיקומו בזמנים: $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ sec}$.
 ג. שרטט גרפים עבור שלושת הפונקציות שחישבת בסעיף א'.

(10) כדור נזרק מלמעלה וגוף נזרק מלמטה

- כדור נזרק כלפי מטה מראש בניין שגובהו 80 מטר.
מהירותו ההתחלתית של הכדור היא 15 מטר לשנייה.
באותו הרגע נזרק גוף שני מתחתית הבניין כלפי מעלה.
מהירותו ההתחלתית של הגוף השני היא 40 מטר לשנייה.
- רשום נוסחת מקום-זמן עבור כל גוף.
 - האם הגוף השני יעבור את גובה הבניין?
 - היכן ביחס לרצפת הבניין יחלפו הגופים אחד ליד השני?
 - רשום נוסחת מהירות-זמן לכל גוף.
 - מה תהיה מהירות כל גוף ברגע המפגש?
 - מהי מהירות הפגיעה בקרקע של כל גוף?
 - שרטט גרף מהירות-זמן וגרף מיקום זמן לכל גוף.

(11) מהירות כנגזרת של פולינום

- גוף נע בקו ישר ומיקומו כתלות בזמן נתון לפי: $x(t) = 2t^3 - 12t + 30$
כאשר הזמן בשניות והמיקום במטרים.
- מצאו את המהירות כתלות בזמן.
 - מתי הגוף נעצר?

(12) תנועה בקו ישר, מהירות כנגזרת

- מיקומו של גוף הנע בקו ישר נתון לפי: $x(t) = 32te^{-t}$.
- מצא את הזמן בו הגוף נעצר.
 - מצא את מרחק הגוף ברגע זה מהראשית.

(13) תנועה בקו ישר, מהירות כנגזרת ותאוצה

- גוף נע בקו ישר ומיקומו כתלות בזמן נתון לפי: $x(t) = -2t^3 + 6t + 3$
כאשר הזמן בשניות והמיקום במטרים.
- מצאו את המהירות כתלות בזמן ואת הרגע בו הגוף נעצר.
 - מהו המרחק המקסימאלי אליו הגיע הגוף?
 - מהי תאוצת הגוף?

(14) תאוצה מפוצלת

גוף נקודתי מתחיל לנוע ממנוחה ונע בקו ישר.

$$a(t) = \begin{cases} t \left[\frac{m}{\text{sec}^2} \right], & 0 \leq t \leq 3[\text{sec}] \\ 5 - t \left[\frac{m}{\text{sec}^2} \right], & 3 < t[\text{sec}] \end{cases}$$

תאוצת הגוף תלויה בזמן ונתונה לפי:

תנועת הגוף נמשכת עד לרגע בו הוא עוצר.

- א. מהי מהירות הגוף בזמן?
- ב. מהי המהירות המרבית של הגוף במהלך התנועה?
- ג. מתי עוצר הגוף?
- ד. איזה מרחק (העתק) הוא עובר עד לעצירה?

(15) מהירות מינימלית

גוף נע בקו ישר ומיקומו כתלות בזמן נתון לפי: $x(t) = \alpha t^3 - \beta t^2 + \gamma t$.
כל היחידות סטנדרטיות (מיקום במטר וזמן בשניות).

- א. מהן היחידות של α , β , γ ?
- ב. מהו מיקום הגוף ב- $t = 0$?
- ג. מצאו את המהירות ההתחלתית של הגוף.
- ד. מצאו מהי התאוצה ההתחלתית של הגוף.
- ה. חשבו את המהירות המינימלית של הגוף כפונקציה של הקבועים α , β , γ .
בבעיה ומצאו מה התנאי שצריכים למלא הקבועים על מנת שאכן תהיה מהירות מינימלית.

(16) ילד זורק כדור בקפיצה*

ילד מנסה לזרוק כדור לתקרה של הכיתה אך אינו מצליח להגיע עד לתקרה.
המורה לפיזיקה שהבחין בניסיונותיו של הילד הציע לו שיזרוק את הכדור תוך כדי קפיצה בכיוון מעלה.

- א. האם המורה צודק? לאיזה גובה יגיע הכדור אם הילד קופץ ומיד זורק את הכדור כלפי מעלה? הניחו שמהירות הקפיצה של הילד היא v_1 ומהירות הזריקה של הכדור v_2 ביחס לילד היא אותו הדבר.
הניחו שזריקת הכדור לא משפיעה על הילד.
- ב. בטאו את ההעתק של הילד ושל הכדור כפונקציה של הזמן בו הילד זורק את הכדור.

(17) זמן מינימלי לסיים מסלול*

מכונית יכולה להאיץ מאפס ל-100 קמ"ש תוך 10 שניות, כאשר ניתן להניח שקצב ההאצה קבוע. אותה מכונית יכולה לבלום בקצב של 0.5g. מהו הזמן המינימלי לעבור מסלול של 3 ק"מ אם המכונית מתחילה ממנוחה ומסיימת בעצירה מוחלטת? (רמז: השתמש בגרף מהירות זמן).

(18) כמה זמן הרכבת נסעה במהירות קבועה*

רכבת יוצאת מיישוב א' אל יישוב ב'. בשליש הראשון של הדרך הרכבת מאיצה בתאוצה קבועה. בשליש השני של הדרך הרכבת נוסעת במהירות קבועה. בשליש האחרון של הדרך הרכבת מאטה בקצב קבוע עד לעצירתה ביישוב ב'. זמן הנסיעה הכולל הוא T. כמה זמן נסעה הרכבת במהירות קבועה?

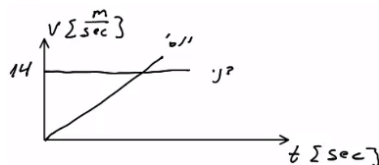
(19) אדם משחרר כדור מתוך מעלית*

מעלית עולה מגובה הקרקע במהירות קבועה. בזמן T_1 , אדם הנמצא במעלית משחרר כדור מתוך המעלית דרך חור שברצפת המעלית. הכדור מגיע לקרקע כעבור T_2 שניות. מצאו את גובה המעלית h בזמן T_1 . נתונים T_1 ו- T_2 .

תשובות סופיות:

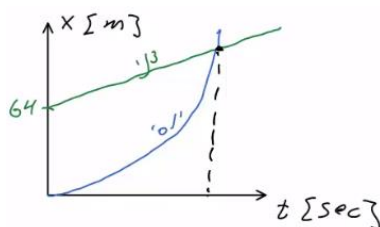
1. א. הזמן: $t = 8.16 \text{ sec}$, המיקום: 16.65 m .

ב. $V_{\text{Dana}}(t = 8.16) = -8.16 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $V_{\text{Dani}}(t = 8.16) = 4.08 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.



2. א. דני - $V(t) = 14 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, יוסי - $V(t) = 8t$. גרף:

ב. $t = 1.75 \text{ sec}$, לא.



ג. דני - $x(t) = 64 + 14t$, יוסי - $x(t) = 4t^2$. גרף:

ד. ב- $t = 6.12$, המרחק: 149.82 m .

3. א. כאשר $0 \leq t \leq 20$ (חלק I), התאוצה חיובית וקבועה, והמיקום הולך וגדל.
כאשר $20 \leq t \leq 50$ (חלק II), המהירות קבועה (אין תאוצה) והמיקום גדל.
כאשר $50 \leq t \leq 60$ (חלק III), התאוצה קבועה ושלילית והמיקום הולך וגדל.

$$a = \begin{cases} 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} & 0 < t < 20 \\ 0 & 20 < t < 50 \\ -4 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} & 50 < t < 60 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

ג. $V(t = 15) = 30 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $V(t = 40) = 40 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $V(t = 55) = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

ד. $x(t = 15) = 225 \text{ m}$, $x(t = 40) = 1,200 \text{ m}$, $x(t = 55) = 1,750 \text{ m}$.

4. א. גוף א': תנועה בתאוצה קבועה, האצה. ההתקדמות בכיוון חיובי.

גוף ב': כאשר $0 < t < 8$, כמו גוף א'. כאשר $8 \leq t$,

תנועה במהירות קבועה בכיוון חיובי.

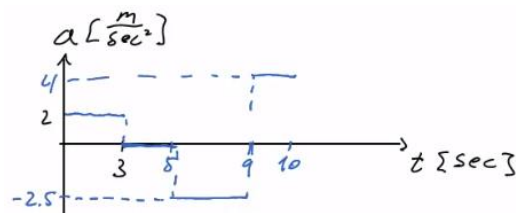
ב. גוף א': $\frac{2}{3}t^2$, גוף ב': כאשר $0 \leq t \leq 8$, כמו גוף א'.

כאשר $8 \leq t \leq \infty$, $x(t) = 96 + 24(t - 8)$.

ג. כש- $\Delta x(t = 3) = 7.5 \text{ m}$, וכש- $\Delta x(t = 24) = 96 \text{ m}$. גוף ב' מקדים את א'.

ד. $t = 18 \text{ sec}$ ה. כש- $t = 31.42 \text{ sec}$.

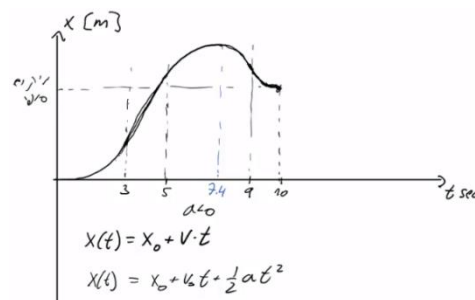
- 5) א. כאשר $0 \leq t \leq 3$ (חלק I), תאוצה קבועה, האצה והתקדמות בכיוון החיובי.
כאשר $3 \leq t \leq 5$ (חלק II), תנועה במהירות קבועה, התקדמות בכיוון החיובי.
כאשר $5 \leq t \leq 9$ (חלק III), תאוצה קבועה שלילית.
תאוצה עד אשר המהירות מתאפסת, ואז מתחילה האצה בכיוון הנגדי.
התקדמות בכיוון החיובי עד שהמהירות מתאפסת ואז מתחילים לחזור בכיוון הנגדי.
כאשר $9 \leq t \leq 10$, תאוצה קבועה חיובית, תאוצה. התקדמות בכיוון הנגדי.



גרף: $a = \begin{cases} 2 \frac{m}{sec^2} & 0 < t < 3 \\ 0 & 3 < t < 5 \\ -2.5 \frac{m}{sec^2} & 5 < t < 9 \\ 4 \frac{m}{sec^2} & 9 < t < 10 \end{cases}$ ב.

ג. בזמן: 7.4sec, המרחק: 28.2m. ד. $S = 33.4m$. ה. $\Delta x = 23m$.

ו. $\bar{V} = 2.3 \frac{m}{sec}$. ז. $\Delta x = x(t=6) = 25.75m$. ח. $t = 3.5sec$.

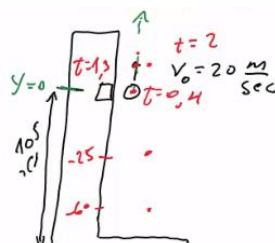


6) א. $17.32 \frac{m}{sec}$ ב. $V_F \approx 16.73$

7) א. 80m ב. $40 \frac{m}{sec}$

8) א. מקום-זמן: $y(t) = 20t - 5t^2$, $V(t) = 20 - 10t$

ב. ג. ד. 7sec



זמן (שניות)	מיקום (מטר)	מהירות (מטר לשנייה)
1	15	10
2	20	0
3	15	-10
4	0	-20
5	-25	-30
6	-60	-40

ה. (א) מקום-זמן: $y(t) = 105 + 20t - 5t^2$. מהירות-זמן: $V(t) = 20 - 10t$

(ד) 7sec

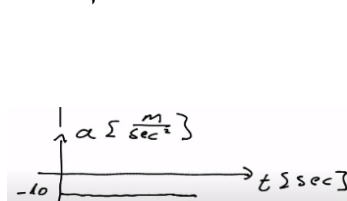
9 א. מקום-זמן: $y(t) = 40 + 30t - 5t^2$, מהירות-זמן: $v(t) = 30 - 10t$,

תאוצה-זמן: $a = -10$

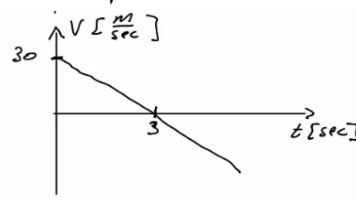
ב.

זמן (שניות)	מקום (מטר)	מהירות (מטר לשנייה)
0	40	30
1	65	20
2	80	10
3	85	0
4	80	-10
5	65	-20

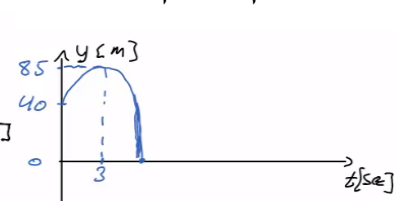
תאוצה-זמן:



מהירות-זמן:



ג. מקום-זמן:



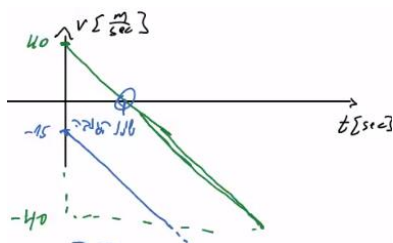
10 א. גוף 1 - כדור: $y_1(t) = 80 + (-15)t - 5t^2$, גוף 2 - ריבוע: $y_2(t) = 40t - 5t^2$.

ב. יגיע בדיוק לגובהו. ג. 47.74m. ד. גוף 1: $v_1(t) = 15 - 10t$

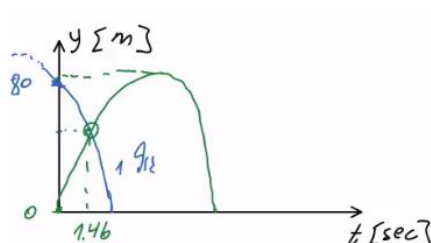
גוף 2: $v_2(t) = 40 - 10t$ גוף 1: $-29.6 \frac{m}{sec}$, גוף 2: $25.4 \frac{m}{sec}$

ו. גוף 1: $-42.72 \frac{m}{sec}$, גוף 2: $-40 \frac{m}{sec}$

מהירות-זמן:



ז. מיקום-זמן: (גוף 1 בכחול, גוף 2 בירוק)



ב. $t = \sqrt{2} \text{ sec}$

11 א. $v = 6t^2 - 12$

ב. $x(t=1) = \frac{32}{e}$

12 א. $t = 1 \text{ sec}$

ג. $a = -12t$

ב. $X_{\max} = 7m$

13 א. $v(t) = -6t^2 + 6$, $t = 1 \text{ sec}$

$$V(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right) & 0 \leq t \leq 3 \\ \left(5t - \frac{t^2}{2} - 6 \right) \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right) & 3 \leq t \end{cases} \quad \text{א. (14)}$$

$$V_{\max} = 6.5 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.}$$

$$\Delta x \approx 31.79 \text{m} \quad \text{ד.} \quad t_2 \approx 8.61 \quad \text{ג.}$$

$$[\alpha] = \frac{\text{m}}{\text{sec}^3}, [\beta] = \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, [\gamma] = \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{א. (15)}$$

$$\text{ב. } 0$$

$$\gamma \quad \text{ג.}$$

$$-2\beta \quad \text{ד.} \quad -\frac{\beta^2}{3\alpha} + \gamma, \quad \alpha > 0 \quad \text{ה.}$$

$$\frac{(v_1 + v_2)^2}{2g} - v_2 t_0 : \text{כדור}, \frac{v_1^2}{2g} : \text{ב. ילד} \quad \text{א. (16)} \quad \frac{(v_1 + v_2)^2}{2g} \quad \text{המורה צודק}$$

$$T \approx 58 \text{sec} \quad \text{(17)}$$

$$t_2 = \frac{T}{5} \quad \text{(18)}$$

$$h = \frac{gT_2^2}{2 \left(1 + \frac{T_2}{T_1} \right)} \quad \text{(19)}$$

תנועה במישור וזריקה משופעת:

רקע:

וקטור המיקום - $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$.

וקטור ההעתק - $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

וקטור המהירות הממוצעת (velocity) - $\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

וקטור המהירות הרגעית (velocity) - $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

וקטור התאוצה הממוצעת - $\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

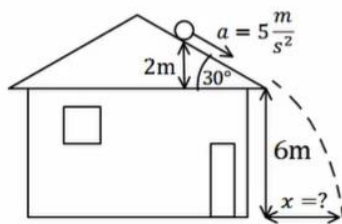
וקטור התאוצה הרגעית - $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

גודל המהירות (Speed) - $|\vec{v}| = \frac{dS}{dt}$, כאשר S זה הדרך.

שאלות:

(1) דוגמה - דן יורה חץ על עץ

דן יורה חץ מגובה של 2 מטרים לעבר עץ הנמצא במרחק של 8 מטרים. מהירות היציאה של החץ מהקשת היא 30 מטר לשנייה. מצא באיזה גובה יפגע החץ בעץ אם הזווית שבה יורה דן את החץ היא 15 מעלות?



(2) כדור מתגלגל מגג משופע

כדור מתגלגל מגג בניין משופע. הכדור מתחיל תנועתו ממנוחה מגובה של 2 מטרים מקצה הגג. שיפוע הגג הוא 30 מעלות מתחת לאופק. נתון כי תאוצת הכדור בכיוון תנועתו על הגג היא 5 מטרים לשנייה בריבוע. גובה קצה הגג מעל הקרקע הוא 6 מטרים. מצא את המרחק האופקי מקצה הגג בו יפגע הכדור בקרקע.

(3) תנועת כדור עם רוח נגדית

כדור נבעט מהקרקע במהירות של 20 מטרים לשנייה ובזווית של 45 מעלות מהקרקע. רוח נגדית גורמת לכדור תאוצה בכיוון האופקי של 2 מטרים לשנייה בריבוע (בנוסף לתאוצת הכובד).

- א. מצא את מיקום הכדור ומהירותו ב- $t = 2 \text{ sec}$.
- ב. מהו המרחק בו פוגע הכדור בקרקע?
- ג. מהו הגובה המקסימאלי אליו הגיע הכדור?
- ד. מהו המרחק האופקי המקסימאלי אליו הגיע הכדור?

(4) מסירה בפוטבול

במשחק הפוטבול הרכז האחורי זורק כדור בזווית של 45 מעלות ביחס לקרקע ובמהירות של 30 מטרים לשנייה. שחקן הקבוצה הנמצא 15 מטרים קדימה מהרכז האחורי רץ במהירות של 5 מטרים לשנייה. השחקן רואה את הכדור ומתחיל להאיץ בתאוצה קבועה. מהי התאוצה הדרושה לשחקן כך שיוכל לתפוס את הכדור בדיוק בגובה בו הוא נזרק? האם סימן התאוצה יכול להיות שלילי? מה המשמעות של תאוצה זו?

(5) דוגמה מהירות ממוצעת

מיקומו של גוף כתלות בזמן הוא: $\vec{r}(t) = 3t^2x + (2t+1)y$. מצא את המהירות הממוצעת ב-5 השניות הראשונות של התנועה.

(6) דוגמה - מהירות רגעית

מיקומו של גוף כתלות בזמן הוא: $\vec{r}(t) = 3t^3x + (4t-5)y$.
 א. מצא את מהירות הגוף כתלות בזמן.
 ב. מהי מהירות הגוף ב- $t = 2$?

(7) דוגמה - תאוצה

מהירותו של גוף כתלות בזמן היא: $\vec{v}(t) = 2t^3x + (6t-5)y$.
 א. מצא את תאוצת הגוף כתלות בזמן.
 ב. מהי התאוצה הממוצעת בחמש השניות הראשונות של התנועה?

(8) דרך והעתק

מיקומו של גוף לפי הזמן נתון לפי: $\vec{r}(t) = 2t^3x + (t^3-2)y$.
 א. מצא את המהירות הרגעית (velocity) והתאוצה הרגעית כפונקציה של הזמן.
 ב. מצא את גודל המהירות (speed) כתלות בזמן.
 ג. מצא את הדרך שעשה הגוף בחמש השניות הראשונות.
 ד. מצא את המהירות הממוצעת (average velocity) ב-5 השניות הראשונות של התנועה.
 ה. מצא את ה-speed הממוצע של הגוף בחמש השניות הראשונות.

תשובות סופיות:

(1) 3.78m

(2) 4.49m

(3) א. $V_x = 10.14 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $V_y = -5.86 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $x = 24.28\text{m}$, $y = 8.28\text{m}$ ב. 32.01m

ג. 10m ד. $x_{\max} = 32.01$

(4) $a = 5.99 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$, יכול לצאת שלילי, המשמעות שהשחקן צריך להאט בשביל להגיע לנקודה הזאת בדיוק יחד עם הכדור.

(5) $\vec{V} = (15, 2)$

(6) א. $\vec{V} = 9t^2\hat{x} + 4\hat{y}$ ב. $\vec{V}(t=2) = (36, 4)$

(7) א. $\vec{a}(t) = 6t^2\hat{x} + 6\hat{y}$ ב. $\vec{a} = 50\hat{x} + 6\hat{y}$

(8) א. $\vec{V}_{(t)} = 6t^2\hat{x} + 3t^2\hat{y}$ ב. $|\vec{V}| = \sqrt{45}t^2$ ג. $S \approx 279.5\text{m}$

ד. $\vec{V} = 50\hat{x} + 25\hat{y}$ ה. $|\vec{V}| \approx 55.9 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

משוואת מסלול:

רקע:

משוואה המתארת את $y(x)$.

שאלות:

(1) דוגמה-משוואת מסלול

מצא את משוואת המסלול ושרטט את המסלול על מערכת צירים עבור

$$x(t) = \sqrt{3+t^2}, \quad y(t) = \sqrt{7-t^2}$$

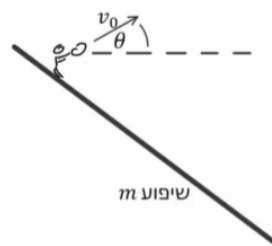
הנח ש- x ו- y תמיד חיוביים.

(2) זריקה משופעת על מישור משופע

איתי עומד על מישור משופע בעל שיפוע m , איתי זורק כדור לכיוון מורד המישור במהירות התחלתית v_0 ובזווית θ ביחס לאופק.

א. מצא מה המרחק מאיתי שבו יפגע הכדור? (התעלם מהגובה של איתי).

ב. מהי הזווית θ עבורה מרחק זה יהיה מקסימאלי?



תשובות סופיות:

$$y(x) = \sqrt{10-x^2} \quad (1)$$



$$(2) \quad \text{א. } x = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta (\tan \theta + m)}{g} \quad \text{ב. } \tan 2\theta = \frac{1}{m}$$

תרגילים נוספים:

שאלות:

(1) גודל מהירות מינימלי

וקטור המיקום של גוף מסוים כתלות בזמן נתון על ידי: $\vec{r}(t) = 2t^2\hat{i} - 6j + (t-5)^2k$.

א. מהו וקטור המהירות של הגוף כתלות בזמן?

ב. מהו וקטור התאוצה של הגוף כתלות בזמן?

ג. מתי גודל מהירות הגוף מינימלי?

ד. מהו וקטור המיקום כאשר גודל מהירותו הוא: $\sqrt{160} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$?

(2) וקטורים בזריקה משופעת

גוף נזרק מראשית הצירים במהירות התחלתית v_0 ובזווית θ ביחס לציר ה- x .

א. מצאו את וקטור המיקום של הגוף כתלות בזמן.

ב. מצאו את וקטור המהירות והתאוצה של הגוף כתלות בזמן.

ג. חשבו את הזווית בין וקטור המהירות לוקטור התאוצה כתלות בזמן.

(3) וקטור מיקום ומסלול

וקטור המיקום של גוף הנע במישור xy נתון לפי: $\hat{r}(t) = A \sin(\omega t)\hat{x} + B \cos(\omega t)\hat{y}$.

א. מצאו את וקטור המהירות והתאוצה של הגוף.

ב. חשבו את הזווית בין וקטור המהירות לוקטור התאוצה ב- $t=0$.

ג. הראו שוקטור התאוצה ווקטור המיקום הפוכים בכיוון.

ד. מצאו את מסלול התנועה של הגוף, כלומר את $y(x)$.

(4) וקטור מיקום ומסלול עם זמן בריבוע

וקטור המיקום של גוף הנע במישור $x-y$ נתון לפי: $\vec{r}(t) = A \sin(\alpha t^2)\hat{x} + B \cos(\alpha t^2)\hat{y}$.

א. מצאו את וקטור המהירות והתאוצה של הגוף.

ב. מצאו את מסלול התנועה של הגוף, כלומר את $y(x)$.

ג. מה ההבדל בין המסלול בתרגיל זה לבין המסלול בתרגיל הקודם?

(5) רובין הוד יורה ותופס חץ

רובין הוד יורה חץ במהירות v_0 וזווית θ ביחס לקרקע.
 ברגע שחרור החץ מתחיל רובין הוד לרוץ בקו ישר ובתאוצה $a(t) = Ae^{-kt}$.
 רובין הוד רוצה לתפוס את החץ ברגע פגיעתו בקרקע.
 מצאו משוואה עם הפרמטרים A , θ , v_0 והמשתנה k ממנה ניתן לחלץ את k
 כך שרובין יצליח לתפוס את החץ. אין צורך לפתור את המשוואה.

(6) תנועה במעגל*

גוף נקודתי נע במישור אופקי xy .

בזמן $t=0$ מהירות הגוף הייתה: $\vec{v}(0) = 15\pi \hat{i} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ יחד עם וקטור המצב: $\vec{r}(0) = 5\hat{j}\text{m}$.

תאוצת הגוף כפונקציית זמן החל מרגע זה היא:

$$\vec{a}(t) = -45\pi^2 \sin(3\pi t) \hat{i} - 45\pi^2 \cos(3\pi t) \hat{j} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

- מצא את וקטור המהירות של הגוף בזמן.
- מצא את וקטור המצב של הגוף בזמן.
- מצא את הזווית בין וקטור המצב לוקטור התאוצה בזמן.
- מצא את משוואת המסלול של הגוף.

(7) תנועה על אליפסה*

מיקום של גוף נקודתי נתון במשוואה: $\vec{r} = 4\sin(\pi t) \hat{i} + 3\cos(\pi t) \hat{j}$.

(המיקום במטרים, הזמן בשניות).

- מצא את משוואת המסלול של הגוף.
- מצא את רגעי הזמן שבהם המהירות ורדיוס הוקטור מאונכים.
- מצא את תאוצת התנועה והראה שהיא מכוונת כלי ראשית הצירים.

$$\text{ד. מצא באיזה רגעי זמן גודל התאוצה הוא: } \frac{v^2}{r}.$$

- חשבו את המרחק המינימלי של הגוף מראשית הצירים.
 כמה פעמים, במשך מחזור תנועה אחד, מגיע הגוף למרחק מינימלי מהראשית?

(8) מהירות לפי גזירה תרגיל פשוט

נתון וקטור r של חלקיק מסוים: $\vec{r} = (8t, -5t^2)$.

- א. מהו רכיב ה- x של הווקטור בזמן?
- ב. מהו רכיב ה- y של הווקטור בזמן?
- ג. מהי מהירותו בציר x ?
- ד. מהי מהירותו בציר y ?
- ה. האם מהירויות אלו קבועות בזמן?
- ו. מהו מרחק החלקיק מהראשית לאחר שעברו 3 שניות?

(9) גזירת מיקום למציאת מהירות

מיקומו של חלקיק נתון ע"י הווקטור r : $\vec{r} = 5\sin(\pi t), 4t^3 + t^2, 8e^t$.

- א. מצאו את ווקטור המהירות כפונקציה של הזמן.
- ב. מהי מהירות החלקיק ב- $t = 2$?

(10) העתק לפי גזירה

וקטור r מתאר מיקומו של חלקיק בזמן: $\vec{r} = (5t, 10 + t^2)$.

- א. מהו מיקום החלקיק בזמן $t = 0$?
- ב. מהו מיקום החלקיק בזמן $t = 5$?
- ג. מהו ההעתק בחמש השניות הראשונות?
- ד. מהי מהירות החלקיק בזמן $t = 5$ (בהצגת גודל וכיוון)?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = 4t\hat{i} + 2(t-5)\hat{k} \quad \text{א.} \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = 4\hat{i} + 2\hat{k} \quad \text{ב.} \quad t_{\min} = 1\text{sec} \quad \text{ג.}$$

$$\vec{r}(t_1) = 18\hat{i} - 6\hat{j} + 4\hat{k} \quad \text{ד.}$$

$$(2) \quad \vec{r}(t) = v_0 \cos \theta \cdot t \hat{x} + (v_0 \sin \theta \cdot t - 5t^2) \hat{y} \quad \text{א.} \quad \vec{v} = v_0 \cos \theta \hat{x} + (v_0 \sin \theta - 10t) \hat{y} \quad \text{ב.}$$

$$\cos \alpha = \frac{10t - v_0 \sin \theta}{\sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta - 10t)^2}} \quad \text{ג.}$$

$$(3) \quad \vec{v} = \omega A \cos(\omega t) \hat{x} - \omega B \sin(\omega t) \hat{y}, \quad \vec{a} = -\omega^2 A \sin(\omega t) \hat{x} - \omega^2 B \cos(\omega t) \hat{y} \quad \text{א.}$$

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1 \quad \text{ד.} \quad \text{ג. הוכחה.} \quad 90^\circ \quad \text{ב.}$$

$$(4) \quad \vec{v} = A \cos(\alpha t^2) 2\alpha t \cdot \hat{x} - B \sin(\alpha t^2) (2\alpha t) \hat{y} \quad \text{א.}$$

$$\vec{a} = \left[-A \sin(\alpha t^2) (2\alpha t)^2 + 2\alpha A \cos(\alpha t^2) \right] \hat{x} - \left[B \cos(\alpha t^2) (2\alpha t)^2 + 2\alpha B \sin(\alpha t^2) \right] \hat{y}$$

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1 \quad \text{ב.} \quad \text{ג. אין הבדל}$$

$$(5) \quad \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{A}{k} \frac{2v_0 \sin \theta}{g} + \frac{A}{k^2} \left(e^{-k \frac{2v_0 \sin \theta}{g}} - 1 \right)$$

$$(6) \quad \vec{r}(t) = 5 \sin(3\pi t) \hat{i} + 5 \cos(3\pi t) \hat{j} \quad \text{ב.} \quad \vec{v}(t=0) = 15\pi \cos(3\pi t) \hat{i} - 15\pi \sin(3\pi t) \hat{j} \quad \text{א.}$$

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ד.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.}$$

$$(7) \quad \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \quad \text{א.} \quad t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = \frac{1}{2}, t_4 = \frac{3}{2} \quad \text{ב.}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -4\pi^2 \sin(\pi t) \hat{i} - 3\pi^2 \cos(\pi t) \hat{j} \quad \text{ג.}$$

$$\text{ה. } |\vec{r}|(t=1) = 3, \text{ פעמיים.} \quad t_1 = \frac{1}{4} \text{sec}, t_2 = \frac{5}{4} \text{sec}, t_3 = \frac{3}{4} \text{sec}, t_4 = \frac{7}{4} \text{sec} \quad \text{ד.}$$

$$(8) \quad r_x = 8t \quad \text{א.} \quad r_y = -5t^2 \quad \text{ב.} \quad v_x = \dot{r}_x = 8 \quad \text{ג.} \quad v_y = \dot{r}_y = -10t \quad \text{ד.}$$

ה. המהירות על x קבועה בזמן, המהירות על y לא קבועה בזמן.

$$|r_{t=3}| = \sqrt{2601} \quad \text{ו.}$$

$$(9) \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = 5\pi \cos(\pi t), 12t^2 + 2t, 8e^t \quad \text{א.}$$

$$\vec{v}_{t=2} = 5\pi \cos(2\pi), 4 \cdot 2^3 + 2^2, 8e^2 = 5\pi, 36, 8e^2 \quad \text{ב.}$$

$$(10) \quad \vec{r}_{t=0} = (0, 10) \quad \text{א.} \quad \vec{r}_{t=5} = (25, 35) \quad \text{ב.} \quad |\vec{r}_{t=5} - \vec{r}_{t=0}| = \sqrt{1250} \quad \text{ג.}$$

$$|\vec{v}_{(t=5)}| = \sqrt{125} \quad \text{ד.}$$

תאוצה נורמלית ומשיקית ורדיוס עקמומיות:

רקע:

$$\vec{a}_t = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

$$|a_t| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$|a_n| = \frac{|\vec{a} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}, \quad \vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t \quad \text{תאוצה נורמלית}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} \quad \text{רדיוס עקמומיות}$$

שאלות:

1) תאוצה משיקית ונורמאלית

מיקומו של גוף כתלות בזמן נתון לפי: $x(t) = 2t^2$, $y(t) = (1-t)^2$

כאשר הצבה של הזמן בשניות תיתן מיקום במטרים.

א. מצא מתי מהירות הגוף מינימלית?

ב. מצא את מיקום הגוף כאשר מהירותו היא: $6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ג. חשב את התאוצה המשיקית והנורמאלית ב- $t = 2 \text{ sec}$.

2) חישוב תאוצה משיקית ונורמלית גודל וכיוון

וקטור המיקום של גוף מסוים נתון ע"י המשוואה: $\vec{r}(t) = t^2 \hat{x} + 4t \hat{y} - 5t^2 \hat{z}$

א. חשב את וקטור המהירות של הגוף כתלות בזמן.

ב. חשב את וקטור התאוצה של הגוף כתלות בזמן.

ג. חשב את גודל התאוצה המשיקית כתלות בזמן.

ד. חשב את גודל התאוצה הנורמלית כתלות בזמן.

ה. חשב את וקטור התאוצה המשיקית כתלות בזמן.

ו. חשב את וקטור התאוצה הנורמלית כתלות בזמן.

(3) תאוצה משיקית ונורמאלית בציקלואידה

המסלול שמשרטטת נקודה על ההיקף של גלגל בעת שזה מתגלגל (ללא החלקה) על משטח אופקי נקרא ציקלואידה. מיקום הנקודה בכל רגע נתון על ידי הביטוי:

$$\vec{r}(t) = (R \sin \omega t + R \omega t) \hat{x} + (R \cos \omega t + R) \hat{y}$$

הם קבועים נתונים.

א. חשב את וקטור המהירות של הנקודה בכל רגע.

ב. מצא את הרגע בו הנקודה נמצאת בשיא הגובה (בציר ה- y) ואת הרגע

בו הגובה מינימלי (קיימים אינסוף רגעים כי התנועה מחזורית,

רשום בצורה כללית).

ג. מצא את תאוצת החלקיק בכל רגע.

ד. חשב את התאוצה המשיקית והנורמאלית כאשר הנקודה מגיעה לגובה

מקסימלי ומינימלי.

ה. חשב את התאוצה המשיקית והנורמאלית ברגע שבו רכיב ה- x של

המהירות מתאפס.

(4) חרוז נע על טבעת אליפטית

חרוז נע על פני טבעת אליפטית, כך שמיקומו בכל רגע כתלות בזמן הוא:

$$\vec{r}(t) = a \cos(\omega t) \hat{x} + b \sin(\omega t) \hat{y}$$

קבועים נתונים.

א. מצא את התאוצה המשיקית כתלות בזמן.

ב. מצא את התאוצה הנורמלית כתלות בזמן.

ג. כאשר $|a| = |b|$ האליפסה הופכת למעגל.

במקרה זה, האם גודל המהירות במשך התנועה גדל, קטן, לפעמים גדל

ולפעמים קטן או נשאר קבוע?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } t = 0.2 \text{ sec} \quad \text{ב. } \vec{r} = (4.38, 0.23)$$

$$\text{ג. } \vec{a}_b = (4.24, 1.06) \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \quad \vec{a}_n = (-0.24, 0.94) \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$(2) \quad \text{א. } \vec{V}_{(t)} = \dot{\vec{r}} = 2t\hat{x} + 4\hat{y} - 10t\hat{z} \quad \text{ב. } \vec{a} = \dot{\vec{v}} = 2\hat{x} - 10\hat{z}$$

$$\text{ג. } |a_t| = \frac{52t}{\sqrt{26t^2 + 4}} \quad \text{ד. } |a_n| = \sqrt{\frac{208}{13t^2 + 2}}$$

$$\text{ה. } \vec{a}_t = \frac{52t}{26t^2 + 4} (t, 2, -5t) \quad \text{ו. } \vec{a} = \frac{4}{13t^2 + 2} (1, -13t, -5)$$

$$(3) \quad \text{א. } \vec{V} = \dot{\vec{r}} = (R\omega \cdot \cos(\omega t) + R\omega)\hat{x} + (-R\omega \sin(\omega t))\hat{y}$$

$$\text{ב. } t_{\max} = \frac{2\pi}{\omega} k, \quad t_{\min} = \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega} k \quad \text{ג. } \vec{a} = \dot{\vec{v}} = -\omega^2 R \sin(\omega t)\hat{x} - \omega^2 R \cos(\omega t)\hat{y}$$

$$\text{ד. } \vec{a}_t = 0, \quad \vec{a}_n = \vec{a} = -\omega^2 R \hat{y} \quad \text{ה. אי אפשר להגדיר.}$$

$$(4) \quad \text{א. } a_t = \frac{\omega^2 \sin(2\omega t)(a^2 - b^2)}{2\sqrt{a^2 \sin^2(\omega t) + b^2 \cos^2(\omega t)}}$$

$$\text{ב. } a_n = \sqrt{\omega^4 a^2 \cos^2(\omega t) + \omega^4 b^2 \sin^2(\omega t) + \left(-\frac{\omega^4 \sin^2(2\omega t)(a^2 - b^2)}{4(a^2 \sin^2(\omega t) + b^2 \cos^2(\omega t))} \right)}$$

$$\text{ג. } |\vec{V}| = \text{const}, \quad \text{הגודל נשאר קבוע.}$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 4 - תנועה יחסית

תוכן העניינים

1. הסבר על טרנספורמצית גלילי 54
2. שיטה שניה-פתרון באמצעות תרשימי וקטורים 59

טרנספורמציית גליליי:

רקע:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{1,2} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{v}_{1,2} &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ \vec{a}_{1,2} &= \vec{a}_1 - \vec{a}_2\end{aligned}$$

שאלות:

(1) כלב קופץ בתוך רכבת

כלב נמצא ברכבת הנעה במהירות $8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ביחס לקרקע. הכלב קופץ בכיוון התקדמות הקרון מרחק של 7 מטרים ביחס לקרון. במהלך הקפיצה מהירות הכלב קבועה ביחס לקרון ושווה ל- $3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. מהו המרחק שעבר הכלב ביחס לקרקע?

(2) מדרגות נעות

כאשר אדם עומד על מדרגות נעות בחנות, הוא מגיע לקומה הרצויה תוך 50 שניות. יום אחד, המדרגות הנעות מתקלקלות והאדם צריך לעלות אותן ברגל בכוחות עצמו, כאשר הוא נע במלוא היכולת שלו, הוא מצליח להגיע לקומה הרצויה תוך 80 שניות. למחרת, המדרגות הנעות עובדות כרגיל, אך האדם מחליט לרוץ בהן במלוא יכולתו בכל זאת.

א. תוך כמה זמן יגיע לקומה הרצויה?

ב. האדם מנסה עתה לרדת חזרה לקומה המקורית במדרגות העולות (אלה בהן הוא עלה קודם).

האם הוא יכול להצליח בכך?

אם כן תוך כמה זמן יגיע לקומה המקורית?

(3) כדור נזרק במעלית

- מרצפת מעלית הנמצאת במנוחה נזרק כלפי מעלה במהירות התחלתית לא ידועה. הכדור עובר ליד שעון עצר, המחובר למעלית, ונמצא בגובה 2 מטרים מרצפת המעלית. שעון העצר מופעל ברגע שהכדור חולף לידו בפעם הראשונה ומפסיק ברגע שהכדור חולף לידו בפעם השנייה (בדרכו למטה). השעון מדד זמן של 0.5 שניות.
- א. מהו זמן התנועה של הכדור מרגע הזריקה עד לפגיעה ברצפת המעלית?
 ב. מהי הדרך אותה עשה הכדור ביחס למעלית וביחס לכדה"א עד אשר הגיע לשעון בפעם השנייה?
 ג. חוזרים על הניסוי, אבל כעת המעלית נעה (מלפני זריקת הכדור) במהירות קבועה כלפי מעלה של $4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. הזמן שמודד השעון הוא שוב 0.5 שניות.
- מהו זמן התנועה של הכדור מרגע הזריקה ועד לפגיעה ברצפת המעלית?
 ד. מהי הדרך אותה עשה הכדור ביחס למעלית וביחס לכדה"א עד אשר הגיע לשעון בפעם השנייה?
 ה. מהי מהירות הכדור ביחס לכדה"א ברגע הפגיעה ברצפת המעלית?

(4) כדור נזרק במעלית מאיצה

- מעלית נעה בתאוצה קבועה כלפי מעלה של $2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.
- ברגע שמהירות המעלית היא $4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ נזרק מרצפת המעלית כדור כלפי מעלה במהירות התחלתית לא ידועה.
- הכדור עובר ליד שעון עצר המחובר למעלית ונמצא בגובה 1 מטר מרצפת המעלית. שעון העצר מופעל ברגע שהכדור חולף לידו בפעם הראשונה ומפסיק ברגע שהכדור חולף לידו בפעם השנייה (בדרכו למטה). השעון מדד זמן של 0.5 שניות.
- א. מהו הזמן עד לפגיעת הכדור ברצפת המעלית?
 ב. מהי הדרך הכוללת שעבר הכדור ביחס למעלית עד אשר עבר ליד השעון בפעם השנייה?
 ג. מהי הדרך הכוללת שעבר הכדור ביחס לכדה"א עד אשר עבר ליד השעון בפעם השנייה?
 ד. מהי מהירות הכדור יחסית לכדה"א ברגע הפגיעה ברצפת המעלית?

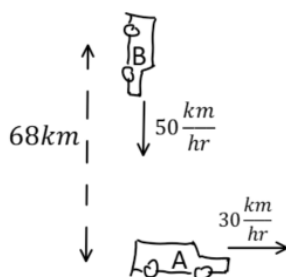
(5) דוגמה - מכונית ביחס לאוטובוס

- מכונית נוסעת במהירות של 30 מטר לשנייה בכיוון 30 מעלות עם ציר ה- x .
 אוטובוס נוסע במהירות של 50 מטר לשנייה בכיוון ציר ה- x .
- א. מצא את המהירות היחסית בין האוטובוס למכונית.
 ב. מצא את הזווית בה האוטובוס יראה את המכונית נוסעת.

6) אבן נזרקת מכדור פורח – תעשיה טכניון

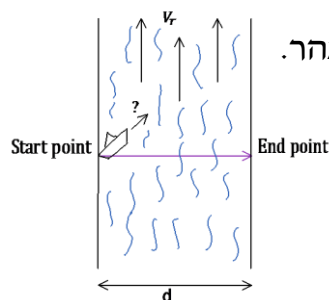
סטודנטית נמצאת על משטח שעולה אנכית במהירות קבועה $v_0 = 6 \frac{m}{sec}$, נסמן ב- $t = 0$ את הרגע בו התחיל לעלות המשטח מהקרקע. ברגע $t_1 = 3sec$ הסטודנטית זורקת אבן במהירות $v_1 = 8 \frac{m}{sec}$, אופקית ביחס אליה. מהו הזמן בו האבן פוגעת בקרקע (ביחס לזמן אפס של השאלה)?

7) מרחק מינימלי בין מכוניות



צופה הנמצא ברכב A יוצא מנקודה מסוימת לכיוון מזרח במהירות 30 קמ"ש. באותו הזמן רכב B יוצא ממרחק 68 ק"מ צפונית לנקודת יציאתו של רכב A ונוסע דרומה במהירות של 50 קמ"ש, כמתואר באיור. א. רשמו את פונקציית המרחק בין שני כלי הרכב כתלות בזמן. ב. מצאו תוך כמה שעות המרחק בין כלי הרכב יהיה מינימלי. ג. מצאו את גודלו של מרחק זה. ד. הראו כי ברגע בו המרחק בין המכוניות מינימלי וקטור המיקום היחסי מאונך לוקטור המהירות היחסית.

8) סירה בנהר



נהר זורם צפונה במהירות v_r . יוסי נמצא בגדה המערבית ורוצה להשיט סירה לרוחב הנהר. מהירות הסירה היא v_{br} יחסית לנהר. יוסי מעוניין להגיע אל הגדה הנגדית בדיוק מזרחית לנקודת מוצאו. נתון כי רוחב הנהר d. א. באיזה כיוון הוא יהיה חייב להשיט את הסירה? ב. מה מהירות הסירה יחסית לאדמה? ג. כמה זמן תארך דרכו?

9) אנייה שטה מערבה וצופה באנייה נוספת

מאנייה A השטה מערבה במהירות 30 קמ"ש נראית אנייה B כאילו היא שטה בדיוק צפונה. כאשר אנייה A מאטה ומורידה את מהירותה ל-10 קמ"ש (באותו הכיוון) נראית ממנה אנייה B כאילו היא שטה בכיוון היוצר זווית של 42 מעלות מערבית לצפון. מהו גודלה וכיוונה של מהירות אנייה B ביחס לקרקע?

(10) זווית פגיעה של גשם במכונית

נהג הנוסע במהירות 100 קמ"ש רואה טיפות גשם נמרחות על השמשה הצדדית של המכונית בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה ובזווית של 45 מעלות עם הציר האנכי לכיוון הנסיעה.
נהג אחר הנוסע במהירות 70 קמ"ש רואה את טיפות הגשם בזווית 30 מעלות עם אותו הציר.
מצא את מהירות הטיפות ביחס לקרקע (גודל וכיוון).

(11) זווית בין מהירויות

שני קליעים נורים ברגע $t = 0$. מיקומם ומהירותם ההתחלתית הם:

$$\vec{v}_2(0) = -1\hat{i} + 4\hat{j}, \quad \vec{v}_1(0) = 2\hat{i} + 5\hat{j}, \quad \vec{r}_2(0) = \hat{i}, \quad \vec{r}_1(0) = 0$$

על שניהם פועל כוח משיכה הגורם לתאוצה של $\vec{a} = -3\hat{i} + \hat{j}$.
היחידות הן MKS.

א. מצא את $\vec{r}_2(t)$, $\vec{r}_1(t)$.

ב. מצא את המרחק בין הקליעים כפונקציה של הזמן.

ג. מצא את הזווית בין $\vec{v}_1$ ל- $\vec{v}_2$ ברגע $t = 3$.

(12) מציאת מהירות בין מערכות

ביחס למערכת ייחוס A, מיקומו של גוף מסוים נתונה על ידי:

$$\vec{r}_A(t) = (6t^2 - 4t, -3t^3, 3)$$

מערכת ייחוס B נעה ביחס למערכת הייחוס הראשונה במהירות קבועה, $\vec{V}_{AB}$.
צופה הנמצא במערכת B רואה את הגוף נע כך שמיקומו בכל רגע הוא:

$$\vec{r}_B(t) = (6t^2 - 3t, 2t - 3t^3, 5)$$

א. חשבו את המהירות של המערכת B ביחס למערכת A, $\vec{V}_{AB}$.

ב. הראו שתאוצת הגוף זהה בשתי מערכות הייחוס, וחשבו אותה.

תשובות סופיות:

- (1) 25.7m
- (2) א. $t = 30.8 \text{ sec}$ ב. לא.
- (3) א. $t = 1.36 \text{ sec}$ ב. $S = 2.62 \text{ m}$ ג. $t = 1.36 \text{ sec}$ ד. $S = 5.72 \text{ m}$
- ה. $v_1 = -2.8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$
- (4) א. $t = 0.96 \text{ sec}$ ב. $S = 2.76 \text{ m}$ ג. $S = 4.46 \text{ m}$ ד. $v_1 = 1.6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$
- (5) א. $v_2' = \left(-24.01 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right)$ ב. $\theta_2' = 148^\circ$
- (6) 2.6sec
- (7) א. $|\vec{r}_{B,A}| = \sqrt{(30t)^2 + (68 - 50t)^2}$ ב. $|\vec{r}_{B,A}| = 35 \text{ km}$, $t = 1 \text{ hr}$ ג. הוכחה.
- (8) א. $\sin \theta = -\frac{V_r}{V_{br}}$ ב. $V_{bx} = \sqrt{V_{br}^2 - V_r^2}$ ג. $t = \frac{d}{\sqrt{V_{br}^2 - V_r^2}}$
- (9) $V_B \approx 37.3$, $\alpha \approx 51.2^\circ$
- (10) מהירות: $V_y = -70.79 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$, $V_x = 29.21 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$, גודל וכיוון: ראה סרטון.
- (11) א. $\vec{r}_1(t) = \left(-\frac{3}{2}t^2 + 2t \right) \hat{i} + \left(\frac{t^2}{2} + 5t \right) \hat{j}$, $\vec{r}_2(t) = \left(-\frac{3}{2}t^2 - t + 1 \right) \hat{i} + \left(\frac{t^2}{2} + 4t \right) \hat{j}$
- ב. $|\vec{r}_{1,2}| = \sqrt{10t^2 - 6t + 1}$ ג. $\alpha = 13.82^\circ$
- (12) א. $(1, -2, 0)$ ב. הוכחה.

שיטה שניה-פתרון באמצעות תרשימי וקטורים:

שאלות:

(1) שיטה שניה-פתרון באמצעות תרשימי וקטורים ודוגמה

צופה הנמצא באונייה A השטה מזרחה במהירות 15 קמ"ש רואה את אונייה B שטה במהירות 20 קמ"ש ובכיוון 60 מעלות צפונית למזרח. מהי המהירות של אונייה B ביחס לקרקע, גודל וכיוון?

(2) סירה בנהר פתרון בשיטה השניה

נהר זורם צפונה במהירות V_r .

יוסי נמצא בגדה המערבית ורוצה להשיט סירה לרוחב הנהר.

מהירות הסירה היא V_{br} יחסית לנהר.

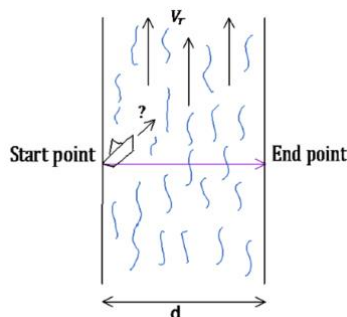
יוסי מעוניין להגיע אל הגדה הנגדית בדיוק מזרחית לנקודת מוצאו.

א. סרטטו תרשים וקטורי ובו:

מהירות הסירה ביחס לקרקע, מהירות הנהר

ביחס לקרקע ומהירות הסירה ביחס לנהר.

ב. מצאו את כיוון מהירות הסירה ביחס לנהר.



(3) מטוס נראה משתי רכבות

צופה הנמצא ברכבת הנעה מזרחה במהירות של 50 קמ"ש רואה

מטוס חוצה את המסילה בזווית של 30 מעלות מערבית לצפון.

צופה אחר הנוסע ברכבת הנעה מערב במהירות של 100 קמ"ש רואה

את אותו המטוס חוצה את המסילה בזווית של 50 מעלות מזרחית לצפון.

א. סרטטו תרשים וקטורים ובו:

מהירות הצופים ביחס לקרקע, מהירות המטוס ביחס לכל צופה ומהירות

המטוס ביחס לקרקע (אין צורך לדעת את כל הנתונים בתרשים).

ב. מצאו את מהירות המטוס ביחס לקרקע (גודל וכיוון).

(4) רכב רואה רכב רואה רכב

צופה היושב ברכב A רואה את רכב B כאילו הוא נע צפונה במהירות V_{BA} .

צופה היושב ברכב B רואה את רכב C, כאילו הוא נע בכיוון צפון מערב בזווית α

מהצפון ובמהירות V_{CB} .

רכב A נע ביחס לקרקע בכיוון צפון מזרח בזווית β מן הצפון ובמהירות V_A .

מהי המהירות של רכב C ביחס לקרקע, גודל וכיוון?

(5) שני דאונים

שני דאונים טסים באותו הגובה.

באזור טיסתם קיים זרם אוויר במהירות 40 קמ"ש ובכיוון של 30 מעלות מזרחה מהצפון.

דאון 1 טס ביחס לזרם במהירות 30 קמ"ש ובכיוון צפון.

דאון 2 טס ביחס לקרקע במהירות לא ידועה אך בכיוון צפון.

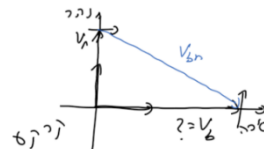
בנוסף הטייס שבדאון 1 רואה את דאון 2 כאילו הוא טס מערבה.

מצאו את גודל וכיוון מהירויות הדאונים ביחס לקרקע.

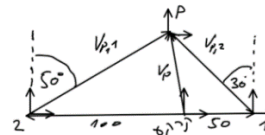
תשובות סופיות:

(1) 30.4 קמ"ש ובזווית 34.7 מעלות צפונית למזרח.

(2) א. $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{V_r}{V_{br}} \right)$ ב. דרומית למזרח.



(3) א. ב. 84.98 קמ"ש ובכיוון 2 מעלות מערבית מהצפון.



$$v_c = \sqrt{(v_A \sin \beta - v_{CB} \sin \alpha)^2 + (v_A \cos \beta + v_{BA} + v_{CB} \cos \alpha)^2} \quad (4)$$

$$\tan \theta_c = \frac{v_A \cos \beta + v_{BA} + v_{CB} \cos \alpha}{v_A \sin \beta - v_{CB} \sin \alpha}$$

(5) דאון 1: 67.7 קמ"ש ובזווית 17.2 מעלות מזרחה מהצפון.

דאון 2: 64.6 קמ"ש צפונה.

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 5 - דינמיקה

תוכן העניינים

- 1. חוקי ניוטון 61
- 2. גלגלות נעות ומכפלי כוח 71
- 3. תרגילים נוספים 72

חוקי ניוטון:

רקע:

כוחות נפוצים:

כוח הכובד:

סימון: W (קיצור של Weight).

מופעל ע"י כדור הארץ.

כיוון: למרכז כדור הארץ (או לכיוון האדמה).

גודל: mg .

נורמל:

סימון: N .

מופעל ע"י משטח.

כיוון: תמיד מאונך למשטח ודוחף (מהמשטח כלפי חוץ).

גודל: לא ידוע, תלוי בבעיה (לא שווה ל- mg).

מתיחות:

מופעל על ידי חוט או חבל.

סימון: T (קיצור של Tension).

כיוון: תמיד מושך את הגוף לכיוון החוט.

הערה, חוט תמיד מושך משני צדדיו.

חוט אידיאלי – חוט חסר מסה שאינו משנה את אורכו (לא אלסטי).

בחוט אידיאלי המתיחות אחידה לאורך החוט.

החיכוך:

חיכוך סטטי - f_s :

פועל כאשר אין תנועה יחסית בין המשטחים.

מופעל ע"י המשטח.

כיוון: משיק למשטח (נגד כיוון השליפה לתנועה).

גודל: $f_s \neq \mu_s N$ (בד"כ נעלם לא ידוע).

μ_s - מקדם חיכוך סטטי (תלוי בחומר וקבוע).

$f_s \leq \mu_s N$ - החיכוך הסטטי תמיד קטן מ- $\mu_s N$.

$f_{s\max} = \mu_s N$.

לשים לב שאפשר להציב $f_{s\max} = \mu_s N$ רק אם ידוע שהמערכת על סף החלקה.

חיכוך קינטי - f_k :

פועל כאשר יש תנועה יחסית בין המשטחים.

מופעל ע"י משטח.

כיוון : משיק למשטח (נגד כיוון התנועה היחסית).

$$\text{גודל : } f_k = \mu_k N$$

μ_k - מקדם החיכוך הקינטי – תלוי בסוגי החומרים. בד"כ קבוע.

N - נורמל שמפעיל אותו משטח.

חוק ראשון של ניוטון – התמדה :

אם גוף נע בקו ישר ובמהירות קבועה (בהתמדה) סכום הכוחות עליו שווה לאפס. מקרה פרטי של תנועה במהירות קבועה הוא מנוחה. לכן, אם גוף נמצא במנוחה סכום הכוחות עליו הוא אפס.

חוק שלישי – עקרון פעולה תגובה :

לכל כוח שגוף A מפעיל על גוף B יש כוח תגובה שגוף B מפעיל חזרה על גוף A. כוח התגובה שווה בגודלו והפוך בכיוונו. שימו לב : הכוחות פועלים על גופים שונים ולכן אף פעם לא יופיעו באותו תרשים כוחות.

חוק שני של ניוטון :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

בפועל רושמים את הנוסחה לכל ציר בנפרד.

חוק הוק – הכוח של קפיץ :

$$F = -k\Delta x$$

$$\Delta x = x - x_0$$

x - מיקום הגוף.

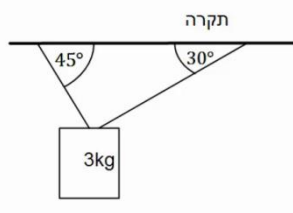
x_0 - מיקום שבו הקפיץ רפוי.

חיבור קפיצים במקביל (שני הקפיצים מחוברים לגוף ולקיר) - $k_{eff} = k_1 + k_2$
חיבור קפיצים בטור (גוף מחובר לקפיץ אחד שמחובר לקפיץ שני שמחובר לקיר) -

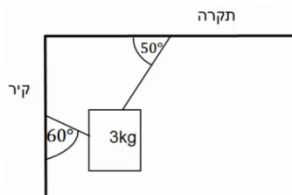


$$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

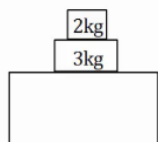
שאלות:



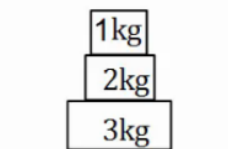
- (1) **דוגמה-גוף תלוי מהתקרה**
גוף תלוי במנוחה מהתקרה באמצעות שני חוטים, לפי האיור הבא.
מהי המתיחות בכל חוט אם מסת הגוף היא 3 ק"ג?



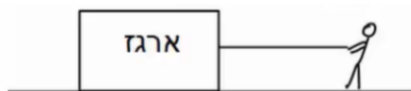
- (2) **דוגמה-גוף תלוי מהתקרה ומהקיר**
גוף תלוי במנוחה מהתקרה באמצעות חוט ומחובר לקיר המאונך לתקרה באמצעות חוט נוסף (הסתכל באיור).
מהי המתיחות בכל חוט אם מסת הגוף היא 3 ק"ג?



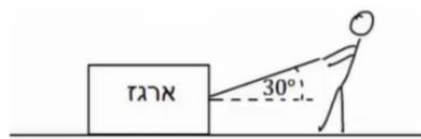
- (3) **דוגמה-מסה על מסה**
במערכת הבאה ישנה מסה של 3 ק"ג הנמצאת במנוחה על שולחן.
על המסה מונחת מסה נוספת של 2 ק"ג.
א. שרטט תרשים כוחות לכל אחת מהמסות.
ב. חשב את הכוח הנורמלי הפועל על המסה העליונה.
ג. חשב את הכוח הנורמלי הפועל על המסה התחתונה.
ד. חשב את הכוח הנורמלי הפועל על השולחן.



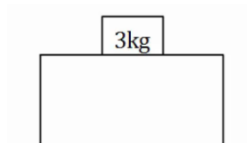
- (4) **דוגמה-מסה על מסה על מסה**
שלוש מסות מונחות אחת על גבי השנייה ועל הקרקע במנוחה, כפי שנראה בציור.
א. מהו גודלו וכיוונו של הכוח שמפעילה המסה הכי תחתונה על המסה מעליה?
ב. מהו גודלו וכיוונו של הכוח שמפעילה הרצפה על המסה הכי תחתונה?



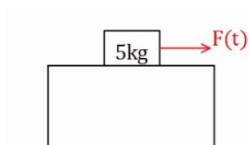
- (5) **דוגמה-דני מושך במקביל לקרקע**
דני מושך ארגז במקביל לקרקע. ידוע כי מסת הארגז היא 20 ק"ג ומקדם החיכוך הקינטי בין הארגז לקרקע הוא: $\mu_k = 0.2$.
מצא מהו גודלו של הכוח שמפעיל דני, אם הארגז נע במהירות קבועה?

(6) ירון מושך ארגז בזווית

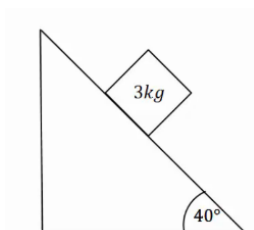
ירון מושך ארגז באמצעות חבל הנמתח בזווית של 30° מעלות ביחס לקרקע. ידוע כי מסת הארגז היא 20 ק"ג , ומקדם החיכוך הקינטי בין הארגז לקרקע הוא: $\mu_k = 0.2$. מצא מהו גודלו של הכוח שמפעיל ירון, אם הארגז נע במהירות קבועה?

(7) גוף על שולחן

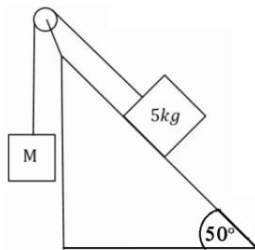
גוף בעל מסה של 3 ק"ג נמצא במנוחה על שולחן. מקדם החיכוך הסטטי הוא: $\mu_s = 0.4$.
 א. מהו הכוח המקסימלי הניתן להפעיל על הגוף, כך שישאר במנוחה?
 ב. מצא את גודלו וכיוונו של החיכוך הסטטי.

(8) כוח תלוי בזמן

גוף בעל מסה של 5 ק"ג נמצא במנוחה על שולחן. כוח אופקי התלוי בזמן $F(t) = 2 \cdot t^2$ פועל על הגוף ימינה. מקדם החיכוך הסטטי הוא: $\mu_s = 0.3$.
 א. מהו הכוח המקסימלי הניתן להפעיל על הגוף, כך שישאר במנוחה?
 ב. מתי יתחיל הגוף בתנועה?
 ג. שרטט גרף של החיכוך הסטטי כתלות בזמן.

(9) מסה בשיפוע

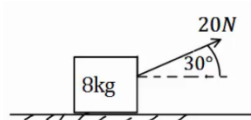
מסה של 3 ק"ג נמצאת במנוחה על מישור משופע בעל זווית של 40° מעלות. בין המסה למדרון קיים חיכוך, ומקדם החיכוך הסטטי הוא: $\mu_s = 0.9$.
 א. שרטט תרשים כוחות לבעיה.
 ב. מצא את גודלם של הכוח הנורמלי והחיכוך.

**10) מסה בשיפוע ומסה באוויר**

מסה של 5 ק"ג מונחת על מישור משופע בעל זווית של 50 מעלות. המסה מחוברת באמצעות חוט אידיאלי ודרך גלגלת אידיאלית למסה נוספת M התלויה באוויר מצידו השני של המישור.

א. מצא את גודלה של המסה M, על מנת שהמערכת תשאר במנוחה כאשר אין חיכוך בבעיה. כעת נתון שבין המסה למדרון קיים חיכוך, ומקדם החיכוך הסטטי הוא: $\mu_s = 0.3$.

ב. מצא מה הוא גודלה המקסימלי והמינימלי האפשרי של M, על מנת שהמערכת תשאר במנוחה.

11) דוגמה-כוח בזווית 30 מעלות

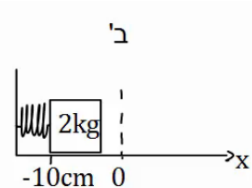
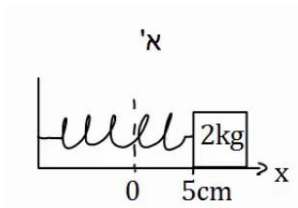
כוח של 20 ניוטון פועל בזווית של 30 מעלות מעל האופק. הכוח מופעל על ארגז בעל מסה של 8 ק"ג. הארגז נמצא במנוחה ונתון כי בין הארגז לרצפה קיים חיכוך. מקדמי החיכוך הסטטי והקינטי הם: $\mu_s = 0.2$, $\mu_k = 0.1$.

א. בדוק האם הארגז נשאר במנוחה או מתחיל נוע?
ב. כמה זמן ייקח להזיז את הארגז למרחק של 30 מטרים באמצעות כוח זה?
ג. חזור על הסעיפים אם הכוח היה בזווית של 70 מעלות.

12) דוגמה-מרחק עצירה

דני נוסע במכוניתו במהירות של 54 קמ"ש, ולפתע הוא מבחין כי רמזור הנמצא 50 מטרים לפניו הופך לאדום. דני לוחץ על הבלמים ומתחיל בעצירה. מקדם החיכוך הקינטי בין הגלגלים לרצפה הוא: $\mu_k = 0.3$.

הנח שהגלגלים ננעלים ואין למכונית מערכת ABS.
א. האם דני יספיק לעצור לפני הרמזור?
ב. בדוק שוב האם דני יספיק לעצור, אך הפעם הוסף זמן תגובה של שנייה אחת (הזמן מהרגע שבו דני מבחין באור עד אשר הוא לוחץ על הבלמים).

(13) דוגמה 1-קפיץ

גוף בעל מסה של 2 ק"ג מחובר לקפיץ בעל קבוע

קפיץ $k = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. בין הגוף למשטח אין חיכוך.

א. מושכים את הגוף למרחק 5 ס"מ מהנקודה בה

הקפיץ רפוי ומשחררים אותו.

מהי תאוצת הגוף (גודל וכיוון)?

ב. דוחפים את הגוף למרחק 10 ס"מ מהנקודה בה

הקפיץ רפוי ומשחררים אותו.

מהי תאוצת הגוף (גודל וכיוון)?

כעת נתון כי בין הגוף למשטח קיים חיכוך, ומקדם

החיכוך הסטטי הוא: $\mu_s = 0.2$.

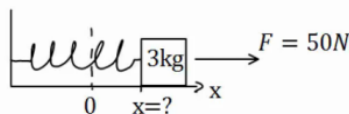
ג. מהו המרחק המקסימלי בו ניתן להניח את הגוף קשור

לקפיץ כך שיישאר במנוחה?

(14) דוגמה 2-קפיץ

גוף בעל מסה של 3 ק"ג מחובר לקפיץ בעל קבוע

קפיץ $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. בין הגוף למשטח אין חיכוך.



על הגוף פועל כוח ימינה שגודלו 50 ניוטון.

קבע את ראשית הצירים בנקודת הרפיון של הקפיץ.

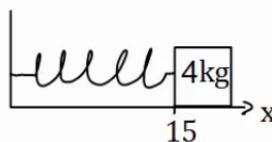
היכן נמצאת נקודת שיווי המשקל (הנקודה בה סכום

הכוחות שווה לאפס)?

(15) דוגמה 3-קפיץ

גוף בעל מסה של 4 ק"ג מחובר לקיר באמצעות קפיץ

בעל קבוע קפיץ $k = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. בין הגוף למשטח אין חיכוך.



אורכו הרפוי של הקפיץ הוא 10 ס"מ.

א. חשב את הכוח שמפעיל הקפיץ על הגוף כאשר

הגוף במרחק 15 ס"מ מהקיר.

ב. חשב את הכוח שמפעיל הקפיץ על הגוף כאשר

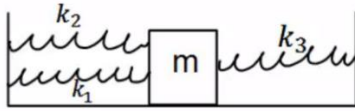
הגוף במרחק 6 ס"מ מהקיר.

ג. חשב את תאוצת הגוף בכל נקודה אם על הגוף

פועל כוח שגודלו 10 ניוטון שמאלה.

(16) מסה עם שלושה קפיצים

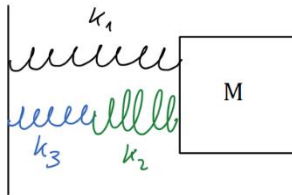
שלושה קפיצים מחוברים למסה $m = 2\text{kg}$, כפי שנראה באיור.
אין חיכוך בין המסה לרצפה.



נתון כי: $k_1 = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $k_2 = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $k_3 = 12 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

הנח כי כל הקפיצים רפויים באותה הנקודה.

מהי תאוצת המסה כאשר היא נמצאת במרחק 20 ס"מ מנקודת שיווי המשקל?

(17) שלושה קפיצים שוב

באיור הבא, המסה $m = 4\text{kg}$ מחוברת לשלושה קפיצים בעלי קבועי קפיץ שונים. הנח שכל הקפיצים רפויים כאשר המסה נמצאת ב- $x = 0$.

מהי תאוצת המסה, כאשר מיקומה הוא: $x = 0.2\text{m}$,

אם קבועי הקפיצים הם: $k_1 = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $k_2 = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $k_3 = 12 \frac{\text{N}}{\text{m}}$?

(18) כוח אופקי תלוי בזמן

כוח אופקי שגודלו $F = 2t$ פועל על גוף, כאשר הזמן t נתון בשניות והכוח F בניוטונים. מסת הגוף 2kg והוא נמצא במנוחה על משטח אופקי.

מקדמי החיכוך בין הגוף למשטח: $\mu_k = 0.15$, $\mu_s = 0.2$. מצא את:

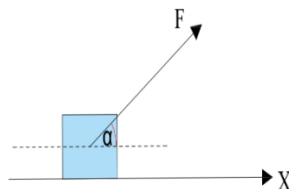
א. זמן תחילת התנועה.

ב. כוח החיכוך בזמן $t = 0.5\text{sec}$.

ג. תאוצת הגוף כפונקציה של זמן.

ד. מהירות הגוף לאחר 4 שניות.

ה. מיקום הגוף לאחר 4 שניות.

(19) כוח בזווית תלוי בזמן

הגוף שבציור מונח על הרצפה, בזמן $t = 0$ מתחיל לפעול על הגוף כוח שגודלו $F = 2t$ הזמן בשניות והכוח בניוטונים.

הכוח פועל בזווית $\alpha = 37^\circ$ יחסית לציר התנועה.

מסת הגוף היא 2kg .

נתון כי מקדם החיכוך הסטטי והקינטי בין הגוף והרצפה הוא: $\mu = 0.2$.

לפשטות החישוב קחו: $\sin \alpha = 0.6$, $\cos \alpha = 0.8$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

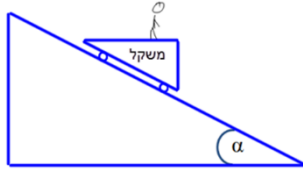
א. מתי יתחיל הגוף לנוע?

ב. מהי מהירות הגוף לאחר 4 שניות?

ג. מה המרחק שהתקדם הגוף עד לניתוקו מהקרקע?

(20) אדם על קרונית על מישור משופע*

אדם בעל מסה m עומד על משקל המחובר בצורה אופקית לקרונית. מסת הקרונית היא M ונתון כי היא מחליקה ללא חיכוך על פני מישור משופע בזווית α .



א. מה מורים המאזניים?

הניחו שהחיכוך בין רגלי האדם לקרונית מספיק גדול, כך שאינו נע ביחס אליה.

ב. מצא את מקדם החיכוך המינימלי בין רגלי האדם והקרונית על מנת שהאדם לא יחליק ביחס לקרונית.

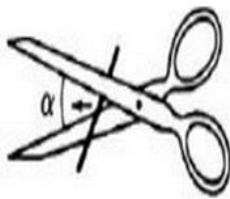
ג. כעת הנח כי אין חיכוך בכלל בין האדם לקרונית.

מה תהיה תאוצת הקרונית במצב זה? (כל עוד האדם נמצא על הקרונית).

ד. מה יורה המשקל במצב המתואר בסעיף ג'?

(21) מספריים חותכות חוט**

אדם מנסה לחתוך חוט מתכת בעזרת מספריים. החוט חופשי לנוע והוא מחליק על המספריים עד שזווית המפתח של המספריים היא α , בזווית זו המספריים מתחילות לחתוך את החוט.



א. צייר את הכוחות שפועלים על החוט.

ב. מצא את מקדם החיכוך בין המספריים לחוט.

ג. הראה שהזווית α אינה תלויה בכוח הכובד כאשר המספריים במצב אופקי.

ד. כעת, מסובבים את המספריים בזווית β סביב ציר העובר בבורג המספריים. כיוון הסיבוב הוא נגד השעון, כך שהחוט עולה כלפי מעלה.

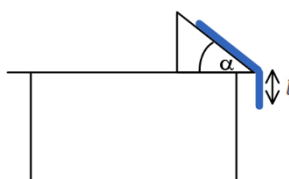
הראה כעת שהשינוי בזווית α הוא לפי: $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$ כאשר μ_0 הוא

$$\Delta\mu = -\frac{mg \sin \beta}{F \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{ו-} F$$

האם המספריים יחתכו יותר מוקדם או יותר מאוחר?

(22) חבל מחליק משולחן משופע**

חבל בעל מסה M ואורך L נמצא על מישור משופע בזווית α שנמצא על שולחן כך שחלק משתלשל מהשולחן מטה. בין החבל לשולחן יש מקדם חיכוך קינטי וסטטי μ . בזמן $t=0$ יש חבל באורך l המשתלשל מקצה השולחן, ונמצא במנוחה.



מהו הגובה של קצה החבל $y(t)$ מתחת לשולחן

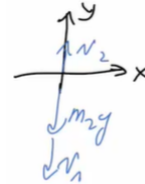
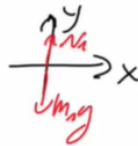
כתלות בזמן? הניחו כי החבל בעל עובי אפס ויש חיכוך רק עם החלק העליון של המישור.

תשובות סופיות:

(1) $T_1 \approx 22.0\text{N}$, $T_2 \approx 26.9\text{N}$

(2) $T_1 \approx 19.5\text{N}$, $T_2 \approx 26.3\text{N}$

(3) א. מסה 3 ק"ג: מסה 2 ק"ג:



ד. 50N

ג. 20N

ב. 20N

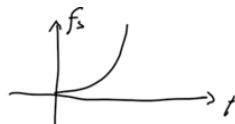
(4) א. 30N למעלה ב. 60N למעלה

(5) 40N

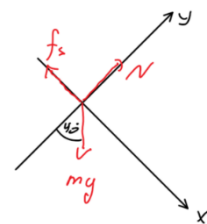
(6) $T \approx 41.3\text{N}$

(7) א. 12N ב. 10N

(8) א. 20N ב. $\sqrt{10}\text{ sec}$ ג.



(9) א. ב. $f_s \approx 19.3\text{N}$, $N \approx 23.0\text{N}$



(10) א. $M = 3.83\text{kg}$ ב. $M_{\min} = 2.87\text{kg}$, $M_{\max} = 4.79\text{kg}$

(11) א. הגוף לא יכול להיות במנוחה. ב. $t \approx 6.82\text{sec}$ ג. סעיף א': נשאר במנוחה, סעיף ב': אין משמעות.

(12) א. כן, כי $\Delta x \approx 37.5\text{m} < 50\text{m}$ ב. לא, כי $\Delta x = 52.5\text{m} > 50\text{m}$

(13) א. גודל: $-1.25 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$, הכיוון חיובי. ב. גודל: $a = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$, הכיוון חיובי.

ג. $x = 8\text{cm}$

(14) $x = \frac{1}{2}\text{m}$

(15) א. $F = -2.5\text{N}$ ב. $F = 2\text{N}$ ג. סעיף א': $a = -3.13 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

סעיף ב': $a = -2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

(16) $a = -2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

$$a \approx 0.326 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad (17)$$

$$a = \begin{cases} 0 & 0 < t < 2 \\ t - \frac{3}{2} & 2 < t \end{cases} \quad \text{ג.} \quad f_s = 1\text{N} \quad \text{ב.} \quad t = 2\text{sec} \quad \text{א.} \quad (18)$$

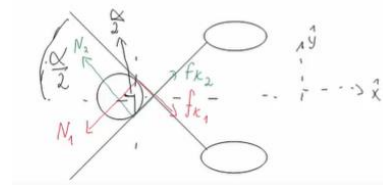
$$x(t=4) = 2.3\text{m} \quad \text{ה.} \quad v(t=4) = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ד.}$$

$$x = 467\text{m} \quad \text{ג.} \quad v(t=4) = 1.53 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.} \quad t \approx 2.17\text{sec} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$a_x = \frac{(M+m)g \sin \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \quad \text{ג.} \quad \mu_{s \min} = \tan \alpha \quad \text{ב.} \quad N_2 = mg \cos^2 \alpha \quad \text{א.} \quad (20)$$

$$N_2 = m \left(g - \left(\frac{(M+m)g \sin \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \right) \sin \alpha \right) \quad \text{ד.}$$

$$\mu_k = \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{ב.} \quad \text{ג. הוכחה.}$$



(21) א.

ד. הוכחה. החוט יחתך יותר מאוחר.

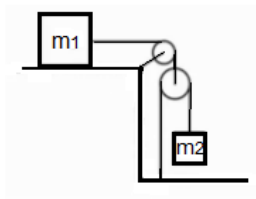
$$y(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\beta}{k} \right) \left(e^{\sqrt{\frac{k}{M}} t} + e^{-\sqrt{\frac{k}{M}} t} \right) - \frac{\beta}{k} \quad (22)$$

גלגלות נעות ומכפלי כוח:

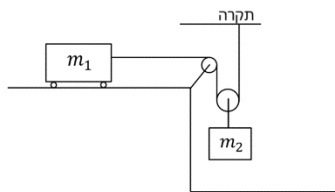
רקע:

נבטא את אורך החוט באמצעות מיקום הגופים וקבועים ונגזור.

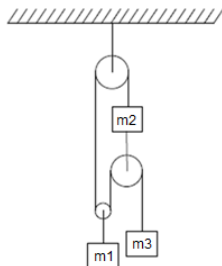
שאלות:



- (1) **גלגלות וגזירה בזמן של אורך החוט**
 במערכת הבאה מסות הגופים ידועות.
 אין חיכוך בין המסות למשטח.
 מצא את תאוצות הגופים ואת המתיחויות בחוטים.



- (2) **אחת תלויה מהתקרה ואחת על שולחן**
 במערכת הבאה המסה m_1 נמצאת על שולחן חסר חיכוך
 ומחוברת באמצעות חוט אידיאלי כפי שמתואר באיור.
 הגלגלות אידיאליות ו- m_2 נתונה.
 מצא את התאוצה של כל מסה כל עוד הן לא נופלות
 מהשולחן או פוגעות ברצפה.



- (3) **מערכת גלגלות מסובכת**
 מצאו את תאוצת הגופים במערכת הבאה.
 מה התנאי לכך שהמסה m_3 תנוע כלפי מעלה
 אם נתון שהמערכת מתחילה ממנוחה?

תשובות סופיות:

$$a_1 = \frac{2m_2g}{4m_2 + m_1} \quad (1)$$

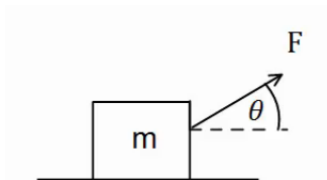
$$a_1 = \frac{m_2g}{2m_1 + \frac{m_2}{2}}, \quad a_2 = \frac{m_2g}{4m_1 + m_2} \quad (2)$$

$$a_3 < 0, \quad a_3 = \left((m_2 + m_3)(4m_2 + m_1) + 4m_2^2 \right) \quad (3)$$

תרגילים נוספים:

שאלות:

(1) זווית אופטימלית למשיכה



כוח F מושך ארגז בעל מסה m בזווית θ מעל האופק. מקדם החיכוך בין הארגז לקרקע הוא μ_k .

א. מצא את תאוצת הכוח כתלות בפרמטרים הרשומים בשאלה.

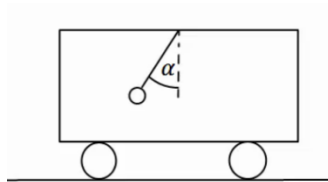
ב. הנח כי מקדם החיכוך הקינטי הוא 0.3.

בדוק באילו מהערכים הבאים של הזווית יש את

התאוצה הגבוהה ביותר: $\theta = -10^\circ, 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ$.

ג. מצא את הזווית המדויקת בה התאוצה תהיה מקסימלית. השתמש בנגזרת.

(2) מטוטלת במכונית



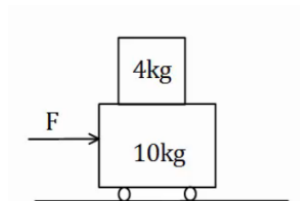
מטוטלת קשורה לתקרת מכונית.

המטוטלת נמצאת בזווית קבועה ונתונה α , ביחס לאנך מתקרת המכונית.

א. מצא מהי תאוצת המכונית (גודל וכיוון)?

ב. האם ניתן לדעת מה כיוון תנועת המכונית?

(3) מסה של 4 על עגלה של 10



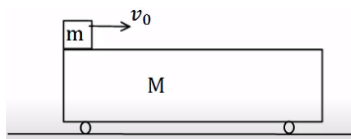
מסה של 4 ק"ג מונחת מעל עגלה בעלת מסה של 10 ק"ג. החיכוך בין העגלה למשטח זניח.

מקדם החיכוך הסטטי בין המסה לעגלה הוא $\mu_s = 0.2$.

כוח אופקי F מופעל על המסה התחתונה ימינה.

מהו הכוח המקסימלי הניתן להפעיל כך שהמסה

העליונה לא תחליק על העגלה.

(4) מסה מחליקה על עגלה

מסה m מונחת על עגלה בעלת מסה M , הנמצאת במנוחה.

המסה מונחת בקצה השמאלי של העגלה.

נותנים למסה העליונה (בלבד) מהירות התחלתית v_0 .

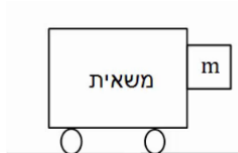
בין המסה לגג העגלה קיים חיכוך, והחיכוך בין העגלה למשטח זניח.

נתון: $\mu_k = 0.2$, $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $M = 12\text{kg}$, $m = 3\text{kg}$.

א. מצא את הביטוי למיקום ולמהירות המסה, כתלות בזמן.

ב. מצא את הביטוי למיקום ולמהירות העגלה, כתלות בזמן.

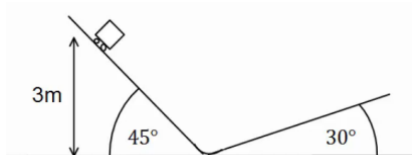
ג. מהי המהירות הסופית של שני הגופים, בהנחה שהמסה לא נופלת מהעגלה.

(5) מסה צמודה למשאית

מסה m מונחת בצמוד לחלקה הקדמי של משאית.

בין המסה למשטח קיים חיכוך. נתון: μ_s , m .

מהי התאוצה המינימלית הדרושה למשאית על מנת שהמסה לא תיפול?

(6) קופסה בין מדרונות

קופסה קטנה עם גלגלים מונחת על מישור משופע בעל זווית של 45° מעלות.

הקופסה משוחררת ממנוחה מגובה של 3 מטרים ומתחילה בתנועה.

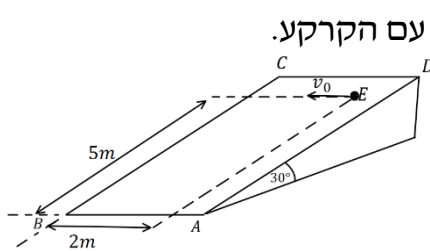
בתחתית המדרון הקופסה עוברת למדרון משופע אחר בעל זווית של 30° מעלות.

הזנח אפקטים המתרחשים בעת המעבר והנח כי גודל מהירות הקופסה במעבר בין המדרונות נשאר זהה.

א. מהו הגובה המקסימלי אליו תגיע הקופסה במדרון השני? נחש מה יקרה לאחר מכן.

ב. חזור על סעיף א' אם נהג הקופסה שכח לשחרר את מעצור היד של הגלגלים וקיים חיכוך קינטי בין הקופסה למשטח.

מקדם החיכוך הוא: $\mu_k = 0.2$.

(7) זריקה אופקית על מישור משופע

מישור משופע חלק ABCD יוצר זווית של 30° מעלות עם הקרקע.

הנקודה E נמצאת במרחק 5m מהצלע AB

ובמרחק 2m מהצלע BC.

מן הנקודה E נזרק כדור קטן על הלוח,

במהירות התחלתית v_0 שכיוונה מקביל לצלע AB.

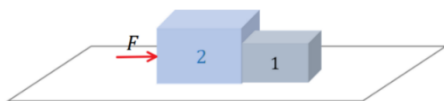
א. צייר מערכת צירים, ורשום את הכוחות הפועלים

על הכדור בעת תנועתו על הלוח בכל ציר.

ב. מהי צורת המסלול של הכדור על הלוח?

ג. מצא את v_0 , עבורה הכדור יגיע בדיוק לנקודה B.

ד. מהי מהירות הכדור בנקודה B עבור ה- v_0 שמצאת בסעיף ג'?

(8) כוח דוחף שתי קופסאות צמודות

שתי תיבות נמצאות צמודות זו לזו על משטח

אופקי חסר חיכוך.

מסות התיבות הן: $m_1 = 3\text{ kg}$ ו- $m_2 = 5\text{ kg}$.

כוח אופקי דוחף את תיבה 2 שדוחפת את תיבה 1, כפי שמתואר בתרשים.

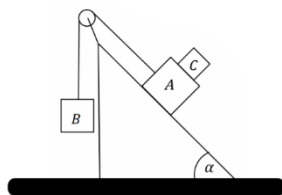
גודל הכוח הוא $F = 16\text{ N}$.

חשב את:

א. התאוצה של כל תיבה.

ב. הכוח הנורמלי $N_{1 \rightarrow 2}$, שבו התיבה הראשונה דוחפת את השנייה.

ג. הכוח הנורמלי $N_{2 \rightarrow 1}$, שבו התיבה השנייה דוחפת את הראשונה.

(9) גוף על גוף במישור משופע

גוף A בעל מסה m_A , גוף B בעל מסה m_B מחוברים

באמצעות חוט וגלגלת, כמתואר באיור.

גוף A מונח על מישור משופע חלק בעל זווית α .

גוף C בעל מסה m_C מונח על גוף A.

מקדם החיכוך הסטטי בין הגופים A ל-C הוא μ_s .

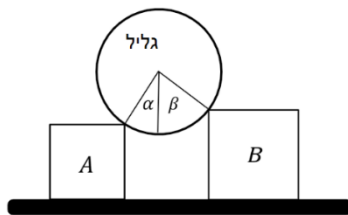
א. מהי המסה המרבית של גוף B, כך שהגופים A ו-C ינועו יחדיו במעלה המישור?

ב. מהי תאוצת הגופים והמתיחות בחוט, אם המסה של גוף B היא זאת

שמצאת בסעיף א' (או טיפה קטנה ממנה)?

ג. מהן תאוצות הגופים אם המסה של גוף B גדולה מזו שמצאת בסעיף א'

ומקדם החיכוך הקינטי הוא μ_k ?

10) גליל על שני ארגזים

גליל אחיד, שמסתו m מונח על שני ארגזים

שמסותיהם: $m_A = m$, $m_B = 2m$.

לארגזים גבהים שונים והם מונחים על משטח אופקי. בין הגליל לארגזים אין חיכוך.

כשהמערכת נמצאת בשיווי משקל יוצרים הרדיוסים

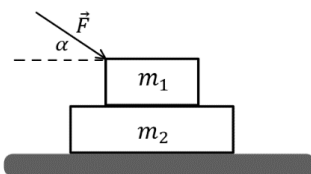
של הגליל, הנוגעים בפינות הארגזים זוויות של: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$

עם האנך לקרקע, ראה איור. נתונים: m , g .

א. מה הכוח שמפעיל כל ארגז על הגליל?

ב. בהנחה שקיים אותו מקדם חיכוך בין הארגזים והמשטח,

מהו גודלו המינימלי של מקדם החיכוך, כך שהמערכת תישאר בשיווי משקל?

11) כוח דוחף גוף על גוף

שני גופים זהים שמסותיהם: $m_1 = m_2 = m$ מונחים

זה על גבי זה, על גבי שולחן אופקי חלק (ראה איור).

בין הגופים קיים חיכוך, ומקדמי החיכוך הקינטי

והסטטי הם: μ_s , μ_k .

כוח חיצוני $\vec{F}$ מופעל על הגוף העליון בזווית α מתחת לאופק.

הביעו את תשובתכם באמצעות הפרמטרים: F , α , m , g , μ_s , μ_k .

א. בהנחה שהגופים נעים יחדיו, מהי התאוצה המשותפת?

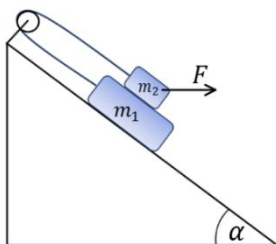
ב. בהנחה שהגופים נעים יחדיו, מהו גודלו של כוח החיכוך בין הגופים?

ג. מהו גודלו המקסימלי של $\vec{F}$, כך שהגופים ינועו יחדיו?

ד. נתון כי: $\alpha = 30^\circ$, $\mu_k = 0.15$, $\mu_s = 0.2$.

מצא את תאוצת כל גוף, כאשר הכוח הדוחף הוא: $F = \frac{1}{2}mg$.

ה. חזור על סעיף ד' כאשר $F = 3mg$.

12) מסה על מסה מחוברות בגלגלת

נתונה מערכת הכוללת שני גופים: $m_1 = 4\text{kg}$, $m_2 = 3\text{kg}$

הגופים קשורים על ידי חוט וגלגלת אידיאלית,

ומונחים על מישור משופע בעל זווית $\alpha = 30^\circ$.

מקדמי החיכוך בין הגופים הם: $\mu_k = \mu_s = 0.4$,

ומקדמי החיכוך עם המישור הם: $\mu_k = \mu_s = 0.3$.

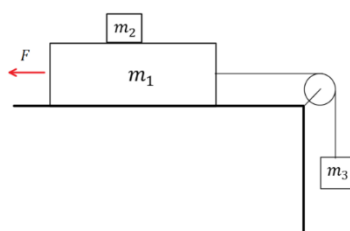
כוח אופקי F פועל על m_2 .

א. מהו ה- F המקסימלי, כך שהגופים יישארו במנוחה?

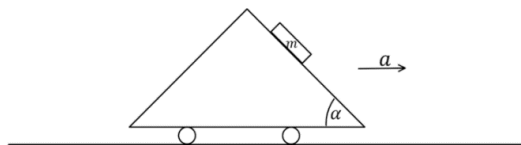
ב. אם $F = 40\text{N}$, מהי תאוצת הגופים?

(13) זמן לעלות ולרדת מדרון עם חיכוך

- גוף נזרק במעלה מדרון משופע במהירות התחלתית v_0 .
 זווית השיפוע של המדרון היא θ ומקדם החיכוך בין המדרון לגוף הוא μ_k .
 א. מצאו כמה זמן ייקח לגוף לחזור לנקודת ההתחלה
 (בהנחה שהוא לא נשאר במנוחה בשיא הגובה)?
 ב. מה היחס בין המהירות הסופית והמהירות ההתחלתית של הגוף?

(14) גוף על גוף וכוח מושך

- במערכת שבאיור המסות נתונות.
 נתונים גם מקדמי החיכוך בין m_1 למשטח μ_{k1}, μ_{s1}
 ומקדמי החיכוך בין m_1 ל- m_2 μ_{k2}, μ_{s2} .
 הכוח F באיור מתייחס רק לסעיף ב.
 א. מהן תאוצות הגופים והמתיחות בחוט
 בהנחה ש- m_2 נעה בתאוצה יחסית ל- m_1 ?
 ב. מהו הכוח המינימאלי F שיש להפעיל בכדי שהמסות ינועו יחדיו?

(15) תיבה על מכונית משולשת

- מכונית עם זווית בסיס α נוסעת בתאוצה קבועה.
 מניחים תיבה בעלת מסה m על דופן המכונית.
 א. מצאו את גודלו של כוח החיכוך
 בין המכונית לתיבה אם ידוע
 שתאוצת המכונית היא a ימינה
 והתיבה לא מחליקה על הדופן.
 ב. מהו μ_s המינימלי המאפשר מצב זה?

(16) כדור בתא מטען משופע

- למשאית באיור תא מטען משופע בזווית α
 ובסופו דופן אנכית.
 בתוך תא המטען יש כדור בעל מסה M .
 המשאית נוסעת בתאוצה קבועה a שמאלה.
 מצאו את הכוחות הנורמלים שפועלים על הכדור בהנחה שאין חיכוך.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad a = \frac{F}{m} (\cos \theta + \mu_k \sin \theta) - \theta_k g \quad \text{א.} \quad \theta = 20^\circ \quad \text{ב.} \quad \theta_0 \approx 16.6992^\circ \quad \text{ג.}$$

$$(2) \quad \text{א. גודל: } a_x = g \tan \alpha, \text{ כיוון: חיובי} \quad \text{ב. לא}$$

$$(3) \quad F = \mu_s (m_1 + m_2) g = 28 \text{ N}$$

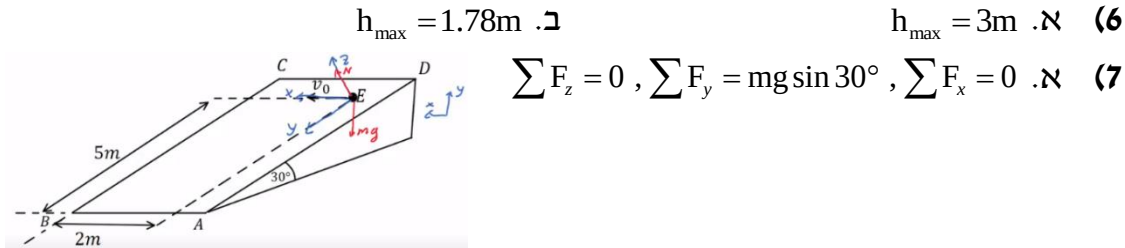
$$(4) \quad \text{א. מיקום-זמן: } x_1(t) = 0 - 20t - \frac{2}{2}t^2, \text{ מהירות-זמן: } v_1(t) = 20 - 2t$$

$$\text{ב. מיקום-זמן: } x_2(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}t^2, \text{ מהירות-זמן: } v_2(t) = 0 + \frac{1}{2}t$$

$$\text{ג. } v_2(t=8) = 4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$(5) \quad a_{\min} = \frac{g}{\mu_s}$$

$$(6) \quad h_{\max} = 3 \text{ m} \quad \text{א.} \quad h_{\max} = 1.78 \text{ m} \quad \text{ב.}$$



$$(7) \quad \sum F_z = 0, \sum F_y = mg \sin 30^\circ, \sum F_x = 0 \quad \text{א.}$$

$$\text{ב. פרבולה כמו בזריקה אופקית.} \quad v_0 = \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.}$$

$$\text{ד. } v_{x(t_B)} = \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \quad v_{y(t_B)} = 7.07 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$(8) \quad a_1 = a_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{א.} \quad N_{1 \rightarrow 2} = 6 \text{ N} \quad \text{ב.} \quad N_{2 \rightarrow 1} = 6 \text{ N} \quad \text{ג.}$$

$$(9) \quad m_{B_{\max}} = \frac{(m_A + m_C) \mu_s \cos \alpha}{1 + \sin \alpha - \mu_s \cos \alpha} \quad \text{א.}$$

$$\text{ב. } a = g[\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha], \quad T = g(m_A + m_C) \mu_s \cos \alpha$$

$$\text{ג. } a_c = (\mu_k \cos \alpha - \sin \alpha) g, \quad a_A = a_B = \frac{g(m_B - \mu_k m_C \cos \alpha - m_A \sin \alpha)}{m_A + m_B}$$

$$(10) \quad N_A = 0.732 \text{ mg}, \quad N_B = 0.518 \text{ mg} \quad \text{א.} \quad \mu_{s_{\min}} = 0.464 \quad \text{ב.}$$

$$(11) \quad a = \frac{F \cos \alpha}{2m} \quad \text{א.} \quad f_s = \frac{F \cos \alpha}{2} \quad \text{ב.}$$

$$\text{ג. } F_{\max} = \frac{2\mu_s mg}{\cos \alpha - 2\mu_s \sin \alpha} \quad \text{ד. } a = 2.17 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$\text{ה. } a_1 = 22.2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \quad a_2 = 3.75 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$a = 1.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב.} \quad F_{\max} = 31.05 \text{ N} \quad \text{א. (12)}$$

$$t = \frac{v_0}{g(\sin \theta + \mu_1 \cos \theta)} + \frac{v_0}{g \sqrt{(\sin^2 \theta - \mu_k^2 \cos^2 \theta)}} \quad \text{א. (13)}$$

$$\frac{v_f}{v_0} = \sqrt{\frac{\sin \theta - \mu_k \cos \theta}{\sin \theta + \mu_k \cos \theta}} \quad \text{ב.}$$

$$a_1 = a_3 = \frac{m_3 g - \mu_{k_2} m_2 g - \mu_{k_1} (m_1 + m_2) g}{m_1 + m_3}, \quad a_2 = \mu_{k_2} g \quad \text{א. (14)}$$

$$F_{\min} = m_3 g - \mu_{s_2} g (m_3 + m_2) - \mu_{s_1} (m_1 + m_2) g \quad \text{ב.}$$

$$\mu_{s_{\min}} = \frac{g \sin \alpha - a \cos \alpha}{g \cos \alpha + a \sin \alpha} \quad \text{ב.} \quad f_s = mg \sin \alpha - ma \cos \alpha \quad \text{א. (15)}$$

$$N_1 = \frac{Mg}{\cos \alpha}, \quad N_2 = M(a + g \tan \alpha) \quad \text{(16)}$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 6 - תנועה מעגלית - חלק ראשון

תוכן העניינים

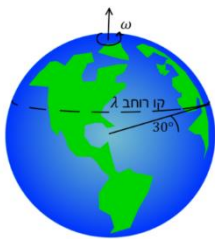
79	1. תיאוריה ודוגמאות.....
(ללא ספר)	2. תאוצה זוויתית.....
83	3. תרגילים נוספים.....

תיאוריה ודוגמאות:

שאלות:



- (1) חישוב מהירות זוויתית של מחוגי שעות
 חשב את המהירות הזוויתית של מחוג השניות,
 מחוג הדקות ומחוג השעות בשעות מחוגים.



- (2) חישוב מהירות זוויתית של כדור הארץ
 א. חשב את המהירות הזוויתית של סיבוב כדור הארץ
 סביב עצמו.
 ב. מהי המהירות הקווית של אדם הנמצא בקו המשווה,
 אם רדיוס כדור הארץ הוא בערך 6,400 ק"מ?
 ג. מהי המהירות הקווית של אדם הנמצא בקו רוחב $\lambda = 30^\circ$?

(3) אבן קשורה לחוט

אבן קשורה לחוט באורך $l = 1.5\text{m}$ ומסתובבת במעגל אופקי עם מהירות

זוויתית של $\omega = 3 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. התעלם מכוח הכובד. $m = 2\text{kg}$.

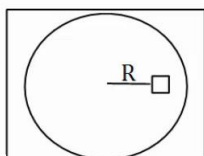
א. מהי המהירות הקווית של האבן?

ב. מהי המתיחות בחוט?

(4) מסה על דיסק



מבט על



מסה M מונחת על דיסק החופשי להסתובב מעל שולחן אופקי.
 המסה נמצאת במרחק R ממרכז הדיסק, ובין המסה למשטח
 יש חיכוך. מסובבים את הדיסק במהירות זוויתית ω
 ונתון כי המסה אינה זזה ביחס לדיסק.

א. האם החיכוך בין הדיסק למסה קינטי או סטטי?

ב. מהו גודלו וכיוונו של כוח החיכוך?

ג. מהי המהירות הזוויתית המקסימלית שבה ניתן לסובב
 את הדיסק ככה שהמסה לא תחליק?

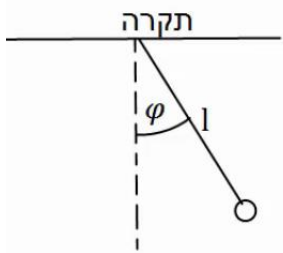
נתון μ_s .

(5) גוף מסתובב במהירות קבועה

גוף מסתובב במעגל בעל רדיוס $R = 3\text{m}$ במהירות קבועה $v = 6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

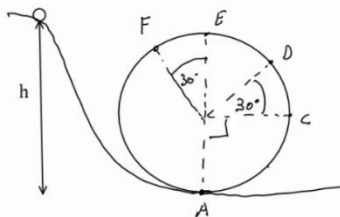
- מהי המהירות הזוויתית של הגוף?
- מהי התדירות וזמן המחזור של הגוף?
- כמה זמן לקח לגוף לעשות שניים וחצי סיבובים?

(6) מטוטלת אופקית



מטוטלת באורך $l = 2\text{m}$ תלויה מהתקרה ומסתובבת במעגל אופקי. זווית החוט עם האנך לתקרה היא $\varphi = 30^\circ$ והיא קבועה במהלך התנועה. מצא את זמן המחזור ותדירות הסיבוב של המטוטלת, אם ידוע שהתנועה קצובה.

(7) כדור בלופ

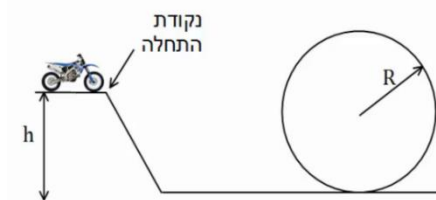


כדור קטן מאוד מתחיל להתגלגל ממנוחה מגובה $h = 6\text{m}$ ונכנס לתוך מעגל אנכי. נתון שהכדור משלים סיבוב ואין חיכוך בינו לבין הרצפה. רדיוס המעגל הוא $R = 2\text{m}$.

- מצא את מהירות הכדור בכל הנקודות באיור. (רמז: שימור אנרגיה).

- מצא את התאוצה הרדיאלית של הכדור באותן נקודות.
- מצא את התאוצה בכיוון המשיק באותן נקודות.
- מצא את גודל התאוצה הכוללת באותן נקודות.

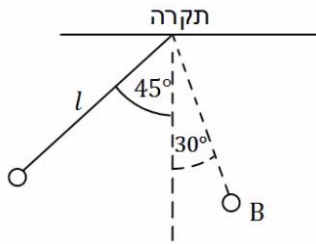
(8) רוכב אופנוע במעגל אנכי



רוכב אופנוע מתחיל תנועתו מנקודת ההתחלה שבציר. מהי המהירות ההתחלתית המינימלית הנדרשת עבור הרוכב, כך שיוכל להשלים את הסיבוב האנכי?

הנח שהרוכב אינו משתמש במנוע לאחר נקודת ההתחלה. נתון: h, R .

(9) כוחות במטוטלת



מטוטלת משוחררת ממנוחה מזווית של 45° מעלות.

אורך החוט הוא l והמסה היא m .

א. מהי מהירות המסה בתחתית המסלול?

ב. מהי המתיחות בחוט ברגע זה?

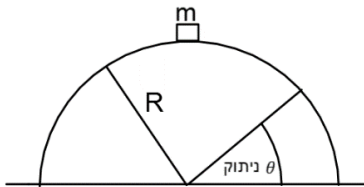
ג. מהי מהירות המסה בנקודה B הנמצאת

בזווית 30° מעלות?

ומהי המתיחות בחוט באותה נקודה?

ד. מהי המתיחות בחוט בשיא הגובה וברגע השחרור?

(10) קופסה מחליקה על גבעה מעגלית



קופסה במסה m מונחת על ראש גבעה בצורת

חצי מעגל ברדיוס R .

הקופסה מתחילה להחליק לאחד הצדדים

ממנוחה כאשר אין חיכוך בינה לבין הגבעה.

מצא באיזה זווית הקופסה תתנתק מהגבעה.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{מחוג שניות: } 0.105 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, \text{ מחוג דקות: } 1.75 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, \text{ מחוג שעות: } 7.27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$(2) \quad \text{א. } 7.27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad \text{ב. } 465 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג. } 400 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$(3) \quad \text{א. } |\vec{v}| = \omega R = 4.5 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב. } T \approx 27 \text{ N}$$

$$(4) \quad \text{א. סטטי.} \quad \text{ב. } f_s = M\omega^2 R \quad \text{ג. } \omega_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_s g}{R}}$$

$$(5) \quad \text{א. } \omega = 2 \cdot \frac{1}{\text{sec}} \quad \text{ב. תדירות: } f \approx 0.32 \cdot \frac{1}{\text{sec}} \quad \text{זמן מחזור: } T = \pi \text{ sec} \quad \text{ג. } t \approx 7.85 \text{ sec}$$

$$(6) \quad \text{תדירות: } f \approx 0.382 \frac{1}{\text{sec}} \quad \text{זמן מחזור: } T = 2.61 \text{ sec}$$

$$(7) \quad \text{א. } v_A \approx 10.95 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, v_C \approx 8.94 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, v_D \approx 7.975 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, v_E \approx 6.32 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, v_F \approx 6.73 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$\text{ב. } a_{r_A} = 60 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, a_{r_B} = 40 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, a_r = \frac{v^2}{R} \text{ לפי הנוסחה וכו',}$$

$$\text{ג. } a_{\theta_A} = 0, a_{\theta_C} = -g, a_{\theta_D} = -10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, a_{\theta_E} = 0, a_{\theta_F} = 5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$\text{ד. } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

$$(8) \quad v_{\min} = \sqrt{gR}$$

$$(9) \quad v = \sqrt{0.58gl} \quad \text{א.} \quad T = 1.58 \text{ mg} \quad \text{ב.} \quad v_B = \sqrt{0.32gl}, T_B = 1.19 \text{ mg} \quad \text{ג.}$$

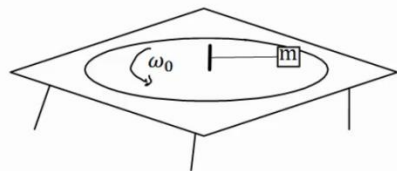
$$\text{ד. } T = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ mg}$$

$$(10) \quad \theta = 41.8^\circ$$

תרגילים נוספים:

שאלות:

(1) מסה על דיסק קשורה בחוט



מסה m נמצאת על דיסק המסתובב על גבי שולחן. המסה קשורה בחוט למוט במרכז השולחן. המוט מסתובב ביחד עם כל הדיסק. נתון כי המסה מסתובבת עם הדיסק במהירות זוויתית ω_0 .

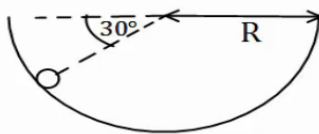
מהי המתיחות בחוט אם אורכו L ?

(2) קרוסלה בלונה פארק



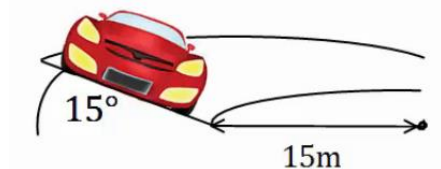
במתקן בלונה פארק ישנה קרוסלה מסתובבת אליה קשורים כבלים עם כסאות, ראה תמונה. רדיוס "הכתר" הוא $R = 5\text{m}$ אורך כל כבל הוא $l = 4\text{m}$. הזווית ביחס לאנך לרצפה בה נטוי כל כבל היא 40° מעלות. כמה זמן לוקח לקרוסלה להשלים סיבוב? שים לב שרדיוס הכתר הוא לא רדיוס הסיבוב.

(3) כדור בקערה כדורית



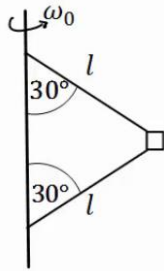
כדור קטן מונח בתוך קערה חצי כדורית בעלת רדיוס R . מניחים את הכדור בזווית של 30° מעלות ביחס לאופק ונותנים לו מהירות התחלתית לתוך הדף. מהו גודל המהירות ההתחלתית הדרוש, כך שהכדור יישאר בתנועה מעגלית בגובה קבוע?

(4) מכונית במחלף



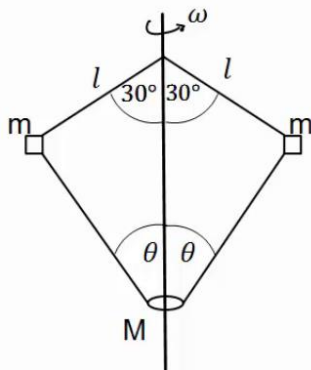
מכונית נוסעת על מחלף משופע. זווית השיפוע של המחלף היא 15° מעלות. רדיוס הסיבוב של המחלף הוא 15m מטרים. אם נניח שלמכונית אין חיכוך עם הכביש, מה המהירות בה צריכה לנסוע המכונית על מנת לא להחליק?

(5) מסה קשורה לעמוד מסתובב



בציור הבא מסה m קשורה דרך שני חוטים למוט, המסתובב במהירות זוויתית נתונה ω_0 . אורך החוטים זהה ונתון l . הזווית של החוטים עם המוט היא 30° מעלות. מהי המתיחות בכל חוט?

(6) שתי מסות קשורות למוט מסתובב וחרוז



בציור הבא 2 מסות זהות $m = 200g$ קשורות למוט מסתובב, באמצעות חוטים באורך $l = 20cm$. המסות קשורות גם לחרוז בעל מסה $M = 0.5kg$, באמצעות שני חוטים נוספים באורך לא ידוע. החרוז חופשי לנוע לאורך המוט. המוט מסתובב במהירות זוויתית $\omega = 20 \frac{rad}{sec}$ וכל המערכת איתו. הזווית של החוטים עם המוט נתונה באיור. מהי המתיחות בכל חוט ומהי הזווית θ ?

(7) מסה על שולחן מסתובב קשורה לשתי מסות

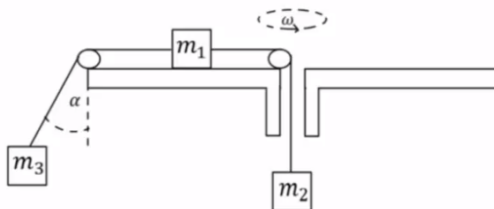
גוף שמסתו $m_1 = 5kg$ מונח על דיסק חלק המסתובב במהירות זוויתית $\omega = 2 \frac{rad}{sec}$. הגוף קשור מצד אחד למסה $m_2 = 3kg$ באמצעות חוט העובר דרך חור במרכז הדיסק. מצד שני הגוף קשור למסה $m_3 = 1kg$ באמצעות חוט היוצא מקצה הדיסק בזווית α , לא ידועה, ביחס לאנך מהדיסק. רדיוס הסיבוב של כל אחד מהגופים קבוע. נתון כי הרדיוס של m_1 הוא $R_1 = 0.3m$.

א. ציירו את הכוחות הפועלים על כל גוף בנפרד.

ב. מהי המתיחות בכל חוט?

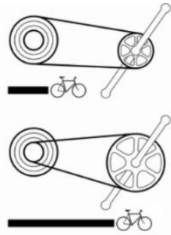
ג. מהי הזווית α ?

ד. מהו R_3 ?



(8) הילוכי אופניים

הילוכים של אופניים מורכבים משני גלגלי שיניים ברדיוסים שונים ושרשרת המקיפה את שני הגלגלים. כאשר השרשרת מתוחה האורך שלה קבוע. מצאו את הקשר בין מהירות הסיבוב של גלגלי השיניים אם הרדיוסים שבהם מקיפה השרשרת כל אחד מהגלגלים ידועים.

**(9) חוט נקרע במעגל אנכי גבוה***

כדור קטן שמסתו m קשור לקצהו של חוט שאורכו l . הכדור מסתובב במעגל אנכי שמרכזו בגובה $2l$ מעל הרצפה. כאשר החוט מתוח והכדור נמצא אנכית מעל ציר סיבוב מעניקים לו מהירות אופקית v_0 .

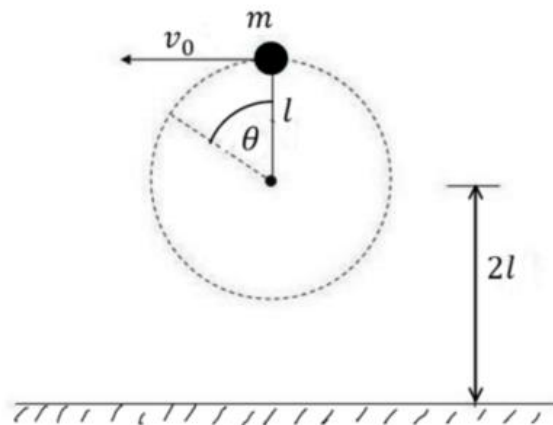
א. מה המהירות המינימלית v_0 הנדרשת כדי שהכדור יבצע תנועה מעגלית שלמה?

ב. מעניקים לכדור מהירות התחלתית: $v_0 = 1.5\sqrt{gl}$.

אם החוט נקרע ברגע שמתחלתו עולה על $5.25mg$ מצאו את הזווית θ שבה יקרע החוט.

ג. מה המהירות הכדור ברגע שהחוט נקרע, אם נתון ש: $l = 2m$?

ד. תוך כמה זמן מרגע קריעת החוט יפגע הכדור ברצפה?



תשובות סופיות:

$$T = m\omega_0^2 L \quad (1)$$

$$t \approx 5.98 \text{ sec} \quad (2)$$

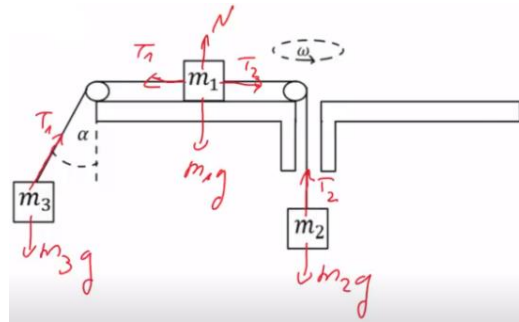
$$v_0 = \sqrt{\frac{3}{2} Rg} \quad (3)$$

$$v \approx 6.34 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (4)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 l + \frac{1}{\sqrt{3}} mg, \quad T_2 = \frac{1}{2} \left(m\omega_0^2 l - \frac{2}{\sqrt{3}} mg \right) \quad (5)$$

$$T_1 \approx 5.2 \text{ N}, T_2 \approx 5.95 \text{ N}, \theta \approx 65.16^\circ \quad (6)$$

$$T_1 = 24 \text{ N}, T_2 = 30 \text{ N} \quad \text{ב.} \quad (7)$$



$$R_3 \approx 5.5 \text{ m} \quad \text{ד.}$$

$$\alpha \approx 65^\circ \quad \text{ג.}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (8)$$

$$0.3 \text{ sec} \quad \text{ד.}$$

$$10 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.}$$

$$110^\circ \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{gl} \quad \text{א.} \quad (9)$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 7 - תנועה מעגלית - חלק שני

תוכן העניינים

87	1. הקדמה ונוסחאות לחלק השני
89	2. הכוח הצנטרפוגלי
90	3. וקטורים בתנועה מעגלית
93	4. תרגילים מסכמים
97	5. תרגילים מסכמים למתקדמים

הקדמה ונוסחאות לחלק השני:

שאלות:

(1) זווית משתנה בזמן

המיקום הזוויתי של נקודה על גבי שפת גלגל מסתובב נתונה ע"י: $\phi = 5t + 3t^2 - 2t^3$.

- מהי המהירות הזוויתית ב- $t = 2$ וב- $t = 4$ שניות?
- מהי התאוצה הזוויתית הממוצעת בין זמנים אלו?
- מהי התאוצה הזוויתית הרגעית בזמנים אלו?

(2) דוגמה-נהג מרוצים

נהג מרוצים נוסע במסלול מעגלי שרדיוסו 50 מטר.
מהירותו של הנהג כתלות בזמן היא: $v(t) = 4t$.

- מצא את המהירות הזוויתית של הנהג כתלות בזמן ומצא את הזווית של הנהג לאחר 5 שניות? (בהנחה כי התחיל מזווית אפס).
- מתי ישלים הנהג את הסיבוב הראשון?

(3) דוגמה-תאוצה זוויתית נהג המרוצים

מצא את התאוצה הזוויתית בדוגמה-נהג מרוצים (שאלה 4).

(4) תאוצה משיקית קבועה

- גוף נע במעגל בעל רדיוס R בתאוצה משיקית קבועה a_t וללא מהירות התחלתית. מצאו את גודל התאוצה הרדיאלית:
- כפונקציה של הזמן.
- כפונקציה של זווית הסיבוב.

(5) תאוצה משיקית רדיאלית וכוללת

גוף נע במעגל שרדיוסו 3 מטר. הדרך שעובר הגוף נתונה ע"י: $S = 6t^2 + 3t$.
חשב את התאוצה המשיקית, הרדיאלית והכוללת (כתלות בזמן).

(6) כוח על נהג המרוצים

בדוגמה של נהג המרוצים (שאלה 4), מצא מה הכוח הפועל על המכונית אם מסת המכונית (כולל הנהג) היא טון אחד. מי מפעיל כוח זה?

תשובות סופיות:

$$\bar{\alpha} = -30 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב.} \quad \omega(t=2) = -7 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, \quad \omega(t=4) = -67 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\alpha(t=2) = -18 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2}, \quad \alpha(t=4) = -42 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \quad \text{ג.}$$

$$\theta(t) = 12.5 \text{sec} \quad \text{ב.} \quad v = \frac{2t}{25}, \quad \theta(t=5 \text{sec}) \approx 57.3^\circ \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{2}{25} \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \quad (3)$$

$$a_r = 2a_t\theta \quad \text{ב.} \quad a_r = \frac{(a_t \cdot t)^2}{R} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$a_\theta = 12 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \quad a_r = (4t+1)^2 \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \quad a = \sqrt{12^2 + 9(4t+1)^4} \quad (5)$$

$$|F| = \sqrt{(80t)^2 + 4000^2}, \quad \text{הכביש הוא מפעיל כוח החיכוך.} \quad (6)$$

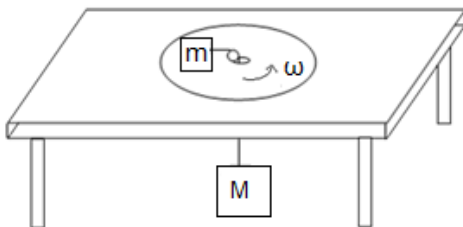
הכוח הצנטרפוגלי:

שאלות:

(1) מסה על שולחן מסתובב

מסה m מונחת על דיסק המסתובב על שולחן במהירות זוויתית קבועה ω . המסה מחוברת לחוט העובר דרך מרכז השולחן ומחובר למסה m . בין המסה m לדיסק יש חיכוך ומקדם החיכוך הסטטי הוא μ_s . נתון: ω, μ, m, μ_s .

מהו הרדיוס המינימלי והרדיוס המקסימאלי שבו ניתן להניח את המסה כך שלא תזוז בכיוון הרדיאלי?



תשובות סופיות:

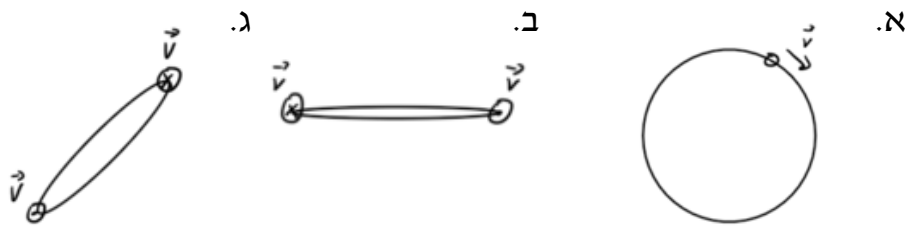
$$r_{\min}^{\max} = \frac{Mg \pm \mu_s mg}{m\omega^2} \quad (1)$$

וקטורים בתנועה מעגלית:

שאלות:

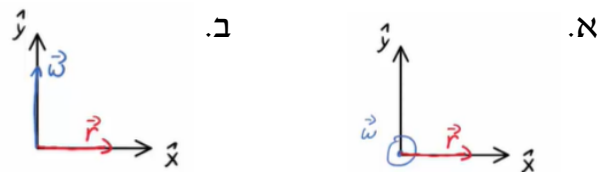
(1) מציאת הכיוון של אומגה

במקרים הבאים נתון כיוונה של המהירות הקווית של גוף הנע במעגל. מצא את הכיוון של המהירות הזוויתית בכל מקרה:



(2) תרגיל לנוסחה $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

מצא את כיוון המהירות הקווית של הגוף במקרים הבאים בהנחה כי הגוף נע בתנועה מעגלית.



(3) תאוצה זוויתית קבועה כוקטור

גוף נע במעגל בעל רדיוס קבוע שאינו ידוע.

התאוצה הזוויתית של הגוף קבועה ונתונה לפי: $\vec{\alpha} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 1\hat{z}$ ביחידות של רדיאן לשנייה בריבוע.

המיקום ההתחלתי והמהירות הזוויתית ההתחלתית הם: $\vec{r}_0 = 5\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z}$

במטרים ו- $\vec{\omega}_0 = -2\hat{x} + 3\hat{y} - 4\hat{z}$ ברדיאן לשנייה.

מצא את גודל המהירות הקווית של הגוף ב- $t = 2 \text{ sec}$.

(4) דוגמה-וקטור המיקום של נהג המרוצים

מצא את וקטור המיקום כתלות בזמן בדוגמה עם נהג המרוצים.

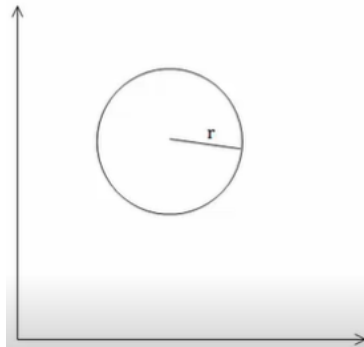
(5) תנועה מעגלית שאינה סביב הראשית

גוף נע על מעגל ברדיוס 3m.

הגוף חולף דרך הנקודה (5,4) ביחס לראשית הצירים O.

נתון כי מרכז המעגל נמצא ב- (5,7) והמהירות הזוויתית היא: $\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{20 \text{ sec}}$

- א. מצא את וקטור המיקום של הגוף כפונקציה של הזמן.
- ב. מצא את וקטור המהירות של הגוף כפונקציה של הזמן.
- ג. מצא את וקטור התאוצה של הגוף כפונקציה של הזמן.
- ד. מצא את המהירות הממוצעת בין $t = 5\text{sec}$ ל- $t = 10\text{sec}$.
- ה. מצא את תחום הזווית ביחס לראשית בו נע וקטור המקום.
- ו. מצא את תחום הגדלים של וקטור המקום.



תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \otimes \quad \text{ב. } \downarrow \quad \text{ג. } \swarrow$$

$$(2) \quad \text{א. } \hat{y} \quad \text{ב. } -\hat{z}$$

$$(3) \quad 63.63 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$(4) \quad \vec{r} = 50 \cos\left(\frac{t^2}{25}\right) \hat{x} + 50 \sin\left(\frac{t^2}{25}\right) \hat{y}$$

$$(5) \quad \text{א. } \vec{r} = \left(5 + 3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}t\right), 7 + 3 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}t\right) \right)$$

$$\text{ב. } \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \left(-3 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}t\right) \frac{\pi}{10}, 3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}t\right) \frac{\pi}{10} \right)$$

$$\text{ג. } \vec{a} = \dot{\vec{v}} = -\omega^2 \vec{r} \quad \text{ד. } \vec{v} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

$$\text{ו. } r_{\max} = 8.6 + 3, r_{\min} = 8.6 - 3$$

$$\text{ה. } \theta_{\min} = 34.5^\circ, \theta_{\max} = 74.9^\circ$$

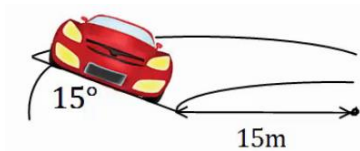
תרגילים מסכמים:

שאלות:



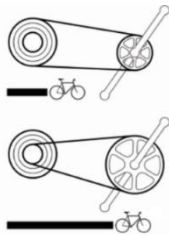
(1) מטוטלת מסתובבת אופקית

מטוטלת בעלת אורך l מסתובבת סביב ציר האנך לתקרה בזווית מפתח קבועה θ . נתון: θ , l . מצא את התדירות וזמן המחזור של הסיבוב.



(2) מכונית במחלף

מכונית נוסעת על מחלף משופע. זווית השיפוע של המחלף היא 15° מעלות. רדיוס הסיבוב של המחלף הוא 15 מטרים. אם נניח שלמכונית אין חיכוך עם הכביש, מה המהירות בה צריכה לנסוע המכונית על מנת לא להחליק?



(3) הילוכי אופניים

הילוכים של אופניים מורכבים משני גלגלי שיניים ברדיוסים שונים ושרשרת המקיפה את שני הגלגלים. כאשר השרשרת מתוחה האורך שלה קבוע. מצאו את הקשר בין מהירות הסיבוב של גלגלי השיניים אם הרדיוסים שבהם מקיפה השרשרת כל אחד מהגלגלים ידועים.

(4) שני גופים על מסילה מעגלית אנכית (כולל עבודה ואנרגיה)

מסילה מעגלית חלקה, דקה ובעלת רדיוס R מוצבת במישור אנכי. מישור משופע וחלק משיק למסילה ומשתלב בה כמתואר בתרשים. מציבים את בול A בגובה $2R$ ואת בול B על המישור המשופע בגובה זהה מהרצפה. נותנים ל-A דחיפה קלה ועוזבים את B ממצב מנוחה. שני הגופים מחליקים, גוף A בצידה החיצוני של המסילה ואילו גוף B משתלב ונכנס לתוך המסילה. בשלב מסוים כל אחד מהגופים מתנתק מהמסילה. התייחסו לגופים כאל גופים נקודתיים.

א. באיזו זווית θ_1 עם ציר ה-y, יתנתק גוף A מהמסילה?

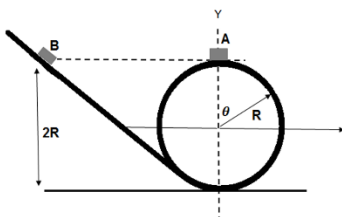
ב. באיזו זווית θ_2 יתנתק גוף B מהמסילה?

ג. אם שני הגופים מתנתקים מהמסילה בו זמנית.

מה גודל המהירות היחסית בניהם?

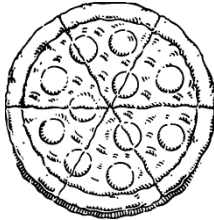
ד. מה יהיה המרחק בין הגופים לאחר הניתוק,

אחרי פרק זמן Δt (הניחו שהגופים עדיין באוויר).



(5) מציאת מיקום כפונקציה של הזמן

חלקיק מוגבל לנוע על מעגל ברדיוס R .
נתון שגודל המהירות של החלקיק: $V(t) = Ct^2$ כאשר C קבוע.
מצאו ופתרו את משוואת המיקום של החלקיק.

(6) מסובבים פיצה בתנועה מעגלית

מסובבים פיצה בתנועה מעגלית כך שמתקיים: $\theta = 4t^2 + 5t$
כאשר θ נמדדת ברדיאנים ו- t בשניות.

- א. מצאו את המהירות הזוויתית של הבצק.
- ב. מצאו את התאוצה הזוויתית של הבצק.
- ג. לאחר שהוסיפו את הזיתים מסובבים עוד פעם את הפיצה באותו אופן.

מצאו את הרדיוס בו נמצא זית הנע בתאוצה משיקית של $0.2 \frac{m}{sec^2}$.

ד. חזור על סעיף ג' אם ידוע שהתאוצה הקווית הכוללת ב- $t = 1sec$ היא: $0.2 \frac{m}{sec^2}$.

(7) תאוצה משיקית קבועה

- נקודה נעה במסלול מעגלי שרדיוסו 30 ס"מ.
- הנקודה נעה בתאוצה משיקית קבועה של 4 מטר לשנייה בריבוע.
- לאחר כמה זמן מתחילת התנועה התאוצה הרדיאלית של הנקודה תהיה:
- א. גדולה פי 2 מהתאוצה המשיקית?
 - ב. שווה לתאוצה המשיקית?

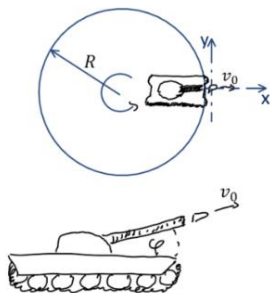
(8) זווית בין משיקית לכוללת

- גוף נקודתי מתחיל לנוע ממנוחה במסלול מעגלי בעל רדיוס 2 מטר בתאוצה משיקית קבועה. ידוע כי לאחר שני סיבובים שלמים הגיע הגוף למהירות קווית של 2 מטר לשנייה.
- א. תוך כמה זמן השלים הגוף את שני הסיבובים הראשונים?
 - ב. מה הייתה התאוצה המשיקית של הגוף?
 - ג. מה הייתה הזווית בין וקטור התאוצה המשיקית לווקטור התאוצה השקולה לאחר שני הסיבובים הראשונים?
 - ד. מתי, החל מעת תחילת התנועה, תהיה התאוצה המשיקית שווה בגודלה לתאוצה המרכזית של הגוף?
 - ה. איזה מרחק יעבור הגוף עד אז? (ראה סעיף ד').

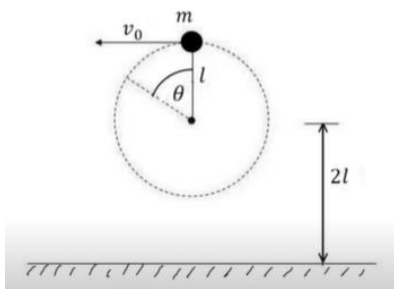
9 חמישה סיבובים

נקודה שנמצאת במרחק 15 ס"מ ממרכז הגלגל, מתחילה להסתובב בתאוצה משיקית קבועה. הנקודה מגיעה למהירות זוויתית של $20 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ לאחר 5 סיבובים. מצא את:

- התאוצה המרכזית של הנקודה כעבור 5 שניות.
- התאוצה המשיקית של הנקודה כעבור 5 שניות.
- התאוצה השקולה של הנקודה כעבור 5 שניות.

10 טנק יורה פגז מדיסקה מסתובבת

- טנק נמצא בקצה של דיסקה ברדיוס R היכולה להסתובב במקביל לקרקע. הדיסקה מתחילה להסתובב ב- $t = 0$ בתאוצה זוויתית $\ddot{\theta} = kt^2$. כעבור זמן t_0 הטנק נמצא במיקום שבאיור ויורה פגז. מהירות הלוע של הפגז היא v_0 . התותח מכיוון בכיוון הרדיאלי כלפי חוץ, ובזווית φ מעל הקרקע (במאונך למישור שבו מסתובבת הדיסקה).
- באיזה מהירות ביחס לצופה נייח יוצא הכדור מלוע הטנק?
 - באיזה מרחק מנקודת הירי יפגע הפגז?

11 חוט נקרע במעגל אנכי גבוה

- כדור קטן שמסתו m קשור לקצהו של חוט שאורכו l . הכדור מסתובב במעגל אנכי שמרכזו בגובה $2l$ מעל הרצפה. כאשר החוט מתוח והכדור נמצא אנכית מעל ציר סיבוב מעניקים לו מהירות אופקית v_0 .
- מה המהירות המינימלית v_0 הנדרשת כדי שהכדור יבצע תנועה מעגלית שלמה?
 - מעניקים לכדור מהירות התחלתית: $v_0 = 1.5\sqrt{gl}$, אם החוט נקרע ברגע שמתוחותו עולה על $5.25mg$ מצאו את הזווית θ שבה יקרע החוט.
 - מה המהירות הכדור ברגע שהחוט נקרע, אם נתון ש: $l = 2m$?
 - תוך כמה זמן מרגע קריעת החוט יפגע הכדור ברצפה?

תשובות סופיות:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1)$$

$$V \approx 6.34 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (2)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (3)$$

$$d = \sqrt{\frac{8}{3}} g R \Delta t \quad \text{ז} \quad |\vec{V}_{AB}| = \sqrt{\frac{8}{3}} g R \quad \text{ג} \quad \theta_2 = \theta_1 = 48.2^\circ \quad \text{ב} \quad \theta_1 = 48.2^\circ \quad \text{א} \quad (4)$$

$$x = R \cos \frac{C \cdot t^3}{3R}, y = R \sin \left(\frac{C \cdot t^3}{3R} \right) \quad (5)$$

$$R = 2.5 \text{ cm} \quad \text{ג} \quad \alpha = \dot{\omega} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב} \quad \omega = \dot{\theta} = 8t + 5 \quad \text{א} \quad (6)$$

$$1.18 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \text{ז}$$

$$t \approx 0.27 \text{ sec} \quad \text{ב} \quad t \approx 0.39 \text{ sec} \quad \text{א} \quad (7)$$

$$t_2 = 5 \text{ sec} \quad \text{ז} \quad \alpha = 87.73^\circ \quad \text{ג} \quad a_\theta \approx 0.08 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב} \quad t_1 \approx 25.1 \text{ sec} \quad \text{א} \quad (8)$$

$$S = 1 \text{ m} \quad \text{ה}$$

$$|a| \approx 150 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ג} \quad a_\theta \approx 0.95 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב} \quad a_r \approx 150 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{א} \quad (9)$$

$$v_x = v_0 \cos \varphi, v_y = \frac{kt_0^3 R}{3}, v_z = v_0 \sin \varphi \quad \text{א} \quad (10)$$

$$d = \left((v_0 \cos \varphi)^2 + \left(\frac{kt_0^3 R}{3} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(t_0 + \frac{2v_0 \sin \varphi}{g} \right) \quad \text{ב}$$

$$t \approx 0.3 \text{ sec} \quad \text{ז} \quad v \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג} \quad \theta \approx 110^\circ \quad \text{ב} \quad v_{\min} = \sqrt{gl^5} \quad \text{א} \quad (11)$$

תרגילים מסכמים למתקדמים:

שאלות:

(1) נקודה על גלגל

מיקומו של גוף כתלות הזמן נתון ע"י: $x(t) = R\omega t - R \sin(\omega t)$, $y(t) = R - R \cos(\omega t)$, כאשר R ו- ω קבועים.

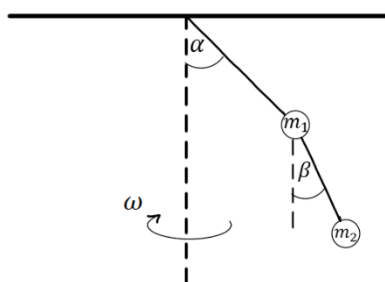
- מצאו את וקטורי המהירות והתאוצה של הגוף.
- מצאו את גודל התאוצה המשיקית והנורמאלית.
- ציירו את מסלול הגוף.

(2) חבל עם מסה מסתובב*

נתון חבל אחיד בעל מסה m ואורך l .
 החבל קשור בקצה אחד ומסתובב במישור אופקי במהירות זוויתית ω .
 מצא את גודל המתחים לאורך החבל (כתלות במרחק מהקצה הקשור).
 רמז: יש לחלק את החבל לחתיכות קטנות ולעשות משוואת תנועה על כל חתיכה.

(3) מטוטלת כפולה מסתובבת אופקית*

גוף בעל מסה m_1 מחובר באמצעות חוט באורך l_1 לתקרה.
 גוף בעל מסה m_2 מחובר באמצעות חוט באורך l_2 לגוף הראשון.
 שני הגופים מסתובבים יחדיו בתדירות זוויתית קבועה ω סביב ציר האנך לתקרה.
 הזוויות בין החוטים לאנכים הן: α , β (ראה איור).
 א. רשום את משוואת התנועה לכל גוף.
 ב. מצא מהי הזווית α עבור המקרה בו $m_2 = 0$ ו- $m_1 \neq 0$.



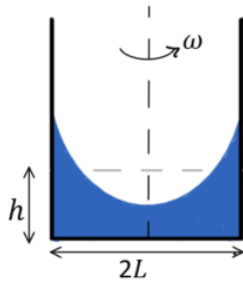
מהי תדירות הסיבוב המינימלית האפשרית?
 ג. דני ויוסי ניסו למצא את ω במקרה הכללי.
 דני הציב את גדלי המתחיות של החוטים
 במשוואת התנועה של גוף 2

$$\text{וקיבל: } \omega^2 = \frac{g \tan \beta}{l_1 \sin \alpha + l_2 \sin \beta}$$

יוסי הציב את המתחיות במשוואת התנועה

$$\text{של גוף 1 וקיבל: } \omega^2 = \frac{g}{l_1} \cdot \frac{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \tan \alpha - \frac{m_2}{m_1} \tan \beta}{\sin \alpha}$$

ישב את הסתירה.

**(4) מים בכלי מסתובב****

תיבה באורך $2L$ ורוחב ω כך ש- $\omega \ll L$ מכילה מים. גובה המים בתיבה הוא h . מסובבים את התיבה במהירות זוויתית ω סביב ציר העובר במרכזה. הנח כי המים לא נשפכים מהתיבה.

א. מצאו את הפונקציה המתארת את פני המים במרחב (רמז: חשבו את השיפוע של המשיק לפני המים בנקודה כלשהיא, שיפוע זה הוא הנגזרת של הפונקציה).

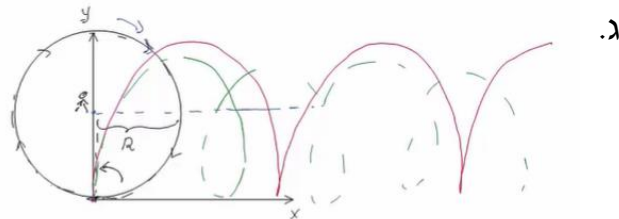
- ב. מהו הפרש הגבהים בין המים במרכז התיבה למים במרחק אופקי d מהמרכז?
 ג. מה יהיה הפרש הגבהים אם נגדיל את מהירות הסיבוב פי 2?
 ד. מהו התנאי שתחתית התיבה תתייבש בנקודה כלשהיא?

תשובות סופיות:

$$\vec{v} = (R\omega - R \cos(\omega t) \cdot \omega) \hat{x} + R \sin(\omega t) \cdot \omega \hat{y} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\vec{a} = R\omega^2 \sin(\omega t) \hat{x} + R\omega^2 \cos(\omega t) \hat{y}$$

$$|\vec{a}_t| = \frac{R\omega^2 (\sin \omega t)}{\sqrt{2(1 - \cos \omega t)}}, \quad |\vec{a}_n| = \frac{R\omega^2 (\cos(\omega t) - \cos(2\omega t))}{\sqrt{2(1 - \cos(\omega t))}} \quad \text{ב.}$$



$$T(x) = \frac{m\omega^2}{2l} (l^2 - x^2) \quad \text{ג.} \quad (2)$$

$$\sum F_x = m_1 \omega^2 l_1 \sin \alpha, \quad \sum F_y = 0 \quad \text{גוף 1} \quad (3)$$

$$\sum F_x = m_2 \omega^2 (l_1 \sin \alpha + l_2 \sin \beta), \quad \sum F_y = m_2 g \quad \text{גוף 2}$$

$$\Delta y = \frac{2\omega^2 d^2}{g} \quad \text{ג.} \quad \Delta y = \frac{\omega^2 d^2}{2g} \quad \text{ב.} \quad y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + h - \frac{\omega^2 L^2}{6g} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$h = \frac{\omega^2 L^2}{6g} \quad \text{ד.}$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 8 - עבודה ואנרגיה - חלק ראשון

תוכן העניינים

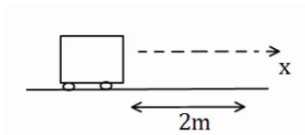
99	1. העבודה שמבצע כוח.....
101	2. אנרגיה קינטית והקשר לעבודה.....
102	3. אנרגיה פוטנציאלית-כובדית.....
103	4. אנרגיה כללית ומשפט עבודה אנרגיה.....
106	5. עבודת החיכוך וחום.....
107	6. אנרגיה פוטנציאלית אלסטית-קפיץ.....
(ללא ספר)	7. סיכום הפרק.....
(ללא ספר)	8. חוק שימור האנרגיה- הרחבה.....
108	9. תרגילים.....
122	10. הספק.....

העבודה שמבצע כוח:

שאלות:

(1) דוגמה 1

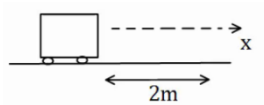
כוח F שגודלו 5N פועל על גוף הנע מרחק של שני מטרים בכיוון ציר ה- x .
 חשב את עבודת הכוח אם כיוונו הוא:



- בכיוון ציר ה- x .
- בכיוון 30° עם ציר ה- x .
- בכיוון 30° מתחת לציר ה- x .

(2) דוגמה 2

כוח F שגודלו 5N פועל על גוף הנע מרחק של שני מטרים בכיוון ציר ה- x .
 חשב את עבודת הכוח אם כיוונו הוא:



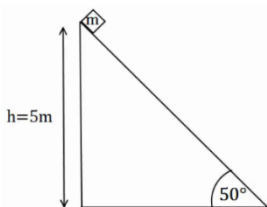
- בכיוון ציר ה- y .
- בכיוון 30° מעל ציר ה- x השלילי.
- בכיוון 30° מתחת לציר ה- x השלילי.

(3) דוגמה 3

גוף נופל נפילה חופשית מגובה של 8 מטרים מעל הקרקע. מסת הגוף היא 3kg .
 א. חשב את עבודת כוח הכובד עד לפגיעה בקרקע.
 ב. חשב שוב את העבודה אם הגובה והמסה נתונים כפרמטרים: m, h .

(4) דוגמה 4

גוף שמסתו $m = 2\text{kg}$ מחליק על מישור משופע מגובה 5 מטרים ועד לתחתית המישור.
 זווית השיפוע של המישור היא 50° .
 א. חשב את העבודה שמבצע הנורמל על הגוף במהלך תנועתו.
 ב. חשב את עבודת כוח הכובד על הגוף.
 ג. חשב את עבודת החיכוך הקינטי אם ידוע שמקדם החיכוך הוא: $\mu_k = 0.2$.



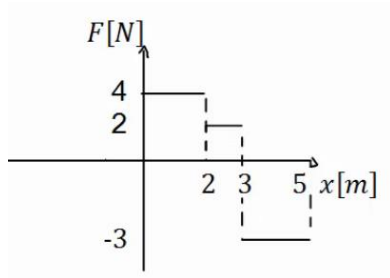
(5) דוגמה 5

גוף נע מהנקודה (1,2) לנקודה (3,5).

חשב את עבודת הכוחות הבאים הפעלו על הגוף:

א. $\vec{F} = (2,1)$

ב. $\vec{F} = (-3,2)$

**(6) כוח כתלות במיקום**

נתון גרף של הכוח כתלות במיקום.

א. מהי העבודה הכוללת שמבצע הכוח הבא?

ב. מהי עבודת הכוח בשני המטרים

האחרונים של התנועה?

תשובות סופיות:

(1) א. $W = 10$ ב. $W = 5 \cdot \sqrt{3}$ ג. $W = 5 \cdot \sqrt{3}$

(2) א. $W = 0$ ב. $W \approx -8.66$ ג. $W \approx -8.66 \text{ J}$

(3) א. $W_g = 240 \text{ J}$ ב. $W_g = mgh$

(4) א. $W_N = 0$ ב. $W_g = 100 \text{ J}$ ג. $W_{fk} = -16.79 \text{ J}$

(5) א. $W = 7 \text{ J}$ ב. $W = 0$

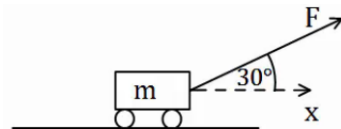
(6) א. $W = 4 \text{ J}$ ב. $W = -6 \text{ J}$

אנרגיה קינטית והקשר לעבודה:

שאלות:

(1) כוח מושך קרונית בזווית

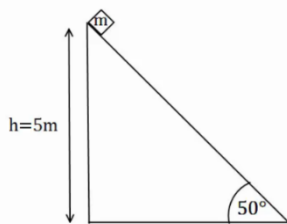
כוח $F = 50\text{N}$ מושך קרונית בזווית של 30° מעל ציר ה- x .
מסת הקרונית היא 3 ק"ג .



- שרטט תרשים כוחות הפועלים על הקרונית.
- מצא את העבודה של כל כוח, אם ידוע שהקרונית התקדמה 5 מטרים בכיוון ציר ה- x .
- מהי מהירות הקרונית לאחר 5 המטרים , אם התחילה לנוע ממנוחה?

(2) המשך לדוגמה 4

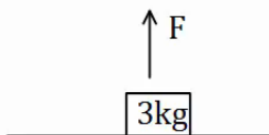
גוף שמסתו $m = 2\text{kg}$ מחליק על מישור משופע מגובה 5 מטרים ועד לתחתית המישור. זווית השיפוע של המישור היא 50° . מקדם החיכוך הקינטי הוא $\mu_k = 0.2$.



- מצא את עבודת הכוחות.
- מהי מהירות הגוף בתחתית המדרון, אם התחיל ממנוחה?

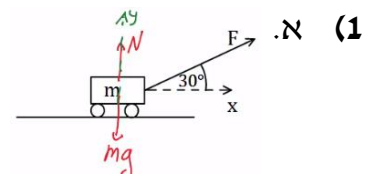
(3) כוח מושך גוף ישר למעלה

כוח $F = 50\text{N}$ מושך גוף כלפי מעלה. מצא את מהירות הגוף בגובה 8 מטרים מעל הקרקע. מסת הגוף היא 3 ק"ג .



תשובות סופיות:

א. $W_N = 0 = W_g, W_F \approx 216.51\text{J}$ ב. $v_F \approx 12.01 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$



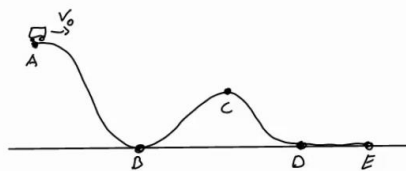
א. $W_N = 0, W_g = 100\text{J}, W_{fk} = -16.79$ ב. $v_F \approx 9.12 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

(3) $v_p \approx 10.33 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

אנרגיה פוטנציאלית-כובדית:

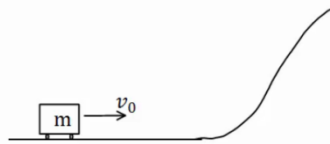
שאלות:

(1) רכבת הרים



רכבת הרים מתחילה בנסיעה מהנקודה A הנמצאת בגובה 20 מטרים. מהירותה בנקודה A היא 5 מטרים לשנייה. מצא את מהירותה בנקודות B, D, E הנמצאות על הקרקע, ובנקודה C הנמצאת בגובה 10 מטרים.

(2) עגלה עולה על גבעה



עגלה נעה בתחתית גבעה עם מהירות התחלתית של 20 מטר לשנייה. אין חיכוך בין העגלה לאדמה.

- א. מהו הגובה המקסימלי אליו תגיע העגלה? לאחר שהגיעה לגובה המקסימלי מתחילה העגלה להתדרדר חזרה במורד הגבעה.
- ב. מה תהיה מהירותה כשתגיע חזרה לתחתית?

תשובות סופיות:

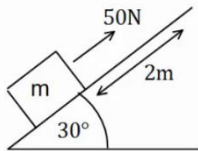
$$v_B \approx 20.62 \frac{\text{m}}{\text{sec}} = v_E = v_D, v_C \approx 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (1)$$

$$v_F = \pm v_0 \quad \text{ב.} \quad h_{\max} = 20\text{m} \quad \text{א.} \quad (2)$$

אנרגיה כללית ומשפט עבודה אנרגיה:

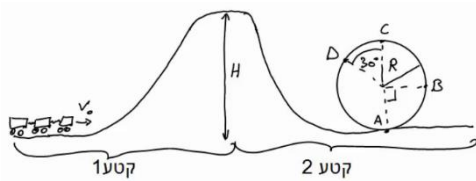
שאלות:

(1) כוח מעלה במדרון משופע



כוח של 50 ניוטון פועל על גוף במקביל למשטח משופע בעל זווית של 30° .
מסת הגוף היא $m = 4\text{kg}$ והוא מתחיל תנועתו ממנוחה.
חשב את מהירות הגוף לאחר שהתקדם 2 מטרים במעלה המדרון (אין חיכוך).

(2) עוד רכבת הרים



רכבת הרים מתחילה בנסיעה בצדו השמאלי של המסלול באיור.
לרכבת מהירות התחלתית נמוכה v_0 .

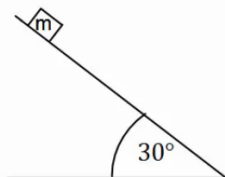
בקטע הראשון כוח F מושך את הרכבת כלפי מעלה במהירות קבועה עד לשיא הגובה H .
בשיא הגובה הכוח נפסק ולאחר מכן הרכבת נעצרת (באמצעות מעצור) למספר שניות, על מנת שהנוסעים יוכלו לפחד לקראת הנפילה.

בקטע השני הרכבת נופלת (ללא הכוח F) ומבצעת סיבוב אנכי - "לופ".
התייחס למסת הרכבת והנתונים באיור כפרמטרים נתונים.

א. מצא את העבודה הכוללת המבצע הכוח F על הרכבת.

ב. מצא את מהירות הרכבת בכל הנקודות המצוינות באיור.

(3) מסה מחליקה במדרון

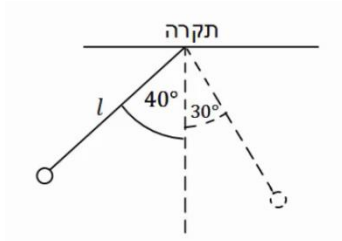


מסה $m = 4\text{kg}$ מונחת במנוחה בגובה $h = 5\text{m}$ על מדרון משופע.
שיפוע המדרון הוא 30° .

א. מצא את מהירות המסה בתחתית המדרון אם אין חיכוך בינה למשטח.

ב. חזור על סעיף א' עבור מקרה בו יש חיכוך קינטי ומקדם החיכוך הוא $\mu_k = 0.2$.

ג. חזור על סעיף ב' אם בנוסף לחיכוך יש גם כוח $F = 60\text{N}$, במקביל למדרון ובכיוון תנועת המסה.

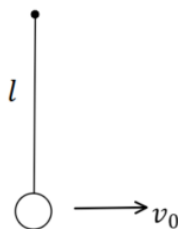
(4) מטוטלת

מטוטלת בעלת אורך חוט $l = 50\text{cm}$ תלויה מהתקרה. מרימים את המטוטלת לזווית של 40° ביחס לאנך מהתקרה ומשחררים ממנוחה.

- מהי עבודת כוח המתיחות לאורך התנועה?
- מהי מהירות המטוטלת בתחתית המסלול?
- מהי מהירות המטוטלת לאחר שעלתה לזווית של 30° ?
- מהי הזווית המקסימלית אליה תגיע המטוטלת?

(5) כדור תלוי על חוט מבצע מעגל

נקודת תלייה



כדור תלוי במנוחה על חוט שאורכו $l = 30\text{cm}$.

א. מקנים לכדור מהירות התחלתית בכיוון אופקי

$$v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

- מה יהיה הגובה המקסימלי אליו יגיע?
- מה תהיה זווית החוט המקסימלית ביחס לאנך לקרקע?

ב. איזו מהירות מינימלית יש להעניק לכדור (ממצב מנוחה) כדי שיגיע לגובה

המקסימלי שהחוט מאפשר לו (למעל מרכז המעגל) במהירות של $\sqrt{32} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

הניחו שהמהירות מספיקה בשביל להשלים את הסיבוב.

ג. במקרה המתואר בסעיף ב' – מה תהיה מהירות הכדור כאשר יחזור לנקודת ההתחלה?

תשובות סופיות:

$$V_F \approx 5.48 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (1)$$

$$W_F = mgH \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$v_F = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$W_T = 0 \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$\theta_{\max} = 40^\circ \quad \text{ד.}$$

$$20\text{cm} \quad \text{א. i.} \quad (5)$$

$$v_p = \sqrt{32} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.}$$

$$v_C = \sqrt{2g(H-2R)}, v_D = \sqrt{2g(H-1.87R)} \quad \text{ב.}$$

$$v_F \approx 19.11 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.} \quad v_F \approx 8.08 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.}$$

$$v_F \approx 1.03 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.} \quad v_F \approx 1.55 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.}$$

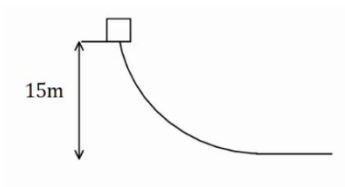
$$v_0 = \sqrt{44} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.} \quad \theta_{\max} \approx 71^\circ \quad \text{ii.}$$

עבודת החיכוך וחום:

שאלות:

(1) חישוב עבודה

גוף שמסתו 5kg מחליק במורד מישור משופע. מהירותו בראש המישור היא $3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, ומהירותו בתחתית המישור, הנמצאת 15m נמוך יותר מנקודת ההתחלה, היא $16 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.
 מהי עבודת כוח החיכוך שפעל עליו (ביחידות Joule)?



(2) גוף נופל ממסלול עקום

גוף נופל ממנוחה ממעלה גבעה בגובה 15 מטר. בתחתית הגבעה מהירות הגוף היא 5 מטר לשנייה. כמה אנרגיה הלכה לאיבוד לחום? מסת הגוף היא 2 ק"ג.

תשובות סופיות:

(1) -132.5J

(2) $Q = 275\text{J}$

אנרגיה פוטנציאלית אלסטית – קפיץ:

שאלות:

(1) מסה וקפיץ במישור אופקי

מסה $m = 50\text{gr}$ נעה במהירות $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ על משטח אופקי חלק.



המסה נעצרת על ידי קפיץ אופקי אידיאלי (חסר מסה)

בעל קבוע קפיץ $k = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. הקפיץ רפוי לפני פגיעת המסה.

א. מהי מהירות המסה כאשר הקפיץ מכווץ 5 ס"מ?

ב. מהו הכיוון המקסימלי אליו מגיע הקפיץ?

ג. חזור על סעיפים א' ו-ב' אם בין המסה למשטח יש חיכוך.

מקדם החיכוך הוא $\mu_k = 0.2$ והמרחק ההתחלתי של המסה מקצה הקפיץ הוא 0.5m.

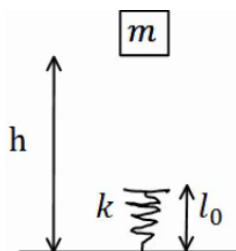
(2) מסה נופלת על קפיץ אנכי

מסה $m = 5\text{gr}$ משוחררת ממנוחה מגובה $h = 1\text{m}$ מעל הרצפה.

קפיץ אנכי אידיאלי מחובר לרצפה.

אורכו הרפוי של הקפיץ הוא $l_0 = 10\text{cm}$, וקבוע הקפיץ

הוא $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.



א. מהי מהירות המסה רגע לפי פגיעתה בקפיץ?

ב. מהו הכיוון המקסימלי אליו יגיע הקפיץ?

ג. מהו הגובה המקסימלי אליו תגיע המסה בחזרה?

תשובות סופיות:

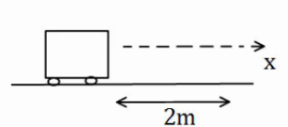
$$(1) \quad \text{א. } v_F \approx 4.95 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב. } \Delta x \approx 35.4\text{cm} \quad \text{ג. } \Delta x \approx 33\text{cm}, v \approx 4.72 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$(2) \quad \text{א. } v_F = 4.24 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב. } \Delta x_{\max} = 3\text{cm} \quad \text{ג. } h_F = h_i$$

העבודה שמבצע כוח

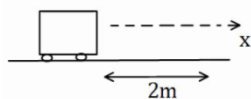
שאלות

- (1) כוח F שגודלו 5N פועל על גוף הנע מרחק של שני מטרים בכיוון ציר ה- x .
חשב את עבודת הכוח אם כיוונו הוא:



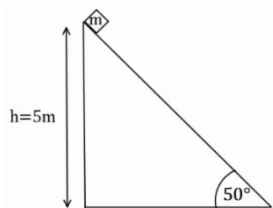
- א. בכיוון ציר ה- x .
ב. בכיוון 30° עם ציר ה- x .
ג. בכיוון 30° מתחת לציר ה- x .

- (2) כוח F שגודלו 5N פועל על גוף הנע מרחק של שני מטרים בכיוון ציר ה- x .
חשב את עבודת הכוח אם כיוונו הוא:



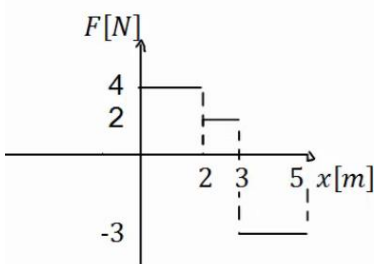
- א. בכיוון ציר ה- y .
ב. בכיוון 30° מעל ציר ה- x השלילי.
ג. בכיוון 30° מתחת לציר ה- x השלילי.

- (3) גוף נופל נפילה חופשית מגובה של 8 מטרים מעל הקרקע. מסת הגוף היא 3kg .
א. חשב את עבודת כוח הכובד עד לפגיעה בקרקע.
ב. חשב שוב את העבודה אם הגובה והמסה נתונים כפרמטרים: m, h .



- (4) גוף שמסתו $m = 2\text{kg}$ מחליק על מישור משופע מגובה 5 מטרים ועד לתחתית המישור.
זווית השיפוע של המישור היא 50° .

- א. חשב את העבודה שמבצע הנורמל על הגוף במהלך תנועתו.
ב. חשב את עבודת כוח הכובד על הגוף.
ג. חשב את עבודת החיכוך הקינטי אם ידוע שמקדם החיכוך הוא $\mu_k = 0.2$.



(5) כוח כתלות במיקום

- נתון גרף של הכוח כתלות במיקום.
א. מהי העבודה הכוללת שמבצע הכוח הבא?
ב. מהי עבודת הכוח בשני המטרים האחרונים של התנועה?

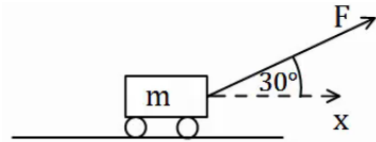
תשובות סופיות

- | | | | |
|---------------------------|---------------------------|------------------|-----|
| ג. $W = 5 \cdot \sqrt{3}$ | ב. $W = 5 \cdot \sqrt{3}$ | א. $W = 10$ | (1) |
| ג. $W \approx -8.66 j$ | ב. $W \approx -8.66$ | א. $W = 0$ | (2) |
| | ב. $W_g = mgh$ | א. $W_g = 240 j$ | (3) |
| ג. $W_{fk} = -16.79 j$ | ב. $W_g = 100 j$ | א. $W_N = 0$ | (4) |
| | ב. $W = -6 j$ | א. $W = 4 j$ | (5) |

אנרגיה קינטית והקשר לעבודה

שאלות

(6) כוח מושך קרונית בזווית



כוח $F = 50N$ מושך קרונית בזווית של 30° מעל ציר ה- x . מסת הקרונית היא 3 ק"ג.

א. שרטט תרשים כוחות הפועלים על הקרונית.

ב. מצא את העבודה של כל כוח, אם ידוע שהקרונית התקדמה 5 מטרים בכיוון ציר ה- x .

ג. מהי מהירות הקרונית לאחר 5 המטרים, אם התחילה לנוע ממנוחה?

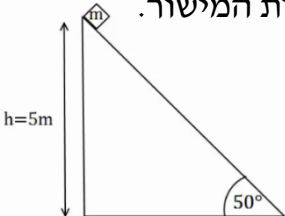
(7) המשך לדוגמא 4

גוף שמסתו $m = 2kg$ מחליק על מישור משופע מגובה 5 מטרים ועד לתחתית המישור.

זווית השיפוע של המישור היא 50° . מקדם החיכוך הקינטי הוא $\mu_k = 0.2$.

א. מצא את עבודת הכוחות.

ב. מהי מהירות הגוף בתחתית המדרון, אם התחיל ממנוחה.

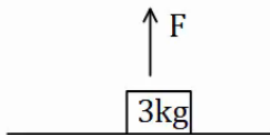


(8) כוח מושך גוף ישר למעלה

כוח $F = 50N$ מושך גוף כלפי מעלה.

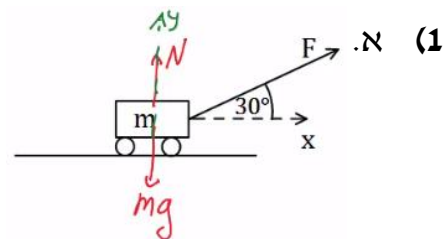
מצא את מהירות הגוף בגובה 8 מטרים מעל הקרקע.

מסת הגוף היא 3 ק"ג.



תשובות סופיות

א. $W_N = 0 = W_g, W_F \approx 216.51j$ ב. $v_F \approx 12.01 \frac{m}{sec}$ ג.



א. $W_N = 0, W_g = 100j, W_{fk} = -16.79$ ב. $v_F \approx 9.12 \frac{m}{sec}$ ג.

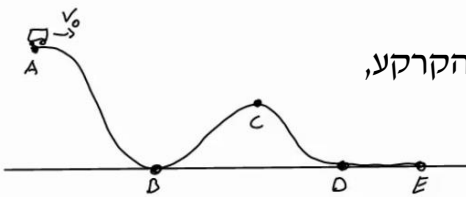
א. $v_p \approx 10.33 \frac{m}{sec}$ ב.

אנרגיה פוטנציאלית כובדית

שאלות

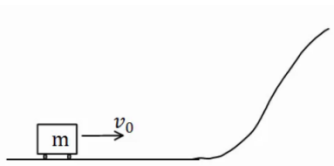
(1) רכבת הרים

רכבת הרים מתחילה בנסיעה מהנקודה A הנמצאת בגובה 20 מטרים. מהירותה בנקודה A היא 5 מטרים לשנייה. מצא את מהירותה בנקודות B, D, E הנמצאות על הקרקע, ובנקודה C הנמצאת בגובה 10 מטרים.



(2) עגלה עולה על גבעה

עגלה נעה בתחתית גבעה עם מהירות התחלתית של 20 מטר לשנייה. אין חיכוך בין העגלה לאדמה.



א. מהו הגובה המקסימלי אליו תגיע העגלה? לאחר שהגיעה לגובה המקסימלי מתחילה העגלה להתדרדר חזרה במורד הגבעה.

ב. מה תהיה מהירותה כשתגיע חזרה לתחתית?

תשובות סופיות

$$v_B \approx 20.62 \frac{\text{m}}{\text{sec}} = v_E = v_D, \quad v_C \approx 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (1)$$

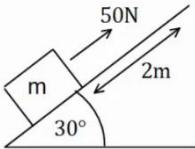
$$v_F = \pm v_0 \quad \text{ב.} \quad h_{\max} = 20\text{m} \quad \text{א.} \quad (2)$$

אנרגיה כללית ומשפט עבודה-אנרגיה

שאלות

(1) כוח מעלה במדרון משופע

כוח של 50 ניוטון פועל על גוף במקביל למשטח משופע בעל זווית של 30° . מסת הגוף היא $m = 4\text{kg}$ והוא מתחיל תנועתו ממנוחה. חשב את מהירות הגוף לאחר שהתקדם 2 מטרים במעלה המדרון (אין חיכוך).

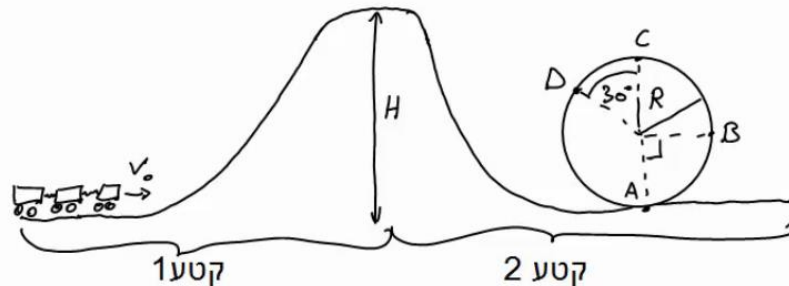


(2) עוד רכבת הרים

רכבת הרים מתחילה בנסיעה בצדו השמאלי של המסלול באיור. לרכבת מהירות התחלתית נמוכה v_0 .

בקטע הראשון כוח F מושך את הרכבת כלפי מעלה במהירות קבועה עד לשיא הגובה H . בשיא הגובה הכוח נפסק ולאחר מכן הרכבת נעצרת (באמצעות מעצור) למספר שניות, על מנת שהנוסעים יוכלו לפחד לקראת הנפילה. בקטע השני הרכבת נופלת (ללא הכוח F) ומבצעת סיבוב אנכי - "לופ". התייחס למסת הרכבת והנתונים באיור כפרמטרים נתונים.

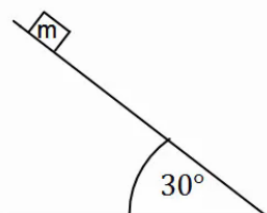
א. מצא את העבודה הכוללת המבצע הכוח F על הרכבת.
 ב. מצא את מהירות הרכבת בכל הנקודות המצוינות באיור.



(3) מסה מחליקה במדרון

מסה $m = 4\text{kg}$ מונחת במנוחה בגובה $h = 5\text{m}$ על מדרון משופע. שיפוע המדרון הוא 30° .

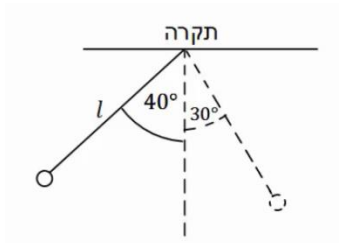
א. מצא את מהירות המסה בתחתית המדרון אם אין חיכוך בינה למשטח.
 ב. חזור על סעיף א' עבור מקרה בו יש חיכוך קינטי ומקדם החיכוך הוא $\mu_k = 0.2$.
 ג. חזור על סעיף ב' אם בנוסף לחיכוך יש גם כוח $F = 60\text{N}$, במקביל למדרון ובכיוון תנועת המסה.



(4) מטוטלת

מטוטלת בעלת אורך חוט $\ell = 50\text{cm}$ תלויה מהתקרה.

מרימים את המטוטלת לזווית של 40° ביחס לאנך מהתקרה ומשחררים ממנוחה.



א. מהי עבודת כוח המתיחות לאורך התנועה?

ב. מהי מהירות המטוטלת בתחתית המסלול?

ג. מהי מהירות המטוטלת לאחר שעלתה זווית של 30° ?

ד. מהי הזווית המקסימלית אליה תגיע המטוטלת?

תשובות סופיות

$$V_F \approx 5.48 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (1)$$

$$W_F = mgH \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$v_F = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{א.} \quad (3)$$

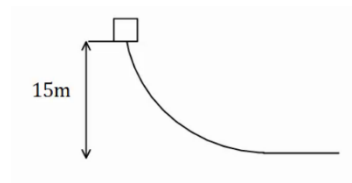
$$W_T = 0 \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$\theta_{\max} = 40^\circ \quad \text{ד.}$$

$$v_C = \sqrt{2g(H-2R)}, \quad v_D = \sqrt{2g(H-1.87R)} \quad \text{ב.}$$

$$v_F \approx 19.11 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.} \quad v_F \approx 8.08 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.}$$

$$v_F \approx 1.03 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.} \quad v_F \approx 1.55 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.}$$

עבודת החיכוך והחום**שאלה****(1) גוף נופל ממסלול עקום**

גוף נופל ממנוחה ממעלה גבעה בגובה 15 מטר.

בתחתית הגבעה מהירות הגוף היא 5 מטר לשנייה.

כמה אנרגיה הלכה לאיבוד לחום? מסת הגוף היא 2 ק"ג.

תשובה

$$Q = 275 \text{ J} \quad (1)$$

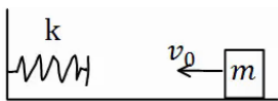
אנרגיה פוטנציאלית אלסטית – קפיץ

שאלות

(1) מסה וקפיץ במישור אופקי

מסה $m = 50\text{gr}$ נעה במהירות $v_0 = 5 \frac{m}{sec}$ על משטח אופקי חלק.

המסה נעצרת על ידי קפיץ אופקי אידיאלי (חסר מסה) בעל קבוע קפיץ $k = 10 \frac{N}{m}$.



הקפיץ רפוי לפני פגיעת המסה.

א. מהי מהירות המסה כאשר הקפיץ מכווץ 5 ס"מ?

ב. מהו הכיוון המקסימלי אליו מגיע הקפיץ?

ג. חזור על סעיפים א' ו-ב' אם בין המסה למשטח יש חיכוך.

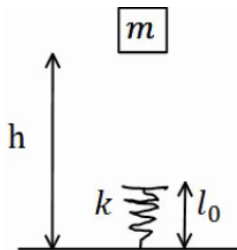
מקדם החיכוך הוא $\mu_k = 0.2$ והמרחק ההתחלתי של המסה מקצה הקפיץ הוא 0.5m.

(2) מסה נופלת על קפיץ אנכי

מסה $m = 5\text{gr}$ משוחררת ממנוחה מגובה $h = 1\text{m}$ מעל הרצפה.

קפיץ אנכי אידיאלי מחובר לרצפה.

אורכו הרפוי של הקפיץ הוא $\ell_0 = 10\text{cm}$, וקבוע הקפיץ הוא $k = 100 \frac{N}{m}$.



א. מהי מהירות המסה רגע לפי פגיעתה בקפיץ?

ב. מהו הכיוון המקסימלי אליו יגיע הקפיץ?

ג. מהו הגובה המקסימלי אליו תגיע המסה בחזרה?

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } v_F \approx 4.95 \frac{m}{sec} \quad \text{ב. } \Delta x \approx 35.4\text{cm} \quad \text{ג. } \Delta x \approx 33\text{cm}, \quad v \approx 4.72 \frac{m}{sec}$$

$$(2) \quad \text{א. } v_F = 4.24 \frac{m}{sec} \quad \text{ב. } \Delta x_{\max} = 3\text{cm} \quad \text{ג. } h_F = h_i$$

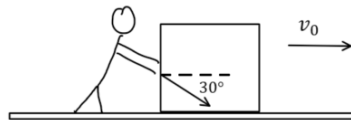
עבודה ואנרגיה – תרגילים

שאלות

(1) אדם דוחף ארגז בזווית

אדם דוחף ארגז, שמסתו 80 ק"ג, לאורך 2 מטרים על משטח אופקי. מקדם החיכוך הקינטי בין הארגז למשטח הוא 0.1. האדם דוחף את הארגז בכוח קבוע, שגודלו 400 ניוטון, בזווית של 30 מעלות לכיוון הרצפה.

לארגז ישנה גם מהירות התחלתית, שגודלה $v_0 = 0.2 \frac{m}{s}$,

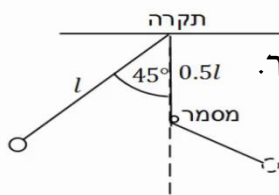


וכיוונה ימינה באיור.

- ציירו תרשים כוחות על הארגז.
- חשבו את העבודה שמבצע כל אחד מהכוחות.
- מהו הכוח השקול (גודל וכיוון) ומהי העבודה שמבצע הכוח השקול? ודאו כי התוצאה מתיישבת עם התוצאה של סעיף ב'.
- חשבו את מהירותו הסופית של הארגז, משיקולי אנרגיה.
- חשבו את תאוצתו של הארגז משיקולי כוחות ומצאו את מהירותו הסופית באמצעות התאוצה שחישבתם.

(2) מטוטלת עם מסמר

מטוטלת תלויה מהתקרה באמצעות חוט אידיאלי באורך $\ell = 80 \text{ cm}$. המטוטלת מוסטת לזווית של 45° ומשוחררת ממנוחה. בגובה 0.5ℓ מתחת לנקודת התליה של המטוטלת תקוע מסמר. מצא את הזווית המקסימלית אליה תגיע המטוטלת בצידה השני של התנועה.

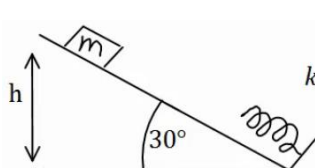


(3) גוף מחליק על מישור משופע ונתקע בקפיץ

מסה $m = 20 \text{ gr}$ מחליקה מגובה $h = 1 \text{ m}$, וממנוחה, על מדרון משופע בזווית של 30° .

בתחתית המדרון המסה מתנגשת בקפיץ אידיאלי בעל קבוע קפיץ $k = 100 \frac{N}{m}$

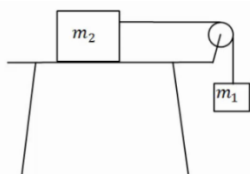
ואורך רפוי של 15 ס"מ.



- מהו הכיוון המקסימלי של הקפיץ ומהו הגובה המקסימלי אליו תחזור המסה אם המשטח חלק?
- חזור על סעיף א' אם קיים חיכוך בין המשטח למסה, ומקדם החיכוך הקינטי $\mu_k = 0.1$.
- הנח שהחיכוך הסטטי אינו חזק מספיק לעצור את המסה.

(4) מסה על שולחן ומסה תלויה

מסה, $m_2 = 4\text{kg}$, נמצאת על שולחן ומחוברת דרך חוט וגלגלת אידיאלית למסה, $m_1 = 2\text{kg}$, התלויה באוויר. גובה המסה m_1 מעל הקרקע הוא $h = 2\text{m}$. המערכת מתחילה לנוע ממנוחה.



א. מצא את מהירות הפגיעה בקרקע של m_1 , אם השולחן חלק.

ב. מצא את מהירות המסות כתלות בגובה המסה m_1 .

ג. חזור על סעיף א' כאשר קיים חיכוך עם השולחן,

ומקדם החיכוך הוא $\mu_k = 0.2$.

ד. כמה אנרגיה הלכה לאיבוד כחוס במקרה של סעיף ג'? חשב בשתי צורות.

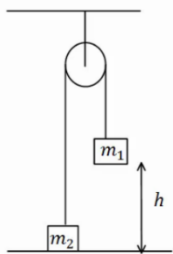
(5) שתי מסות תלויות מהתקרה

במערכת הבאה המסות תלויות מהתקרה באמצעות גלגלת אידיאלית.

נתון $m_1 > m_2$, והגובה ההתחלתי של m_1 הוא h .

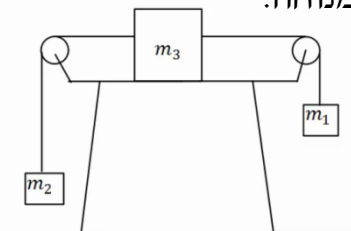
מצא את מהירות הפגיעה בקרקע של m_1 ,

אם המערכת מתחילה ממנוחה.

**(6) מסה על שולחן ושתי מסות באוויר**

במערכת הבאה שלוש מסות. $m_1 = 5\text{kg}$, $m_2 = 2\text{kg}$, $m_3 = 3\text{kg}$.

כל הגלגלות והחוטים אידיאליים. המערכת מתחילה ממנוחה.



א. מצא את המהירות כתלות בהעתק של m_1 .

הנח שהשולחן חלק.

ב. חזור על סעיף א' אם יש חיכוך עם השולחן

ומקדם החיכוך הקינטי הוא $\mu_k = 0.2$.

(7) שתי מסות תלויות מהתקרה ודחיפה

במערכת הבאה המסות תלויות מהתקרה באמצעות גלגלת אידיאלית.

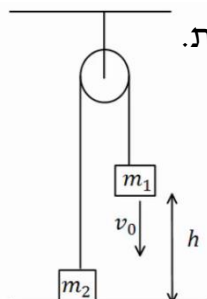
נתון $m_1 < m_2$ והגובה ההתחלתי של m_1 הוא h .

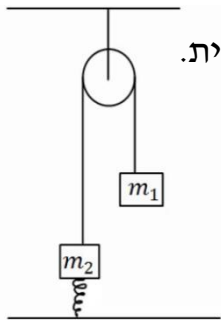
נותנים ל- m_1 מהירות התחלתית כלפי מטה שגודלה v_0 .

א. מצא את הגובה המינימלי אליו תגיע m_1 .

(הנח שהיא אינה פוגעת בקרקע).

ב. מצא את מהירות הפגיעה בקרקע של m_2 .



**(8) שתי מסות תלויות מהתקרה וקפיץ**

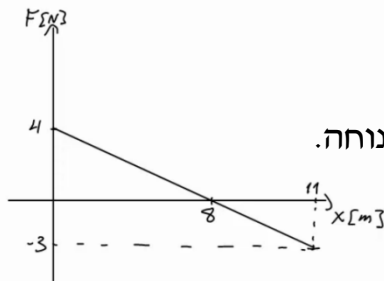
במערכת הבאה המסות תלויות מהתקרה באמצעות גלגלת אידיאלית. המסה m_2 מחוברת לרצפה באמצעות קפיץ אידיאלי. משחררים את המערכת ממנוחה במצב בו הקפיץ רפוי.

נתון: $k = 10 \frac{N}{m}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $m_1 = 4 \text{ kg}$.

א. מהי התארכות הקפיץ במצב שיווי משקל?

ב. מהי התארכות המסות במצב שיווי משקל?

ג. מהי ההתארכות המקסימלית של הקפיץ?

**(9) גרף של כוח**

נתון גרף של כוח הפועל על גוף כתלות במיקום.

הכוח הוא הכוח היחיד הפועל על הגוף.

מסת הגוף היא $m = 2 \text{ kg}$ והגוף מתחיל תנועתו ממנוחה.

א. מצא את מהירות הגוף ב- $x = 18 \text{ m}$.

ב. מצא את מהירות הגוף ב- $x = 6 \text{ m}$.

(10) כדור מקפץ מאבד אנרגיה

כדור נופל ממנוחה לרצפה מגובה 3 m .

בכל פעם שהכדור פוגע ברצפה הוא מאבד 8% מהאנרגיה שלו.

א. מה הגובה המקסימאלי אליו יגיע הכדור לאחר הפגיעה הראשונה?

ב. מה הגובה המקסימאלי אליו יגיע הכדור לאחר הפגיעה השלישית?

ג. כמה פעמים יפגע הכדור ברצפה,

עד שגובהו המקסימאלי יהיה קטן מ- 80 cm ?

(11) זריקה אנכית עם גרף של אנרגיה קינטית

כדור שמסתו 1 kg נזרק אנכית כלפי מעלה.

מישור הייחוס של האנרגיה הפוטנציאלית נבחר בנקודת הזריקה.

הגרף הנתון מתאר את האנרגיה הקינטית כפונקציה של הזמן.

א. מהי מהירות הזריקה של הכדור ומתי הגיע לשיא הגובה?

ב. מהו הגובה המקסימאלי אליו הגיע הכדור?

ג. שרטט גרף של האנרגיה הפוטנציאלית של הכדור כפונקציה של הזמן.

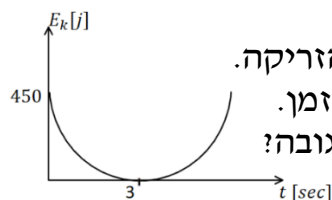
ציין על הגרף מהו הערך המירבי של האנרגיה

ומהו הזמן בו חזר הכדור לקרקע.

ד. חשב את עבודת כוח הכובד:

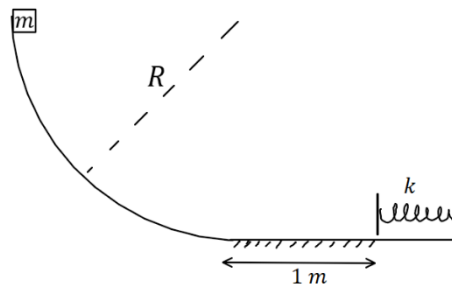
1. מרגע הזריקה ועד שיא הגובה.

2. מרגע הזריקה ועד שהכדור הגיע לגובה 30 m בדרכו חזרה.



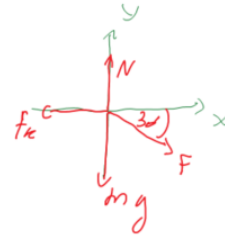
12) גוף מחליק על חצי מעגל ומכווץ קפיץ

- גוף בעל מסה $m = 2\text{kg}$ משוחרר ממנוחה מקצה של מסילה חסרת חיכוך, בצורת רבע מעגל ברדיוס $R = 2\text{m}$. בתחתית המסילה הגוף מחליק על מישור אופקי, שאינו חלק, באורך 1 מטר. מקדם החיכוך הקינטי בין המישור לגוף הוא 0.3. בקצה הקטע עם החיכוך נמצא קפיץ רפוי; הגוף פוגע בקפיץ ומכווץ אותו לכיוון מקסימאלי של 0.1 מטר. החלק עליו נמצא הקפיץ חסר חיכוך.
- א. מהי מהירות הגוף ברגע פגיעתו בקפיץ?
- ב. מהו קבוע הקפיץ?
- ג. מהו הגובה המקסימאלי אליו יגיע הגוף, כאשר יחזור אל המסילה המעגלית בפעם הראשונה?



תשובות סופיות

א. (1) ב. $W_N = W_{mg} = 0$, $W_F = 690 \text{ J}$, $W_{f_k} = -200 \text{ J}$



ג. בכיוון ציר ה- x , $\Sigma F = 250 \text{ N}$, $W_{\Sigma F} = 490 \text{ J}$. ד. $v_F = 3.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

א. (2) $\theta_{\max} = 65.53^\circ$

א. הכיוון: $x = 6.18 \text{ cm}$, הגובה: $h_F = 1 \text{ m}$ (3)

ב. הכיוון: $\Delta x = 5.6 \text{ cm}$, הגובה: $h_F = 0.72 \text{ m}$

א. (4) $v_{m_1} \approx 3.65 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ב. $v = \sqrt{\frac{40}{3}} - \frac{20}{3} h$ ג. $v = \sqrt{8} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ד. $Q = 16 \text{ J}$

א. (5) $v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2}}$

א. (6) $v = \sqrt{6\Delta x}$ ב. $v = \sqrt{4.8\Delta x}$

א. (7) $h_{\min} = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_0^2 + (m_1 - m_2)gh}{(m_1 - m_2)g}$ ב. $|v_p| = |v_i| = |v_0|$

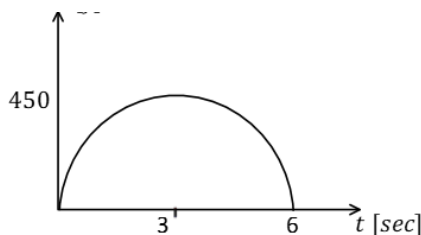
א. (8) $x_0 = 2 \text{ m}$ ב. $v \approx 2.58 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ג. $\Delta x_{\max} = 4 \text{ m}$

א. (9) $v(x=18) = 3.00 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ב. $v(x=6) = 4.12 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

א. (10) $h_{\max} = 2.76 \text{ m}$ ב. $h_{\max} = 2.336 \text{ m}$ ג. $n = 16$

א. (11) $t = 3 \text{ sec}$, $v_s = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ב. 45 m ג. 45 m

1. -450 J 2. -300 J



א. (12) $5.83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ב. $6,800 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ג. 1.4 m

הספק

שאלות

(1) דוגמה 1

- מכונית מתחילה לנסוע ממנוחה ומגיעה למהירות של 100 קמ"ש ב-10 שניות.
מסת המכונית היא 1 טון. הניחו כי אין חיכוך עם האוויר.
א. מהי העבודה שהתבצעה על המכונית?
ב. מהו ההספק של המנוע בהנחה שהוא קבוע ומנוצל במלואו (הנחה לא נכונה)?

(2) דוגמה 2

- אופנוע נוסע במהירות קבועה של 100 קמ"ש.
כנגדו פועל כוח ההתנגדות מהאוויר של 300 ניוטון.
מהו ההספק של המנוע, אם נניח שההספק מנוצל במלואו?

(3) הספק ממוצע לשנות מהירות

- איזה כוח קבוע יש להפעיל על מכונית בעלת מסה של 2 טון,
כדי לשנות את מהירותה מ- $9 \frac{km}{hr}$ ל- $27 \frac{km}{hr}$ בתוך 4sec?
מהו ההספק הממוצע של כוח זה?

(4) רכבת צעצוע חשמלית

- רכבת צעצוע חשמלית מורכבת מ 10 קרונות.
הקרון הראשון והשני מכילים מנוע חשמלי ושוקלים 2 ק"ג כל אחד.
שאר הקרונות עמוסים בצעצועים ושוקלים 3 ק"ג כל אחד.
כל אחד מן המנועים מייצר הספק קבוע של 0.2KW.
א. כמה זמן ייקח לרכבת להגיע למהירות של 10 מטר לשנייה אם התחילה לנוע ממנוחה?
ב. מהי האנרגיה הקינטית של הקרון הראשון ומהי האנרגיה הקינטית של הקרון השני, כאשר הרכבת נעה במהירות שחישבת בסעיף א'?
ג. חשב את העבודה שביצע הכוח שפעל בחיבור בין הקרון הראשון לשני על הקרון השני בזמן ההאצה.
ד. חשב את העבודה שביצע הכוח שפעל בחיבור בין הקרון השני לשלישי על הקרון השלישי בזמן ההאצה.
ה. הרכבת מגיעה לעלייה עם שיפוע של 2 מעלות, מה צריך להיות ההספק המנועים (בהנחה שהם שווים) על מנת שהרכבת תישאר במהירות קבועה של 10 מטר לשנייה?



(5) הספק כאשר נתון המיקום כתלות בזמן

כוח יחיד פועל על גוף שמסתו 4kg , הכוח פועל בכיוון התנועה

והמיקום כתלות בזמן של הגוף הוא: $x(t) = 2 + 3t + t^2$ ביחידות m.k.s.

א. מהי העבודה שמבצע הכוח במשך 3 השניות הראשונות של התנועה?

ב. מהו ההספק של הכוח ב- $t = 2\text{sec}$?

תשובות סופיות

$$\Delta E_k \approx 385,800\text{J} = W_{\sum \vec{F}} \quad \text{א.} \quad \text{ב. } p = 51.7\text{HP} \quad (1)$$

$$p = 11.18\text{HP} \quad (2)$$

$$F = 2500\text{N}, \quad \bar{p} = 16.76\text{HP} \quad (3)$$

$$\Delta t = 3.5\text{sec} \quad \text{א.} \quad \text{ב. } E_{k_1=100\text{J}} = E_{k_2} \quad \text{ג. } W_{1 \rightarrow 2} = 600\text{J} \quad (4)$$

$$W_{3 \rightarrow 2} = 1200\text{J} \quad \text{ד.} \quad \text{ה. } p = 97.7\text{W} \quad (5)$$

$$W = 144\text{J} \quad \text{א.} \quad \text{ב. } p(t=2) = 56\text{W} \quad (5)$$

הספק:

שאלות:

(1) דוגמה 1

- מכונית מתחילה לנסוע ממנוחה ומגיעה למהירות של 100 קמ"ש ב-10 שניות. מסת המכונית היא 1 טון. הניחו כי אין חיכוך עם האוויר.
- א. מהי העבודה שהתבצעה על המכונית?
- ב. מהו ההספק של המנוע בהנחה שהוא קבוע ומנוצל במלואו (הנחה לא נכונה)?

(2) דוגמה 2

- אופנוע נוסע במהירות קבועה של 100 קמ"ש. כנגדו פועל כוח ההתנגדות מהאוויר של 300 ניוטון. מהו ההספק של המנוע, אם נניח שההספק מנוצל במלואו?

(3) הספק ממוצע לשנות מהירות

- איזה כוח קבוע יש להפעיל על מכונית בעלת מסה של 2 טון כדי לשנות את מהירותה מ- $9 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ ל- $27 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ בתוך 4 sec?
- מהו ההספק הממוצע של כוח זה?

(4) רכבת צעצוע חשמלית

- רכבת צעצוע חשמלית מורכבת מ 10 קרונות. הקרון הראשון והשני מכילים מנוע חשמלי ושוקלים 2 ק"ג כל אחד. שאר הקרונות עמוסים בצעצועים ושוקלים 3 ק"ג כל אחד. כל אחד מן המנועים מייצר הספק קבוע של 0.2KW.
- א. כמה זמן ייקח לרכבת להגיע למהירות של 10 מטר לשנייה, אם התחילה לנוע ממנוחה?
- ב. מהי האנרגיה הקינטית של הקרון הראשון ומהי האנרגיה הקינטית של הקרון השני, כאשר הרכבת נעה במהירות שחישבת בסעיף א'?
- ג. חשב את העבודה שביצע הכוח שפעל בחיבור בין הקרון הראשון לשני על הקרון השני בזמן ההאצה.
- ד. חשב את העבודה שביצע הכוח שפעל בחיבור בין הקרון השני לשלישי על הקרון השלישי בזמן ההאצה.
- ה. הרכבת מגיעה לעלייה עם שיפוע של 2 מעלות, מה צריך להיות ההספק המנועים (בהנחה שהם שווים), על מנת שהרכבת תישאר במהירות קבועה של 10 מטר לשנייה?



(5) הספק כאשר נתון מיקום כתלות בזמן

כוח יחיד פועל על גוף שמסתו 4kg , הכוח הפועל בכיוון התנועה והמיקום

כתלות בזמן של הגוף הוא: $x(t) = 2 + 3t + t^2$ ביחידות m.k.s.

א. מהי העבודה שמבצע הכוח במשך 3 השניות הראשונות של התנועה?

ב. מהו ההספק של הכוח ב- $t = 2\text{sec}$?

תשובות סופיות:

- (1) א. $\Delta E_k \approx 385,800\text{J} = W_{\sum \vec{F}}$ ב. $p = 51.7\text{HP}$
- (2) $p = 11.18\text{HP}$
- (3) $F = 2500\text{N}$, $\bar{p} \approx 16.76\text{HP}$
- (4) א. $\Delta t = 3.5\text{sec}$ ב. $E_{k_1} = 100\text{J} = E_{k_2}$ ג. $W_{1 \rightarrow 2} = 600\text{J}$
- ד. $W_{3 \rightarrow 2} = 1200\text{J}$ ה. $p = 97.7\text{W}$
- (5) א. $W = 144\text{J}$ ב. $p(t = 2) = 56\text{W}$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 9 - עבודה ואנרגיה - חלק שני

תוכן העניינים

124	1. נקודת שיווי משקל.....
126	2. ניתוח באמצעות גרפים של אנרגיות.....
128	3. הספק.....
130	4. תרגילים מסכמים.....
134	5. תרגילים מסכמים כולל תנועה מעגלית.....

נקודת שיווי משקל:

שאלות:

1) שעון תלוי

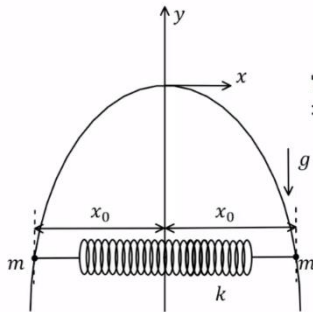


- שעון קיר תלוי באמצעות מסמר הנמצא בקצהו העליון. ניתן לסובב את כל השעון (לא את המחוגים) סביב המסמר. א. מצא באילו מצבים השעון יהיה בשיווי משקל וקבע עבור כל מצב איזה סוג שיווי משקל הוא. ב. חזור על סעיף א' אם המסמר תקוע במרכז השעון (השעון עדיין יכול להסתובב סביב המסמר).

2) אנרגיה פוטנציאלית בשיווי משקל

- האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף נתונה לפי הפונקציה הבאה: $U = (x-4)^2 + x^3$. מצא את נקודת שיווי המשקל ומיין אותה לסוגים הרלוונטיים.

3) קפיץ וחרוזים על תיל קשיח מכופף



- תיל קשיח מכופף בצורת פרבולה המתאימה לפונקציה: $y = -Ax^2$ כאשר A קבוע נתון. על התיל מושחלים שני חרוזים זהים בעלי מסה m , אחד בכל צד. קפיץ אופקי בעל קבוע k ואורך רפוי l מחבר בין החרוזים (ראה איור). חשב את המרחק האופקי x_0 של כל חרוז מציר ה- y במצב של שיווי משקל. הנח כי הקפיץ והחרוזים נמצאים תמיד באותו הגובה. הדרכה: כתוב ביטוי לאנרגיה הפוטנציאלית כפונקציה של x בלבד.

תשובות סופיות:

(1) א. כשהשעון למטה שיווי משקל יציב וכשהשעון הפוך ב- 180° שיווי משקל רופף.
 ב. השעון בשיווי משקל אדיש.

$$(2) \quad x_1, U''(x_1) = 6 \cdot \frac{4}{3} + 2 > 0 \quad \text{נק' מינימום} \Leftarrow \text{ש.מ. יציב.}$$

$$x_2, U''(x_2) = -2 \cdot 6 + 2 < 0 \quad \text{נק' מקסימום} \Leftarrow \text{ש.מ. רופף.}$$

$$(3) \quad x_0 = \frac{kl}{2k - 2mgA}$$

ניתוח באמצעות גרפים של אנרגיות:

שאלות:

(1) נקודה הכי ימנית

גוף שמסתו 6 ק"ג נע לאורך ציר x בהשפעת כוח יחיד הנגזר מהאנרגיה הפוטנציאלית: $U(x) = 2x^4 - 36x^2$.

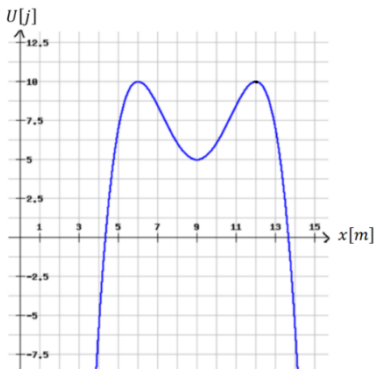
נתון שכאשר הגוף מגיע לנקודה בה $x = -1.5\text{m}$ מהירותו שווה ל- $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

א. מהי הנקודה הימנית ביותר במסלול של הגוף?

ב. חזור על סעיף א', אם ערך המהירות היה: $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

(2) גמל דו דבשתי

כוח משמר פועל על כדור בעל מסה 625gr. הגרף הבא מתאר את האנרגיה הפוטנציאלית של הכדור כתלות במיקומו:



א. שרטטו באופן איכותי את הגרף של הכוח כתלות במיקום.

ב. תארו באופן מילולי את תנועת הכדור אם הוא משוחרר מ- $x = 7\text{m}$ ממנוחה.

ג. מהי המהירות המינימלית שצריך לתת לכדור במצב של סעיף ב' על מנת שהכדור יגיע לאינסוף?

ד. מהן נקודות שיווי המשקל?

מיינו אותן לפי יציבותן וציינו מה המשמעות של כל סוג של שיווי משקל.

(3) שני גופים בפוטנציאל אקספוננציאלי ריבועי

שני גופים נמצאים על ציר ה- x ונתונים להשפעת הפוטנציאל: $U(x) = Axe^{-Bx^2}$ כאשר A, B הם קבועים חיוביים. נתון כי ברגע מסוים גוף אחד נמצא ב- $x=0$ והאנרגיה שלו היא אפס, והגוף השני נמצא ב- $x = -\sqrt{\frac{1}{B}}$ והאנרגיה שלו

היא: $E = -\frac{A}{e} \sqrt{\frac{1}{B}}$. היכן ייפגשו הגופים? (בחר את התשובה הנכונה):

א. בתחום $-\sqrt{\frac{1}{B}} \leq x \leq 0$.

ב. הגופים לא ייפגשו אף פעם.

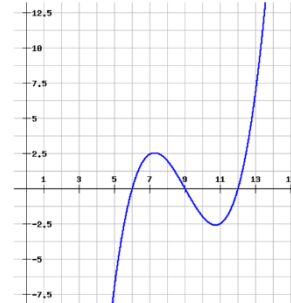
ג. בנקודה $x = -\sqrt{\frac{1}{B}}$.

ד. ב- $x=0$.

תשובות סופיות:

(1) א. $x = -1.202\text{m}$ ב. $x = 6.81\text{m}$

(2) א.



ב. מתחיל בתאוצה בכיוון החיובי עד $x = 9\text{m}$ ואז מתחיל להאט עד $x = 11\text{m}$
 שם עוצר רגעית ומסתובב חזרה. כך חוזר עד אינסוף.

ג. 2 מטר לשנייה.

ד. $x = 6\text{m}$ לא יציבה, $x = 9\text{m}$ יציבה, $x = 12\text{m}$ לא יציבה.

(3) א'.

הספק:

שאלות:

(1) דוגמה 1

- מכונית מתחילה לנסוע ממנוחה ומגיעה למהירות של 100 קמ"ש ב-10 שניות. מסת המכונית היא 1 טון. הניחו כי אין חיכוך עם האוויר.
- א. מהי העבודה שהתבצעה על המכונית?
- ב. מהו ההספק של המנוע בהנחה שהוא קבוע ומנוצל במלואו (הנחה לא נכונה)?

(2) דוגמה 2

- אופנוע נוסע במהירות קבועה של 100 קמ"ש. כנגדו פועל כוח ההתנגדות מהאוויר של 300 ניוטון. מהו ההספק של המנוע, אם נניח שההספק מנוצל במלואו?

(3) הספק ממוצע לשנות מהירות

- איזה כוח קבוע יש להפעיל על מכונית בעלת מסה של 2 טון, כדי לשנות את מהירותה מ- $9 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ ל- $27 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ בתוך 4sec?
- מהו ההספק הממוצע של כוח זה?

(4) רכבת צעצוע חשמלית

- רכבת צעצוע חשמלית מורכבת מ-10 קרונות. הקרון הראשון והשני מכילים מנוע חשמלי ושוקלים 2 ק"ג כל אחד. שאר הקרונות עמוסים בצעצועים ושוקלים 3 ק"ג כל אחד. כל אחד מן המנועים מייצר הספק קבוע של 0.2KW.
- א. כמה זמן ייקח לרכבת להגיע למהירות של 10 מטר לשנייה אם התחילה לנוע ממנוחה?
- ב. מהי האנרגיה הקינטית של הקרון הראשון ומהי האנרגיה הקינטית של הקרון השני, כאשר הרכבת נעה במהירות שחישבת בסעיף א'?
- ג. חשב את העבודה שביצע הכוח שפעל בחיבור בין הקרון הראשון לשני על הקרון השני בזמן ההאצה.
- ד. חשב את העבודה שביצע הכוח שפעל בחיבור בין הקרון השני לשלישי על הקרון השלישי בזמן ההאצה.

ה. הרכבת מגיעה לעלייה עם שיפוע של 2 מעלות, מה צריך להיות הספק המנועים (בהנחה שהם שווים) על מנת שהרכבת תישאר במהירות קבועה של 10 מטר לשנייה?



5) הספק כאשר נתון המיקום כתלות בזמן

כוח יחיד פועל על גוף שמסתו 4kg, הכוח פועל בכיוון התנועה

והמיקום כתלות בזמן של הגוף הוא: $x(t) = 2 + 3t + t^2$ ביחידות m.k.s.

א. מהי העבודה שמבצע הכוח במשך 3 השניות הראשונות של התנועה?

ב. מהו ההספק של הכוח ב- $t = 2 \text{ sec}$?

תשובות סופיות:

$$\Delta E_k \approx 385,800 \text{ J} = W_{\sum \vec{F}} \quad \text{א.} \quad \text{ב. } p = 51.7 \text{ HP} \quad (1)$$

$$p = 11.18 \text{ HP} \quad (2)$$

$$F = 2500 \text{ N}, \quad \bar{p} = 16.76 \text{ HP} \quad (3)$$

$$\Delta t = 3.5 \text{ sec} \quad \text{א.} \quad E_{k_1=100 \text{ J}} = E_{k_2} \quad \text{ב.} \quad W_{1 \rightarrow 2} = 600 \text{ J} \quad \text{ג.} \quad (4)$$

$$W_{3 \rightarrow 2} = 1200 \text{ J} \quad \text{ד.} \quad p = 97.7 \text{ W} \quad \text{ה.} \quad (5)$$

$$W = 144 \text{ J} \quad \text{א.} \quad p(t=2) = 56 \text{ W} \quad \text{ב.} \quad (5)$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) קפיץ יורה כדור

הלוע של רובה צעצוע מורכב מקפיץ בעל קבוע k ובוכנה בעלת מסה m_1 .

בטעינה דוחפים כדור בעל מסה m_2 ודורכים את הקפיץ.

הכיווץ של הקפיץ הוא d .

ברגע הירי הקפיץ משוחרר ממנוחה.

א. באיזה רגע הכדור מנתק מגע מהבוכנה?

ב. מהי מהירות הכדור ברגע הזה?



2) כוח כפונקציה של מיקום, קפיץ וחיכוך*

מסה m נמצאת על מישור אופקי לא חלק ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k .

החל מ- $t=0$ פועל על המסה כוח התלוי במיקום: $\vec{F}(x) = (30x^2 - 4x)\hat{x}$.

כל היחידות בשאלה הן יחידות סטנדרטיות.

ב- $t=0$ המסה נמצאת בראשית עם מהירות התחלתית v_0 והקפיץ רפוי.

נתונים: $m = 2\text{kg}$, $k = 10\frac{\text{N}}{\text{m}}$, $\mu_k = 0.3$, $v_0 = 5\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

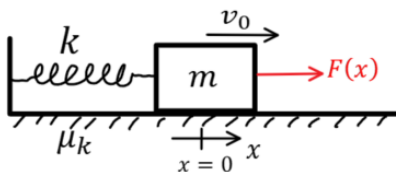
א. רשמו ביטוי לתאוצת המסה כתלות במיקום $a(x)$, הנח כי התנועה תמיד

בכיוון החיובי.

ב. מצאו את המיקום בו התאוצה של המסה מתאפסת.

ג. מהי העבודה שביצע הכוח מתחילת התנועה ועד אשר $x = 0.5\text{m}$?

ד. מהי המהירות של המסה כאשר מיקומה $x = 0.5\text{m}$?



(3) כוח כפונקציה של זמן במישור משופע*

מסה $m = 5\text{kg}$ נמצאת על מישור משופע לא חלק.

על המסה פועל כוח התלוי בזמן $F(t)$ שדוחף אותה במעלה המישור.

מהירות המסה ידועה והיא נתונה לפי הפונקציה: $v(t) = 3t^2 + 2t$.

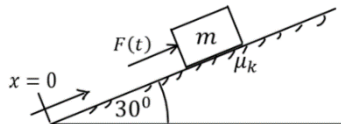
מקדם החיכוך הוא: $\mu_k = 0.2$ ונתון כי: $x(t=0) = 0$.

כל היחידות הן יחידות סטנדרטיות.

זווית המישור היא 30° מעלות.

א. (1) היכן נמצא הגוף ב- $t = 2\text{sec}$?

(2) מהו גודל הכוח F ברגע זה?



ב. מהו מיקום הגוף כאשר תאוצתו היא: $8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$?

ג. מהי האנרגיה הקינטית של הגוף ברגע של סעיף ב'?

ד. מהי עבודת הכוח F מרגע $t = 0\text{sec}$ ועד ל- $t = 3\text{sec}$?

(4) קופסה מחליקה על מקטעים ישרים*

קופסה משוחררת ממנוחה ומתחילה להחליק לאורך מסלול שאינו ידוע,

אך מורכב מקטעים ישרים בלבד.

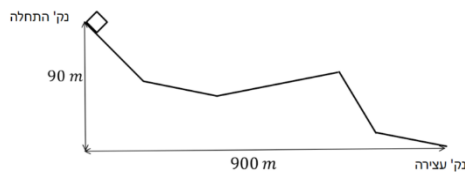
בין הקופסה למשטח עליו היא מחליקה קיים

חיכוך והקופסה נעצרת בנקודה

המרוחקת 900m אופקית ו- 90m מתחת

לנקודה בה התחילה.

חשבו את מקדם החיכוך, לא חסרים נתונים.

**(5) שרשרת על גלגלת**

שרשרת בעלת מסה M ואורך L מונחת על גלגלת

אידיאלית התלויה מהתקרה.

השרשרת מונחת כך שרבע מהשרשרת בצד אחד של

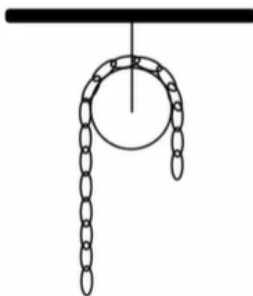
הגלגלת ושאר השרשרת בצד השני.

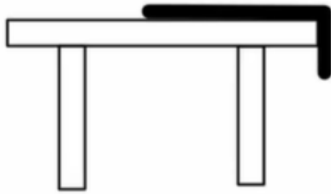
הנח שהחלק על הגלגלת עצמה זניח.

המערכת משוחררת ממנוחה.

מצאו את מהירות השרשרת ברגע שהקצה האחרון

שלה עובר את הגלגלת.



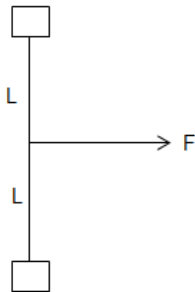

(6) חבל מחליק משולחן אנרגיה ומשוואת תנועה*

חבל באורך L ומסה M מונח על שולחן חסר חיכוך כך שהקצה של החבל באורך d נשמט מחוץ לשולחן. החבל מוחזק ומשוחרר ממנוחה.

א. רשמו את האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית במהלך החלקת החבל.

ב. השתמשו בשימור אנרגיה ומצאו את משוואת התנועה של החבל.

ג. השתמשו במשוואת התנועה ומצאו את מהירות החלקת כל החבל מהשולחן למטה.


(7) חוט מושך שתי מסות מחוברות בחוט**

חוט חסר מסה באורך $2L$ מחבר שתי מסות הנעות במישור אופקי ללא חיכוך.

כוח אופקי קבוע ונתון מושך את החוט במרכזו, בכיוון מאונך לחוט.

הנח שהמסות מתנגשות ונדבקות בהתנגשות. כמה אנרגיה הלכה לאיבוד בהתנגשות?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. בנקודת הרפיון של הקפיץ.} \quad \text{ב. } V = \sqrt{\frac{kd^2}{m_1 + m_2}}$$

$$(2) \quad \text{א. } a_{(x)} = 15x^2 - 7x - 3 \quad \text{ב. } x = 0.738\text{m} \quad \text{ג. } W = 0.75\text{J}$$

$$\text{ד. } V = 4.64 \frac{m}{s}$$

$$(3) \quad \text{א. (1) } x = 12 \quad (2) F = 103.7\text{N} \quad \text{ב. } x = 2\text{m} \quad \text{ג. } E_k = 62.5\text{J}$$

$$\text{ד. } W = 3935\text{J}$$

$$(4) \quad 0.1$$

$$(5) \quad V = \sqrt{\frac{3gL}{8}}$$

$$(6) \quad \text{א. } E = \frac{1}{2}MV^2 - \frac{M}{2}g\frac{y^2}{2} \quad \text{ב. } \ddot{y} = \frac{gy}{L}$$

$$\text{ג. } V(y=L) = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - d^2)}$$

$$(7) \quad \Delta E = F \cdot l$$

תרגילים מסכמים כולל תנועה מעגלית:

שאלות:

(1) תנאי להשלים סיבוב עם החיכוך במישור משופע

גוף בעל מסה m מחליק על גבי מסילה המתוארת באיור.

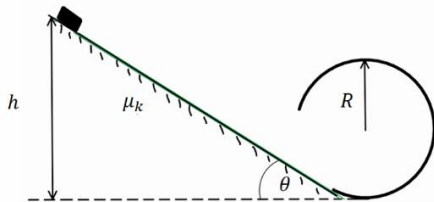
מקדם החיכוך בין הגוף למישור המשופע הוא μ_k .

זווית המישור היא θ .

החלק המעגלי חסר חיכוך.

מצא את h הנמוך ביותר עבורו הגוף ישלים

סיבוב בחלק העגול.



(2) שני חרוזים על טבעת מתרוממת*

טבעת בעלת רדיוס R ומסה M תלויה מהתקרה

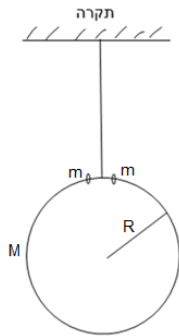
באמצעות חוט. מניחים בקצה העליון של הטבעת שני

חרוזים בעלי מסה m זהה.

החרוזים מתחילים ליפול ממנוחה לשני צדי הטבעת.

מצא את היחס בין המסות הדרוש על מנת שהטבעת

תתרומם במהלך נפילת הכדורים.



(3) מסה מסתובבת על שולחן ונמשכת למרכז*

מסה m נעה על שולחן חסר חיכוך בתנועה מעגלית ברדיוס R ובמהירות v_0 .

חוט קשור אל המסה הולך למרכז השולחן ועובר דרך גלגלת אידיאלית וחור בשולחן.

מושכים את החוט כך שהמסה מתקרבת למרכז.

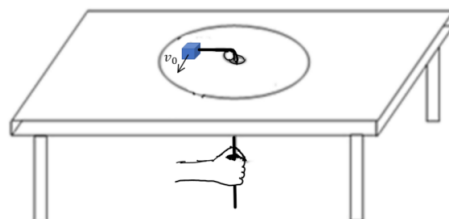
א. מהי המהירות הזוויתית כתלות ב- r (המרחק ממרכז הסיבוב).

השתמשו בשיקולי כוחות בלבד. רמז: אין כוחות בציר $\hat{\theta}$.

ב. הוכיחו שהעבודה שהושקעה במשיכת החוט עד לרדיוס R_2 כלשהו הקטן

מ- R זהה לשינוי באנרגיה הקינטית של המסה.

בסעיף זה ניתן להניח שהמהירות הרדיאלית קבועה.



תשובות סופיות:

$$h_{\min} = \frac{2.5R}{1 - \frac{\mu_k}{\tan \theta}} \quad (1)$$

$$\frac{m}{M} \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\omega(r) = \frac{v_0 R}{r^2} \text{ א.} \quad (3) \quad \text{ב. הוכחה.}$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 10 - מתקף ותנע - חלק ראשון

תוכן העניינים

136	1. מתקף
137	2. תנע ושימור תנע
141	3. התנגשות אלסטית
142	4. התנגשות פלסטית ורתע
143	5. מקרים מיוחדים
144	6. תרגילים נוספים

מתקף:

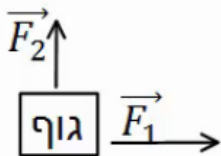
שאלות:

(1) שחקן בועט בכדור

שחקן כדורגל בועט בכדור, הכוח הממוצע שמפעיל השחקן הוא 100 ניוטון בכיוון ציר ה- x .
 זמן המגע של השחקן עם הכדור הוא 0.2 שניות.
 חשב את המתקף שהפעיל השחקן על הכדור.

(2) חישוב מתקף כולל

בציור הבא נתון גוף שפועלים עליו שני כוחות: $\vec{F}_1 = 2\hat{x}$, $\vec{F}_2 = 3\hat{y}$.



זמן הפעולה של שני הכוחות הוא: $\Delta t = 0.5 \text{ sec}$.
 א. חשב את המתקף של כל כוח בנפרד.
 ב. מצא את וקטור המתקף הכולל. מהו גודלו וכיוונו?
 ג. חשב את שקול הכוחות הפועל על הגוף ומצא באמצעות שקול הכוחות את גודל המתקף הכולל.

תשובות סופיות:

(1) $\vec{J} = 20\text{N}\hat{x}$

(2) א. $\vec{J}_1 = 1\cdot\hat{x}$, $\vec{J}_2 = 1.5\cdot\hat{y}$

ב. $(1, 1.5)$, גודל: $|\vec{J}_T| \approx 1.8\text{N}\cdot\text{sec}$, כיוון: $\theta \approx 56.31^\circ$.

ג. $\sum \vec{F} = 2\hat{x} + 3\hat{y}$, גודל: $|\vec{J}_T| \approx 1.8\text{N}\cdot\text{sec}$.

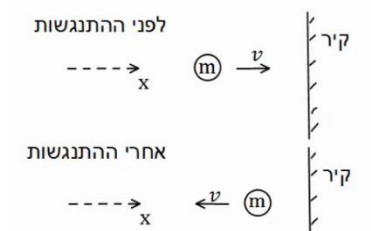
תנע ושימור תנע:

שאלות:

(1) כדור מתנגש בקיר

כדור בעל מסה $m = 0.5\text{kg}$ נע במהירות $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ בכיוון ציר ה- x .

ברגע מסויים הכדור מתנגש בקיר וחוזר חזרה באותה מהירות. התעלם מכוח הכובד.



א. מהו התנע של הכדור לפני ההתנגשות?

ב. מהו התנע של הכדור לאחר ההתנגשות?

ג. מהו השינוי בתנע?

ד. מהו המתקף שהפעיל הקיר על הכדור?

ה. מהו הכוח הנורמלי הממוצע שהפעיל הקיר

על הכדור, אם משך זמן ההתנגשות היה 0.2 שניה.

(2) כדור מתנגש בקיר משופע

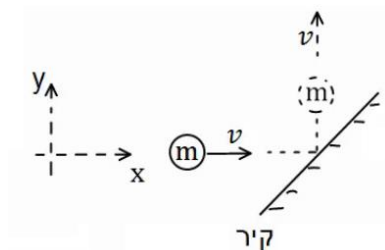
כדור בעל מסה $m = 0.2\text{kg}$ נע במהירות $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ בכיוון ציר ה- x .

ברגע מסוים הכדור מתנגש בקיר משופע.

לאחר ההתנגשות הכדור נע בכיוון החיובי של ציר

ה- y באותו גודל של מהירות.

התעלם מכוח הכובד.



א. מהו התנע של הכדור לפני ההתנגשות?

ב. מהו התנע של הכדור לאחר ההתנגשות?

ג. מהו השינוי בתנע?

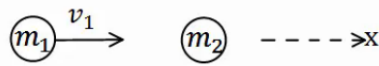
ד. מהו המתקף שהפעיל הקיר על הכדור?

ה. מהו הכוח הנורמלי הממוצע שהפעיל הקיר על הכדור,

אם משך זמן ההתנגשות היה 0.1 שנייה?

(3) כדור מתנגש בכדור במנוחה

כדור 1 בעל מסה $m_1 = 2\text{kg}$ נע במהירות $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ בכיוון ציר ה- x .



ברגע מסוים הכדור פוגע בכדור 2 הנמצא במנוחה.

מסת הכדור השני היא $m_2 = 3\text{kg}$.

לאחר הפגיעה, כדור 1 ממשיך במהירות $u_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ בכיוון החיובי של ציר ה- x .

א. מהו התנע הכולל לפני ההתנגשות?

ב. השתמש בחוק שימור התנע ומצא את מהירותו של כדור 2 לאחר ההתנגשות.

ג. מהו המתקף שפעל על כדור 1?

ד. מהו המתקף שפעל על כדור 2?

ה. מהו המתקף שפעל על כל המערכת?

(4) שני כדורים נעים אחד כלפי השני

שני כדורים נעים אחד כלפי השני ומתנגשים ברגע מסוים.

מסות הכדורים והמהירות שלהם לפני ההתנגשות



הן: $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $v_2 = 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $m_1 = 4\text{kg}$, $m_2 = 3\text{kg}$.

מהירותו של כדור 2 לאחר ההתנגשות היא: $u_2 = 12 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, בכיוון הפוך למהירותו לפני ההתנגשות.

הנח שההתנגשות היא מצחית (כלומר, שהכדורים נשארים על אותו ציר לאחר ההתנגשות).

א. מהו התנע הכולל לפני ההתנגשות?

ב. השתמש בחוק שימור התנע ומצא את מהירותו של כדור 1 לאחר ההתנגשות.

ג. מהו המתקף שפעל על כדור 1?

ד. מהו המתקף שפעל על כדור 2?

ה. מהו המתקף שפעל על כל המערכת?

(5) התנגשות דו-מימדית

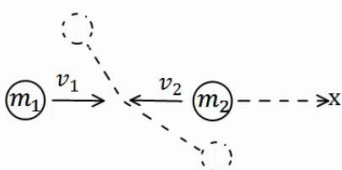
שני כדורים נעים אחד כלפי השני על ציר ה- x .

מהירויות הכדורים ומסותיהן הן: $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x}$, $v_2 = -5 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x}$, $m_1 = 3\text{kg}$, $m_2 = 4\text{kg}$.

הכדורים מתנגשים ולאחר ההתנגשות כדור אחד נע

בזווית של 30 מעלות מתחת לציר ה- x וכדור 2 נע

בזווית של 120 מעלות עם ציר ה- x החיובי.

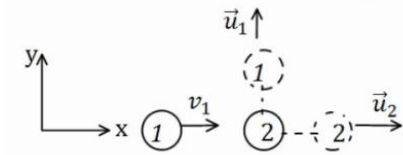


א. מצא את גודל מהירויות הכדורים לאחר ההתנגשות.

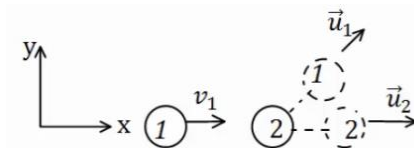
ב. מה המתקף שפעל על כל כדור?

(6) איזה התנגשות אפשרית

כדור מספר 1 נע במהירות חיובית על ציר ה- x .
ברגע מסוים הוא מתנגש בכדור מספר 2 הנמצא במנוחה.
נתון כי לאחר ההתנגשות מהירותו של כדור 2
היא בכיוון ציר ה- x .



א. האם יתכן כי מהירותו של כדור 1
לאחר ההתנגשות היא רק בכיוון ציר ה- y ?



ב. האם יתכן כי מהירותו לאחר ההתנגשות
היא בזווית של 30° מעלות עם ציר ה- x ?

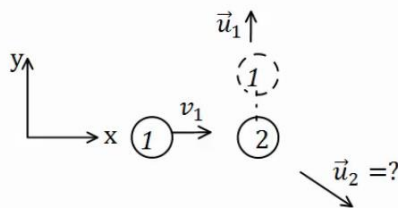
ג. האם יתכן שכדור מספר 1 נע בכיוון החיובי
של ציר ה- x לאחר ההתנגשות?

ד. האם יתכן כדור מספר 1 נע בכיוון השלילי של ציר ה- x לאחר ההתנגשות?

ה. האם יתכן ששני הכדורים נעים בכיוון השלילי של ציר ה- x לאחר ההתנגשות?

(7) מציאת המהירות של כדור 2

כדור מספר 1 נע בכיוון החיובי של ציר ה- x .



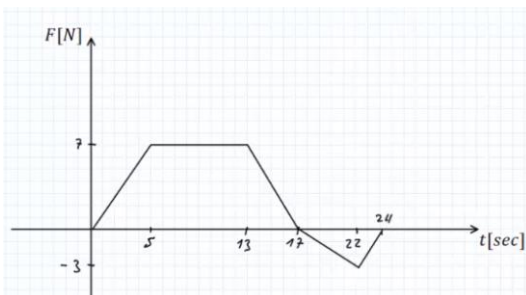
מסתו היא $m_1 = 3\text{kg}$ ומהירותו היא $v_1 = 12 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x}$.

הכדור פוגע בכדור מספר 2 שמסתו היא $m_2 = 4\text{kg}$
הנמצא במנוחה.

מהירותו של כדור 1 לאחר ההתנגשות היא $u_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ (בכיוון ציר ה- y החיובי בלבד).

א. מצא את וקטור המהירות של כדור 2 לאחר ההתנגשות.

ב. מהו גודלה של המהירות ומהו כיוונה?

**(8) גרף של כוח כתלות בזמן**

גוף בעל מסה של 2kg נע לאורך קו ישר
בהשפעת כוח המשתנה בזמן.
גודלו של הכוח כתלות בזמן נתון בגרף.
הגוף התחיל תנועתו ממנוחה.

א. מצא את המתקף שפעל על הגוף עד

ל- $t = 17\text{sec}$, מהי מהירות הגוף באותו הרגע?

ב. מצא את המתקף שפעל על הגוף עד לרגע $t = 24\text{sec}$, מהי מהירות הגוף
באותו הרגע?

ג. מהו המתקף שפעל על הגוף במשך הזמן $17\text{sec} < t < 24\text{sec}$?
מה משמעות הסימן של המתקף?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \vec{p} = 2.5\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x} \quad \text{א.} \quad \vec{p} = -2.5\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x} \quad \text{ב.} \quad \Delta \vec{p} = -5\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x} \quad \text{ג.}$$

$$\vec{J}_T = \vec{J}_N = \Delta \vec{p} = -2.5\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x} \quad \text{ד.} \quad \vec{N} = -25\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \hat{x} = -25\text{N} \hat{x} \quad \text{ה.}$$

$$(2) \quad \vec{p} = 0.6\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x} \quad \text{א.} \quad \vec{p} = 0.6\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{y} \quad \text{ב.} \quad (-0.6, 0.6) \quad \text{ג.}$$

$$\vec{J}_N = (-0.6, 0.6)\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ד.} \quad \vec{N} = (-6, 6)\text{N} \quad \text{ה.}$$

$$(3) \quad \vec{p}_T = 40\hat{x}\text{N} \cdot \text{sec} \quad \text{א.} \quad \vec{u}_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x} \quad \text{ב.} \quad \vec{J}_{T1} = -30\hat{x}\text{N} \cdot \text{sec} \quad \text{ג.}$$

$$\vec{J}_{T2} = 30\hat{x}\text{N} \cdot \text{sec} \quad \text{ד.} \quad 0 \quad \text{ה.}$$

$$(4) \quad \vec{p}_T = -5\hat{x}\text{N} \cdot \text{sec} \quad \text{א.} \quad u_1 = -10.25 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.} \quad \vec{J}_1 = -81\hat{x}\text{N} \cdot \text{sec} \quad \text{ג.}$$

$$\vec{J}_2 = 81\hat{x}\text{N} \cdot \text{sec} \quad \text{ד.} \quad 0 \quad \text{ה.}$$

$$(5) \quad u_1 = 5.78 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_2 = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{א.} \quad \vec{J}_1 = (-14.97, -8.67) \quad \text{ב.}$$

$$(6) \quad \text{א. לא.} \quad \text{ב. לא.} \quad \text{ג. כן.} \quad \text{ד. כן.} \quad \text{ה. לא.}$$

$$(7) \quad \vec{u}_2 = (9, -6) \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{א.} \quad \text{ב. גודל: } |\vec{u}_2| \approx 10.82 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \text{ כיוון: } \theta = 33.69^\circ.$$

$$(8) \quad J = 87.5\text{N} \cdot \text{sec}, v_F(t=17\text{sec}) = 43.75 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{א.}$$

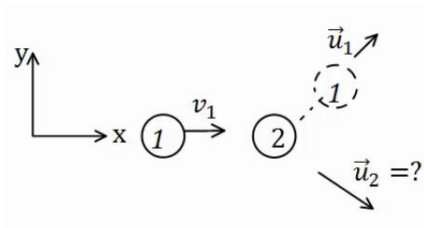
$$\text{ב.} \quad J = 77\text{N} \cdot \text{sec}, v(t=24\text{sec}) = 38.5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

ג. $J_{17 < t < 24} = -10.5$, המשמעות של הסימן שהכוח שמפעיל את המתקף פועל בכיוון השלילי.

התנגשות אלסטית:

שאלות:

(1) התנגשות אלסטית



כדור בעל מסה $m_1 = 2\text{kg}$ פוגע בכדור שני הנמצא במנוחה. מהירותו של הכדור הראשון לפני ההתנגשות היא $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

נתון כי מהירותו של הכדור הראשון לאחר ההתנגשות היא $u_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ בזווית של 45 מעלות ביחס לכיוון פגיעתו.

מצא את מהירות הכדור השני ומסתו, אם ידוע שההתנגשות היא אלסטית.

(2) התנגשות אלסטית מצחית



גוף בעל מסה $m_1 = 5\text{kg}$ נע על ציר ה- x ומתנגש בגוף אחר בעל מסה $m_2 = 8\text{kg}$, הנע על ציר ה- x גם כן.

מהירויות הגופים לפני ההתנגשות הן: $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $v_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. בהתאמה.

ידוע שההתנגשות היא פלסטית ומצחית. מצא את מהירויות הגופים לאחר ההתנגשות.

תשובות סופיות:

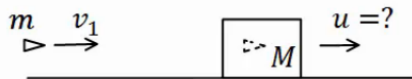
$$(1) \text{ מסה: } m_2 \approx 1.45\text{kg}, \text{ מהירות: } u_{2x} = 17.86 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_{2y} = -9.75 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$(2) u_2 \approx 16.54 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_1 = 1.54 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

התנגשות פלסטית ורתע:

שאלות:

(1) קליע נתקע בבול עץ



קליע נע במהירות $v_1 = 100 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ לעבר בול עץ

הנמצא במנוחה. הקליע חודר לבול העץ ונתקע בתוכו.

מסת הקליע היא $m = 20 \text{ gr}$ ומסת בול העץ היא $M = 5 \text{ kg}$.

מצא את המהירות המשותפת של הגופים לאחר הפגיעה.



(2) קליע נורה מרובה

כדור נורה מרובה הנמצא במנוחה.

מהירות הכדור לאחר הירי היא $u_1 = 100 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, ומסת הכדור היא $m = 20 \text{ gr}$.

מהי מהירות הרובה, אם מסת הרובה היא $M = 3 \text{ kg}$?

(3) טיל מתפרק

טיל טס באוויר במהירות $v = 540 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ בקו ישר, מסת הטיל היא $M = 50 \text{ kg}$.

ברגע מסוים הטיל מתפוצץ לשני חלקים. מסת החלק הראשון היא $m_1 = 20 \text{ kg}$. מצא את מהירות החלק השני במקרים הבאים:

א. מהירות החלק הראשון היא $u_1 = 72 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ בכיוון הפוך לכיוון אליו נע

הטיל לפני הפיצוץ.

ב. מהירות החלק הראשון היא $u_1 = 360 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ בכיוון 30 מעלות

מתחת לכיוון אליו עף הטיל לפני הפיצוץ.

תשובות סופיות:

$$u = \frac{2}{5} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (1)$$

$$u_2 = -\frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (2)$$

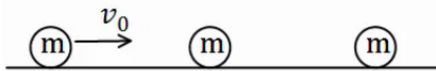
$$u_2 = 948 \frac{\text{km}}{\text{hr}} \quad \text{א.} \quad (3) \quad \text{ב.} \quad u_{2x} \approx 192.3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \quad u_{2y} = 33.34 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

מקרים מיוחדים:

שאלות:

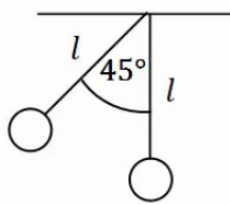
(1) פגיעה כפולה

- שלושה כדורים זהים נמצאים על מישור אופקי חלק. הכדור השמאלי נע במהירות v_0 כלפי הכדור האמצעי. מצא את מהירויות כל אחד מהגופים לאחר כל התנגשות, אם:
- כל ההתנגשויות הן אלסטיות מצחיות.
 - כל ההתנגשויות הן פלסטיות.



(2) מטוטלת פוגעת במטוטלת

- שני כדורים זהים תלויים באמצעות חוטים בעלי אורך זהה l . מסיתים את הכדור השמאלי בזווית של 45° מעלות ומשחררים אותו ממנוחה.



- מהי מהירותו רגע לפני הפגיעה בכדור הימני?
- מהי מהירות הכדור השמאלי לאחר הפגיעה אם ההתנגשות היא אלסטית?
- מהי הזווית המקסימלית אליה יגיע הכדור לאחר הפגיעה?
- מה יקרה לאחר מכן?
- חזור על סעיפים ב', ג' אם ההתנגשות היא פלסטית.

(3) מקדם תקומה

- גוף בעל מסה m נע במהירות v על משטח אופקי חלק ומתנגש בגוף בעל מסה $3m$ הנמצא במנוחה. נתון כי ההתנגשות חד ממדית ומקדם התקומה הוא 0.8 . מצא את מהירות הגופים לאחר ההתנגשות.

תשובות סופיות:

- (1) א. הכדור הראשון והשני מהירותם 0 , והכדור השלישי מהירותו v_0 .

ב. $\tilde{u} = \frac{v_0}{3}$

(2) א. $v = \sqrt{0.58gl}$ ב. $u_2 = v = \sqrt{0.58gl}$ ג. $\theta_{\max} = 45^\circ$

ד. התהליך חוזר על עצמו לנצח. ה. (ב) $u = \frac{1}{2}v$ (ג) $\theta \approx 21.95^\circ$

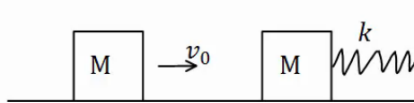
(3) $u_1 = -0.35v$, $u_2 = 0.45v$

תרגילים נוספים:

שאלות:

(1) שתי מסות וקפיץ

- מסה M נעה במהירות v_0 ומתנגשת במסה M נוספת הנמצאת במנוחה. המסה הנוספת מחוברת לקפיץ רפוי. קבוע הקפיץ, המהירות ההתחלתית והמסות נתונים. מצא את הכיוון המקסימלי, אם:
- ההתנגשות היא פלסטית.
 - ההתנגשות אלסטית.
 - חשב את המתקף שפעל על כל גוף בכל אחד מהמקרים.



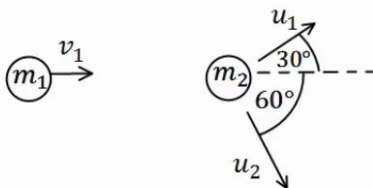
(2) שלושה כדורים

- שלושה כדורים מונחים על משטח אופקי חלק כפי שמתואר באיור. הכדור השמאלי בעל מסה $3m$ נע במהירות v ומתנגש התנגשות אלסטית בכדור בעל מסה m הנמצא במנוחה. שתי שניות לאחר מכן מתנגש הכדור בעל מסה m בכדור בעל מסה $5m$ הנמצא במנוחה התנגשות פלסטית.
- מהי מהירות הכדורים m ו- $3m$ לאחר ההתנגשות הראשונה?
 - מהי המהירות המשותפת של הכדורים m ו- $5m$ לאחר ההתנגשות השנייה?
 - כמה זמן חלף מרגע ההתנגשות הראשונה עד לרגע ההתנגשות השלישית, זו של הכדור $3m$ בכדורים הדבוקים?

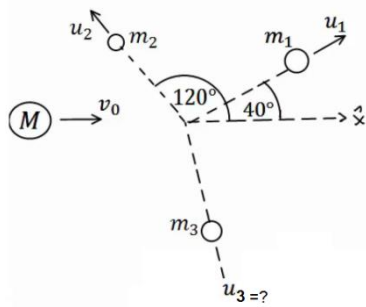


(3) איבוד אנרגיה

- כדור בעל מסה $m_1 = 2\text{ kg}$ ומהירות $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, מתנגש בכדור בעל מסה $m_2 = 3\text{ kg}$ הנמצא במנוחה. לאחר ההתנגשות, הכדור הראשון נע בכיוון 30° מעלות מעל לכיוון הפגיעה, והכדור השני נע בזווית 60° מעלות מתחת לכיוון הפגיעה (ראה איור).
- מצא את מהירות הגופים לאחר ההתנגשות.
 - האם ההתנגשות אלסטית?
 - אם לא, כמה אנרגיה אבדה בהתנגשות?



(4) פצצה



פצצה בעלת מסה $M = 13\text{kg}$ נעה באוויר במהירות

קבועה $v_0 = 100 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. ברגע מסוים הפצצה מתפוצצת

לשלושה חלקים קטנים יותר.

מסת החלק הראשון היא $m_1 = 4\text{kg}$ והוא נע

במהירות $u_1 = 80 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ בזווית של 40° מעלות ביחס

לכיוון המקורי.

מסת החלק השני היא $m_2 = 2\text{kg}$ והוא נע במהירות $u_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ בזווית של 120°

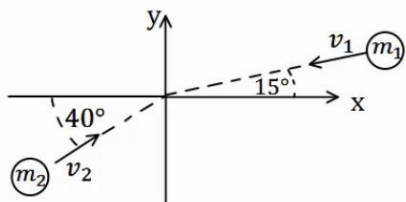
מעלות ביחס לכיוון המקורי. מסת החלק השלישי היא 7kg .

מצא את מהירות החלק השלישי.

(5) שני גופים שני מימדים

שני גופים, בעלי מסות: $m_1 = 2\text{kg}$, $m_2 = 3\text{kg}$, נעים לכיוון הראשית.

מהירויות הגופים הן: $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $v_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, בהתאמה, וכיוונם נתון באיור.



הגופים מתנגשים בראשית.

מצא את מהירות הגופים לאחר ההתנגשות, אם:

א. ההתנגשות היא פלסטית.

ב. ההתנגשות היא אלסטית, והגוף נע בכיוון

החיובי של ציר ה- y לאחר ההתנגשות.

(6) כדור גולף על כדורסל

כדור גולף וכדור כדורסל מוחזקים במנוחה אחד מעל השני בגובה $H = 1.5\text{m}$.

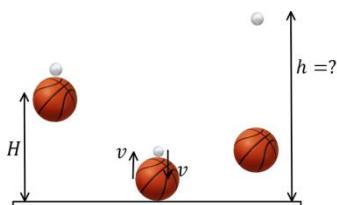
משחררים אותם ליפול ממנוחה.

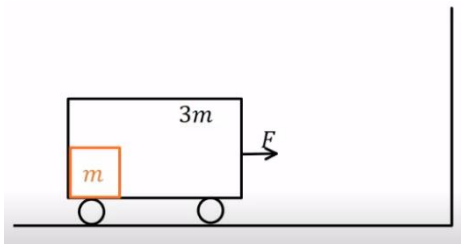
מה יהיה הגובה המרבי אליו יגיע כדור הגולף,

אם נניח שכל ההתנגשויות אלסטיות ומצחיות.

מסת כדור הגולף היא $m = 46\text{gr}$,

ומסת הכדורסל היא $M = 624\text{gr}$.




(7) ארגז בתוך קרונית המתנגשת בקיר

ארגז שמסתו m מונח בתוך קרונית סגורה בצמוד לדופן השמאלי של הקרונית. מסת הקרונית היא $3m$ והיא מתחילה ממנוחה. מפעילים כוח F קבוע ימינה במשך T שניות. אין חיכוך בין הקרונית לקרקע. נתון: F, T, m .

א. מהי מהירות הקרונית בתום הזמן T ?

ב. מהו הכוח N שהארגז מפעיל על הדופן השמאלית של הקרונית?

ג. בתום פעולת הכוח הקרונית מתנגשת בקיר התנגשות אלסטית לחלוטין. הארגז ממשיך את תנועתו מלפני ההתנגשות עד אשר הוא מתנגש בדופן הימנית של הקרונית התנגשות פלסטית. מהי מהירות הקרונית לאחר ההתנגשות השנייה בארגז?

ד. כמה אנרגיה הלכה לאיבוד בהתנגשות הפלסטית של הארגז בדופן הימנית?

(8) מטוטלת פוגעת במסה שנע במדרון עם קפיץ

גוף בעל מסה $m_1 = 1\text{kg}$ קשור לתקרה באמצעות חוט שאורכו $L = 0.6\text{m}$. מסיטים את החוט בזווית 50° מהאנך לתקרה ומשחררים ממנוחה. בתחתית המסלול של תנועתו מתנגש הגוף בגוף שני בעל מסה $m_2 = 2\text{kg}$ הנמצא במנוחה על משטח אופקי חלק. גובה המשטח מעל הקרקע הוא 0.4m .

מיד לאחר ההתנגשות גוף 1 מקבל מהירות של $0.4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ אחורה וגוף 2 נע קדימה.

בנקודה A גוף 2 עובר למישור משופע לא חלק בעל מקדם חיכוך $\mu_k = 0.1$ וזווית שיפוע 30° . בנקודה B גוף 2 חוזר למישור אופקי חלק בגובה הקרקע ומתנגש בקפיץ בעל קבוע $k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

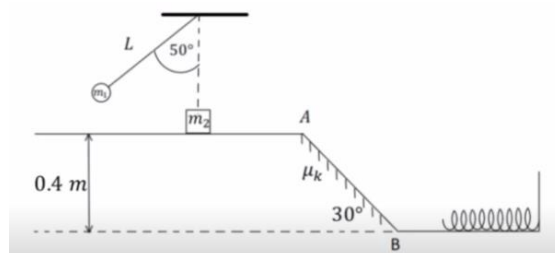
א. מהי המהירות של גוף 1 רגע לפני ההתנגשות?

ב. מהי המהירות של גוף 2 מיד לאחר ההתנגשות?

ג. מהי המהירות של גוף 2 בנקודה B?

ד. מהי ההתכווצות המקסימלית של הקפיץ?

ה. מהי המהירות של גוף 2 כאשר הקפיץ מכווץ בחצי מהכיוון המקסימלי?



(9) כדור עולה על מדרון משולש

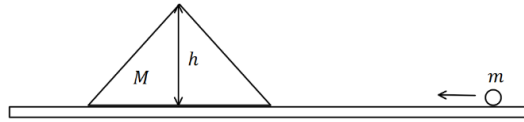
מדרון משולש בעל גובה $h = 3\text{m}$ חופשי לנוע מעל משטח אופקי חלק (ללא חיכוך).

מסת המדרון היא: $M = 15\text{kg}$.

מגלגלים כדור בעל מסה $m = 5\text{kg}$

על המשטח לכיוון המדרון.

התייחס לכדור כאל גוף נקודתי.



א. מה צריכה להיות המהירות שבה מגלגלים את הכדור כך שהוא יעצור

(ביחס למדרון) בדיוק לפני שהוא עובר את שיא הגובה של המדרון?

ב. מהי המהירות המדרון ברגע שהכדור מגיע לשיא הגובה?

ג. מהי המהירות הסופית של המדרון והכדור?

(10) טנק יורה פגזים ועולה במדרון**

טנק שמסתו 800 ק"ג (טנק קל מאוד) נמצא

ברגע מסוים במנוחה על מדרון משופע בזווית

של 15° מעלות. הטנק יורה שני פגזים במרווח

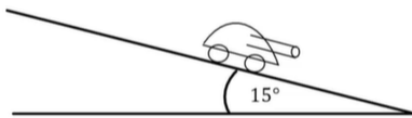
של 2 שניות בין הירי הראשון לשני.

מסת כל פגז היא 20 ק"ג והוא נורה במהירות

לוע של 400 מטר לשנייה במקביל ובמורד למדרון.

הניחו שלטנק גלגלים והחיכוך בינו למדרון זניח.

מה ההעתק המקסימאלי שיעשה הטנק במעלה המדרון?



תשובות סופיות:

$$\Delta x_{\max} = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0^2 \quad \text{ב.} \quad \Delta x_{\max} = \sqrt{\frac{m}{k} \cdot \frac{1}{2}} v_0^2 \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\vec{J}_1 = -mv_0 \hat{x}, \vec{J}_2 = mv_0 \hat{x} \quad \text{(ב)}, \vec{J}_1 = -\frac{1}{2}mv_0 \hat{x}, \vec{J}_2 = \frac{1}{2}mv_0 \hat{x} \quad \text{(א). ג.}$$

$$t = 10 \text{ sec} \quad \text{ג.} \quad u = \frac{1}{4}v \quad \text{ב.} \quad u_2 = \frac{3}{2}v, u_1 = \frac{1}{2}v \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$Q = 8.27 \text{ J} \quad \text{ב. לא,} \quad u_1 = 8.66 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_2 = 3.34 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$u_{3_x} \approx 152 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_{3_y} \approx -32 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (4)$$

$$u_x \approx -3.13 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_y \approx 1.79 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$u_{1_x} \approx -7.83 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_{1_y} \approx -15.20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_2 = 13.11 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.}$$

$$h \approx 12.3 \text{ m} \quad (6)$$

$$E = \frac{3F^2T^2}{32m} \quad \text{ז.} \quad \tilde{u} = \frac{FT}{8m} \quad \text{ג.} \quad N = \frac{F}{4} \quad \text{ב.} \quad v(T) = \frac{F}{4m}T \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$v_B = 2.853 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.} \quad u_2 \approx 1.235 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.} \quad v = 2.07 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$v = 2.47 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ה.} \quad \Delta l_{\max} \approx 0.285 \text{ m} \quad \text{ז.}$$

$$u_1' = 2\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_2' = -2\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.} \quad u = \sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.} \quad v_0 = 8.94 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$x(t = 5.82) \approx 60 \text{ m} \quad (10)$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 11 - מתקף ותנע - חלק שני

תוכן העניינים

149	1. חלק שני הסברים ונוסחאות
150	2. שימור תנע בהתנגשויות קצרות
151	3. תרגילים ישנים
154	4. תרגילים מסכמים

חלק שני הסברים ונוסחאות:

שאלות:

(1) חישוב מתקף של כוח לא קבוע

כוח התלוי בזמן $\vec{F}(t) = At^2\hat{x}$ פועל על גוף הנמצא במנוחה, A הוא פרמטר קבוע ונתון.

א. מצא את המתקף שהפעיל הכוח על הגוף בחמש השניות הראשונות של התנועה.

ב. מצא את מהירות הגוף לאחר חמש שניות אם מסת הגוף היא: $m = 2\text{kg}$ וידוע כי אין כוחות אחרים הפועלים על הגוף.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \vec{J} = \frac{125A}{3}\hat{x} \quad \text{ב. } \vec{v} = \frac{125A}{6}\hat{x}$$

שימור תנע בהתנגשויות קצרות:

שאלות:

(1) זיקוק מתפוצץ

זיקוק נורה לאוויר בכיוון אנכי לקרקע.
ברגע שהזיקוק מגיע לשיא הגובה הוא מתפוצץ לשלושה חלקים שווים בגודלם.
משך זמן הפיצוץ הוא: 0.5sec .

מהירות החלק הראשון לאחר הפיצוץ היא: $50 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ומהירות החלק השני

היא: $20 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x} - 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{y} + 50 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{z}$.

מהי מהירות החלק השלישי?

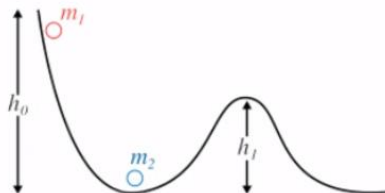
תשובות סופיות:

$$\vec{u}_3 = 70\hat{x} - 25\hat{y} + 50\hat{z} \quad (1)$$

תרגילים ישנים:

שאלות:

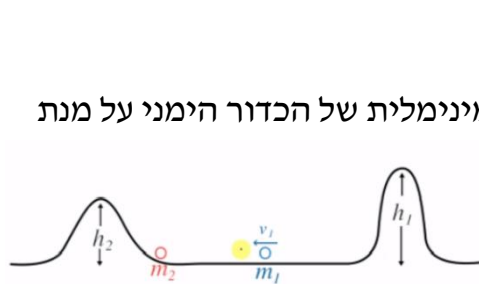
(1) גובה למעבר מכשול לשני כדורים



כדור משוחרר ממנוחה על פי הנתונים בשרטוט.
מה צריך להיות הגובה המינימלי ממנו הכדור
משוחרר על מנת ששני הכדורים יעברו את
המכשול כאשר:

- ההתנגשות פלסטית.
- ההתנגשות אלסטית.
- (אין צורך לפתור את המשוואות).

(2) מהירות למעבר מכשול לשני כדורים



בשאלה זו אין צורך לפתור את המשוואות.
שני כדורים מונחים כמתואר בשרטוט.
מה צריכה להיות המהירות ההתחלתית של הכדור הימני על מנת
שהכדור השמאלי יעבור את המכשול:

- בהתנגשות פלסטית.
- בהתנגשות אלסטית.
- כעת נתון כי המסה השמאלית כבדה
פי 100 מהמסה הימנית.
בהינתן שההתנגשות אלסטית,
מה צריכה להיות המהירות המינימלית ההתחלתית על מנת ש:
- הכדור השמאלי יעבור את המכשול השמאלי.
- הכדור הימני יעבור את המכשול הימני.

(3) לא אלסטי לא פלסטי



שני קרונות בעלי מסה 1 מונחים על גבי משטח
ללא חיכוך. יורים את המסה הימנית
במהירות 10 שמאלה.
נתון כי ההתנגשות הינה אי אלסטית/אי פלסטית.
מהי מהירותה של כל אחת מהמסות לאחר הפגיעה
אם נתון כי בהתנגשות אבדה חצי מהאנרגיה ההתחלתית?

(4) יחסי מסות בהתנגשות אלסטית

שני כדורים מונחים על שולחן.

הכדור השמאלי נורה במהירות 10 אל עבר הכדור הימני בהתנגשות אלסטית.

תאר את מהירויות הגופים לאחר ההתנגשות במקרים הבאים:

א. מסת הכדורים שווה.

ב. מסת הכדור השמאלי כפולה פי 100 מזו של הימני.

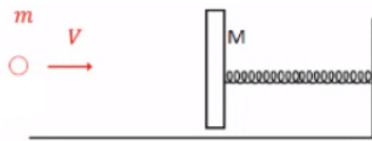
ג. מסת הכדור הימני כפולה פי 100 מזו של השמאלי.

(5) קליע לקפיץ בלי חיכוך

קליע נורה אל קפיץ לפי הנתונים המופיעים בשרטוט.

מהו הכיוון המקסימלי?

(אין חיכוך בשאלה).

**(6) רתע באקדח**

אקדח בעל מסה M יורה קליע בעל מסה m במהירות V.

מהי מהירות האקדח לאחר יציאת הקליע?

כמה אנרגיה נוצרה בתהליך?

**(7) תנע לבעיטה בכדור**

כדורגלן מניף את רגלו לעבר כדור.

מסת הכדור m ומסת הרגל M והפגיעה אלסטית.

א. מה צריכה להיות מהירות הרגל על מנת

שהכדור יצא לדרכו אל השער במהירות U?

ב. פרשני ספורט רבים נוהגים לומר כי על דשא רטוב

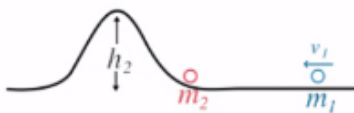
הכדור מאיץ מהר יותר. האם כך הדבר?

**(8) מהירות למעבר מכשול בפלסטי**

מהי המהירות המינימלית שצריך לתת למסה

הימנית על מנת שלאחר התנגשות פלסטית

הגוף יעבור את המכשול?

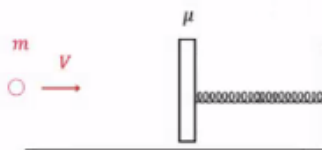
**(9) קליע לקפיץ עם חיכוך**

קליע נורה אל קפיץ לפי הנתונים

המופיעים בשרטוט.

מהו הכיוון המקסימלי בקפיץ,

אם נתון מקדם החיכוך בין המסה M לרצפה?



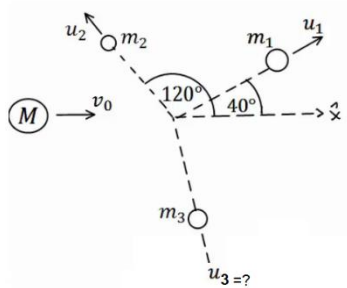
תשובות סופיות:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \text{א. } \frac{1}{2}u_1^2 = gh_1 \quad \text{ב. } \frac{1}{2}u_2^2 = gh_1 \\
 (2) \quad & \text{א. } gh_2 = \frac{1}{2}u^2 \quad \text{ב. } \frac{1}{2}u_2^2 = gh_2 \quad \text{ג. } \frac{1}{2}u_2^2 = gh_2 \\
 & \text{ד. } \frac{1}{2}u_1^2 = gh_1 \\
 (3) \quad & u_1 = 100 - u_2, \quad 0 = 2u_2^2 - 200u_2 + 9950 \\
 (4) \quad & \text{ראה סרטון.} \\
 (5) \quad & \frac{1}{2}(m+M)u^2 = \frac{1}{2}k\Delta^2 \\
 (6) \quad & V_2 = -\frac{m}{M}V, \quad E = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 \\
 & P \Rightarrow MV_1 = Mu_1 + mu \\
 (7) \quad & \text{א. } E \Rightarrow \frac{1}{2}MV_1^2 = \frac{1}{2}Mu_1^2 + \frac{1}{2}mu^2 \quad \text{ב. לא.} \\
 & P \Rightarrow MV_1 = (m_1 + m_2)u \\
 (8) \quad & E \Rightarrow \frac{1}{2}\{m+M\}u^2 = (m+M)gh \\
 (9) \quad & \frac{1}{2}(m+M)u^2 + (m+M)g \cdot \mu \cdot \Delta \cdot \cos(180) = \frac{1}{2}k\Delta^2
 \end{aligned}$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

(1) פצצה



פצצה בעלת מסה $M = 13\text{kg}$ נעה באוויר במהירות

קבועה $v_0 = 100 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. ברגע מסוים, הפצצה מתפוצצת

לשלושה חלקים קטנים יותר.

מסת החלק הראשון היא: $m_1 = 4\text{kg}$ והוא נע

במהירות $v_1 = 80 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ בזווית של 40° ביחס לכיוון המקורי.

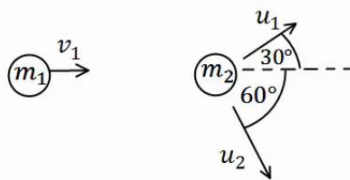
מסת החלק השני היא: $m_2 = 2\text{kg}$ והוא נע במהירות $v_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ בזווית של 120°

ביחס לכיוון המקורי.

מסת החלק השלישי היא: 7kg .

מצא את מהירות החלקיק השלישי.

(2) איבוד אנרגיה



כדור בעל מסה $m_1 = 2\text{kg}$ ומהירות $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

מתנגש בכדור בעל מסה $m_2 = 3\text{kg}$ הנמצא במנוחה.

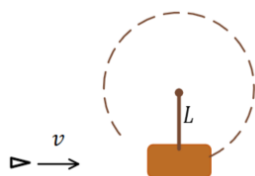
לאחר ההתנגשות הכדור הראשון נע בכיוון 30°

מעל לכיוון הפגיעה, והכדור השני נע בזווית 60° מתחת לכיוון הפגיעה (ראה איור).

א. מצא את מהירות הגופים לאחר ההתנגשות.

ב. האם ההתנגשות אלסטית? אם לא - כמה אנרגיה נאבדה בהתנגשות?

(3) קליע חודר בול עץ וגורם לסיבוב אנכי (כולל תנועה מעגלית)



בול עץ בעל מסה M תלוי אנכית באמצעות מוט קשיח

חסר מסה באורך L . המוט ביחד עם בול העץ יכולים

להסתובב במעגל אנכי (ראה איור).

יורים קליע בעל מסה m במהירות אופקית v לעבר בול העץ.

הקליע חודר את הבול ויוצא מצידו השני במהירות v_f .

יחד עם הקליע יוצאת גם חתיכה מהעץ (במהירות הקליע) ובמסה של 5 אחוז

ממסת בול העץ.

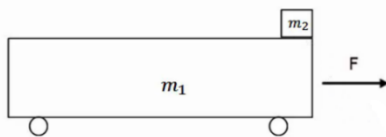
מהי המהירות המינימלית של הכדור עבורה בול העץ יוכל להשלים סיבוב אנכי

(שימו לב שהמוט קשיח)?

**(4) אדם יורד מכדור פורח**

אדם נמצא בכדור פורח בגובה קבוע באוויר. משקלו של האדם הוא 70 ק"ג ומסתו של הכדור פורח (ללא האדם) היא 280 ק"ג (כולל הסל וכל אביזר אחר בכדור). האדם משלשל חבל מהסל של הכדור פורח ומתחיל לרדת באמצעות החבל כלפי מטה.

- אם מהירותו של האדם בזמן הירידה בחבל היא 3 מטר לשנייה כלפי מטה וביחס לקרקע, מהי המהירות של הכדור פורח (גודל וכיוון)?
- מהי מהירות הכדור פורח אם האדם נעצר לפתע באמצע (לפני שהוא מגיע לקרקע)?

(5) מסה על קרונית ואיבוד אנרגיה

נתון כוח F קבוע המושך עגלה בעלת מסה m_1 ללא חיכוך. מעל העגלה נמצאת מסה m_2 ובין המסות יש חיכוך.

נתון: $\mu_s, \mu_k, F, m_1, m_2$.

- מה הכוח F המקסימאלי עבורו המסה העליונה תחליק ביחס לתחתונה?
- נניח כי הכוח F גדול מזה שחישבת בסעיף א'. נניח גם כי הכוח הפועל במשך זמן T נתון והמסה העליונה אינה נופלת מהתחתונה.
- מה הכוח F המקסימאלי?
- מהי תאוצת הגופים, מהירותם ומיקומם כפונקציה של הזמן עד לזמן T ?
- כמה אנרגיה הלכה לאיבוד בזמן הזה?
- מצא את מהירותם הסופית של הגופים (ב- $t > T$) בהנחה שהמסה העליונה עדיין לא נופלת.

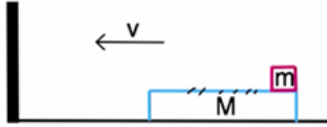
(6) מסה על שני קרונות

- נתונים שני קרונות על משטח חלק. הקרון הימני במנוחה והקרון השמאלי נע לעברו במהירות v . על הקרון השמאלי מונחת מסה הנעה יחד עד הקרון. מקדם החיכוך בין המסה לקרון הימני נתונה. בין המסה לקרון השמאלי אין חיכוך. בזמן $t = 0$ הקרון השמאלי פוגע בקרון הימני ונצמד אליו (אך הוא יכול להיפרד ממנו לאחר מכן).
- מתי תעבור המסה לקרון הימני?
 - מה תהיה מהירותו הסופית של הקרון הימני?
 - מהי תאוצת הקרון הימני? כמה זמן תאוצה זו נמשכת?
 - האם סעיף ב' וג' תואמים בתשובותיהם?

(7) מסות שומרות תנע ונדבקות לקיר

המסה m מונחת על גבי הקרונית M (אך אינה מחוברת אליה).

שתי המסות נעות יחד במהירות v על גבי משטח חלק לעבר קיר. התנגשות בקיר אלסטית. מקדם החיכוך בין המסות הוא μ .



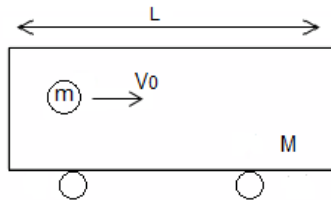
א. מה תהיה מהירות המסה M לאחר זמן רב בהנחה שהיא גדולה מהמסה m .

ב. ענה על סעיף א' בהנחה שהמסה M קטנה מהמסה m .

(8) כדור בקרונית

כדור בעל מסה m ומהירות v_0 נע בתוך קרונית בעלת מסה $M = \alpha m$ ואורך L .

הכדור מתנגש בדופן הימנית של הקרונית התנגשות אלסטית. (אין חיכוך בין הקרונית לרצפה).



א. מהי מהירות הגופים לאחר ההתנגשות? בדוק עבור: $\alpha = 0, 1, \infty$.

ב. כמה זמן יעבור מהפגיעה הראשונה בדופן לפגיעה השנייה בדופן השמאלית?

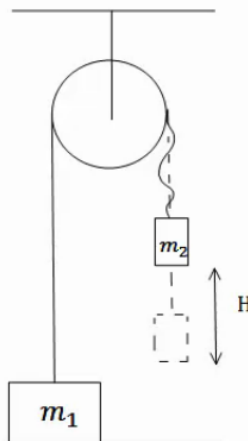
(9) שתי מסות על גלגלת וחוט רפוי

שתי מסות m_1, m_2 תלויות על גלגלת אידיאלית חסרת חיכוך.

המסה m_1 נמצאת על הקרקע במנוחה בעוד שהמסה m_2 תלויה באוויר.

מרימים את מסה m_2 גובה H נוסף כך שהחוט מתרופף ומשחררים אותה ממנוחה.

א. מצא את מהירות המסה m_2 לפני שהיא מגיעה לנקודה בה החוט נמתח.



ב. כעת החוט נמתח. הנח שהחוט אינו אלסטי,

כלומר, האורך שלו קבוע ללא תלות בגודל המתיחות שלו כל עוד קיימת בו מתיחות כלשהי (והוא אינו רפוי כמו בסעיף א').

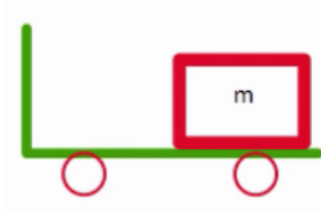
מצא את השינוי הכולל בתנע של שתי המשקולות (בין הקטע מיד לפני שהחוט נמתח לבין הקטע מיד אחרי שהחוט מתוח ושתי המסות זזות).

ג. מצא את המתקף שהפעילה התקרה על הגלגלת בזמן מתיחות החוט.

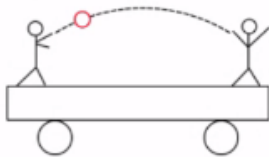
ד. לאיזה גובה תעלה m_1 בהנחה ש- $m_1 > m_2$ אינה פוגעת ברצפה.

ה. מהו המתקף שמפעילה התקרה על הגלגלת מהרגע $t = 0$

ועד לרגע בו m_1 הגיעה לשיא הגובה?

10) מסה מתנגשת במשאית ונופלת

מסה m מונחת על עגלה חסרת חיכוך בעלת אורך L ומסה $5m$. המסה נוסעת במהירות v לכיוון שמאל והעגלה נייחת. נתון כי ההתנגשות בין המסה לבין העגלה היא התנגשות אלסטית. לאחר כמה זמן מרגע ההתנגשות תיפול המסה מהעגלה?

11) רתע בתוך עגלה

בתוך עגלה ללא חיכוך עומדים שני חברים המקובעים לרצפת הקרון. מסת האנשים והקרון M ואורך הקרון L .

האדם זורק כדור בעל מסה m במהירות v אל עבר חברו.

א. מה תהיה מהירות העגלה והאנשים שעליה לאחר זריקת הכדור?

ב. מה תהיה מהירות העגלה לאחר שהחבר יתפוס את הכדור?

ג. כמה זמן הכדור ישהה באוויר?

ד. מהו המרחק אותו עברה העגלה במהלך זמן זה?

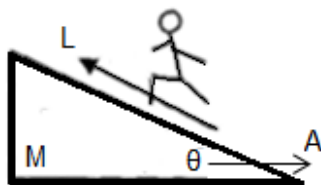
ה. תאר מה יקרה אם החבר ימסור חזרה את הכדור לחברו.

12) אדם הולך על עגלה (מכיל תנועה יחסית)

אדם בעל מסה M עומד על עגלה בעלת מסה m .

האדם מתחיל ללכת במהירות v_R ביחס לעגלה.

מצא את מהירות האדם והעגלה ביחס לקרקע אם אין חיכוך בין העגלה לרצפה.

13) אדם על רמפה (מכיל תנועה יחסית)*

אדם שמסתו m רץ במעלה רמפה משופעת בזווית θ .

מסת הרמפה היא M , והיא מונחת על מישור חלק.

האדם מתחיל ממנוחה והזמן הדרוש לו בכדי לעבור

דרך שאורכה L על פני הרמפה הוא T .

א. מהי תאוצת האדם ביחס לרמפה?

ב. עקב הריצה נהדפת הרמפה ימינה, בתאוצה לא ידועה A יחסית לקרקע.

בטאו את רכיבי התאוצה של האדם יחסית לקרקע בעזרת התאוצה A .

ג. כמה זמן הרמפה ימינה בזמן T ?

14) כדור עולה על מדרון משולש

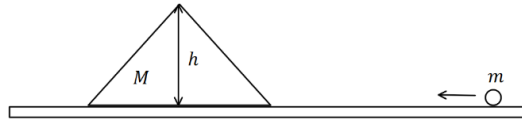
מדרון משולש בעל גובה $h = 3\text{m}$ חופשי לנוע מעל משטח אופקי חלק (ללא חיכוך).

מסת המדרון היא: $M = 15\text{kg}$.

מגלגלים כדור בעל מסה $m = 5\text{kg}$

על המשטח לכיוון המדרון.

התייחס לכדור כאל גוף נקודתי.



א. מה צריכה להיות המהירות שבה מגלגלים את הכדור כך שהוא יעצור

(ביחס למדרון) בדיוק לפני שהוא עובר את שיא הגובה של המדרון?

ב. מהי המהירות המדרון ברגע שהכדור מגיע לשיא הגובה?

ג. מהי המהירות הסופית של המדרון והכדור?

15) מסה מחליקה בין שני טריזים

גוף בעל מסה m מחליק על שני טריזים זהים בעלי מסה M כל אחד.

המעבר מהטריז למשטח האופקי הוא חלק,

המשטחים חסרי חיכוך וחופשיים לנוע על

השולחן (ראו סרטוט).

לאיזה גובה מקסימאלי יטפס הגוף על הטריז

השני אם גובהו ההתחלתי הוא h ?

**16) כדור גולף על כדורסל**

כדור גולף וכדור כדורסל מוחזקים במנוחה

אחד מעל השני בגובה $H = 1.5\text{m}$.

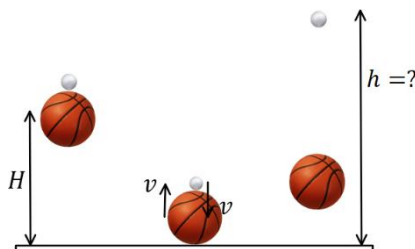
משחררים אותם ליפול ממנוחה.

מה יהיה הגובה המרבי אליו יגיע כדור הגולף

אם נניח שכל ההתנגשויות אלסטיות ומצחיות.

מסת כדור הגולף היא: $m = 46\text{gr}$

ומסת הכדורסל היא: $M = 624\text{gr}$.

**17) התנגשות אלסטית זהה בכל המערכות**

במערכת אינרציאלית מסוימת האנרגיה הקינטית של שני גופים m_1 ו- m_2 היא E_k .

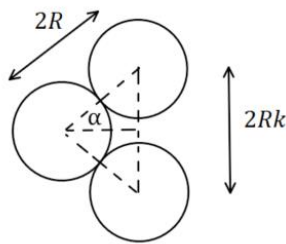
מצאו את האנרגיה הקינטית של הגופים במערכת אינרציאלית אחרת הנעה

במהירות v_0 ביחס למערכת המקורית.

השתמשו בתוצאה שקיבלתם והראו כי אם במערכת מסוימת ההתנגשות היא

אלסטית אז היא חייבת להיות אלסטית גם בכל מערכות הייחוס האינרציאליות

האחרות.

(18) דיסקה מתנגשת בשתי דיסקות זהות

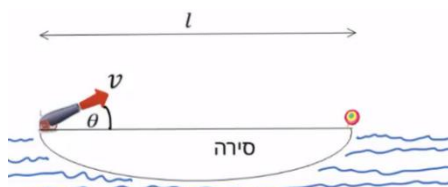
על מישור חלק נמצאות 3 דיסקות זהות בעלות מסה M ורדיוס R כל אחת.

הדיסקה השמאלית באיור נעה במהירות v ומתנגשת התנגשות אלסטית בזמנית עם שתי הדיסקות האחרות כפי שמתואר באיור.

המרחק בין הדיסקות שנמצאות במנוחה לפני ההתנגשות מתואר על ידי $2Rk$ כאשר $1 \leq k \leq 2$.

א. מהי גודלה של מהירות הדיסקה הפוגעת לאחר ההתנגשות כתלות בזווית α שבאיור?

ב. עבור אילו ערכים של k הדיסקה תחזור אחורה/תיעצר במקום/תמשיך קדימה?

**(19) סירה יורה פגז על מטרה בקצה השני**

סירה באורך l נמצאת על מים שקטים, בקצה השמאלי של הסירה נמצא תותח צעצוע ובקצה הימני נמצאת מטרה.

התותח יורה פגז צעצוע בזווית θ ובמהירות v ביחס לקרקע.

מסת הפגז היא m ומסת הסירה היא M .

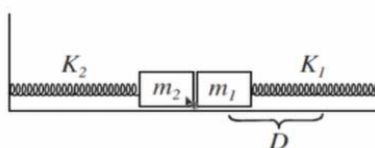
מצא את המהירות v הדרושה בשביל לפגוע בדיוק במטרה (הזנח את גובה התותח וגובה המטרה והנח כי התותח מחובר לסירה).

(20) שרשרת מחליקה משולחן

שרשרת בעלת אורך l ומסה m מחליקה ממנוחה משולחן כאשר חציה עדיין מונח על השולחן.

א. מה תהיה מהירות השרשרת ברגע הניתוק מהשולחן, בהנחה שאין חיכוך?

ב. ענה על סעיף א' בהנחה שמקדם חיכוך μ קיים בין השרשרת לשולחן.

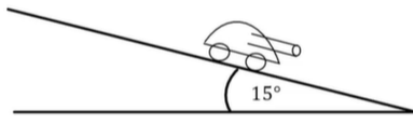
(21) שתי מסות ושני קפיצים

מסות מתחילות ממנוחה כבשרטוט.

המסה הימנית נמתחת מרחק D ימינה ומשוחררת. כשהיא פוגעת במסה השנייה היא נדבקת אליה ושתיהן ממשיכות יחד.

א. מהו הכיוון המקסימלי של הקפיץ השמאלי?

ב. מהו הכיוון המקסימלי של הקפיץ הימני כאשר שתי המסות חוזרות ימינה?


22) טנק יורה פגזים ועולה במדרון**

טנק שמסתו 800 ק"ג (טנק קל מאוד) נמצא ברגע מסוים במנוחה על מדרון משופע בזווית של 15° מעלות. הטנק יורה שני פגזים במרווח של 2 שניות בין הירי הראשון לשני. מסת כל פגז היא 20 ק"ג והוא נורה במהירות לוע של 400 מטר לשנייה במקביל ובמורד למדרון. הניחו שלטנק גלגלים והחיכוך בינו למדרון זניח. מה ההעתק המקסימאלי שיעשה הטנק במעלה המדרון?

תשובות סופיות:

$$u = 155 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (1)$$

$$Q = 8.27 \text{ J}, \text{ ב. לא אלסטית, } u_1 = 8.66 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_2 = 3.34 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (2)$$

$$v_{\min} = \left[(m + 0.05M) v_f + 0.95M \cdot 2\sqrt{gL} \right] \cdot \frac{1}{m} \quad (3)$$

$$0.75 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \text{ כלפי מעלה. ב. } 0 \quad (4)$$

$$F \leq \mu_s g (m_1 + m_2) \quad \text{ב. תאוצה: } a_1 = \frac{F}{m_1} - \frac{m_2}{m_1} \mu_k g, a_2 = \mu_k g \quad (5)$$

$$\text{מהירות: } v_1(t) = a_1 t, v_2(t) = a_2 t, \text{ מיקום: } x_1(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2, x_2(t) = \frac{1}{2} a_2 t^2$$

$$u_f = \frac{F \cdot T}{m_1 + m_2} \quad \text{ג. } E = F \cdot \frac{1}{2} a_1 T^2 - \left(\frac{1}{2} m_2 v_2^2(T) + \frac{1}{2} m_1 v_1^2(T) \right)$$

$$\tilde{u} = \frac{v \left(m + \frac{M}{2} \right)}{M + m} \quad \text{ב. } t = \frac{2l}{v} \quad (6)$$

$$M \cdot v \cdot \left(m + \frac{M}{2} \right) = (m + M) \cdot M \cdot \frac{v}{2} + (m + M) \cdot mg \mu \cdot \tilde{t}, a = \frac{mg \mu}{M} \quad \text{ג. } \text{ד. כן.}$$

$$\tilde{u} = \frac{v(M - m)}{M + m} \quad \text{ב. } \tilde{u} = \frac{v(M - m)}{M + m} \text{ חיובי. שלילי. } \quad (7)$$

$$u_1 = -v_0, u_2 = 0 : \alpha = \infty, u_1 = 0, u_2 = v_0 : \alpha = 1, u_1 = v_0, u_2 = 2v_0 : \alpha = 0 \quad \text{א. } \quad (8)$$

$$t = \frac{L}{u_2 - u_1} \quad \text{ב.}$$

$$J_{\text{ceiling}} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gH} \hat{y} \quad \text{ג. } \Delta P_{\text{Total}} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gH} \quad \text{ב. } v_2 = \sqrt{2gH} \quad \text{א. } \quad (9)$$

$$J_{\text{Totalceiling}} = 0 + \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gH} + \frac{m_1 (m_1 + m_2)}{m_1 - m_2} \sqrt{32gH} \quad \text{ה. } h = \frac{m_2}{m_1 - m_2} \sqrt{\frac{H}{2g}} \quad \text{ד. } t = \frac{L}{v} \quad (10)$$

$$L = t \cdot (v - u) \quad \text{ג. } mv + Mu = (m + M) \cdot 0 \quad \text{ב. } 0 = mv + Mu \quad \text{א. } \quad (11)$$

$$x = u \cdot t \quad \text{ד. ה. ראה סרטון.}$$

$$u_2 = \frac{mv_R}{m + M}, u_1 = \frac{-Mv_R}{m + M} \quad (12)$$

$$x_{\text{ramp}}(T) = \frac{m}{m + M} L \cos \theta \quad \text{ג. } a_{p_x} = \frac{2L}{T^2} \cos \theta - A \quad \text{ב. } a'_p = \frac{2L}{T^2} \quad \text{א. } \quad (13)$$

$$(14) \quad \text{א. } v_0 = 8.94 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב. } u = \sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג. } u_1' = 2\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_2' = -2\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$(15) \quad h'_{\max} = \frac{M^2 h}{(M+m)^2}$$

$$(16) \quad h \approx 12.3m$$

$$(17) \quad E_k' = E_R - (m_1 v_1 + m_2 v_2) v_0 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_0^2$$

$$(18) \quad \text{א. } u_1 = v \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}$$

$$\text{ב. קדימה: } \sqrt{2} < k \leq 2, \text{ במקום: } k = \sqrt{2}, \text{ אחורה: } 1 \leq k < \sqrt{2}$$

$$(19) \quad v = \sqrt{\frac{gL}{1 + \frac{m}{M} \sin 2\theta}}$$

$$(20) \quad \text{א. } v = \sqrt{\frac{3}{4} gl} \quad \text{ב. } v = gl \left(\frac{3 - \mu}{4} \right)$$

$$(21) \quad \text{ראה סרטון.}$$

$$(22) \quad x(t = 5.82) \approx 60m$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 12 - כוח גרר וכוח ציפה

תוכן העניינים

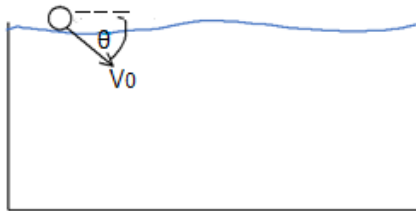
1. תרגיל - כדור נזרק לבריכה 163
2. כוח ציפה 164
3. כוח גרר, הסבר ודוגמה עם צנחן 165
4. כוח סטוקס (ללא ספר)
5. תרגילים מסכמים 166

כדור נזרק לבריכה:

שאלות:

1) כדור נזרק לבריכה

כדור נזרק לתוך בריכה עם מהירות התחלתית v_0 בזווית θ עם פני המים. נתונים:



צמיגות המים - η .

רדיוס הכדור - R .

מהירות התחלתית - v_0 .

צפיפות המים - ρ_w .

צפיפות הכדור - ρ_b .

א. רשום את משוואת התנועה של הכדור.

ב. מצא את המהירות הסופית של הכדור.

ג. מצא את העומק המקסימאלי אליו יגיע הכדור אם $\rho_b < \rho_w$.

תשובות סופיות:

$$\text{א. } \sum F_y = ma_y, \sum F_x = ma_x \quad \text{ב. } v_{yfinal} = \frac{mg - F_b}{6\pi\eta R}, v_{xfinal} = 0 \quad (1)$$

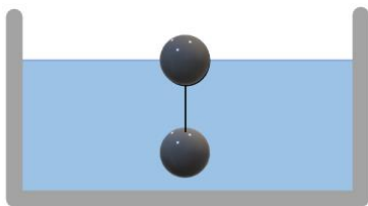
$$\text{ג. } y_{\max} = \frac{C \cdot m}{k^2} \ln \frac{k(C - v_0 \sin \theta)}{C} + \frac{m}{k} (C - v_0 \sin \theta) \left(\frac{C}{k(C - v_0 \sin \theta)} - 1 \right)$$

כוח ציפה:

שאלות:

(1) שני כדורים קשורים בחוט בתוך המים

שני כדורים בעלי נפח זהה $V = 20 \text{ c.m}^3$ קשורים בחוט זה לזה. מניחים את הכדורים במים ולאחר זמן רב רואים שהמערכת התייצבה כך שכדור 1 נמצא כולו בתוך המים ורק חצי מנפחו של כדור 2 שקע לתוך המים, ראה איור.



המסה של כדור 1 גדולה פי 4 מזו של כדור 2.

א. מהי המסה של כל כדור?

ב. מהי צפיפות המסה של כל כדור?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } m_1 = 24 \text{ gr}, m_2 = 6 \text{ gr} \quad \text{ב. } \rho_1 = 1.2 \frac{\text{gr}}{\text{c.m}^3}, \rho_2 = 0.3 \frac{\text{gr}}{\text{c.m}^3}$$

כוח גרר, הסבר ודוגמה עם צנחן:

שאלות:



(1) הסבר ודוגמה עם צנחן

צנחן קופץ ממטוס ופותח מצנח.

נתון כי כוח החיכוך עם האוויר הוא: $\vec{F} = -k\vec{v}$.

א. מצא את משוואת התנועה של הצנחן.

ב. מצא את המהירות הסופית.

ג. מצא את המהירות כפונקציה של הזמן אם הנפילה התחילה ממנוחה.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \sum F_y = ma_y \quad \text{ב. } v_{yfinal} = \frac{mg}{k} \quad \text{ג. } v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

(1) כוח גרר עם חיכוך קינטי

- גוף בעל מסה M נע על מישור אופקי במהירות התחלתית v_0 ימינה. בין הגוף והמישור יש חיכוך קינטי ומקדם החיכוך הוא μ . בנוסף פועל על הגוף כוח התנגדות של האוויר $f = -\alpha v$, α קבוע. א. מצא את משוואת הכוחות על הגוף. ב. מהי מהירות הגוף בכל רגע? ג. מה מיקום הגוף בכל רגע? הנח כי ברגע $t = 0$ מיקום הגוף הוא x_0 .

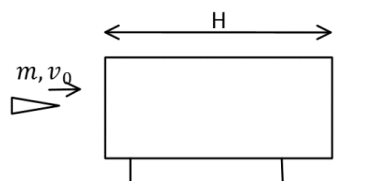
(2) רכבת עוצרת

- רכבת שמסתה 200 טון ומהירותה 30 מ"שני, מתחילה לבלום כאשר כוח עוצר $F = -4000N - 600 \frac{N \cdot s}{m}$ פועל עליה. כעבור איזה מרחק תעצור הרכבת בתנאים האלה?

(3) כוח גרר ריבועי במהירות

- במהירויות גבוהות, גודל כח החיכוך שמפעיל האוויר על כדור הוא: $F_d = kv^2$. א. מצאו את המהירות הסופית של כדור הנופל מגובה רב. זורקים כדור ישר למעלה במהירות התחלתית השווה למהירות הסופית מסעיף א. ב. מהי תאוצת הכדור כאשר מהירותו שווה לחצי ממהירותו ההתחלתית אם הכדור בדרכו למעלה? ג. מהי תאוצת הכדור כאשר מהירותו שווה לחצי ממהירותו ההתחלתית אם הכדור בדרכו למטה?

(4) כוח גרר מתכונתי למהירות בשלישית



- קליע בעל מסה m נורה מלוע רובה ועובר דרך בול עץ בעובי H המקובע במקום. בכניסה לבול העץ מהירות הקליע v_0 וביציאה v_1 . במהלך התנועה בתוך העץ פועל על הקליע כוח מתכונתי למהירות בשלישית $f = -kv^3$ (קבוע). נתון כי הקליע חודר לבול העץ במקביל לקרקע וכי ההשפעה של כוח הכובד על תנועת הקליע זניחה.

- א. מצא את מהירות הקליע כתלות בזמן בתוך בול העץ.
 ב. מהו מיקום הקליע כתלות בזמן בתוך בול העץ?
 ג. מהי מהירות הקליע בתוך הבול לאחר זמן ארוך ביחס ל- $\frac{m}{kv_0^2}$?
 ד. בטא את מהירות היציאה כתלות במהירות הכניסה, אורך הבול, מסת הקליע, ומקדם החיכוך.

5) צוללת

- צוללת שמסתה 20 טון שטה בכיוון אופקי במהירות 10 מ"שני.
 ברגע מסוים, הצוללת מכבה את מנועה. מרגע זה פועל על הצוללת כוח עצירה
 בנתון בביטוי: $\vec{F} = -(\lambda v^2) \hat{v}$, כאשר $\hat{v}$ זה וקטור היחידה בכיוון התנועה.
 זהו הכוח היחידי הפועל על הצוללת. הניחו כי בכיוון האנכי אין תנועה.
 נתון כי 5 דקות לאחר כיבוי המנוע מהירות הצוללת קטנה פי 4.
 א. מהי מהירות הצוללת כפונקציה של זמן?
 ב. חשב את הקבוע λ .
 ג. מהו המרחק שעברה הצוללת בחמש הדקות מרגע כיבוי המנוע?

6) סירה עם כוח גרר אקספוננציאלי

- סירה שמסתה 50 ק"ג החלה את תנועתה במהירות 5 מ"שני ומואטת על ידי כוח
 חיכוך הנתון בנוסחה: $\vec{F} = -2e^{0.5v} \hat{v}$. יחידות המידה mks, v מהירות הגוף.
 הנח שכוח החיכוך הוא הכוח היחיד הפועל על הסירה.
 א. כמה זמן יעבור עד לעצירת הסירה?
 ב. מהי מהירות הגוף בחצי מהזמן הנ"ל?

תשובות סופיות:

$$\sum F_x = ma \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad v(t) = \left(-\mu g + \left(\mu g + \frac{\alpha}{m} v_0 \right) e^{-\frac{\alpha}{m} t} \right) \frac{m}{\alpha} \quad (1)$$

$$x(t) = \frac{m}{\alpha} \left((-\mu g)t + \left(\mu g + \frac{\alpha}{m} v_0 \right) \left(\frac{1}{-\frac{\alpha}{m}} \right) e^{-\frac{\alpha}{m} t} \right) + C, \quad C = x_0 + \left(\frac{m}{\alpha} \right)^2 \left(\mu g + \frac{\alpha}{m} v_0 \right) \quad \text{ג.} \quad (2)$$

$$x(t) \approx 6.1 \text{ km} \quad (2)$$

$$a = \frac{3}{4} g \quad \text{ג.} \quad a = \frac{5}{4} g \quad \text{ב.} \quad v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$x(t) = \frac{m}{k} \sqrt{\frac{2k}{m} t + \frac{1}{v_0^2}} - \frac{m}{kv_0} \quad \text{ב.} \quad v(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2k}{m} t + \frac{1}{v_0^2}}} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$v(t) = \frac{1}{\frac{kH}{m} + \frac{1}{v_0}} = v_2 \quad \text{ד.} \quad v(t) \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{2kt}{m}}} \quad \text{ג.}$$

$$\Delta x = 1.39 \cdot 10^3 \text{ m} \quad \text{ג.} \quad \lambda = 20 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad \text{ב.} \quad v(t) = \frac{1}{0.1 + 10^{-3} t} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$v\left(t = \frac{45.9}{2}\right) \approx 1.23 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.} \quad t = 45.9 \text{ sec} \quad \text{א.} \quad (6)$$

מכניקה לתעשייה וניהול

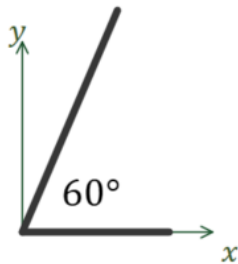
פרק 13 - מרכז מסה

תוכן העניינים

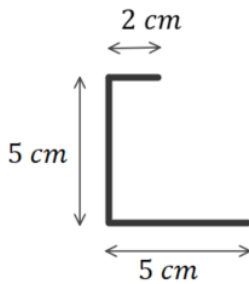
1. הסבר בסיסי על מרכז מסה..... 169
2. דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור..... 170
3. תנועה לפי הכוחות החיצוניים..... (ללא ספר) 171
4. שני תרגילים..... 171
5. חישוב מרכז מסה של גופים גדולים בעזרת אינטגרל..... (ללא ספר) 172
6. דוגמאות לחישוב מרכז מסה בעזרת אינטגרלים..... 172
7. תרגילים מסכמים..... 174

הסבר בסיסי על מרכז מסה:

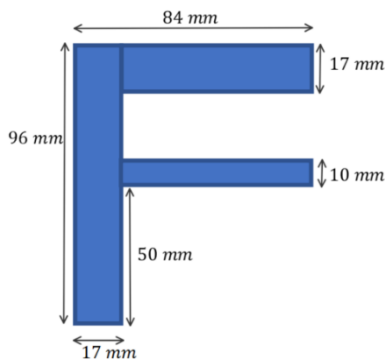
שאלות:



- (1) **דוגמה - מרכז מסה של שני מוטות בזווית**
 המערכת המתוארת באיור מורכבת משני מוטות בעלי צפיפות אחידה.
 מוט ראשון באורך $3c.m$ נמצא לאורך ציר ה- x ומסתו $2kg$, מוט שני נמצא בזווית 60° עם ציר ה- x החיובי ואורכו $5c.m$ ומסתו $3kg$.
 מצאו את מרכז המסה של המערכת (ביחס לראשית).



- (2) **דוגמה - מרכז מסה של האות נ**
 המערכת המתוארת באיור מורכבת ממוט בעל צפיפות מסה אחידה המכופף בצורת האות "נ" בתמונת מראה. מצאו את מיקום מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה השמאלית התחתונה.



- (3) **דוגמה - מרכז מסה של F**
 מרכיבים את האות F מלוחות בעלי צפיפות מסה אחידה ליחידת שטח.
 המימדים של כל הלוחות נתונים באיור.
 א. מצאו את מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה השמאלית התחתונה של האות.
 ב. מהו מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה הימנית התחתונה של האות?

תשובות סופיות:

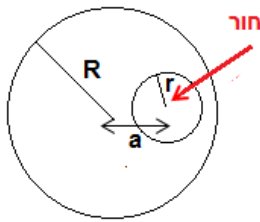
- (1) $x_{c.m} = 1.35c.m$, $y_{c.m} = 1.3c.m$
 (2) $x_{c.m} = 1.2c.m$, $y_{c.m} = 1.875c.m$
 (3) א. $x_{c.m} = 31mm$, $y_{c.m} = 62mm$. ב. $x_{c.m} = 14mm$, $y_{c.m} = 62mm$

דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור:

שאלות:

(1) דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור

בדיסקה בעלת רדיוס R ומסה M קדחו חור עגול בעל רדיוס r במרחק a ממרכז הדיסקה. הנח כי צפיפות המסה אחידה בכל הדיסקה. מצא את מרכז המסה של הדיסקה עם החור.

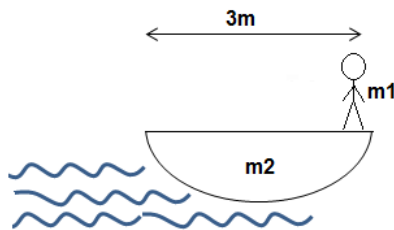


תשובות סופיות:

$$x_{c.m.} = \frac{-a(\rho\pi r^2)}{M - (\rho\pi r^2)} \quad (1)$$

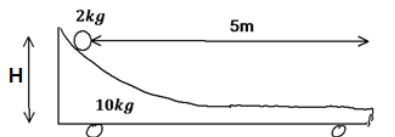
שני תרגילים:

שאלות:



(1) נער על סירה

אדם עומד בקצה סירה באורך 3 מטר.
 מסת האדם היא 70 קילוגרם ומסת
 הסירה 100 קילוגרם.
 האדם התקדם 2 מטרים לאורך הסירה.
 כמה זזה הסירה?
 (הזנח את החיכוך בין המים לסירה).
 נתון: $m_1 = 70\text{kg}$, $m_2 = 100\text{kg}$.



(2) כדור על קרונית

כדור מונח על קרונית משופעת הנמצאת במנוחה.
 הכדור מונח בגובה $H = 1\text{m}$ ובמרחק של 5m מטר
 מקצה הקרונית.

מסת הקרונית: $m_1 = 10\text{kg}$, מסת הכדור: $m_2 = 2\text{kg}$.

א. מצא את העתק הקרונית כאשר הכדור מגיע לקצה.

ב. מצא את מהירות הגופים אם נתון שמהירות הכדור בקצה הקרונית

היא רק בכיוון ציר ה- x .

תשובות סופיות:

$$x = \frac{14}{17} \text{ m} \quad (1)$$

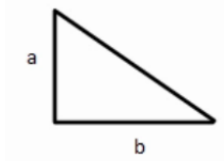
$$u_2 \approx 4.08 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, u_1 \approx -0.82 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.} \quad \Delta x_1 = -\frac{10}{12} \text{ m} \quad \text{א.} \quad (2)$$

דוגמאות לחישוב מרכז מסה בעזרת אינטגרלים:

שאלות:

(1) **מרכז מסה של מוט עם צפיפות לא משתנה**

חשב את מרכז המסה של מוט בעל אורך L וצפיפות מסה $\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x}{L}$.



(2) **מרכז מסה של משולש**

מצא את מרכז המסה של המשולש שבתמונה.

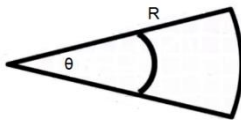
(3) **מרכז מסה של שער**

שער חשמלי בעל מסה m ואורך l מונח על ציר שמרחקו d מסופו. הסבר מדוע מחוברים לקצה השער משקולת כבדה ומצא את מסתה אם נתון כי אורכה L .



(4) **מרכז מסה של גיזרה וחצי דיסקה**

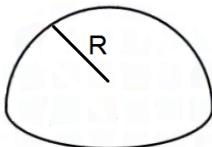
חשב את מרכז המסה של גיזרה עם צפיפות אחידה וזווית θ .



(5) **חישוב שטח גיזרה**

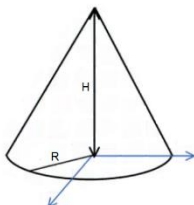
נתון מעגל שרדיוסו R .

חשב שטח של גיזרה עם זווית θ .



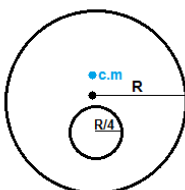
(6) **מרכז מסה של חצי כדור מלא**

חשב את מרכז המסה של חצי כדור מלא בעל צפיפות אחידה.



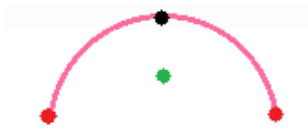
(7) **מרכז מסה של חרוט מלא**

חשב את מרכז המסה של חרוט מלא בעל צפיפות אחידה.



(8) **דיסקה עם חור**

חשב את מרכז המסה של חרוט מלא בעל צפיפות אחידה.



9 חצי חישוק ושתי מסות

מצא את מרכז המסה של חצי החישוק בעל מסה M ורדיוס R אשר בקצותיו חוברים שני כדורים קטנים בעלי מסה m .

תשובות סופיות:

$$x_{c.m.} = \frac{2}{3}L \quad (1)$$

$$c.m. = \left(\frac{1}{3}b, \frac{1}{3}a \right) \quad (2)$$

$$\frac{\left(\frac{L}{2} - d \right)m + \left(d + \frac{1}{2} \right)M}{m + M} = 0 \quad (3)$$

$$x_{c.m.} = \frac{4R \sin \frac{\theta_0}{2}}{3\theta_0} \quad (4)$$

$$S = \frac{\theta R^2}{2} \quad (5)$$

$$z_{c.m.} = \frac{3R}{8} \quad (6)$$

$$z_{c.m.} = \frac{H}{4} \quad (7)$$

$$z_{c.m.} = -\frac{1}{30}R \quad (8)$$

$$y_{c.m.} = \frac{2R}{\pi} \quad (9)$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

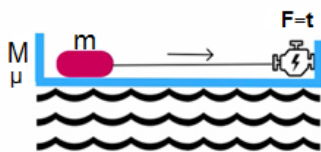
(1) שני גופים מחוברים בקפיץ נלחצים לקיר

שני גופים מחוברים בקפיץ בעל קבוע k ונמצאים על משטח אופקי חסר חיכוך. מסת הגוף הימני היא m_1 , מסת הגוף השמאלי היא m_2 והוא צמוד לקיר. האורך הרפוי של הקפיץ הוא l_0 .

לוחצים את הגוף הימני עד שהקפיץ מתכווץ לאורך $\frac{l_0}{3}$ ומשחררים ממנוחה.

- מתי תתנתק המסה השמאלית מהקיר?
- מהו מיקום מרכז המסה כתלות בזמן?

(2) מנוע מושך מסה בסירה

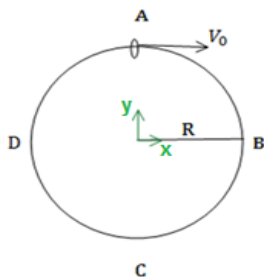


על סירה (ללא חיכוך עם המים) מונחת מסה. המסה מחוברת בחוט למנוע המחובר לסירה. כוח המשיכה של המנוע משתנה בזמן, מקדם החיכוך הסטטי ומקדם החיכוך הקינטי נתונים.

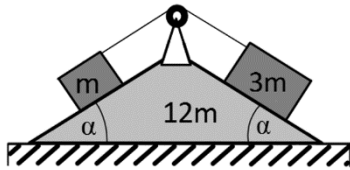
- מתי תתחיל לנוע המסה?
- מה תהיה תאוצת מרכז המסה? תאוצת הסירה? תאוצת המסה?
- לאחר שהמסה נעה החוט ניתק. ענה שוב על סעיף ב'.
- האם המסה והסירה ייעצרו בו זמנית?

(3) חרוז מסתובב על חישוק שחופשי לנוע

חישוק בעל רדיוס R ומסה m מונח על שולחן אופקי חלק. על החישוק ישנו חרוז המתחיל לנוע מהנקודה A ומסתו m גם כן. ב- $t=0$ החישוק נמצא במנוחה ומהירותו ההתחלתית של החרוז היא v_0 ימינה.



- מצא את מיקום מרכז המסה של המערכת בתחילת התנועה.
- מצא את מהירות מרכז המסה כפונקציה של הזמן ואת מסלולה.
- מהן מהירויות החרוז והצינור כאשר החרוז נמצא בנקודות B, C, D ושוב ב- A ביחס לחישוק?

(4) שני גופים על מדרון שני

שני גופים בעלי מסות m ו- $3m$ נמצאים על מדרון דו-צדדי בעל זווית נטייה α משני צדדיו. שני הגופים קשורים זה לזה בחוט אידיאלי דרך גלגלת אידיאלית המחוברת למדרון. למדרון מסה $12m$ והוא יכול לנוע על הרצפה. אין חיכוך בין הגופים למדרון ובין המדרון לרצפה. משחררים את המערכת ממנוחה.

- חשב את העתק המדרון, לאחר שהגוף הכבד עבר מרחק L במורד המדרון.
- מהי העבודה שביצע משקל הגוף הכבד ומשקל הגוף הקל במהלך התנועה?
- חשב את מהירות המדרון ביחס לרצפה ברגע זה.

(5) מסה מתנגשת במסה עם קפיץ

גוף שמסתו $2m$ נע במהירות v על משטח חסר חיכוך לעבר גוף נוסף שמסתו m הנמצא במנוחה. בצידו השמאלי של הגוף במנוחה ישנו קפיץ רפוי בעל קבוע k . הבעיה חד מימדית.



- מהי מהירות מרכז המסה של הגופים?
- מהי ההתכווצות המקסימאלית של הקפיץ?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. כאשר הקפיץ מגיע לנקודת רפיון או ב-} t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m_1}{k}}.$$

$$\text{ב. } x_{\text{c.m.}}(d) = \frac{m_1 l_0}{m_1 + m_2} \left(1 + \frac{2}{3} \sqrt{m_1 k t} \right)$$

$$(2) \quad \text{א. } \mu \cdot mg = t \quad \text{ב. } a = \frac{t}{m}, -a = \frac{t}{M} \quad \text{ג. } a = \mu \cdot g \frac{m}{M}, -a = \mu \cdot g$$

ד. כן.

$$(3) \quad \text{א. } y_{\text{c.m.}}(t=0) = \frac{R}{2} \quad \text{ב. } \vec{v}_{\text{c.m.}}(t) = \frac{1}{2} v_0 \hat{x}$$

$$\text{ג. בנקודה B: } u_{1x} = \frac{1}{2} v_0 = u_{2x}, u_{1y} = \frac{-v_0}{2} = -u_{2y}$$

$$\text{בנקודה C: } u_{1y} = 0 = u_{2y}, u_{2x} = v_0, u_{1x} = 0$$

$$\text{בנקודה D: } u_{1x} = u_{2x} = \frac{1}{2} v_0, u_{1y} = \frac{v_0}{2} = -u_{2y}$$

$$(4) \quad \text{א. } x_2 = -\frac{L \cos \alpha}{4} \quad \text{ב. הכבד: } W = 3mgL \sin \alpha, \text{ הקל: } W = mg(-L \sin \alpha)$$

$$\text{ג. } v_{2x} = \sqrt{\frac{gL \sin \alpha}{4(4 \tan^2 \alpha + 3)}}$$

$$(5) \quad \text{א. } v_{\text{c.m.}} = \frac{2}{3} v \quad \text{ב. } \Delta x_{\text{max}} = \sqrt{\frac{10m}{3k}} \cdot v$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 14 - תנועה הרמונית

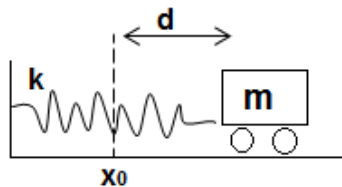
תוכן העניינים

177	1. תנועה הרמונית פשוטה.....
180	2. תרגילים מסכמים.....
182	3. תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות).....
185	4. תרגילים לבקשת סטודנטים.....

תנועה הרמונית פשוטה:

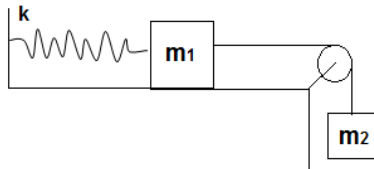
שאלות:

(1) מסה מתנגשת במסה



מסה m מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ k . מותחים את המסה מרחק d מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה. מצא את $x(t)$ של המסה.

(2) מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה



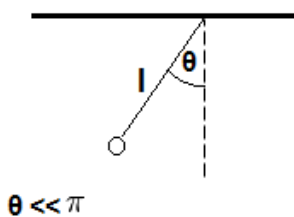
מסה m_1 מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k . מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר M .

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבע את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).

ב. מצא את תדירות התנודה של המערכת.

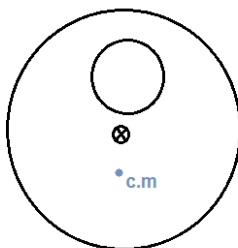
ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

(3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם מומנטים)

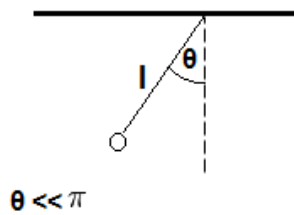


נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה. אורך החוט של המטוטלת הוא l . מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן. הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך מומנטים).

(4) דוגמה - דיסקה עם חור



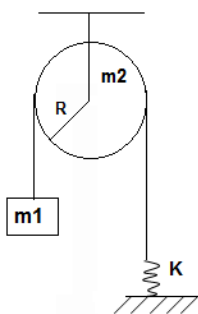
מצא את תדירות התנודות הקטנות של דיסקה בעלת מסה M ורדיוס R אם ידוע כי במרחק R ממרכז הדיסקה קדחו חור ברדיוס רבע R (הדיסקה מחוברת במסמר במרכזה אל הקיר).



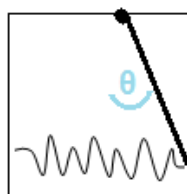
- (5) **דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)**
 נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה.
 אורך החוט של המטוטלת הוא l .
 מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן.
 הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך אנרגיה).



- (6) **גליל מחובר לקפיץ מתגלגל ללא החלקה**
 גליל בעל מסה m ורדיוס R נמצא על משטח אופקי לא חלק ומחובר באמצעות קפיץ אל הקיר. קבוע הקפיץ הוא k והוא מחובר למרכז הגליל. הנח שתנועת הגליל אופקית בלבד ושהוא מתגלגל ללא החלקה על המשטח.
 מצא את תדירות התנודות הקטנות.
 פתור פעם אחת באמצעות אנרגיה ופעם נוספת באמצעות כוחות ומומנטים.



- (7) **גלגלת מסה וקפיץ**
 במערכת הבאה, המסה m_1 קשורה בחוט דרך גלגלת אל קפיץ המחובר לקרקע. הגלגלת אינה אידאלית. נתון: R רדיוס הגלגלת, m_2 מסת הגלגלת, k קבוע הקפיץ. הנח כי החוט לא מחליק על הגלגלת.
 א. מצא את נקודת שיווי המשקל.
 ב. מצא את תדירות התנודה.
 ג. מושכים את המסה אורך d מנקודת שיווי המשקל. מהו $d_{\max}$ המרחק המקסימלי שניתן למשוך את המסה מבלי שהמתיחות בחוט תתאפס במהלך התנועה?



- (8) **מוט תלוי מחובר עם קפיץ לקיר**
 מוט בעל אורך L ומסה M (התפלגות אחידה) תלוי מהתקרה וחופשי להסתובב סביב נקודת התלייה. קצהו השני של המוט מחובר בקפיץ, בעל קבוע k לקיר. הקפיץ רפוי כאשר המוט נמצא מאונך לתקרה.
 א. הראה כי תנועת המוט בזוויות קטנות היא תנועה הרמונית ומצא את תדירות התנועה.
 ב. מצא את הזווית של המוט כפונקציה של הזמן אם המוט משוחרר ממנוחה בזווית נתונה θ_0 .

תשובות סופיות:

$$x(t) = -\frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t + \frac{\pi}{2}\right) + x_0 \quad (1)$$

$$A_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ב.} \quad x = \frac{m_2 g}{k} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\theta(t=0) = -\omega A \sin \varphi \quad (3)$$

$$-\left(\frac{16}{247} \frac{g}{R}\right)(\theta - 0) = \ddot{\theta} \quad (4)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

$$E = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad \text{באמצעות אנרגיה:} \quad (6)$$

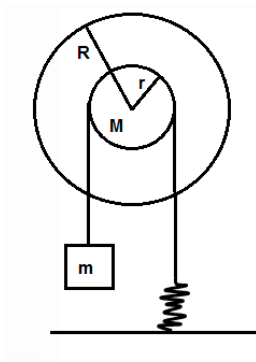
$$\sum F_x = -k(x - x_3) = m\ddot{x} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad \text{באמצעות כוחות ומומנטים:}$$

$$d_{\max} = \frac{m_1 g}{k} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + \frac{1}{2}m_2}} \quad \text{ב.} \quad x_0 = \frac{m_1 g}{k} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k^+}{m^+}}t\right) \quad \text{ב.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k^+}{m^+}} \quad \text{א.} \quad (8)$$

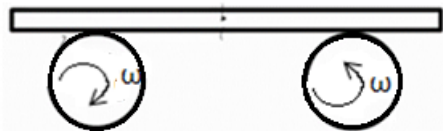
תרגילים מסכמים:

שאלות:



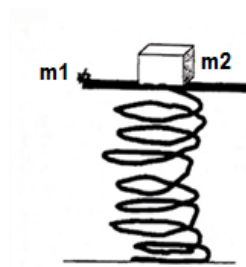
(1) דיסקה כפולה מסה וקפיץ

נתונה דיסקה ממוסמרת במרכזה לקיר (כלומר הדיסקה יכולה להסתובב אך לא לנוע מעלה ומטה).
 הדיסקה בנויה משתי דיסקות מודבקות בעלות רדיוס r לדיסקה הקטנה ו- R לדיסקה הגדולה.
 סביב הדיסקות מלופפים חוטים כמתואר בשרטוט.
 עוד נתון כי אין החלקה לחוטים.
 א. מצאו את תדירות התנודות.
 ב. מהי האנרגיה הכוללת של המערכת?



(2) מוט על שני גלגלים

מוט בעל מסה M מונח על שני גלגלים המקובעים במרכזם.
 הגלגלים מסתובבים במהירות זוויתית ω כך שהגלגל הימני מסתובב נגד כיוון השעון והשמאלי עם כיוון השעון.
 בין המוט והגלגלים קיים חיכוך ומקדם החיכוך הקינטי נתון.
 מניחים את המוט כך שמרכזו נמצא במרחק A מהמרכז בין הגלגלים.
 מצא את תדירות התנודה של המוט.



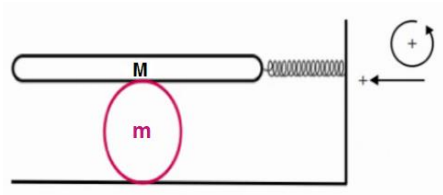
(3) מסה על משטח על קפיץ אנכי

על קפיץ שקבועו k מונח משטח שמסתו m_1 , המשטח צמוד לקצהו של הקפיץ.
 על המשטח מונח גוף שמסתו m_2 .
 מכווצים את הקפיץ בשיעור Δy ומשחררים.
 א. מה צריך להיות $\Delta y_{\min}$ כדי שהגוף יתנתק מן המשטח באיזה שהוא שלב?

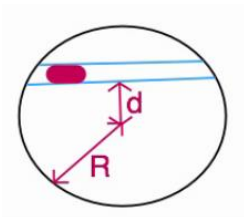
ב. הניחו: $\Delta y = 2\Delta y_{\min}$, $k = 10 \frac{Nr}{m}$, $m_1 = 0.04 \text{ kg}$, $m_2 = 0.06 \text{ kg}$

ומצאו את רגע הניתוק.

ג. באמצעות הנתונים המספריים מסעיף ב', מהו מקומו ומהירותו של המשטח ברגע שהגוף ניתק מן המשטח?



(4) משטח על דיסקה מחובר לקפיץ
 נתונה מערכת כבשרטוט (אין החלקה במערכת).
 מהי התדירות?



(5) תנודה בתעלה בכדור"א
 בתוך כדור הארץ נחפרה תעלה כבשרטוט.
 מסת כדור הארץ M.
 מהי תדירות התנודות הקטנות של מסה החופשיה לנוע בתעלה?

תשובות סופיות:

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} Kx^2 - mgx + \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad \text{ב.} \quad \sqrt{\frac{2kR}{\frac{1}{2}MR + \frac{r^2}{R}}} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu_k g}{d}} \quad (2)$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{ב.} \quad \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$v(t) = \dot{y}(t) = -2\Delta y_{\min} \omega \sin(\omega t), \quad \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{ג.}$$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{K}{m + 2M}\right)x \quad (4)$$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{M}{R^3}\right)(x - 0) \quad (5)$$

תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות):

שאלות:

(1) שני חצאי דיסקה



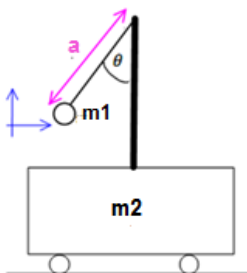
נתונים שני חצאי דיסקה התלויים על מסמר כמתואר בשרטוט. מסת הדיסקה ורדיוסה נתונים. מצא את התדירות של כל אחד מחצאי הדיסקה.

(2) חצי חישוק ושתי מסות



מצא את תדירות חצי החישוק שבתמונה. רדיוס R ומסתו M, בקצוותיו חוברו שתי מסות m. החישוק תלוי ממסמר בקודקודו.

(3) מטוטלת על עגלה נעה



עגלה בעלת מסה m_2 חופשיה לנוע על משטח אופקי ללא חיכוך. אל העגלה מחובר מוט אנכי עליו תלויה מטוטלת מתמטית עם מסה m_1 ואורך חוט a . משחררים את המסה (של המטוטלת) בזווית נתונה כאשר כל המערכת נמצאת במנוחה.

א. רשמו את מהירות המטוטלת במערכת העגלה כפונקציה של θ ו- $\dot{\theta}$.

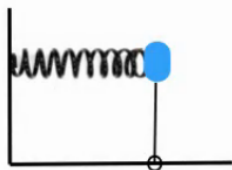
ב. רשמו את מהירות העגלה והמטוטלת כפונקציה של θ ו- $\dot{\theta}$.

ג. רשמו את משוואת שימור האנרגיה המכאנית של המערכת.

ד. רשמו את משוואת שימור האנרגיה בתנודות קטנות.

ה. מצאו את תדירות התנודה של המסה M.

(4) קפיץ מוט ומסה

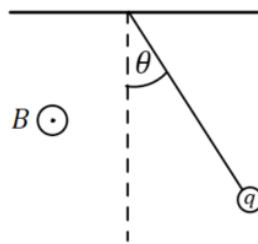


נתונה מסה m המחוברת לקפיץ בעל קבוע k .

המסה גם מחוברת למוט חסר מסה בעל אורך l. המוט מחובר לרצפה בציר המאפשר לו להסתובב. המערכת בשרטוט נמצאת במצב שיווי משקל.

א. מהי תדירות התנודות הקטנות של המערכת?

ב. מהי המסה המקסימלית שתאפשר תדירות זו?

**(5) מטוטלת בשדה מגנטי**

מטוטלת מתמטית שאורכה L , מסתה m ומטענה q נתונה בשדה מגנטי אופקי B היוצא מהדף. השדה המגנטי יוצר כוח מגנטי על המטוטלת כאשר היא בתנועה לפי הנוסחה: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

א. מצא את הכוחות הפועלים על המטוטלת במהלך התנועה כתלות בזווית θ ובמהירות v .

ב. מסיטים את המטוטלת זווית קטנה θ_0 ומשחררים במנוחה.

מצא את משוואת התנועה של המטוטלת ומשם את מיקום המטוטלת כתלות בזמן עבור זווית קטנות.

ג. מהי המתיחות בחוט כתלות בזמן.

ד. מהי המתיחות המקסימאלית בחוט ובאיזו זווית ומהירות מצב זה מתרחש?

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ דיסקה 1: } -\left(\frac{A}{B}\right) \cdot (\theta - (0)) = \ddot{\theta}, \text{ דיסקה 2: ראה סרטון.}$$

$$(2) -\frac{(2m+M) \cdot gb}{I} \theta = \ddot{\theta}$$

$$(3) \text{ א. } v_x = \dot{\theta} a \cos \theta, v_y = \dot{\theta} a \sin \theta$$

$$\text{ב. } v_{1x} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a \dot{\theta} \cos \theta, v_{1y} = \dot{\theta} a \sin \theta$$

$$\text{ג. } E = \frac{1}{2} m_1 \left(\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \right)^{-2} a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 a^2 \sin^2 \theta - m_1 g a \cos \theta$$

$$\text{ד. } \omega = \sqrt{\frac{\frac{ga^2}{2}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2}} \quad \text{ה. } E = \frac{1}{2} m_1 \left(\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{ga}{2} \theta^2 \right) - m_1 g a \frac{1}{2} \quad \text{ו.}$$

$$(4) \text{ א. } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{l}} > 0 \quad \text{ב. } m < \frac{lk}{gv}$$

$$(5) \text{ א. } |\vec{F}| = qvB, \text{ כיוון החוצה מהמעגל.} \quad \text{ב. } \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$

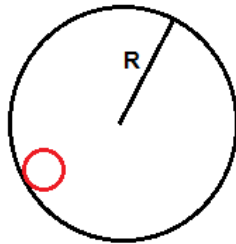
$$\text{ג. } T(t) = -qB\sqrt{gL}\theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) + mg \quad \text{עבור } \theta_0 \ll \frac{2qB}{m} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\text{ד. } T_{\max} = mg + qB\sqrt{gL}\theta_0$$

תרגילים לבקשת סטודנטים:

שאלות:

(1) כדור מתגלגל בצינור



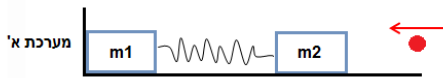
דיסקה בעלת רדיוס r מתגלגלת בתוך צינור מקובע לרצפה בעל רדיוס R . מותר להשתמש בקירוב זוויות קטנות ומותר להזניח את הרדיוס הקטן ביחד לגדול.

א. מה תהיה תדירות התנודות הקטנות של הדיסקה, בהנחה שאין חיכוך?

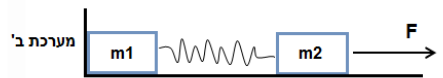
ב. מה תהיה התשובה לסעיף א' אם יוסיפו חיכוך עם הרצפה והגלגול יהיה ללא החלקה?

ג. מה תהיה התדירות עם בנוסף לחיכוך עם הרצפה יתווסף כוח חיכוך: $F = -bv$?

(2) קפיץ נמתח להתארכות מקסימלית



קליע בעל מסה זניחה נע במהירות לא ידועה לעבר מסה m_2 שמחוברת למסה m_1 דרך קפיץ בעל מקדם אלסטי k .



המסה m_1 ניצבת בצמוד לקיר כמתואר בשרטוט.

א. לאחר פגיעת הקליע הקפיץ מתכווץ במצב המקסימלי ומאבד d מאורכו.

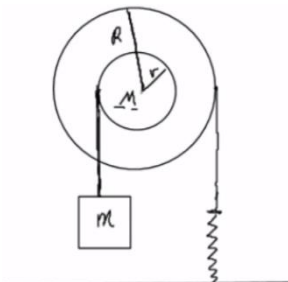
מהי מהירות מרכז המסה מייד לאחר שהמערכת מתנתקת מהקיר?

ב. על מערכת בעלת נתונים זהים ואורך קפיץ רפוי l מופעל כוח קבוע

ואופקי F לכיוון המסומן בציור.

מה ההתארכות המקסימלית של הקפיץ?

(3) דיסקה כפולה מסה וקפיץ



נתונה דיסקה ממוסמרת במרכז לקיר (כלומר הדיסקה יכולה להסתובב אך לא לנוע מעלה ומטה).

הדיסקה בנויה משתי דיסקיות מודבקות בעלות רדיוס r לדיסקה הקטנה ו- R לדיסקה הגדולה.

סביב הדיסקות מלופפים חוטים כמתואר בשרטוט. עוד נתון כי אין החלקה לחוטים.

א. מצא את תדירות התנודות.

ב. מהי האנרגיה הכוללת של המערכת?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{א.} \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}} \quad \text{ב.} \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad \text{ג.}$$

$$(2) \quad v_{c.m.} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m_2}} d}{m_1 + m_2} \quad \text{א.} \quad \Delta = \frac{F}{2k + k \frac{m_2 - m_1}{m_1}} \quad \text{ב.}$$

$$(3) \quad \omega = \sqrt{\frac{kR}{\frac{1}{2}MR + \frac{r^2}{R}}} \quad \text{א.} \quad E_{total} = \frac{1}{2}kx^2 - mgx + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{ב.}$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 15 - מומנט התמד

תוכן העניינים

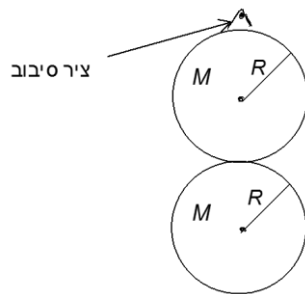
1. הקדמה - גוף קשיח וציר סיבוב (ללא ספר)
2. מומנט התמד, הסבר בסיסי וחשוב עבור גוף נקודת (ללא ספר)
3. משפט שטיינר (ללא ספר)
4. אדטיביות 187
5. $I_z = I_x + I_y$ (ללא ספר)
6. סימטריה ל z (ללא ספר)
7. חישוב מומנט ההתמד של דיסקה סביב ציר Z וציר X (ללא ספר)
8. תרגילים שונים לחישוב מומנט התמד 188

אדטיביות:

שאלות:

(1) דוגמה

לדסקה בעלת מסה M ורדיוס R מחברים דסקה נוספת זהה בקצה התחתון של הדסקה. מצא את מומנט ההתמד של המערכת סביב ציר המאונך למישור הדסקה והעובר בקצה העליון של הדסקה (הראשונה).



תשובות סופיות:

$$I = 11mR^2 \quad (1)$$

תרגילים שונים לחישוב מומנט התמד:

שאלות:



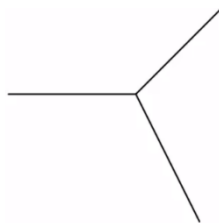
- (1) חישוב אינטגרל של מוט לא אחיד
חשב את מומנט ההתמד של מוט עם צפיפות ליחידת

$$\text{אורך } \lambda(x) = \lambda_0 \frac{x}{L} \text{ סביב קצה המוט.}$$

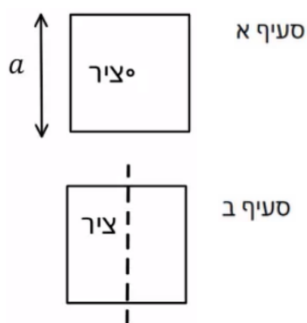
x הוא המרחק מהקצה, L הוא אורך המוט ו- λ_0 נתון.

$$m, l, \lambda = Ax^2$$

- (2) חישוב נוסף מוט בצפיפות לא אחידה
מצא את מומנט ההתמד של מוט סביב מרכזו לפי
הנתונים שבשרטוט.
הצפיפות הנתונה מתייחסת למרכז המוט כראשית הצירים.



- (3) שלושה מוטות מחוברים בקצה
שלושה מוטות זהים באורך l ומסה m כל אחד מחוברים
באופן המוצג באיור.
מצא את מומנט ההתמד של המערכת סביב ציר הנמצא
בנקודת החיבור בין המוטות ובמאונך למישור.



- (4) מסגרת ריבועית
נתונה מסגרת ריבועית בעלת אורך צלע a ומסה M .
מצא את מומנט ההתמד של מסגרת.
א. סביב ציר העובר במרכז ומאונך למישור המסגרת.
ב. סביב ציר העובר במרכז המסגרת ודרך מרכז שתי
צלעות ומקביל לשתי הצלעות האחרות.

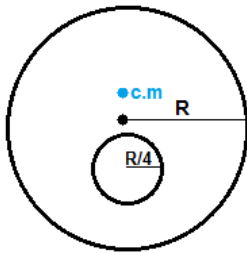


- (5) מומנט התמד של שער חשמלי
מצא את מומנט ההתמד של שער חשמלי בעל מסה m
ואורך l אשר בסופו מחוברת משקולת בעלת מסה M
ואורך L המסתובב סביב מרכז המסה שלו.



- (6) מומנט התמד של ריש
מצא את מומנט ההתמד של הגוף שבשרטוט סביב מרכז המסה
שלו בשתי דרכים שונות. אורך כל מוט l ומסתו m .

7) דיסקה עם חור



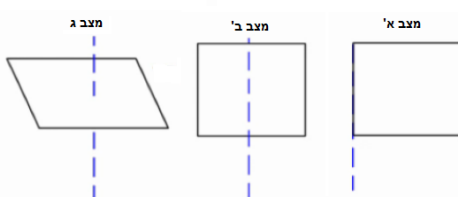
- א. מצא את מומנט ההתמד של דיסקה בעלת מסה M ורדיוס R , אם ידוע כי במרחק R חצי ממרכז הדיסקה קדחו חור ברדיוס רבע R . הדיסקה מסתובבת סביב ציר במרכזה (ולא במרכז המסה של המערכת).
- ב. מצא את מומנט ההתמד של הגוף סביב מרכז המסה שלו.

8) חצי חישוק ושתי מסות



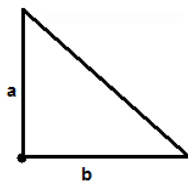
- מצא את מומנט ההתמד של חצי החישוק שבתמונה. רדיוסו R , מסתו M ובקצותיו חוברו שתי מסות m . החישוק סובב סביב מסמר בקודקודו.

9) חישוב אינטגרל של ריבוע



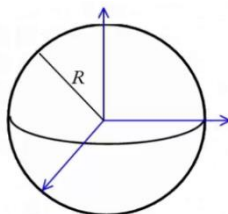
- חשב את מומנט ההתמד של לוח ריבוע בעל אורך צלע a , מסה M וצפיפות אחידה בכל אחד מהמצבים הבאים:
- א. ציר הסיבוב הוא אחת הפאות של הריבוע.
- ב. ציר הסיבוב מקביל לפאות ועובר במרכז.
- ג. ציר הסיבוב אנך למשטח הריבוע ועובר במרכזו.

10) מומנט התמד של משולש



- מצא את מומנט ההתמד של המשולש סביב קודקודו הישר.

11) מומנט התמד של כדור מלא



- חשב את מומנט ההתמד של כדור מלא בעל רדיוס R , מסה M וצפיפות אחידה, סביב ציר העובר במרכז הכדור.

12) מומנט התמד של קליפה כדורית

- מצאו את מומנט ההתמד של קליפה כדורית ברדיוס R ומסה m סביב ציר העובר דרך מרכז המסה של הקליפה.

תשובות סופיות:

$$I_0 = M \frac{L^2}{2} \quad (1)$$

$$I = \frac{12ml^2}{80} \quad (2)$$

$$I_{c.m.} = ml^2 \quad (3)$$

$$I = \frac{M}{8} \left(a^2 + \frac{l^2}{3} \right) \quad \text{ב.} \quad I_{c.m.} = \frac{M}{4} \left(\frac{l^2}{3} + a^2 \right) \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$I = \left(\frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{m \cdot 0 + \frac{M(1+L)}{2}}{m+M} \right)^2 \right) + \left(\frac{1}{12} (L^2 + L^2) M + M \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{m \cdot 0 + \frac{M(1+L)}{2}}{m+M} \right) + \frac{L}{2} \right)^2 \right) \quad (5)$$

$$I = \frac{5}{12} ml^2 \quad (6)$$

$$I_0 = I_{c.m.} + \frac{15}{16} M \cdot \left(\frac{R}{30} \right)^2 \quad \text{ב.} \quad I_0 = \frac{247}{512} MR^2 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$I_1 = I_{c.m.} + m'b^2 \quad (8)$$

$$I = M \frac{1}{6} a^2 \quad \text{ג.} \quad I = \frac{1}{12} Ma^2 \quad \text{ב.} \quad I = \frac{1}{3} Ma^2 \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$I_0 = \frac{1}{6} m(a^2 + b^2) \quad (10)$$

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \quad (11)$$

$$\frac{2MR^2}{3} \quad (12)$$

מכניקה לתעשייה וניהול

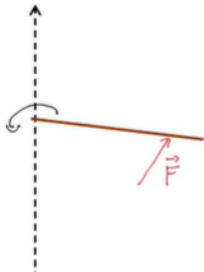
פרק 16 - מומנט כוח

תוכן העניינים

191	1. מומנט כוח - הסבר
(ללא ספר)	2. מכפלה וקטורית
192	3. תרגיל - מומנטים על משולש
(ללא ספר)	4. פיתוח, מדוע מתייחסים לכוח הכובד כאילו פועל במרכז המסה
(ללא ספר)	5. משוואת מומנטים
193	6. תרגיל - שני פועלים מחזירים מנשא
194	7. תרגילים מסכמים

מומנט כוח - הסבר:

שאלות:

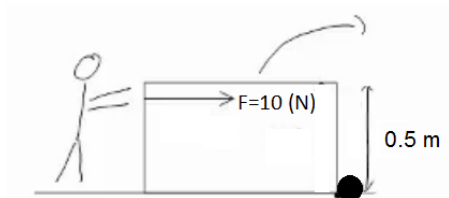


1) דוגמה לחישוב מומנט (מוט)

נתון מוט אשר מקובע בקצהו ומסתובב נגד כיוון השעון.

מופעל כוח F .

חשב את מומנט הכוח.



2) מרחק אפקטיבי דוגמה

אדם דוחף ארגז בגובה 0.5m ומפעיל כוח F

(ראה תמונה).

לארגז אין חיכוך עם המשטח.

האדם דוחף את הארגז ללא כל בעיה עד

שנתקע באבן והארגז מתהפך

(מיקום האבן הופך לציר הסיבוב).

חשב את מומנט הכוח.

תשובות סופיות:

$$\vec{\tau} = F_0 \times \hat{z} \quad (1)$$

$$|\vec{\tau}| = 10 \cdot 0.5m \quad (2)$$

תרגיל - מומנטים על משולש:

שאלות:

(1) מומנטים על משולש

המשולש בתמונה הוא משולש שווה צלעות עם אורך צלע נתונה a .

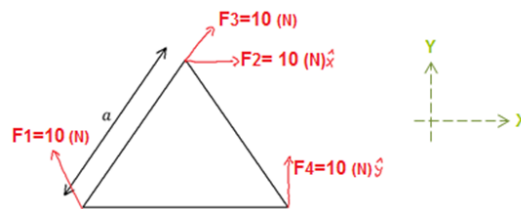
א. חשב את המומנטים של הכוחות בתמונה סביב הפינה השמאלית של המשולש.

ב. נתונה המסה של המשולש M ונתון גם כי מרכז המסה של המשולש

$$\text{נמצא בנק': } \left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2\sqrt{3}}a \right)$$

חשב את מומנט הכוח של כוח הכובד.

ג. חשב שוב את המומנטים סביב ציר העובר במרכז המסה של המשולש, הנח כי הזווית בין F_1 לדופן המשולש היא 60° מעלות.



תשובות סופיות:

$$\tau_g = -Mg \frac{1}{2}a \quad \text{ב.} \quad \tau_1 = 0!, \quad \vec{\tau}_2 = -5 \cdot \sqrt{3}a, \quad \vec{\tau}_3 = 0!, \quad \tau_4 = 10a \quad \text{א.} \quad (1)$$

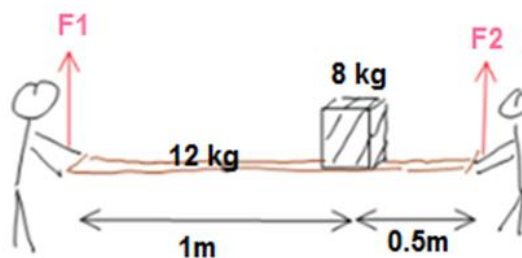
$$\tau_1 = \frac{-10a}{\sqrt{3}}, \quad \tau_2 = -10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}a, \quad \tau_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}a \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ, \quad \tau_4 = 10 \cdot \frac{1}{2}a, \quad \tau_g = 0 \quad \text{ג.}$$

תרגיל - שני פועלים מחזיקים מנשא:

שאלות:

(1) שני פועלים מחזיקים מנשא

שני פועלים מחזיקים מנשא מעץ שמסתו 12kg ואורכו 1.5m. על המנשא, במרחק של 0.5m מהפועל הימני, מונח ארגז בעל מסה של 8kg. בהנחה כי המערכת במנוחה, מצאו את הכוח שמפעיל כל פועל (ראה איור).



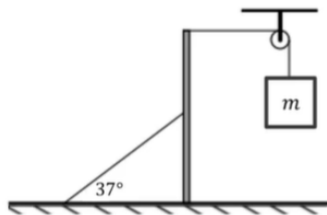
תשובות סופיות:

$$F_2 = 113.333\text{N}, F_1 = 86.666\text{N} \quad (1)$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

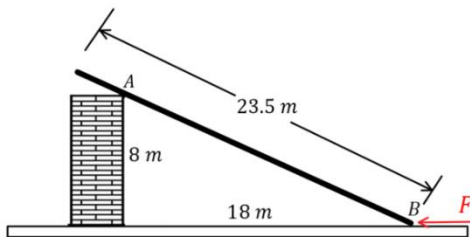
(1) מוט עומד מחובר לחוט ומשקולת



מוט אחיד מונח על משטח אופקי לא חלק, כמוראה בתרשים. המוט מחובר במרכזו לחוט אידיאלי שקצהו השני קשור למשטח ויוצר עימו זווית של 37° . הקצה העליון של המוט מחובר באמצעות חוט אופקי אידיאלי וגלגלת אל משקולת שמסתה $m = 7\text{ kg}$. המערכת נמצאת במנוחה.

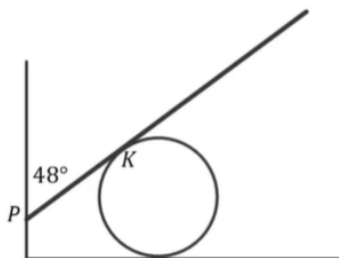
- מהי המתיחות בחוט המחבר אל המשטח?
- מהו כוח החיכוך שמפעיל המשטח האופקי על המוט?

(2) קורה על קיר אנכי



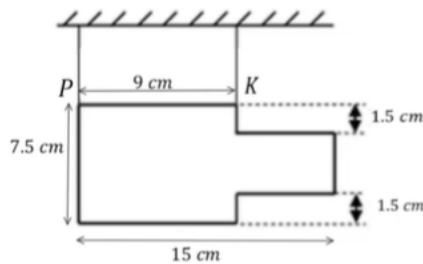
באיור לשאלה זו מתוארת קורה אחידה שאורכה הכולל הוא 23.5 m. מסת הקורה היא 140 kg. הקורה נשענת בנקודה A על קיר אנכי חלק שגובהו 8 m. קצה הקורה מונח על הרצפה בנקודה B במרחק 18 m מהקיר ובקצה הזה פועל כוח אופקי F, כמתואר באיור. מקדם החיכוך הסטטי שבין הקורה הרצפה הוא $\mu_s = 0.3$. מהו F המקסימלי הניתן להפעיל כך שהקורה תישאר במנוחה?

(3) מוט נשען על כדור



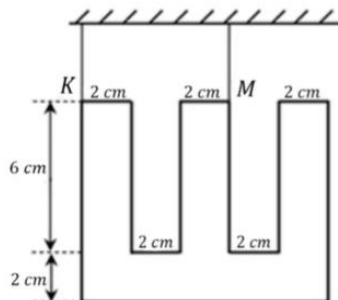
נתון מוט דק שאורכו $L = 3.5\text{ m}$ ומסתו $m = 7\text{ kg}$. הנשען על כדור חסר חיכוך המודבק לרצפה כמתואר בשרטוט. נקודת המגע של המוט בכדור היא הנקודה K. בקצהו השמאלי נוגע המוט בקיר בעל חיכוך בנקודה P, הזווית שיוצר המוט יחסית לקיר היא 48° . מקדם החיכוך הסטטי שבין הקיר למוט הוא $\mu_s = 0.15$.

- מהו הכוח שמפעיל הכדור על המוט אם נתון שקצהו הימני של המוט נמצא על סף תנועה כלפי מטה?
- מהו המרחק בין הנקודות P ו-K במצב זה?

(4) טבלה מעץ

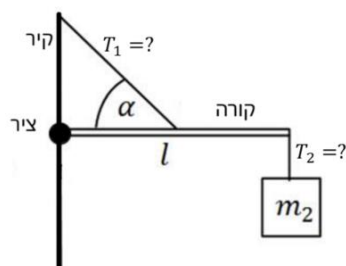
טבלה העשויה עץ בעלת עובי אחיד שמסתה 400 גר' וצורתה כמתואר בתרשים, תלויה בשני חוטים בנקודות K ו-P.

- חשב את מרכז הכובד של הטבלה ביחס למערכת צירים שראשיתה ממוקמת בנקודה P.
- מצא את המתיחות בשני החוטים.

(5) שלט בצורת האות ש

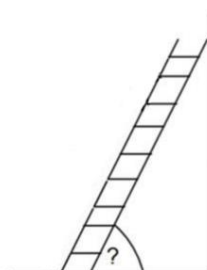
שלט העשוי מחומר אחיד בצורת האות "ש" (כמשורטט), שמסתו 4 ק"ג, נתלה בשני חוטים בנקודות K ו-M.

- חשבו את מרכז המסה של השלט ביחס למערכת צירים שראשיתה ממוקמת בנקודה K.
- מצאו את המתיחות בשני החוטים.

(6) מסה תלויה על קורה שמחוברת לקיר

קורה בעלת מסה m_1 ואורך l מחוברת לקיר באמצעות ציר.

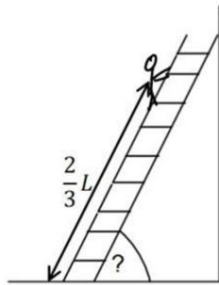
- בקצה הקורה קשורה מסה m_2 התלויה במנוחה. מאמצע הקורה יוצא חוט בזווית הקשור חזרה לקיר, הזווית שיוצר החוט עם הקורה היא α .
- מהי המתיחות בחוטים?
- מהו הכוח (גודל וכיוון) שמפעיל הציר?

(7) סולם נשען על קיר

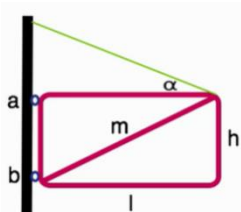
- סולם נשען על קיר. קיים חיכוך סטטי בין הסולם לרצפה וגם בין הסולם לקיר. מקדם החיכוך הסטטי בין הסולם לרצפה ובין הסולם לקיר הוא μ_s . אורך הסולם הוא L וניתן להניח שמסתו מפולגת בצורה אחידה.
- מהי הזווית המינימלית עם הרצפה כך שהסולם לא יחליק?

(8) אדם עומד על סולם שנשען על קיר

אדם עומד על סולם שנשען על קיר.



אורך הסולם הוא L וניתן להניח שמסתו מפולגת בצורה אחידה. האדם עומד על הסולם כשמרחקו מהקצה התחתון של הסולם הוא שני שליש מאורך הסולם. קיים חיכוך סטטי בין הסולם לרצפה וגם בין הסולם לקיר. מקדם החיכוך הסטטי בין הסולם לרצפה ובין הסולם לקיר הוא μ_s . מסת האדם כפולה ממסת הסולם. מהי הזווית המינימלית עם הרצפה כך שהסולם לא יחליק?

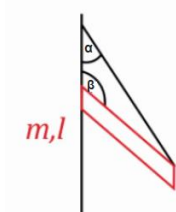
(9) מומנטים על שער

שער שגובהו h ואורכו l מחובר לקיר בשני צירים a ו- b . על מנת להקל על הציר העליון חיברו לשער כבל ומתחו אותו עד אשר הכוח האופקי בנקודה a מתאפס.

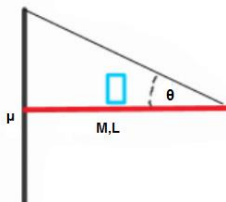
א. מהי המתיחות בכבל?

ב. מהו הכוח האופקי הפועל על הציר b ?

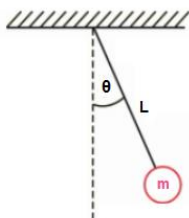
ג. מהו סכום הכוחות האנכיים המופעלים על שני הצירים?

**(10) גגון מוחזק אל קיר**

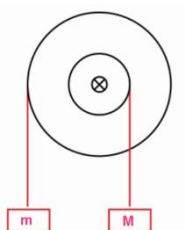
גגון מוחזק אל קיר בעזרת חבל וחיכוך כמתואר בשרטוט. מצא את הכוחות הפועלים על הגגון.

(11) מסה על גגון מחליק

גגון מוחזק לקיר בעזרת חיכוך בלבד לפי הנתונים שבשרטוט. מהו המרחק הקטן ביותר מהקיר בו ניתן לשים את המסה m מבלי לגרום לגגון להחליק מהקיר?

(12) מטוטלת מתמטית

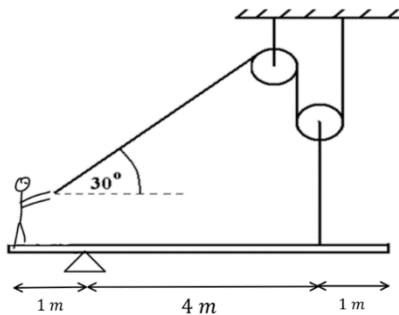
מצא את מומנט הכוח המופעל על מטוטלת מתמטית כפונקציה של הזווית מהאנך.

(13) מנוף מדיסקה כפולה

נתונה המערכת שבשרטוט.

רשום את כל הכוחות הפועלים על הדיסקה ומצא את יחס הרדיוסים בין שתי הדיסקות.

14) אדם על קורה מחזיק בחוט ושתי גלגלות



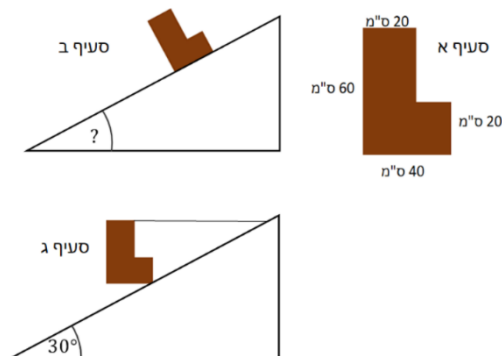
אדם שמסתו 65kg עומד בקצה קורה שמסתה 40kg. הקורה מונחת על ציר הנמצא במרחק 1m מהאדם. האורך הכולל של הקורה הוא 6m. האדם מחזיק בחוט העובר דרך שתי גלגלות כפי שמתואר באיור. הגלגלת השמאלית מחוברת לתקרה, הגלגלת הימנית לקורה במרחק 1m מהקצה השני.

- מהו הכוח בו האדם צריך למשוך את החבל כדי לשמור על מצב של שיווי משקל?
- מהם רכיבי הכוח שהציר מפעיל על הקורה?
- מהו מקדם החיכוך הסטטי המינימאלי בין האדם לקורה כדי שהאדם לא יחליק מהקורה?

15) L על מישור משופע*

באיור נתון גוף משטחי בצורת L.

צפיפות המסה של הגוף היא: $\sigma = 5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$.

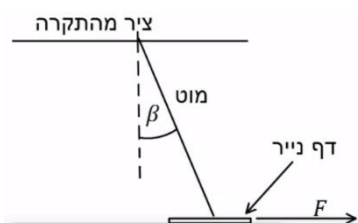


- מהו מרכז המסה של הגוף ביחס לפינה התחתונה השמאלית?
- מניחים את הגוף על מישור משופע. מהי הזווית המקסימאלית של המישור עבורה הגוף לא יתהפך?
- קושרים את הגוף למישור באמצעות חוט אופקי מהפינה הימנית העליונה ומותחים את החוט עד שהגוף מתיישר במקביל לקרקע.

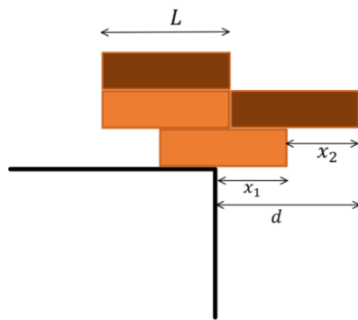
מהי המתיחות בחוט במצב זה אם זווית המישור היא 30° והגוף במנוחה.

16) מוט נשען על דף נייר*

מוט בעל אורך L ומסה M מחובר לתקרה בציר. בקצהו השני המוט מונח על דף נייר המונח על הרצפה. מסת דף הנייר זניחה. הזווית בין המוט לאנך היא β ומקדם החיכוך הסטטי בין המוט לנייר ובין הנייר לרצפה הוא μ_s .

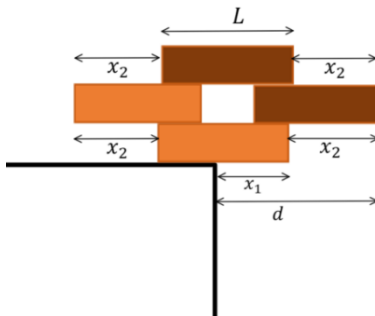


- מושכים את הנייר ימינה בכוח F. מהו הכוח המינימלי הדרוש בשביל להוציא את הנייר מתחת למוט? הנח שהמוט נשאר במנוחה.
- חזור על סעיף א' אם הכוח פועל שמאלה.



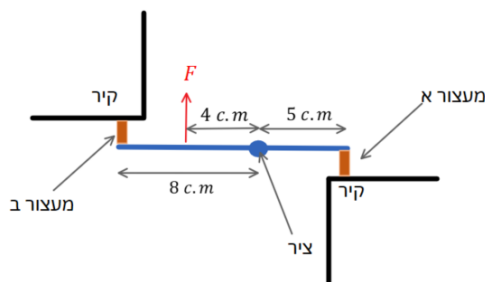
17) ערימת קוביות 1

ערימת קוביות מורכבת מ-4 קוביות זהות באורך L . הקוביות מסודרות באופן שמתואר באיור. מהו המרחק d המקסימאלי האפשרי כך שהערימה לא תיפול מהשולחן. מהם x_1 ו- x_2 במצב זה?



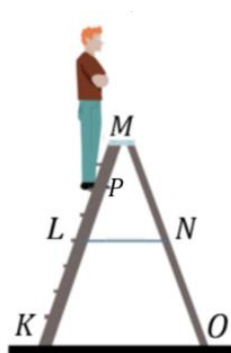
18) ערימת קוביות *2

ערימת קוביות מורכבת מ-4 קוביות זהות באורך L . הקוביות מסודרות באופן שמתואר באיור. מהו המרחק d המקסימאלי האפשרי כך שהערימה לא תיפול מהשולחן. מהם x_1 ו- x_2 במצב זה?



19) מוט עם שני מעצורים מגומי**

באיור ישנו מוט באורך 13c.m. המחובר בציר הנמצא במרחק 5c.m. מהקצה הימני. בשני הקצוות של המוט ישנם מעצורים זהים העשויים מגומי. מפעילים כוח $F = 200\text{N}$ במרחק 4c.m. שמאלה מהציר, הכוח גורם לכיווץ קטן של המעצורים. המערכת אופקית, כלומר כוח הכובד פועל לתוך הדף וניתן להתעלם ממנו. מהו הכוח שפועל על כל מעצור? רמז: התייחס למעצורים כמו קפיצים בעלי קבוע k זהה.



20) אדם על סולם עם שתי רגליים**

אדם עומד על סולם בעל שתי רגליים המחוברות באמצעות כבל במרכז הסולם. משקל האדם הוא 800 ניוטון וניתן להזניח את משקל הסולם ואת החיכוך עם הרצפה. נתונים אורכי הקטעים הבאים: $KM = OM = 2.34\text{m}$, $KP = 1.70\text{m}$, $LN = 0.746\text{m}$. א. מצא את הכוחות שפועלים בנקודות O ו-K. ב. מצאו את המתוחות בכבל. רמז: יש לעשות משוואה רק על חלק מהסולם.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad T_2 \approx 180 \text{ N} \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad f_s = T_1 = 70 \text{ N}, \text{ ימינה.}$$

$$(2) \quad F_{\max} \approx 521 \text{ N}$$

$$(3) \quad N_2 \approx 110 \text{ N} \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad PK \approx 0.84 \text{ m}$$

$$(4) \quad x_{\text{c.m.}} = 6.6 \text{ c.m.}, y_{\text{c.m.}} = 3.75 \text{ c.m.} \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad T_2 = 3 \text{ N}, T_1 = 1 \text{ N}$$

$$(5) \quad x_{\text{c.m.}} = 5 \text{ c.m.}, y_{\text{c.m.}} \approx 4.4 \text{ c.m.} \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad T_K = 6.7 \text{ N}, T_M = 33.3 \text{ N}$$

$$(6) \quad T_1 = \frac{(m_1 + 2m_2)g}{\sin \alpha}, T_2 = m_2 g \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad F = \sqrt{((m_1 + 2m_2)g \cot \alpha)^2 + (m_2 g)^2}, \tan \theta = -\frac{m_2}{m_1 + 2m_2} \tan \alpha$$

$$(7) \quad \tan \theta = \frac{1 - \mu_s^2}{2\mu_s}$$

$$(8) \quad \tan \theta = \frac{11 - 7\mu_s^2}{18\mu_s}$$

$$(9) \quad \text{ראה סרטון.}$$

$$(10) \quad \text{ראה סרטון.}$$

$$(11) \quad \text{ראה סרטון.}$$

$$(12) \quad \sum \tau = -mgl \sin \theta + Tl \sin \theta = -mgl \sin \theta$$

$$(13) \quad \sum \tau = \frac{m}{M} = \frac{r}{R}$$

$$(14) \quad T_1 = 20 \text{ N} \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad F_x = 10\sqrt{3} \text{ N}, F_y = 1000 \text{ N} \quad \text{שמאלה}$$

$$\mu_{s_{\min}} = 0.027 \quad \text{ג.}$$

$$(15) \quad x_{\text{c.m.}} = 0.15 \text{ m}, y_{\text{c.m.}} = 0.25 \text{ m} \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad \alpha = 31^\circ$$

$$\text{ג.} \quad T = 3.3 \text{ N}$$

$$(16) \quad F_{\min} = \frac{\mu_s mg \sin \beta}{\sin \beta + \mu_s \cos \beta} \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad F_{\min} = \frac{\mu_s mg \sin \beta}{\sin \beta + \mu_s \cos \beta}$$

$$(17) \quad x_1 = \frac{5L}{8}, x_2 = \frac{L}{2}, d = \frac{9L}{8}$$

$$(18) \quad x_1 = \frac{L}{2}, x_2 = \frac{2L}{3}, d = \frac{7L}{6}$$

$$(19) \quad F_R \approx 45 \text{ N}, F_L \approx 72 \text{ N}$$

$$(20) \quad N_O \approx 291 \text{ N}, N_k = 509 \text{ N} \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad T_L \approx 196 \text{ N}$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 17 - תנע זוויתי

תוכן העניינים

- 1. נוסחאות וחוקי שימור 200
- 2. תנע זוויתי ביחס למרכז מסה 203

נוסחאות וחוקי שימור:

שאלות:

(1) תנ"ז בזריקה משופעת

אבן נזרקת בזריקה משופעת במהירות v_0 ובזווית α ,

כוח הכובד שפועל על האבן $\vec{F} = -mg\hat{y}$.

א. מהו התנ"ז של האבן ביחס לנקודת המוצא כתלות בזמן?

ב. מהו מומנט הכוח של כוח הכובד?

ג. הראה כי השינוי של התנ"ז בזמן שווה למומנט הכוח של כוח הכובד.

(2) גוף מסתובב על שולחן ונמשך למרכז

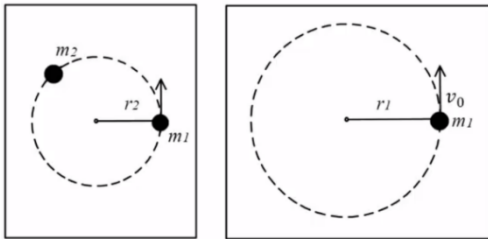
מסה m_1 מחוברת לחוט המחובר למרכז שולחן.

המסה נעה במסלול מעגלי ברדיוס קבוע r_1

ובמהירות קבועה v_0 .

ברגע מסוים מושכים את המסה למרכז המעגל (מקצרים את אורך החוט) ומפסיקים כאשר אורך החוט שווה r_2 והמסה מסתובבת שוב בתנועה מעגלית קבועה.

רגע לאחר מכן מניחים מסה נוספת m_2 במסלול של m_1 והמסות מתנגשות התנגשות פלסטית. מצאו את מהירות המסות לאחר ההתנגשות.



(3) שתי מחליקות על הקרח

שתי מחליקות תאומות בעלות מסה m זהה

מחליקות בכיוונים מנוגדים ובמהירות v_0 .

המחליקות נעות על קווים ישרים והמרחק בין הקווים הוא d . באמצע ביניהן שמים חבל.

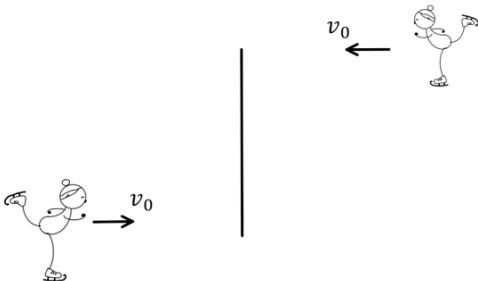
כאשר הן מגיעות לחבל, שתיהן תופסות את החבל ומתחילות להסתובב סביב המרכז ביניהן.

א. מה המהירות הזוויתית שהן מסתובבות?

ב. כעת המחליקות מושכות את החבל ומתקרבות זו לזו עד אשר המרחק

ביניהן הוא $\frac{d}{2}$.

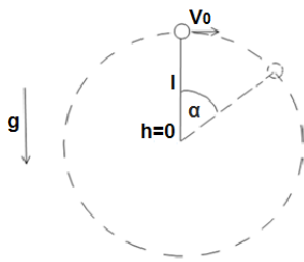
מצא את המהירות הזוויתית החדשה של המחליקות.



(4) כדור מסתובב אנכית

כדור בעל מסה m מחובר לחוט בעל אורך l ומסתובב במעגל אנכי.

נתון כי מהירות הכדור בשיא הגובה היא v_0 .



א. מצא את מומנט הכוח הפועל על הכדור כפונקציה של הזווית α .

ב. מצא את התנע הזוויתי של הכדור כפונקציה של הזווית α .

(5) כדור בתוך חרוט

כדור קטן נע בתוך חרוט המחובר הפוך למשטח.

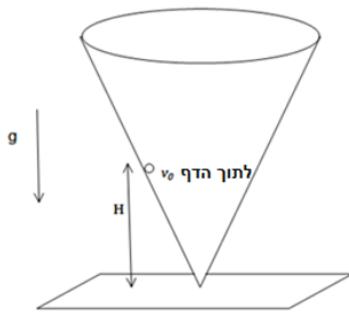
נתון כי מהירות הכדור ההתחלתית היא v_0

בכיוון אופקי ומשיק לדופן החרוט.

גובהו ההתחלתי H .

מצא את הגובה המקסימאלי אליו יגיע הכדור (החרוט אינו זז).

הנחיות: מספיק להגיע למשוואה ממעלה שלישית על h אין צורך לפתור אותה.

**(6) כדור מסתובב מחובר למסה תלויה**

מסה m נעה על שולחן חסר חיכוך ומחובר באמצעות חוט העובר דרך מרכז השולחן למסה M התלויה באוויר.

אורך החוט הוא L . נתון כי ב- $t=0$ המסה M

נמצאת במנוחה והמסה m נמצאת במרחק R

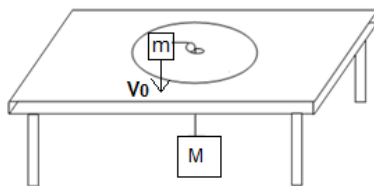
ממרכז הלוח, במהירות התחלתית v_0 ,

בכיוון מאונך לרדיוס.

רשום את משוואת שימור האנרגיה והתנע הזוויתי

ומצא משוואה דיפרנציאלית התלויה רק בגודל r ,

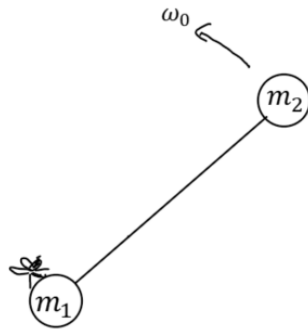
מרחק המסה m ממרכז השולחן.

**(7) מומנט הכוח לא תלוי בנקודת הייחוס**

הוכיחו כי אם הכוח השקול על קבוצת גופים מתאפס אז מומנט הכוח על קבוצת הגופים אינו תלוי בנקודת הייחוס.

(8) תנע זוויתי לא תלוי בנקודת ייחוס

הוכיחו כי אם התנע הקווי של קבוצת גופים מתאפס אז התנע הזוויתי שלהם לא תלוי בנקודת הייחוס.


9) זבוב הולך על מוט*

שתי מסות נקודתיות m_1 ו- m_2 מחוברות באמצעות מוט חסר מסה באורך d . על המסה m_1 נמצא זבוב בעל מסה m_3 . כל המערכת נמצאת על שולחן אופקי ומסתובבת סביב מרכז המסה שלה במהירות זוויתית קבועה ω_0 . ברגע מסוים הזבוב מתחיל ללכת על המוט במהירות v ביחס למוט ונעצר כאשר הוא מגיע למרכז המסה של שלושת הגופים (שימו לב שהמוט לא מחובר לשולחן). מהי המהירות הזוויתית של המערכת כאשר הזבוב נעצר?

תשובות סופיות:

$$\text{א. } -\frac{1}{2}gt^2v_0m\cos\alpha\hat{z} \quad \text{ב. } -mgv_0\cos\alpha\hat{z} \quad \text{ג. שאלת הוכחה.} \quad (1)$$

$$u = \frac{m_1 r_1 v_0}{r_2 (m_1 + m_2)} \quad (2)$$

$$\omega' = \frac{2v_0}{d} \quad \text{א.} \quad \omega'' = \frac{8v_0}{d} \quad \text{ב.} \quad (3)$$

$$\sum \vec{\tau} = -mgl\sin\alpha \quad \text{א.} \quad \vec{L} = lmv(-\hat{z}) \quad \text{ב.} \quad (4)$$

$$(2gH + v_0^2)h_{\max}^2 + 2gh_{\max}^3 + v_0^2H^2 \quad (5)$$

$$a + br + \frac{c}{r^2} = \dot{r}^2 \quad (6)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (7)$$

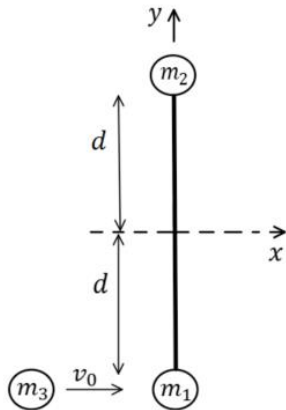
$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (8)$$

$$\omega' = \frac{(m_1 + m_3)(m_1 + m_2)}{m_1(m_1 + m_2 + m_3)}\omega_0 \quad (9)$$

תנע זוויתי ביחס למרכז מסה:

שאלות:

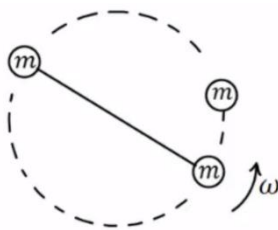
(1) מסה מתנגשת במוט עם שתי מסות



שתי מסות נקודתיות m_1 ו- m_2 מחוברות באמצעות מוט חסר מסה באורך $2d$. המערכת נמצאת במנוחה על שולחן אופקי חסר חיכוך (שתי המסות על השולחן, המוט אופקי). מסה שלישית m_3 נעה במהירות v_0 ומתנגשת התנגשות פלסטית במסה m_1 . נסמן את רגע ההתנגשות ב- $t = 0$.
 $d = 3\text{m}$, $v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0.2\text{kg}$

- חשבו את מיקום מרכז המסה ברגע $t_1 = 0.5\text{sec}$ ביחס לראשית הנמצאת במרכז המוט בהתחלה ואינה נעה עם המוט.
- חשבו את התנע הזוויתי של המערכת ביחס לראשית הצירים ברגע t_1 .
- חשבו את התנע הזוויתי של המערכת ביחס למרכז המסה שלה ברגע t_1 .
- מצאו את המהירות הזוויתית של המוט ביחס למרכז המסה לאחר ההתנגשות.
- מהי המהירות הקווית של m_1 ומהי המהירות הקווית של m_2 מיד לאחר ההתנגשות?

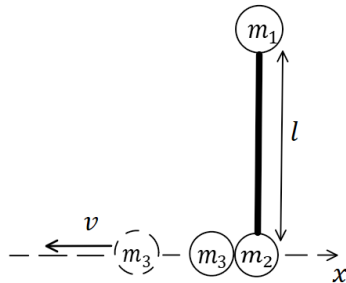
(2) שתי מסות מחוברות מסתובבות ומתנגשות בשלישית



שתי מסות זהות m מחוברות במוט חסר מסה באורך d ומסתובבות סביב מרכז המסה שלהן במהירות זוויתית קבועה ω . אחת המסות מתנגשת התנגשות פלסטית במסה זהה נוספת הנמצאת במנוחה. מצא את מהירות מרכז המסה של שלושת המסות המחוברות לאחר ההתנגשות ואת המהירות הזוויתית שלהן סביב מרכז המסה של שלושתן.

(3) מסה נפרדת ממוט עם שתי מסות

שלוש מסות m_1, m_2, m_3 נתונות ומחוברות לקצה של מוט באורך l .



המסות m_2, m_3 מחוברות בקצה התחתון

באיור והמסה m_1 בקצה העליון.

המוט נמצא על שולחן חסר חיכוך (באיור המבט מלמעלה) ובמנוחה.

ברגע מסוים יש פיצוץ בין המסות m_2, m_3

והמסה m_3 מתנתקת מהמוט וממשיכה

במהירות v נתונה (ביחס לשולחן) ובמאונך למוט.

המסה m_2 נשארת מחוברת למוט.

נתון כי: $m_1, m_2 = M, m_3 = 3M$.

א. מצא את מהירות מרכז המסה של המוט (עם המסות המחוברות).

ב. מצא את המהירות הזוויתית של המוט סביב מרכז המסה שלו.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \vec{r}_{cm}(t_1) = (1_m - 1_m) \quad \text{ב. } L = 3.6 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \quad \text{ג. } L_{c.m.} = 4.8 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$$

$$\text{ד. } \omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad \text{ה. } V_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x}, V_2 = -2 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x}$$

$$(2) \quad u_{1,2,3,cm} = 0, \omega' = \frac{3}{4} \omega$$

$$(3) \quad \text{א. } v_{1,2,cm} = \frac{3}{2} v \quad \text{ב. } \omega = \frac{3v}{l}$$

מכניקה לתעשייה וניהול

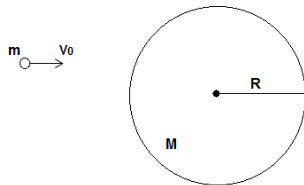
פרק 18 - גוף קשיח

תוכן העניינים

1. הגדרות, ציר סיבוב ותנע קווי	(ללא ספר)
2. תנע זוויתי של גוף קשיח	205
3. אנרגיה סיבובית של גוף קשיח	207
4. ניתוח לפי כוחות ומומנטים וגלגול ללא החלקה	209
5. גלגול עם החלקה	211
6. תרגילים מסכמים	212
7. תרגילים מסכמים כולל פרסציה	220

תנע זוויתי של גוף קשיח:

שאלות:

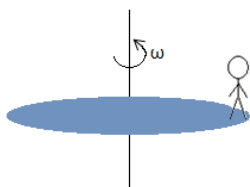


(1) כדור מתנגש בדיסקה

דסקה בעלת מסה M ורדיוס R מחוברת באמצעות ציר העובר במרכזה לשולחן אופקי חסר חיכוך.

כדור פלסטלינה בעל מסה m נע במהירות V_0 לעבר הדסקה.

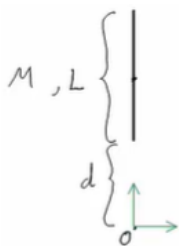
הכדור פוגע בדסקה משמאלה, ובמרחק d ממרכזה. הכדור נדבק לדסקה ושניהם מתחילים להסתובב יחדיו (סביב הציר במרכז הדסקה). הדסקה נמצאת במנוחה לפני הפגיעה וכוח הכובד אינו משפיע על הגופים (המערכת אופקית). מצא את המהירות הזוויתית בה יסתובבו הגופים לאחר הפגיעה.



(2) אדם קופץ מדיסקה

נתונה דסקה בעלת רדיוס R המסתובבת סביב מרכזה במהירות זוויתית קבועה ω . בקצה הדסקה עומד איש נקודתי ומסתובב ביחד עם הדסקה. ברגע מסוים האיש קופץ מהדסקה ונתון כי מהירותו מיד לאחר הקפיצה היא V_0 בכיוון הרדיאלי, ביחס לקרקע.

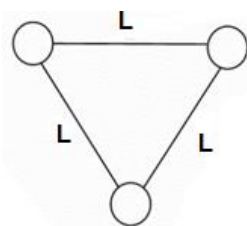
מצא את המהירות הזוויתית של הדסקה לאחר הקפיצה אם נתונים מסת האיש m ומסת הדסקה M .



(3) דוגמה - תנע זוויתי של תנועה משולבת

נתון מוט בעל אורך L ומסה M .

המרחק בין הקצה התחתון של המוט עד ראשית הצירים הוא d . המוט מסתובב בכיוון השעון מסביב לראשית. חשב את התנע הזוויתי.



(4) שלושה כדורים

שלושה כדורים זהים בעלי מסה m נמצאים בפינותיו של משולש שווה צלעות. הכדורים מחוברים באמצעות שלושה מוטות חסרי מסה ואורך L (צלעות המשולש).

- חשב את מיקום מרכז המסה של המערכת.
- כעת, נתון כי הגוף מסתובב במהירות זוויתית ω נתונה, סביב מרכז המסה שלו. ברגע מסוים, כאשר הגוף נמצא במצב המתואר בצור, הכדור התחתון ניתק מהגוף.
- מצא את מהירות הכדור שניתק לאחר הניתוק.
- מצא את מהירות מרכז המסה של החלק הנותר.
- מצא את המהירות הזוויתית של החלק הנותר סביב מרכז המסה שלו.

(5) מסמר נועץ דיסקה מסתובבת

דיסקה ברדיוס R ומסה m מונחת על שולחן אופקי במנוחה. מסובבים את הדיסקה במהירות זוויתית ω סביב מרכז המסה של (סביב ציר z). מסמר נופל מהשמים ופוגע בקצה של הדיסקה ונועץ אותה לשולחן. א. מהי המהירות הזוויתית של הדיסקה סביב המסמר לאחר הנעיצה? ב. ענו שוב על השאלה רק הפעם הניחו שבנוסף לסיבוב, מרכז המסה של הדיסקה נע במהירות v לפי הנעיצה.

תשובות סופיות:

$$\omega = \frac{mv_0 d}{I} \quad (1)$$

$$\omega' = \frac{\left(\frac{1}{2}M + m\right)\omega_0}{\frac{1}{2}M} \quad (2)$$

$$\left(\frac{L}{2} + d\right)^2 M\omega + I_{c.m.}\omega_{c.m.} = L \quad (3)$$

$$v_{1,2,c.m.} = \frac{1}{2}\omega R \hat{x} \quad \text{ג.} \quad v_3 = -\omega R \hat{x} \quad \text{ב.} \quad y_{c.m.} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, x_{c.m.} = \frac{L}{2} \quad \text{א.} \quad (4)$$

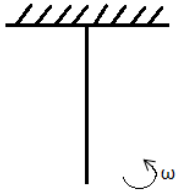
$$I_{1,2,3}\omega = m|v_3|R + 2mv_{1,2}y_{c.m.} + 2m\left(\frac{1}{2}L\right)^2 \omega \quad \text{ד.}$$

$$\frac{1}{3}\left(\omega + \frac{v}{R}\right) \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{3}\omega \quad \text{א.} \quad (5)$$

אנרגיה סיבובית של גוף קשיח:

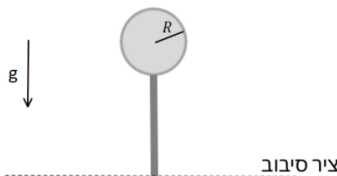
שאלות:

(1) מוט מסתובב



מוט באורך L ומסה M מחובר לתקרה באמצעות ציר ויכול להסתובב. למוט מהירות זוויתית התחלתית ω . מהי הזווית המקסימלית אליה יגיע המוט?

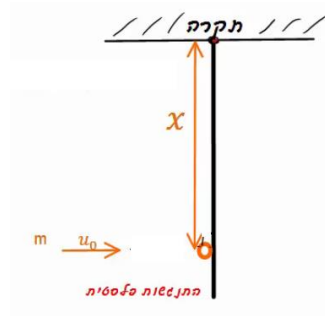
(2) דיסקה מחוברת למוט נופלת ממצב אנכי



גוף קשיח מורכב ממוט בעל אורך L ומסה M המחובר בקצה אחד לדיסקה מלאה בעלת מסה m המפולגת באופן אחיד ורדיוס R . בקצה השני, המוט מחובר לציר אופקי.

המוט חופשי להסתובב סביב הציר (כלומר הגוף יכול לעשות סיבוב אנכי סביב הציר). הגוף מתחיל מהמצב המתואר באיור (מצב אנכי לא יציב) ומקבל דחיפה קטנה לתוך הדף. מה תהיה המהירות הזוויתית של הגוף כאשר יגיע לנקודה הנמוכה ביותר?

(3) כדור פוגע במוט שתלוי מהתקרה (כולל תנז)



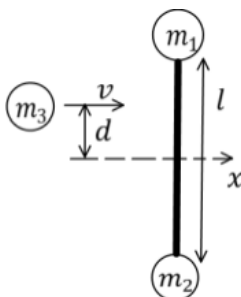
כדור בעל מסה m פוגע במוט שתלוי מהתקרה במרחק x מציר הסיבוב של המוט. המוט בעל אורך L ובעל מסה M . מהירותו ההתחלתית של הכדור היא μ_0 והוא מתנגש פלסטית עם המוט.

א. מהי המהירות הזוויתית של המערכת מיד לאחר ההתנגשות?

ב. מהי הזווית המקסימלית אליה יגיע המוט?

ג. מצא x כך שהכוח שמפעילה התקרה על המוט יתאפס.

(4) מסה מתנגשת בשתי מסות מחוברות במוט (כולל תנז)



שני גופים נקודתיים בעלי מסה M כל אחד מחוברים בשני קצותיו של מוט דק חסר מסה באורך l . המערכת נמצאת במנוחה על גבי משטח אופקי חלק לאורך ציר y .

כדור נוסף שמסתו m פוגע במוט במאונך למוט ובמרחק d ממרכז המוט. מהירות הכדור הנוסף היא v וההתנגשות עם המוט היא אלסטית.

מה צריכה להיות מהירותו של הכדור הנוסף, כך שישאר במנוחה לאחר ההתנגשות.

תשובות סופיות:

$$\cos \theta = 1 - \frac{L\omega_0^2}{3g} \quad (1)$$

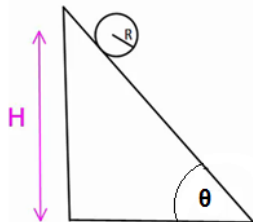
$$\omega = \sqrt{\frac{2MgL + 2mg(L+R)}{\frac{ML}{3} + \frac{1}{4}mR^2 + m(L+R)^2}} \quad (2)$$

$$\mu u_0 = M \frac{L}{r} + mx \quad \text{ג.} \quad mgh' = \frac{1}{2} I \omega^2 - mgx_{c.m.} \quad \text{ב.} \quad \omega = \frac{mv_0 x}{mx^2 + \frac{ML^2}{3}} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$m = \frac{2M}{1 + \frac{4d^2}{l^2}} \quad (4)$$

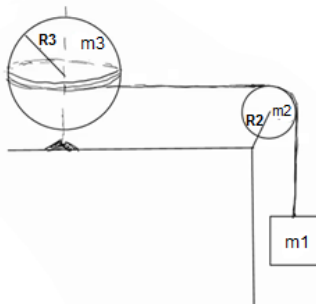
ניתוח לפי כוחות ומומנטים וגלגול ללא החלקה:

שאלות:



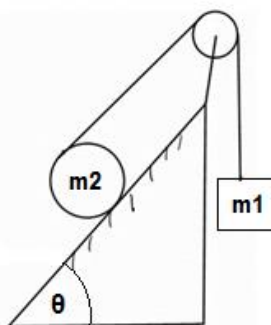
1) דוגמה - כדור על מדרון משופע

- כדור בעל רדיוס R מונח בגובה H על מדרון משופע בעל זווית α . הכדור מתחיל להתגלגל ללא החלקה.
- א. מצאו את מהירות הכדור בתחתית המדרון.
- ב. מצאו את תאוצת הכדור.



2) גלובוס

- גלובוס (כדור) מונח ומקובע לשולחן ויכול להסתובב סביב ציר המאונך לשולחן.
- מלפפים חוט סביב מרכז הגלובוס (סביב קו המשווה) והחוט ממשיך מהגלובוס דרך גלגלת לא אידיאלית למסה תלויה m_1 .
- נתונים גם: m_2 ו- R_2 מסה ורדיוס הגלגלת, m_3 ו- R_3 מסה ורדיוס הגלובוס.
- המערכת מתחילה ממנוחה.
- מצא את תאוצת כל הגופים, קווית וזוויתית ואת המתרחות בחוט.



3) יויו במישור מחובר למסה

- יויו (כדור שמלופף סביבו חוט) בעל מסה m_2 ורדיוס R מונח על מישור משופע בעל זווית θ .
- החוט של היויו מחובר דרך גלגלת אידיאלית למסה m_1 .
- נתון כי היויו מתגלגל ללא החלקה על המישור וכי קיים חיכוך בין היויו למישור.
- א. מצא לאן תנוע המערכת וכיוון החיכוך הסטטי.
- ב. מצא את תאוצות הגופים וגודל כוח החיכוך.

(4) מוט אופקי נופל

מוט בעל מסה M (צפיפות אחידה) ואורך L תלוי בקצהו לקיר וחופשי להסתובב סביב נקודת התלייה.

משחררים את המוט ממצב אופקי.



א. מצא את התאוצה הזוויתית ואת תאוצת מרכז

המסה של המוט ברגע השחרור.

כעת המוט נופל עד להגיעו למצב מאונך לקרקע.

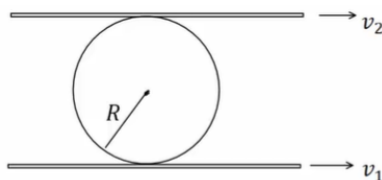
ב. מצא את הכוח שמפעיל הציר שמחבר את המוט

לקיר על המוט, ברגע השחרור.

ג. מצא את המהירות הזוויתית של המוט ברגע זה

(כשהוא מאונך לקרקע).

ד. חזור על סעיפים א' ו-ב' עבור רגע זה.

(5) משטח מלמעלה ומשטח מלמטה

כדור בעל רדיוס R לחוץ בין שני משטחים נעים.

המשטח מתחת לכדור נע במהירות v_1 והמשטח

מעליו נע במהירות v_2 .

א. מהי מהירות מרכז המסה של הכדור אם

ידוע שהוא מתגלגל ללא החלקה ביחס לשני המשטחים?

ב. חזור על סעיף א' אם המשטח העליון נע בכיוון ההפוך.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } mgH = \frac{1}{2}mv_{c.m.}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v_{c.m.}}{R}\right)^2 \quad \text{ב. } a = \frac{5}{7}g \sin \theta$$

(2) ראה סרטון.

(3) ראה סרטון.

$$(4) \quad \text{א. } a_{c.m.} = \frac{3}{4}g = a_y, a_x = a_r = 0, \alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L} \quad \text{ב. } \sum F_y = ma_{y_{c.m.}}, \sum F_x = ma_{x_{c.m.}}$$

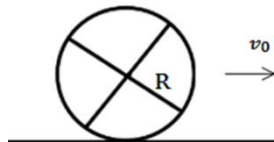
$$\text{ג. } mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\text{ד. } \sum F_y = ma_{y_{c.m.}}, \sum F_x = ma_{x_{c.m.}}, a_\theta = 0 = a_{x_{c.m.}}, a_y = a_r = -\omega^2 \frac{L}{2}, \alpha = 0$$

$$(5) \quad \text{א. } v_{c.m.} = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad \text{ב. } v_{c.m.} = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

גלגול עם החלקה:

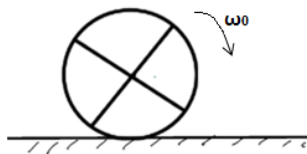
שאלות:



(1) כדור מחליק ללא סיבוב

כדור הומוגני בעל מסה M מתחיל תנועתו עם מהירות V_0 ללא סיבוב (מהירות זוויתית).

מצא את מהירותו הסופית אם נתון מקדם החיכוך הקינטי.



(2) כדור מסתובב מונח על רצפה

כדור הומוגני בעל מסה M מוחזק באוויר ומסתובב סביב מרכז המסה שלו במהירות זוויתית ω_0 .

הכדור מונח על הרצפה בעודו מסתובב.

מצא את מהירותו הסופית אם נתון מקדם החיכוך הקינטי μ_k .

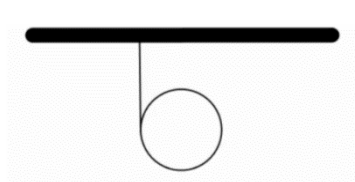
תשובות סופיות:

$$V_{\text{final}} = \frac{5}{7} V_0 \quad (1)$$

$$V_{\text{final}} = \frac{2}{7} \omega_0 R \quad (2)$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

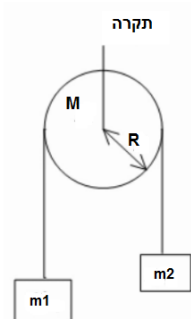


(1) חישוק מתגלגל מחבל

חבל מלופף סביב חישוק בעל רדיוס R ומסה m .
(החבל מחובר לתקרה).

א. מהי תאוצת מרכז המסה של החישוק?

ב. לאחר כמה זמן ירד החישוק גובה של h אם התחיל תנועתו ממנוחה?

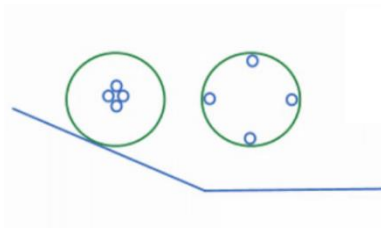


(2) מסות וגלגלת

שתי מסות שונות m_1, m_2 תלויות משני הצדדים של גלגלת לא אידיאלית המקובעת במרכזה.
המסות משוחררות ממנוחה.

מצא את תאוצת המסות אם נתון:

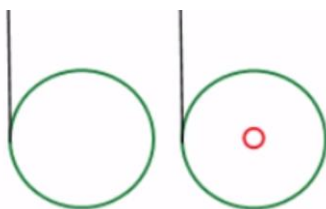
M מסת הגלגלת, R רדיוס הגלגלת
וכי החוט אינו מחליק על הגלגלת.



(3) שתי דיסקות שונות במדרון

בגן המדע שבמכון ויצמן יש שתי דיסקות קלות אליהן מודבקות 4 מסות כבדות כמתואר בשרטוט.
את הדיסקות מניחים על שני מדרונים ובודקים מי תנוע בהגיעה למישור מהר יותר.

הסבר כיצד ניתן לחשב מהירות זו על פי נתוני המערכת.



(4) שני חישוקים מתגלגלים מחבל

חישוק בעל מסה m ורדיוס R תלוי מחבל המלופף סביבו.

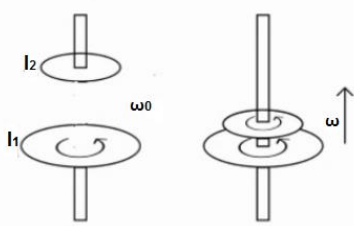
א. מה תהיה מהירותו לאחר שנפל מגובה h ?

מה תהיה תאוצתו? כמה זמן תארך הנפילה?

חישוק אחר חסר מסה בעל רדיוס R מכיל מסה נקודתית במרכזו בעלת מסה m .

ב. מה תהיה מהירותו לאחר שנפל מגובה h ?

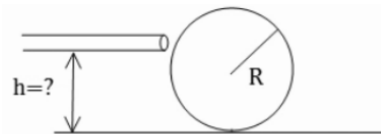
ג. מה תהיה מהירותו אם החבל יהיה ללא חיכוך?

(5) מצמד

בכלי עבודה רבים קיים מנגנון הקרוי מצמד (קלאץ'). תפקיד המצמד הוא להעביר את הכוח המניע אל החלק המונע בצורה הדרגתית (למשל להעביר את כוח המנוע ברכב אל הגלגלים מבלי לגרום לתנועה פתאומית בגלגלים). המצמד מופעל ע"י הצמדת דסקה מסתובבת אל דסקה נייחת והעברת אנרגיה מזו לזו בעזרת כוח החיכוך. לפניך מצמד הבנוי משתי דסקות בעלות מומנט התמד שונה. הדסקה התחתונה מסתובבת במהירות התחלתית נתונה. בשלב מסוים הדסקה העליונה מונחת על הדסקה התחתונה ובעזרת כוח המשיכה וכוח החיכוך מתחילה לנוע בעצמה עד ששתי הדיסקות ינועו ביחד.

א. מצא את המהירות הסופית של הדיסקות.

ב. כמה אנרגיה אבדה בתהליך זה?

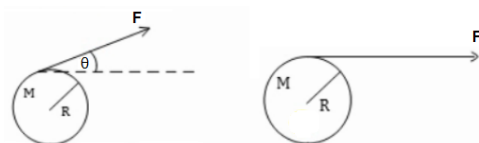
(6) מכה בכדור ללא החלקה

כדור סנוקר ברדיוס R נמצא במנוח על שולחן ללא חיכוך (חיכוך נמוך מאוד). מצא באיזה גובה מעל תחתית הכדור יש לתת מכה אופקית עם המקל כך שהכדור יתגלגל ללא החלקה.

$$I_{c.m} = \frac{2}{5} mR^2$$

מומנט ההתמד של הכדור הוא :

הדרכה : ערוך תרשים כוחות ונתח את הבעיה בשלב המכה עצמה.

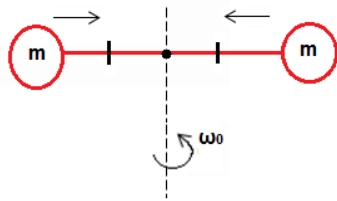
(7) חוט מושך דיסקה ללא החלקה - תרגיל פשוט

חוט מלופף מסביב לגליל המונח על מישור שאינו חלק. רדיוס הגליל הוא R ומסתו M . כוח F נתון מושך את הגליל. מצא את תאוצת הגליל במקרים הבאים אם ידוע שהגליל מתגלגל ללא החלקה :

א. הכוח פועל בכיוון אופקי.

ב. הכוח פועל בזווית θ ביחס לאופק וידוע שהגליל אינו מתרומם.

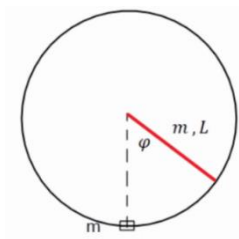
ג. מה כיוון החיכוך בכל מקרה?


(8) מחליקה על קרח סוגרת ידיים

- מחליקה על הקרח מסתובבת במהירות w_0 . המחליקה בעלת מסה זניחה אך היא מחזיקה מסה m בכל יד. הידיים פרוסות לצדדים ואורך כל יד l . לפתע המחליקה סוגרת את ידיה לחצי מאורכן המקורי. א. מה תהיה מהירות הסיבוב החדשה? ב. כמה אנרגיה הושקעה בתהליך?


(9) גלגול עם החלקה

- אל עבר דסקה בעלת מסה M ורדיוס R נורה קליע בעל מסה m במהירות v . הדסקה מונחת על מישור בעל מקדם חיכוך נתון. מצא כמה זמן תימשך ההחלקה.


(10) מוט משוחרר בזווית פוגע במסה

- מוט המחובר לציר משוחרר ממנוחה מזווית נתונה. כשהמוט מגיע לנקודה הנמוכה ביותר הוא פוגע במסה ודוחף אותה במהירות לא ידועה לעבר מסילה מעגלית. נתון כי הקצה התחתון של המוט נע מיד לאחר ההתנגשות במהירות משיקית u . א. מהי הזווית המקסימלית אליה יגיע המוט לאחר הפגיעה? ב. מהי מהירות המסה מיד לאחר הפגיעה? ג. מהו הכוח אותו מפעילה המסילה על המסה מיד לאחר ההתנגשות?

(11) מוט מכופף וממוסמר

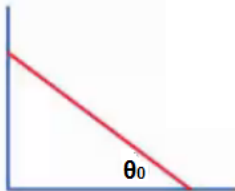
- מוט בעל אורך וצפיפות אחידה מכופף כמתואר בצור. המוט ממוסמר לקיר ויכול להסתובב סביב המסמר.



- א. מהו מרכז המסה של המוט? ב. מהו מומנט ההתמד של המוט סביב ציר הסיבוב שלו? ג. מהי מהירות הסיבוב כפונקציה של זווית הנפילה? ד. מהי מהירות מרכז המסה כפונקציה של זווית הנפילה? ה. מהן תאוצות מרכז המסה (רדיאלי ומשיקי) במצב מאוזן ובמצב מאונך?

12) צמד לוליינים בטרפז

- בקרקס ישנו מכשיר הקרוי טרפז. על הטרפז נתלה לולייין המחזיק בידיו לולייין אחר. נתון כי צמד הלוליינים התחילו את תנועתם ממנוחה במצב מאוזן וניתקו ידיהם במצב מאונך. הניחו כי אורך כל לולייין l ומסתו m . לאחר הניתוק הלולייין המנותק סוגר את גופו לחצי מאורכו.
- מהי המהירות הזוויתית ברגע הניתוק?
 - מהי המהירות הזוויתית של הלולייין המנותק מיד לאחר הניתוק ולפני שסגר את גופו?
 - מהי המהירות הזוויתית לאחר שסגר את גופו?

13) מוט מתגלש - מציאת מהירות

- מוט בעל מסה m ואורך l מונח על רצפה וקיר חלקים בזווית נתונה θ_0 . מיד לאחר שהניחו את המוט, המוט מתחיל להחליק עד הפגיעה ברצפה. אין חיכוך בין המוט לקיר או לרצפה. מצאו את מהירות מרכז המסה של המוט בזמן פגיעתו ברצפה.

14) יויו מתגלגל (חוט מלמעלה)

- יויו מורכב מגליל ברדיוס r ומסה m . משתי צידי הגליל מחוברות דסקות ברדיוס $R > r$ ומסה M כל אחת. סביב הגליל ובמרכזו מלופף חוט. היויו מונח על משטח לא חלק ומושכים את החוט בכוח F קבוע בכיוון ציר ה- x . נתון כי היויו מתחיל את תנועתו ממנוחה וכי הוא מתגלגל ללא החלקה (היויו זז בציר ה- x). כמו כן כל אות בגוף השאלה נתונה.
- מהו מומנט ההתמד של היויו?
 - מהי תאוצת מרכז המסה של היויו?
 - מהו מיקום היויו כפונקציה של הזמן?
 - הנקודה B נמצאת על קצה הגלגל ובדיוק מעל מרכזו ב- $t = 0$. מצא את מיקום הנקודה כתלות בזמן.

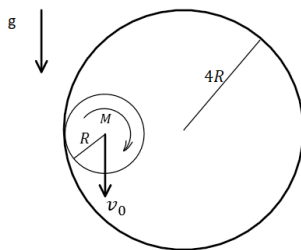
(15) עיפרון נופל*

עיפרון באורך L ניצב אנכית על משטח. ברגע מסוים הוא מתחיל ליפול ימינה. כאשר הזווית בינו לבין האנך למשטח מגיעה ל- θ_1 העיפרון מתחיל להחליק.



א. עבור זוויות θ שבהן עדיין אין החלקה $\theta < \theta_1$.

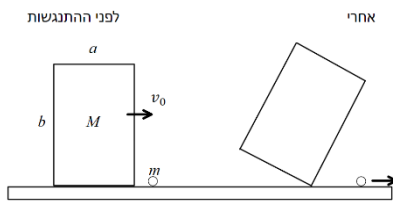
- i. מצאו את המהירות הזוויתית של העיפרון ω .
 - ii. מצאו את התאוצה הזוויתית של העיפרון α .
 - iii. מצאו את התאוצה הקווית של מרכז המסה של העיפרון.
 - iv. מצאו את גודלו וכיוונו של כוח החיכוך.
 - v. מצאו את הכוח הנורמלי.
- ב. מצאו את מקדם החיכוך הסטטי μ_s .

(16) גליל בתוך גליל*

גליל מלא ברדיוס R ומסה M המפולגת אחידה מתגלגל ללא החלקה בתוך גליל גדול ודק שרדיוסו $4R$. הגליל הגדול מקובע במקומו.

- א. נתון שמהירות מרכז המסה של הגליל הקטן כאשר הוא בגובה מרכז הגליל הגדול ובדרכו מטה היא v_0 . מהו גודלו וכיוונו של כוח החיכוך הפועל על הגליל בנקודה זו? ומהו התנאי על v_0 כך שיתאפשר גלגול ללא החלקה אם מקדם החיכוך μ_s נתון?

- ב. מהי מהירות מרכז המסה של הגליל הקטן כאשר הוא בתחתית הגליל הגדול?
- ג. כאשר הגליל הקטן נמצא בתחתית הגדול, פוגע בו קליע נקודתי, גם הוא בעל מסה M הנע ישר כלפי מטה. הקליע נדבק לשפת הגליל בדיוק מעל מרכזו ונע עמו (זמן ההתנגשות קצר מאוד וניתן להזניח את השפעת החיכוך עם הגליל הגדול בהתנגשות). שים לב שלאחר הפגיעה הגלגול כבר לא חייב להיות ללא החלקה. מצא את מהירות מרכז הגליל (לא מרכז המסה) לאחר הפגיעה.

(17) תיבה מתנגשת באבן*

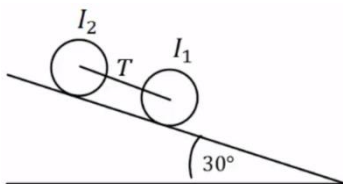
תיבה דו מימדית בגודל $a \times b$ ומסה M נעה על משטח אופקי חלק במהירות v_0 .

ברגע מסוים התיבה מתנגשת התנגשות אלסטית באבן עם מסה m הנמצאת במנוחה על המשטח. כתוצאה מההתנגשות התיבה ממשיכה בתנועה ימינה אך גם מתחילה להסתובב.

ניתן להניח שהפינה הימנית תחתונה של התיבה כל הזמן נוגעת בקרקע.

א. מה התנאי על v_0 כך שהתיבה לא תתהפך?

ב. מה קורה לתנאי של סעיף א' אם $a \ll b$?

**(18) שני גלילים מחוברים בחוט על מדרון משופע***

שני גלילים בעלי מסה $m = 3\text{kg}$ ורדיוס $R = 20\text{cm}$ כל אחד, מחוברים בחוט אידיאלי ומתגלגלים יחד ללא החלקה במורד מדרון. זווית המדרון היא 30° . התפלגות המסה של הגלילים אינה אחידה ומומנטי

ההתמד שלהם סביב מרכז המסה נתונים: $I_1 = 50\text{kg} \cdot \text{cm}^2$, $I_2 = 90\text{kg} \cdot \text{cm}^2$.

מהי המתיחות בחוט המחבר בין הגלילים?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad a = \frac{g}{2} \quad \text{א.} \quad t = \sqrt{\frac{4h}{g}} \quad \text{ב.}$$

$$(2) \quad a = \frac{(m_1 - m_2)g}{\frac{1}{2}M + m_1 + m_2}$$

(3) ראה סרטון.

$$(4) \quad \text{א.} \quad t = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{a} \right) t^2, \quad a = \frac{g}{2}, \quad mgh = mv^2, \quad \text{ב.} \quad mgh = \frac{1}{2}mv'^2, \quad \text{ג.} \quad \text{נפילה חופשית.}$$

$$(5) \quad \omega_1 = \omega_0 \frac{I_1}{I_1 + I_2} \quad \text{א.} \quad \Delta E = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2 - \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_1^2 \quad \text{ב.}$$

$$(6) \quad h = \frac{2}{5}R$$

$$(7) \quad a = \frac{4}{3} \frac{F}{m} \quad \text{א.} \quad a = \frac{4}{3} \frac{F}{m} \quad \text{ב.} \quad F \frac{1}{3}(1 + \cos \varphi), \quad \frac{1}{3}F \quad \text{ג.}$$

$$(8) \quad \omega_1 = \omega_0 \cdot 4 \quad \text{א.} \quad \Delta E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 \quad \text{ב.}$$

(9) ראה סרטון.

(10) ראה סרטון.

$$(11) \quad r_{c.m} = \frac{5}{18}l \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad I_0 = \frac{1}{12} \frac{1}{3} m \left(\frac{1}{3}l \right)^2 + \frac{1}{3} m \left(\frac{1}{2}l \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}m \right) \left(\frac{1}{3}l \right)^2 + \frac{2}{3} m \left(\frac{1}{6}l \right)^2$$

$$\text{ג.} \quad mg \frac{1}{6}l = mg \frac{1}{6}(1 - l \sin \theta) + \frac{1}{2}I_0 \cdot \omega^2 \quad \text{ד.} \quad V_{c.m} = \omega_0 \cdot \frac{1}{6}l$$

$$\text{ה.} \quad a_0 = \alpha \cdot r, \quad a_r = -\omega_0 \cdot \frac{1}{6}l$$

$$(12) \quad \sqrt{\frac{g}{6l}} \quad \text{א.} \quad \sqrt{\frac{8g}{3l}} \quad \text{ב.} \quad \text{אין שינוי.} \quad \text{ג.}$$

$$(13) \quad \sqrt{\frac{3}{4}gl \sin \theta_0}$$

$$\text{ב.} \quad F + \frac{Fr - I \frac{a}{R}}{R} = (m + 2M)(a)$$

$$(14) \quad \text{א.} \quad I = 2 \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$$

$$\text{ג.} \quad x_{(t)} = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{ד.} \quad B_x = \frac{1}{2}at^2 + R \sin \left(\frac{1}{2}at^2 \right), \quad B_y = R \cos \left(\frac{1}{2}at^2 \right)$$

$$\vec{a} = -\omega^2 r \hat{r} + \alpha r \hat{\theta} \quad \text{.iii} \quad \alpha = \frac{3g}{2L} \sin \theta \quad \text{.ii} \quad \omega = \sqrt{3 \frac{g}{L} (1 - \cos \theta)} \quad \text{.i.א (15)}$$

$$\sum F_y = m(-a_r \cos \theta - a_\theta \sin \theta) \quad \text{.v} \quad \sum F_x = m(-a_r \sin \theta + a_\theta \cos \theta) \quad \text{.iv}$$

$$f_{s_{\max}}(\theta_1) = \mu_s N(\theta_1) \quad \text{.ב.}$$

$$v_0 = \frac{1}{2} v_1 \quad \text{.ג.} \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + 4gR} \quad \text{.ב.} \quad f_s = \frac{mg}{3}, v_0 \geq \sqrt{\frac{Rg}{\mu_s}} \quad \text{.א. (16)}$$

$$v_0 = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{g}{3} (\sqrt{a^2 + b^2} - b)} \cdot \left(\frac{2(a^2 + b^2)}{\sqrt{(2a)^2 + b^2}} + \frac{M\sqrt{4a^2 + b^2}}{2m} \right) \quad \text{.א. (17)}$$

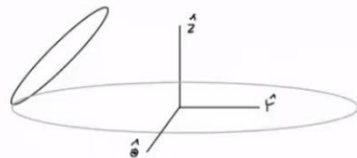
$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{6b}} \cdot a \cdot \left(2 + \frac{M}{2m} \right) \quad \text{.ב.}$$

$$T \approx 0.22N \quad \text{(18)}$$

תרגילים מסכמים כולל פרסציה:

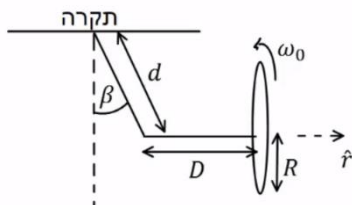
שאלות:

(1) מטבע בזווית



נתונה דסקה המתגלגלת ללא החלקה במעגל ברדיוס R במהירות זוויתית ω . נתון גם רדיוס הדסקה. מצא את זווית ההטיה של הדסקה.

(2) גלגל קשור בחוט עם זווית



גלגל ברדיוס R ומסה m מחובר במרכזו לציר חסר מסה באורך D . הציר מחובר בקצהו השני לחוט באורך d הקשור לתקרה ויוצר זווית β עם האנך לתקרה. מסובבים את הגלגל סביב הציר הרדיאלי העובר במרכזו במהירות זוויתית קבועה: $\vec{\omega} = -\omega_0 \hat{r}$.

א. לאן ינוע מרכז המסה של הגלגל ברגע הראשון?

ב. מצא את גודלה של הזווית β .

הנח שהזווית קטנה וניתן להשתמש בקירוב של זוויות

קטנות: $\sin \beta \approx \beta$, $\cos \beta \approx 1$.

התייחס לגלגל כחישוק.

תשובות סופיות:

$$\tan(\varphi) = \frac{2gR}{3v^2} \quad (1)$$

$$\beta = \frac{gD^3}{\omega_0^2 R^4 - dgD^2} \quad (2) \quad \text{א. מרכז המסה ייצא מהדף.} \quad \text{ב.}$$

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 19 - כבידה וכוח מרכזי

תוכן העניינים

- 1. תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד 221
- 2. חוקי קפלר 224
- 3. תרגילים נוספים 225

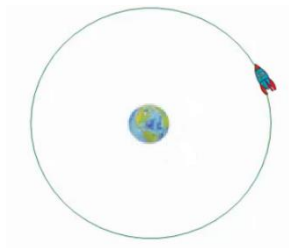
תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד:

שאלות:



(1) טיל יוצא מכדה"א וחוזר

- טיל נורה מכדור הארץ.
הטיל מתרחק מכדור הארץ וחוזר אליו בחזרה.
נתון שבאיזושהי נקודה במסלול המרחק של הטיל מכדה"א הוא R_1 .
נתונה הזווית בין R_1 למהירות באותו הרגע v_1 היא 30 מעלות.
רדיוס כדה"א הוא R_E וזווית הפגיעה של הטיל בכדה"א היא θ .
א. מצא את: v_0, v_1, v_2, θ_0 . מהירות פגיעת הטיל בכדה"א.
ב. חשב את: $R_{\max}$ (המרחק המקסימלי של הטיל מכדה"א)
ו- $v_{\min}$ (המהירות באותה נקודה).



(2) חלק עף במהירות מילוט

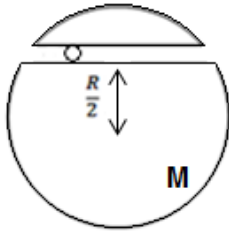
- חללית בעלת מסה m סובבת את כדה"א במסלול מעגלי ברדיוס R .
ברגע מסוים החללית מתפצלת לשני חלקים.
אחד החלקים בעל מסה של שליש m עף בכיוון הרדיאלי במהירות המילוט.
מצא את הרדיוס המינימלי והמקסימלי של החלק השני.

(3) פוטנציאל אפקטיבי

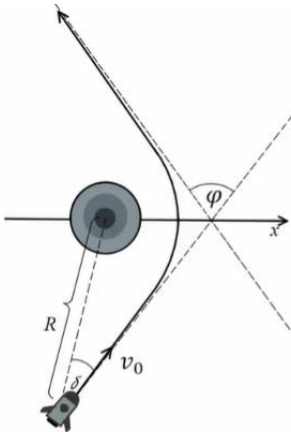
- גוף בעל מסה m נע בתנועה מעגלית תחת השפעת הפוטנציאל: $U(r) = -\frac{A}{\sqrt{r}}$
כאשר A קבוע נתון. נתון גם התנע הזוויתי של הגוף L .
א. מצא את רדיוס המעגל.
ב. מצא את מהירות הגוף.

(4) זמן מחזור

- גוף בעל מסה m נע בקו ישר (מימד אחד) תחת הפוטנציאל: $U(x) = B|x|$.
נתון כי המרחק המקסימלי אליו מגיע הגוף הוא A .
א. מצא את ערך האנרגיה הכללית של הגוף.
ב. מצא את זמן המחזור.

**(5) גוף זז במנהרה במרחק מהמרכז**

גוף נע במנהרה הנמצאת במרחק $\frac{R}{2}$ ממרכז כדור בעל מסה M .
הגוף מתחיל ממנוחה בקצה המנהרה ואין חיכוך.
מצא את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

**(6) מדידת מסה של חור שחור**

חור שחור הינו גוף שמימי כבד מאוד.
כדי למדוד את המסה M של חור שחור הנמצא במרחק גדול מאוד R מאתנו ובמנוחה ביחס אלינו, יורים לעברו טיל בעל מסה m הקטנה מאוד ביחס למסת החור. המהירות ההתחלתית של הטיל היא v_0 והיא מוסטת בזווית δ קטנה מאוד לכיוון המדויק אל החור. מכשור שנמצא על הטיל יכול להורות לנו מה הזווית ϕ אליו הוסט הטיל לאחר זמן רב ביחס לזווית ממנה התחיל. ניתן להניח כי האנרגיה הפוטנציאלית במרחק R זניחה.
א. מהי האקסצנטריות של מסלול הטיל סביב החור השחור? מהו סוג המסלול? (מעגל, אליפסה או היפרבולה).
ב. מהי הזווית של מהירות הטיל לאחר שהתרחק מאוד מהחור ביחס לציר ה- x ?
ג. מצא קשר בין הזווית של סעיף ב' ל- ϕ ובטא את מסת החור באמצעות: ϕ, δ, v_0, R, m .

תשובות סופיות:

(1) ראה סרטון.

(2) ראה סרטון.

$$(3) \quad r_0 = \left(\frac{2L^2}{mA} \right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad v = \frac{L}{m \left(\frac{2L^2}{mA} \right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\text{ב.} \quad T = 8A \sqrt{\frac{2B}{m}}$$

$$(4) \quad E(x_{\max}) = 0 + B \cdot A \quad \text{א.}$$

$$(5) \quad x(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} R \cos \left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} t \right)$$

$$(6) \quad \text{א. היפרבולה,} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2 R \sin \delta}{GM} \right)^2} \quad \text{ב.} \quad \cos \theta = -\frac{1}{\varepsilon}$$

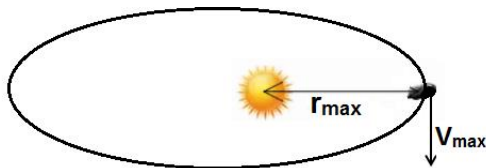
$$\text{ג.} \quad M = \frac{1}{G} v_0^2 R \sin \delta \tan \frac{\varphi}{2}$$

חוקי קפלר:

שאלות:

(1) מציאת זמן מחזור

גוף נע סביב השמש במסלול אליפטי כך שמהירותו המקסימאלית ומרחקו המינימלי מהשמש נתונים. נתון גם שטח האליפסה שעושה הגוף. מצא את זמן המחזור של הגוף.

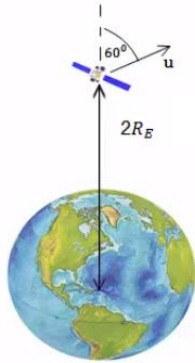


תשובות סופיות:

$$T = \left(\frac{r_{\min} v_{\max}}{2S} \right)^{-1} \quad (1)$$

תרגילים נוספים:

שאלות:



1) לוויין נכנס למסלול אליפטי

- לוויין נורה אנכית מפני כדה"א.
 הלוויין מגיע לשיא גובה של $2R_E$.
 ברגע זה ניתנת לו מהירות בכיוון 60° מעלות עם האנך
 לכדור הארץ שגודלה u .
 (התעלם מסיבוב ותנועת כדור הארץ).
 א. מצא תנאי על המהירות u כך שהלוויין ישאר במסלול סגור.
 ב. מצא תנאי נוסף על u כך שהלוויין לא יפגע בכדור הארץ.

2) יקום דו מימדי

ביקום דו מימדי פועל כוח שמרכזו בנקודה (x_0, y_0)

וגודלו: $\frac{k}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)^{\frac{3}{4}}}$. כיוון הכוח הוא תמיד לכיוון מרכזו.

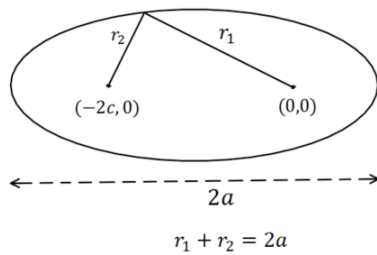
א. האם הכוח הוא כוח משמר? אם כן, מצא את האנרגיה הפוטנציאלית של הכוח.

חשב את העבודה שמבצע הכוח על מסה M אשר נעה בין הנקודה (x_1, y_1) לבין הנקודה (x_2, y_2) .

ב. מסה M נמצאת במיקום (Bx_0, By_0) ויש לה מהירות: $\vec{v} = A(\hat{x} + \hat{y})$.
 מה תהיה מהירות המסה כשהמרחק בינה לבין מרכז הכוח יהיה d ?
 (A, B, d גדולים מאפס).

ג. מסה M נמצאת במרחק r_1 ממרכז הכוח.
 למסה מהירות v_1 וידוע שהמסה נמצאת בשיווי משקל בכל זמן.
 מצא קשר בין v_1 לבין r_1 .

ד. פצצה בעלת מסה M מסתובבת סביב מרכז הכוח וברגע שגודל המהירות שלה הוא v_2 והמרחק שלה הוא r_2 , כיוון המהירות מאונך לכיוון המיקום שלה ביחס למרכז הכוח. באותו הרגע הפצצה מתפוצצת לשני חלקים אחד בגודל m והשני בגודל $M-m$.
 החלק $M-m$ ממשיך באותו כיוון מהירות כמו לפני הפיצוץ.
 מה צריכה להיות מהירות החלק m על מנת שהחלק $M-m$ יהיה במרחק קבוע ממרכז הכוח לאחר הפיצוץ והלאה?

**(3) פיתוח משוואת האליפסה**

באליפסה סכום המרחקים של כל נקודה משני המוקדים של האליפסה הוא קבוע ושווה ל- $2a$ (רוחב האליפסה). נתונה אליפסה שהמוקדים שלה נמצאים בנקודות $(0,0)$ ו- $(-2c,0)$.

הראו כי משוואת האליפסה היא: $r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ כאשר $\varepsilon = \frac{c}{a}$

$$r_0 = \frac{(a^2 - c^2)}{a}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } |u| < \sqrt{\frac{GM}{R_E}} \quad \text{ב. } \sqrt{\frac{GM}{2R_E}} < |u| < \sqrt{\frac{GM}{R_E}}$$

$$(2) \quad \text{א. משמר, } U(r') = -2kr'^{-\frac{1}{2}}, \text{ כאשר } r' = \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$W = 2k \left[\left((x_2-x_0)^2 + (y_2-y_0)^2\right)^{-\frac{1}{4}} - \left((x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2\right)^{-\frac{1}{4}} \right]$$

$$\text{ג. } v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} r_1^{-\frac{1}{4}} \quad \text{ב. } v = \left(2A^2 - \frac{4k}{m} \left[d^{-\frac{1}{2}} - (B-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_0^2 + y_0^2)^{-\frac{1}{4}} \right] \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ד. אחורה } u_2 = \frac{1}{m}(M-m) \sqrt{\frac{k}{m}} r_1^{-\frac{1}{4}} - \frac{M}{m} v_1$$

(3) הוכחה.

מכניקה לתעשייה וניהול

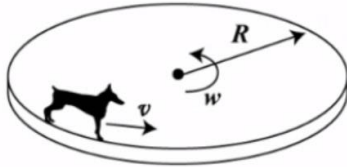
פרק 20 - תרגילים ברמת מבחן

תוכן העניינים

228	1. שאלות הבנה קצרות
231	2. תרגילים ברמת מבחן

שאלות הבנה קצרות:

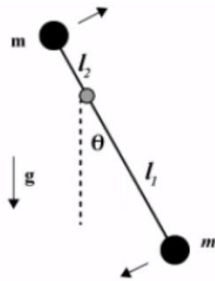
שאלות:



(1) עזית הכלבה הצנחנית

עזית הכלבה הצנחנית רצה במהירות v .
 כעת עזית מונחת על דיסקה במהירות ω
 בעלת רדיוס R .

מהו מקדם החיכוך המינימלי שצריך להיות בין עזית
 לדיסקה על מנת למנוע את החלקתה של עזית?



(2) זמן מחזור למטוטלת של שתי מסות

מטוטלת בנויה משתי מסות וציר כמתואר בשרטוט.
 מצא את זמן המחזור של המטוטלת.

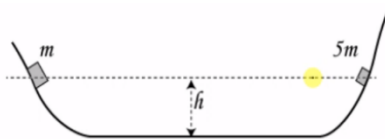
$$\text{נתון: } 2\pi = \omega T, \quad \omega^2 = mg \frac{C}{I}$$



(3) שחיין ממהר להגיע לקצה

שחיין מנסה לשחות בין שתי גדות הנהר.
 השחיין שוחה במהירות V (ביחס למים כמובן)
 והנהר זורם במהירות Z .

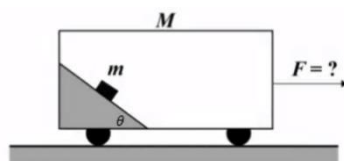
לאיזה כיוון השחיין צריך לשחות, על מנת לשמור על כוחותיו
 ולהגיע במהירות מירבית לגדת הנהר?



(4) שני בולים מתגלשים ומתנגשים

שני הבולים שבשרטוט נעזבים בו זמנית
 ומתנגשים התנגשות אלסטית.

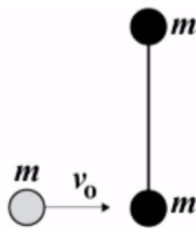
א. חשב מה יהיה שיא הגובה של הבולים אם
 נתון כי מסת הבול הימני גדולה פי 5 ממסת הבול השמאלי.
 ב. חזור על החישוב במקרה של התנגשות פלסטית.



(5) מסה נייחת בכוח מדומה

קרון בעל מסה M נמשך במהירות F .
 בתוך הקרון קיים מדרון חלק חסר מסה ועליו
 מונחת מסה m .

מצא את הכוח F , אם נתון כי המסה m נייחת ביחס למדרון.

**(6) תנע זוויתי אלסטי ופלסטי**

שלושה כדורים מונחים על גבי שולחן חלק כמתואר בשרטוט. שני גופים מחוברים ביניהם במוט חסר מסה באורך d , והמסה השלישית נעה במהירות נתונה אל עבר שני הגופים, ומתנגשת התנגשות אלסטית. מה תהיה מהירות הכדור הפוגע לאחר ההתנגשות? כיצד הייתה משתנה תשובתך אם היה מדובר בהתנגשות פלסטית?

(7) נחש יוצא מכד

בתוך כד, נח לו נחש בעל מסה M ואורך L . ברגע $t_0 = 0$, הנחש מעוניין לצאת מהכד, ומתחיל לעלות במהירות קבועה v . מהו הכוח הנורמלי שיופעל על הנחש ברגע t_0 ?

(8) פרה ודיסקה במהירות קבועה

על משטח המסתובב במהירות קבועה ω , עומדת פרה בעלת מסה M . הפרה מעוניינת להגיע לדשא הנמצא בציר הסיבוב של המשטח. ידוע כי הפרה נמצאת במרחק R מציר הסיבוב.
 א. מהי העבודה שמבצע המשטח על הפרה בדרכה לציר הסיבוב?
 ב. מהי עבודת קוריוליס על הפרה בדרכה לציר הסיבוב?

תשובות סופיות:

$$\mu = 1 \quad (1)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{l_1 - l_2}{l_1^2 + l_2^2}}} \quad (2)$$

$$(3) \text{ השחיין צריך לשחות לכיוון הגדה השנייה.}$$

$$(4) \text{ ראה סרטון.}$$

$$\tilde{F} = (M + m) \cdot a \quad (5)$$

$$(6) \text{ ראה סרטון.}$$

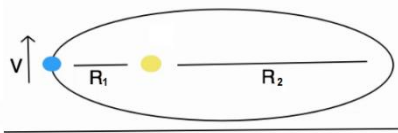
$$N = Mg + \frac{M}{L} V^2 \quad (7)$$

$$(8) \text{ א. } W = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \quad \text{ב. ראה סרטון.}$$

תרגילים ברמת מבחן:

שאלות:

(1) ארץ סובב שמש

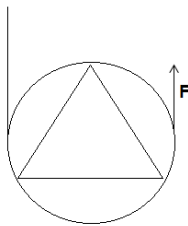


כדור הארץ סובב סביב השמש בהקפה אליפטית. נתונים המרחקים בשיא האליפסה (המרחק הקצר ביותר והארוך ביותר). נתונה גם מהירות כדור הארץ בנקודה הקרובה ביותר.

- מצא את מהירות כדור הארץ בנקודה הרחוקה ביותר.
- רשום את משוואת שימור האנרגיה לשתי נקודות אלה.
- מצא את מסת השמש, אם נכון קבוע הגרביטציה G .

(2) חישוק ומשולש בתוכו

נתון גוף הבנוי מחישוק ברדיוס R בעל מסה M , ובתוכו משולש שווה צלעות שאורך כל צלע $3R$ ומסתו m . עובי החלקים בגוף זניח וצפיפותם אחידה.

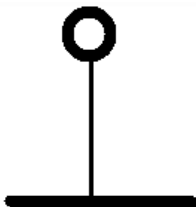


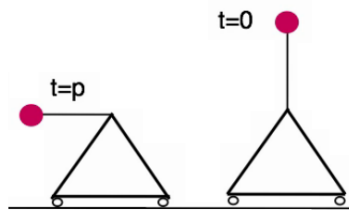
- מהו מומנט ההתמד של הגוף?
- מהו כוח F במצב של שיווי המשקל?
- בזמן $t = 0$ מתחיל לפעול הכוח F , כך ש- $F = (m + M)3g$. הטבעת מתגלגלת מעלה ללא החלקה.
- מצאו את התאוצה הזוויתית של הטבעת.
- מהי האנרגיה הקינטית של הגוף כפונקציה של הזמן?

(3) מוט נופל

נתון מוט חסר מסה באורך L ובראשו מסה m המתחיל נפילה ממנוחה. בטא את הגדלים הבאים כפונקציה של זווית הנפילה.

- מהירות ותאוצה (רדיאלית ומשיקית) של המסה בקצה המוט.
 - נורמל וחיכוך שמפעילה הרצפה.
- השאלה מתייחסת לשלב הנפילה עד רגע ההחלקה.



(4) מסה נופלת על משולש

נתון משולש שווה צלעות בעל מסה M (צפיפותו אחידה) ועליו מוט חסר מסה ובסופו מסה m . גודל כל האורכים בשרטוט הוא L . המשולש מחובר בבסיסו לשני גלגלים קטנים כך שהוא חופשי לנוע לצדדים. המסה מתחילה ליפול ממנוחה כך שברגע p היא נמצאת מאוזנת לקרקע. שלושת הסעיפים מתייחסים לרגע זה.

א. מצא את מרכז המסה של העגלה.

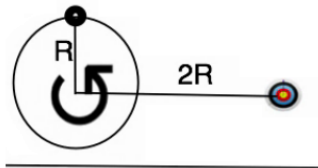
ב. מצא את מהירות המסה m .

ג. מצא את הנורמלים שמפעילים שני הגלגלים על העגלה.

(5) מתנועה מעגלית לפגיעה במטרה (מבט מלמעלה)

חוט מסובב מסה ממנוחה עם תאוצה זוויתית. המתיחות המקסימלית בחוט היא p ומעבר למתיחות זו החוט נקרע.

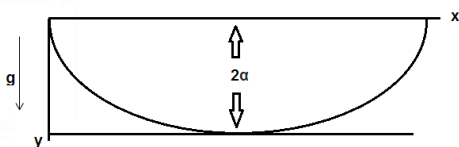
א. מה צריכה להיות התאוצה על מנת שהמסה תפגע במטרה?



ב. מה תהיה מהירות הפגיעה? התייחס לנתונים כפי שמופיעים בשרטוט. השרטוט מתאר את רגע תחילת התרגיל. על המסה להשתחרר לפני שהיא מסיימת הקפה אחת של המעגל.

(6) תנועה תחת פיי

גוף נקודתי בעל מסה m נע במסלול ציקלואידי המתואר



ע"י: $x = \alpha(\theta - \sin \theta)$, $y = \alpha(1 - \cos \theta)$. כאשר α קבוע ו- θ הינו משתנה של הבעיה. הגוף מתחיל את תנועתו ממנוחה מנק' $(0,0)$, נע בשדה גרביטציה g כמתואר בשרטוט. נקודת החוט לאנרגיה הפוטנציאלית תהיה בתחתית המסלול (בנקודה בה: $y = 2\alpha$).

א. מהי מהירותו של הגוף בתחתית המסלול?

ב. כתבו את משוואת התנועה עבור הגוף θ לאורך המסלול. יש לבטא את משוואת התנועה וקבועי השאלה (g, α) .

ג. פתור את משוואת התנועה של סעיף ב' על פי תנאי ההתחלה עבור: $\theta(t)$, $x(t)$, $y(t)$.

ד. הראו שהגוף יבצע תנועה מחזורית עם זמן מחזור המתאים למטוטלת מתמטית בעלת אורך l . מהו l המתאים לבעיה הנ"ל?

(7) נחום תקום, מבחן ת"א

גוף מורכב מחרוט בעל זווית מפתח α , בסיס הרדיוס a וגובה h היושב על חצי כדור בעל רדיוס דומה כמתואר בשרטוט. לחצי חרוט ולכדור צפיפות מסה אחידה וזהה p .

א. חשב את מרכז המסה של החרוט ביחס לראשית 0 הנמצאת על משטח החיבור בין הגופים. (ראה ציור עם הגדרת ראשית הצירים).

ב. חשב את מרכז המסה של כל המערכת בהינתן מרכז

$$\text{המסה של חצי כדור: } Z_{c.m} = \frac{-3a}{8}.$$

ג. מטים את הגוף הנ"ל בזווית θ ביחס לאנך.

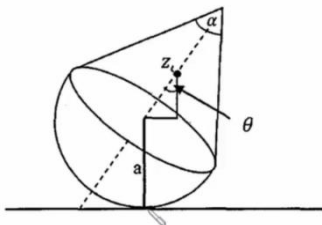
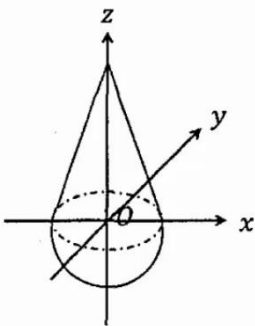
מהי האנרגיה הפוטנציאלית כתלות בזווית זו?

ד. מצאו תחת אילו תנאים (נתונים גיאומטריים (h, a, α) המערכת תהיה ב:

i. שיווי משקל אדיש ($E_p = \text{const}$).

ii. שיווי משקל יציב המאפשר תנודות קטנות.

iii. שיווי משקל לא יציב.



(8) מסות על חרוט, מבחן ת"א

מסה m_1 נמצאת בתוך קונוס, בעל זווית

מרכזית α , המסתובבת במהירות קבועה ω .

המסה מחוברת במסילה לקונוס, הגורמת

לה להסתובב יחד איתו במהירות קבועה.

בנוסף המסה יכולה לנוע מעלה ומטה על הדופן של הקונוס ללא חיכוך.

א. מהו רדיוס הסיבוב r שבו m_1 תהיה בשיווי משקל, כלומר המסה

המסתובבת לא תנוע מעלה או מטה על גבי דופן הקונוס?

(כמתואר בשרטוט א').

ב. כעת מניחים על גבי מסה m_1 מסה נוספת, m_2 (כמתואר בשרטוט ב').

מקדם החיכוך הסטטי בין המסות הוא μ_s . מהירות הסיבוב של מסה m_1

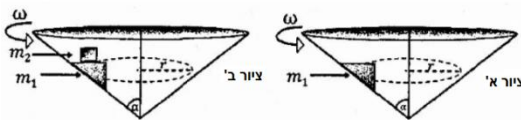
אינה משתנה כתוצאה מהוספת המסה m_2 למערכת, ובנוסף המסה

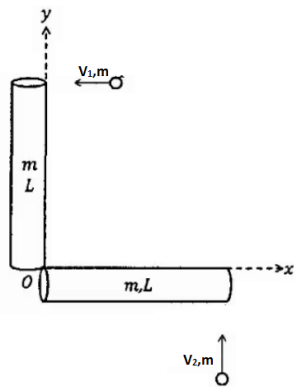
החדשה אינה מחליקה על גבי מסה m_1 .

האם רדיוס התנועה, שבו נמצאת המערכת בשיווי משקל, ישתנה? הסבר.

ג. מהו ערכו המינימלי של מקדם החיכוך הסטטי μ_s שימנע החלקה בין המסות?

הנח כי החלק העליון של m_1 הוא אופקי.



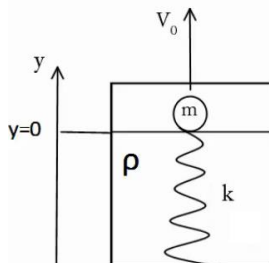
**9) כדורים פוגעים במוטות, מבחן ת"א**

שני מוטות דקים וארוכים במנוחה, בעלות מסה m ואורך L כל אחד מחוברים בזווית ישרה בנק' O , ראשית הצירים, כמתואר בשרטוט. שתי המסות m נעות בניצב למוטות ומתנגשות בקצה המוטות במהירות: $\vec{v}_1 = -v_0 \hat{x}$, $\vec{v}_2 = v_0 \hat{y}$. נתון כי בזמן $t=0$ המסות נצמדות למוטות בבת אחת. א. מצאו את וקטור המיקום של מרכז המסה $\vec{r}_{c,m}(t)$ עבור $t=0$.

ב. מצאו את וקטור המיקום של מרכז המסה $\vec{r}_{c,m}(t)$ עבור $t > 0$, ביחס למיקום מרכז המסה בזמן $t=0$ (ברגע הצמדות המוטות): $\vec{r}_{c,m}(t > 0) - \vec{r}_{c,m}(t=0) = ?$

ג. מהי המהירות הזוויתית $\omega(t)$ של המערכת בתנועה הסיבובית ביחס למרכז המסה שחושב בסעיף ב' $\vec{r}_{c,m}(t)$?

ד. מצאו את וקטור המיקום $\vec{r}(t)$ של הנקודה O , ביחס למיקומה בזמן $t=0$.

10) מצוף בתנועה הרמונית, מבחן ת"א

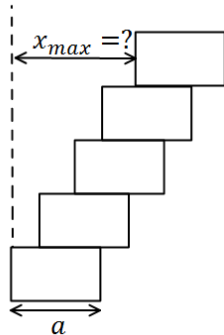
נתונים מסה כדורית קטנה m שרדיוסה R וקפיץ אנכי, אידיאלי וחסר מסה, בעל קבוע קפיץ k . הקפיץ ממוקם בתוך נוזל צמיגי שצפיפותו ρ וצמיגותו η . המצב הרפוי של הקפיץ הוא כאשר הוא בגובה פני הנוזל, כמתואר בשרטוט. זכרו כי ערכי כוח העילוי וכח סטוקס הם: $\rho V g$ (כאשר V הוא נפח הכדור) ו- $-6\pi\eta R \dot{y}$, בהתאמה.

א. כאשר המסה ממוקמת על שפת הנוזל, כמתואר בשרטוט, מעניקים לה מהירות התחלתית v_0 כלפי מעלה, מה יהיה הגובה המקסימלי אליו תגיע המסה?

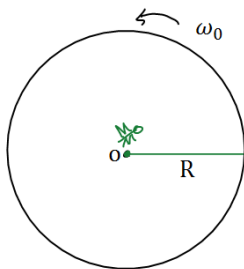
ב. מהי משוואת התנועה של המסה, כאשר היא נעה בתוך הנוזל? הניחו כי מרגע נגיעת המסה בפני הנוזל כשהכדור נכנס במלואו לנוזל (יש להתעלם משלבי כניסת המסה לנוזל). כמו כן יש להניח כי פני הנוזל לא השתנו בשל כניסת הכדור לנוזל. רמז: לפישוט המשוואה, יש לבצע החלפת משתנים.

ג. בהנחת ריסון חלש, מהו הפתרון הכללי של משוואת התנועה בתוך הנוזל? מהם תנאי ההתחלה של התנועה? את התשובות הסופיות יש להציג במונחי המשתנה בו השתמשתם לפני החלפת המשתנים.

רמז: בפתרון המד"ר יש להעזר בדף הנוסחאות הנתון. ד. כעבור כמה זמן, מרגע כניסת המסה למים, תחזור המסה לפני המים (המצב המתואר בתחילת סעיף ב')?

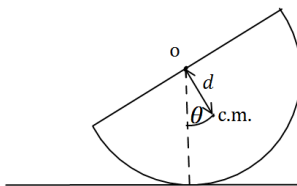
(11) מגדל קוביות

דני מנסה לבנות מגדל מ-5 קוביות זהות בעלות פאה באורך a . מהו המרחק המקסימאלי הניתן להניח את הקובייה העליונה ביותר כך שהמגדל לא ייפול? (מדוד את המרחק בין הצלע השמאלית של הקובייה הראשונה לצלע השמאלית של הקובייה העליונה). רמז: התחל את החישוב מהקובייה העליונה.

(12) זבוב על דיסקה

דיסקה עגולה שטוחה שמסתה M ורדיוסה R מסתובבת במהירות זוויתית התחלתית ω_0 סביב מרכזה הנמצא במנוחה על גבי שולחן חסר חיכוך (הדיסקה אינה מחוברת לשולחן!). מתחת למרכז הדיסקה, על השולחן מצוירת נקודה ירוקה (להלן הנקודה O). במרכז הדיסקה ישן זבוב נקודתי ירוק שמסתו m . על הדיסקה קו רדיאלי ירוק.

- א. ברגע $t = 0$ מתעורר הזבוב והוא מתחיל ללכת על גבי הקו הרדיאלי. מצאו את מיקום הנקודה O (שעל השולחן) ביחס לזבוב כפונקציה של המרחק h בין הזבוב למרכז הדיסקה. הניחו כי הזבוב נמצא בראשית, ציר x שלו מכוון בכיוון מרכז הדיסקה וציר y מאונך לו במישור הדיסקה.
- ב. מצאו את המהירות הזוויתית של הדיסקה כאשר הזבוב מגיע לשפתה. בדקו את תשובתכם לסעיף ב' עבור $m \ll M$ ו- $m \gg M$.
- ג. אם הזבוב נע במהירות קבועה V_0 ביחס לדיסקה, מהו כוח החיכוך בין הזבוב לדיסקה רגע לפני שהזבוב הגיע לשפת הדיסקה?

(13) חצי כדור בתנועה הרמונית

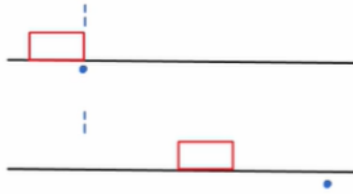
חצי כדור ברדיוס R ומסה M מונח על משטח. מסיטים את החצי כדור בזווית קטנה ממצב שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה. מצא את תדירות התנודות הקטנות אם הכדור מתגלגל

ללא החלקה (מרכז המסה של חצי כדור נמצא במרחק: $d = \frac{3}{8}R$

ממרכז הכדור המלא).

14 אנרגיה אבודה בהחלקה

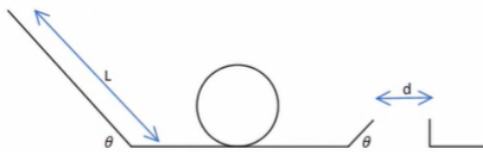
על מסוע בעל מקדם חיכוך קינטי נתון מונחת מסה m .
 כוח חיצוני מושך את המסוע במהירות קבועה u .
 נתון כי המסה הונחה בזמן $t = 0$ במנוחה.



- מהו הכוח המופעל על המסוע?
- מהי תאוצת המסה?
- כמה זמן תמשך ההחלקה?
- מהו המרחק אותו עבר המסוע בזמן זה?
- מהו המרחק אותו עברה המסה בזמן זה?
- כמה עבודה השקיע הכוח החיצוני?
- כמה עבודה השקיע כוח החיכוך?
- כמה אנרגיה עבדה לחוס?

15 גולש על סקייטבורד

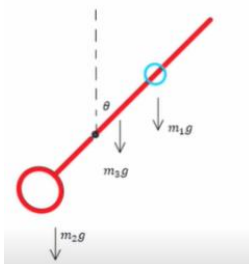
גולש על סקייטבורד נכנס למסלול כמתואר בשרטוט.
 רדיוס המעגל R , גובהה האנכי של המקפצה גם
 כן R ואורך הקפיצה הוא d .

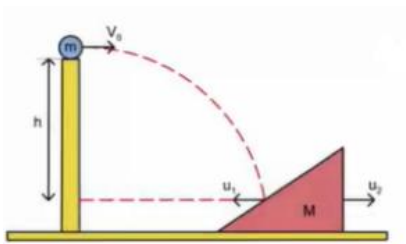


- מהו הגובה המינימלי של L על מנת שהגולש יחצה בשלום את המקפצה?
 כעת נתון כי הגולש יכול לקפוץ מהסקייטבורד בעודו באוויר במהירות אופקית של p יחסית לסקייטבורד, בהנחה שהוא מתחיל מהגובה שמצאנו בסעיף א'.
- כמה זמן לאחר הקפיצה הגולש צריך להתחיל את הקפיצה על מנת להגיע בדיוק לקצה התעלה?
- מהו המרחק המקסימלי אותו הגולש יחצה בשלום?

16 מטרונום

מצא את תדירות המטרונום שבשרטוט המשתנה על פי
 מיקום המסה הנעה על גביו.
 נתון כי ציר המטרונום נמצא רבע אורך מעל קצהו התחתון.





17) התנגשות במשולש על רצפה

מסה m נזרקת במהירות אופקית v_0 מראש מגדל. אחרי שעברה גובה h מנקודת הזריקה, המסה מתנגשת בגוף משולש שנמצא במנוחה ומסתו M . נתון כי ההתנגשות בין שתי המסות לא אלסטית ובמהלך ההתנגשות אובדת שליש מהאנרגיה הקינטית. נתון גם כי לאחר ההתנגשות המסה m נעה במהירות אופקית שמאלה u_1 והגוף M נע במהירות אופקית ימינה u_2 .

- מצא את מהירות הפגיעה של המסה m בגוף M , יש למצא גודל ורכיבים בשני הצירים.
- מצא את גודל המהירויות של המסות לאחר ההתנגשות (u_1, u_2) . ידוע כי זמן ההתנגשות הוא Δt .
- מצא את הגודל של הכוח הנורמלי הממוצע שמפעילה הקרקע במהלך ההתנגשות.

18) לוויין יורה זנב בכיוון התנועה

לוויין שמסתו M נע במסלול אליפטי סביב כדור הארץ כך שמרחקו המינימלי ממרכז כדור הארץ הוא R_A ומרחקו המקסימלי הוא R_B . הלוויין נע בכיוון השעון (ניתן לראות בשרטוט המצורף). כאשר הלוויין נמצא בנקודה A הלוויין מתפרק לשניים ויורה את זנבו בכיוון משיק למסלול. מסת הזנב הנורה היא m .

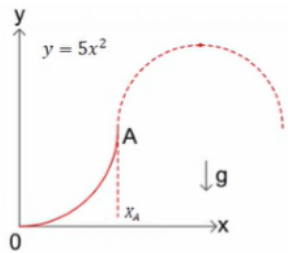


$$U_g = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

לאחר הירי החלק שנותר מהלוויין נכנס למסלול מעגלי סביב כדור הארץ. M_E - מסת כדור הארץ. R_E - רדיוס כדור הארץ.

- הביעו את מהירות הלוויין בנקודה A לפני הירי.
- הביעו את מהירות שארית הלוויין (החלק ללא הזנב) לאחר הירי.
- האם הלוויין יורה את זנבו ימינה או שמאלה, לאורך המשיק למסלול בנקודה A ? נמקו!
- הביעו את מהירות זנב החללית מיד לאחר הירי.

**19) עבודה לאורך דרך במסילה**

חרוז בעל מסה m מושחל על מסילה חלקה.

המסילה נמצאת במישור XY .

כוח הכובד פועל בכיוון השלילי.

צורת המסילה מתוארת בסרטוט.

א. מהי המהירות ההתחלתית המינימלית שיש להעניק

לחרוז בראשית הצירים כדי שיוכל להגיע לנקודה A ?

ב. נותנים לחרוז מהירות התחלתית v_0 .

מהו שיא הגובה שאליו יגיע החרוז אם נתון כי החרוז עבר את הנקודה A ?

ג. כעת, במקום כוח הכובד מופעל על החרוז כוח: $F = (x, e^{x^2})$

והחרוז משוחרר ממנוחה בראשית הצירים.

מה תהיה המהירות החרוז בקצה המסילה?

20) מסה וקפיץ בתוך מסגרת

בציור הבא מתואר מתקן ניסוי-מסגרת $ABCD$ ומטוטלת

קפיץ שמחוברת למסגרת. קבוע הקפיץ K ומסת

המשקולת m נתונים, מסת הקפיץ קטנה מאוד וזניחה.

כל אלו גורמים למשקולת להתנדנד. ידוע כי כשהמשקולת

מגיעה לנקודה העליונה אורך הקפיץ ברגע זה הוא המצב הרפוי.

א. מצא את האמפליטודה בתנועה של המשקולת?

בטא את תשובתך בפרמטרים (K, m) .

ב. תנועת המשקולת מתוארת לפי הפונקציה הבאה: $x = A \sin(\omega t + \phi_0)$

הכיוון של ציר ה- x מוגדר בשרטוט. הפרמטר A מסמן את האמפליטודה.

רגע תחילת המדידה הוא ב- $t = 0$. ידוע שבתחילת המדידה המשקולת נמצאת

בנקודה $x = 0.9A$ ונעה כלפי מטה.

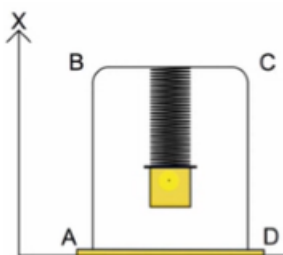
מצא את הפאזה ϕ_0 כביטוי של הפונקציה $x(t)$? בטא את תשובתך בראדיאנים.

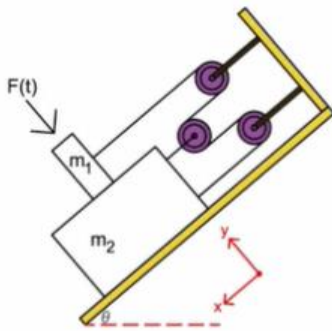
ג. המישור התחתון מפעיל כוח נורמלי על מסגרת $ABCD$ בגלל תנודות המשקולת.

כוח זה הוא לא קבוע אלא משתנה עם הזמן. נתונה מסה m_2 של המסגרת.

מצא את הגודל המינימלי והמקסימלי של הכוח הנורמלי $(N_{\min}, N_{\max})$.

בטא את תשובתך בפרמטרים (K, m, m_2) .



**(21) שתי מסות גלגלת נעה וכוח חיצוני**

שני גופים שמסתם m_1, m_2 מונחים זה על זה על פני מדרון משופע בזווית θ .

ניתן לראות כמתואר באיור שהגופים תלויים ומחוברים ביניהם בעזרת מערכת גלגלות חסרות מסה.

בין שני הגופים קיים חיכוך בעוד שבין m_2 למדרון אין חיכוך.

נתון כי מקדם החיכוך הקינטי בין שני הגופים הוא μ_k .

ברגע $t = 0$ המערכת משוחררת ממנוחה ומתחילה לנוע כך שהגוף הגדול m_2 יורד במדרון (בכיוון ציר x החיובי).

ברגע זה מתחיל גם לפעול על m_1 , כלפי המדרון ובמאונך לו, כוח התלוי בזמן:

$$F(t) = \frac{mg}{2}(1 + \sin(\omega t))$$

כאשר ω הוא קבוע חיובי.

יש להניח ש- m_2 מספיק ארוך כדי ש- m_1 לא יפול ממנו.

א. יש נמק ולהוכיח כי במערכת הנתונה מתקיים הקשר: $a_1 = -3a_2$.

ב. מצאו את תאוצות הגופים: $a_1(t)$, $a_2(t)$ כפונקציה של הזמן.

אין צורך לפתור את המשוואות.

ג. מצאו את השינוי Δx , שחל במרחק שבין הגופים לאורך המדרון, מרגע

תחילת התנועה ועד לרגע t כלשהוא.

אין צורך לפתור את המשוואות.

(22) כדור נזרק בשיפוע

כדור ברדיוס $R = 20 \text{ cm}$ העשוי מחומר אחיד ואלסטי נזרק

במהירות $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ בניצב למישור חלק (ללא חיכוך),

המשופע בזווית $\alpha = 30^\circ$ לאופק.

א. מצא היכן ייפול הכדור על המישור המשופע.

ב. מצא את וקטור המהירות של הכדור מיד לאחר הפגיעה במישור.

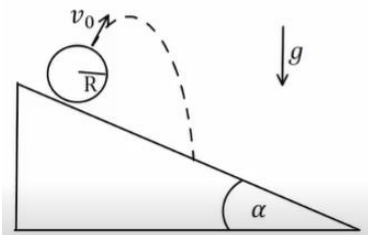
כעת נתון שבין המשטח לכדור יש חיכוך ומקדם החיכוך הוא $\mu_k = 0.2$,

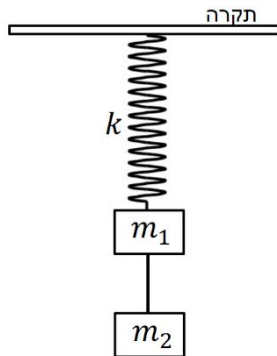
נתון כי ההתנגשות בניצב למישור היא עדין אלסטית.

ג. חזור על סעיף ב'.

ד. מהי המהירות הסיבובית של הכדור אחרי הפגיעה?

ה. מהי המהירות נקודת המגע של הכדור עם המישור מיד לאחר הפגיעה?



(23) מסה קשורה למסה ולקפיץ אנכי

גוף שמסתו $m_2 = 4\text{kg}$ נקשר לגוף נוסף שמסתו $m_1 = 2\text{kg}$ בחוט.

הגוף שמסתו m_1 קשור לקפיץ אנכי בעל קבוע קפיץ $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

המערכת נמצאת בשיווי משקל ובמנוחה.

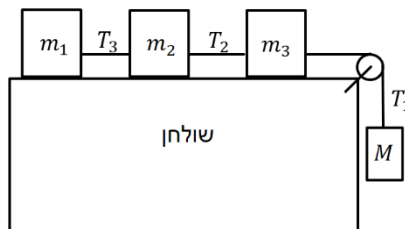
ב- $t = 0$ נקרע החוט הקושר בין המסות.

א. מהי משרעת התנודות?

ב. מהו זמן המחזור של התנודות?

ג. מהו הביטוי למיקום כתלות בזמן?

ד. מהי האנרגיה האלסטית האגורה במערכת בנקודת שיא הגובה?

(24) מסה תלויה גלגלת ושלוש מסות על שולחן

שלוש מסות: $2m_1 = m_2 = m_3 = 15\text{kg}$ נמצאות על

שולחן אופקי ומחוברות בחוט דק למסה $M = 20\text{kg}$.

החוט עובר דרך גלגלת אחידה בעלת רדיוס $R = 15\text{cm}$

ומומנט התמד $I = 0.7\text{kg} \cdot \text{m}^2$ כמתואר באיור.

החוט אינו מחליק על הגלגלת ואין חיכוך בין המסות m_1, m_3 לשולחן.

בין המסה m_2 לשולחן ישנו חיכוך ומקדם החיכוך הוא: $\mu_s = \mu_k = 0.23$.

א. מצא את תאוצת המסה M ברגע שמשחררים את המערכת ממנוחה.

ב. מהו יחס המתיחויות $\frac{T_1}{T_3}$ ברגע שמשחררים את המערכת ממנוחה?

ג. כמה זמן ייקח לגלגלת להשלים סיבוב אחד מרגע שחרור המערכת?

תשובות סופיות:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{m \cdot \tilde{M}}{R_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G \frac{m \cdot \tilde{M}}{R_2} \quad \text{ב.} \quad v_2 = v \frac{R_1}{R_2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$M = \frac{v^2 \cdot R_1}{2G \cdot R_2} \cdot (R_1 + R_2) \quad \text{ג.}$$

$$I_{\text{total}} = R^2 \left(M + \frac{1}{2}m \right) \quad \text{א.} \quad (2) \quad F = \frac{(m+M)g}{2} \quad \text{ב.} \quad a = \alpha R \quad \text{ג.}$$

$$E_{k(t)} = \frac{1}{2}ma^2t^2 + \frac{1}{2}I\alpha^2t^2 \quad \text{ד.}$$

$$, v_r = 0, v_\theta = \omega L, E \Rightarrow mgL = mg \cdot (L \cos \theta) + \frac{1}{2}mv_\theta^2 \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$a_r = \omega^2 \cdot L, F_\theta \Rightarrow mg \sin \theta = ma_\theta, F_r = T - mg \cos \theta = ma_r$$

$$a_r \sin \theta + a_\theta \cos \theta = \tilde{S}_s, a_r \cos \theta + a_\theta \sin \theta = \tilde{N} - mg \quad \text{ב.}$$

$$-v_g = \sqrt{2gl} \quad \text{ב.} \quad x_M = \frac{ml}{M+m} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{3}Mg - 4mg}{2\sqrt{3}}, N_1 = M \cdot g - \left(\frac{\sqrt{3}Mg - 4mg}{2\sqrt{3}} \right) \quad \text{ג.}$$

$$v_\theta = \sqrt{\frac{PR}{m}} \quad \text{ב.} \quad \frac{6P}{7\pi Rm} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$l = 4a \quad \text{ד.} \quad \phi = \sqrt{\frac{g}{a}}t + c \quad \text{ג.} \quad \dot{\phi}^2 = \frac{g}{a} \quad \text{ב.} \quad v_F = 2\sqrt{ga} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$U(\theta) = m_T g Z_{c.m} \cos \theta \quad \text{ג.} \quad Z_{c.m} = \frac{h^2 - 3a^2}{4h + 8a} \quad \text{ב.} \quad Z_{c.m} = \frac{h}{4} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$h > \sqrt{3} \quad \text{iii.} \quad h < \sqrt{3}a \quad \text{ii.} \quad h = \sqrt{3}a \quad \text{i. ד.}$$

$$\mu_s \geq \frac{1}{\tan \alpha} \quad \text{ג.} \quad r \text{ לא משתנה.} \quad \text{ב.} \quad R = \frac{g}{\tan \alpha \cdot \omega^2} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\omega = \frac{30}{37} \frac{v_0}{l} \quad \text{ג.} \quad \vec{r}_{c.m} = \frac{v_0 t}{4} (\hat{y} - \hat{x}) \quad \text{ב.} \quad \vec{r}_{c.m} = \frac{3}{8} L (1, 1) \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\vec{r}_O = \frac{v_0 t}{4} (\hat{y} - \hat{x}) + \frac{3l}{8} \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{30}{37} \frac{v_0}{l} t + \frac{5\pi}{4} \right) \hat{x} + \sin \left(\frac{30}{37} \frac{v_0}{l} t + \frac{5\pi}{4} \right) \hat{y} \right) \quad \text{ד.}$$

$$\ddot{z} + \frac{\lambda}{M} \dot{z} + \frac{k}{M} z = 0 \quad \text{ב.} \quad h = \Delta x = \frac{-mg + \sqrt{(mg)^2 + kmv_0^2}}{k} \quad \text{א. (10)}$$

$$, y(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{\alpha}t} \cos(\omega t + \varphi) + y_0, \quad z(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{\alpha}t} \cos\left(\left(\sqrt{\frac{k}{M} - \frac{\lambda^2}{4}}\right)t + \varphi\right) \quad \text{ג.}$$

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = -v_0$$

$$0 = \frac{g(m - \rho V)}{k} \sqrt{1 + \left(\frac{\Gamma}{2\omega} + \frac{kv_0}{\omega g(m - \rho V)}\right)^2} \quad \text{ד.}$$

$$e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\Gamma}{2\omega} + \frac{kv_0}{\omega g(m - \rho V)}\right)\right) - \frac{g(m - \rho V)}{k}$$

$$x_{\max} = \frac{25a}{24} \quad \text{ה. (11)}$$

$$\omega_p = \frac{(M+m)^2 \omega_0}{3m^2 + 4mM + M^2} \quad \text{ב.} \quad x_0 = \frac{Mh}{M+m} \quad \text{א. (12)}$$

$$f_s = -\frac{mM(M+m)^3 \omega_0^2 R}{(3m^2 + 4mM + M^2)^2} \hat{r} + mMv_0 \omega_0 \left(\frac{(M+m)^2}{3m^2 + 4mM + M^2} - \frac{4m}{(M+3m)^2} \right) \hat{\theta} \quad \text{ד.}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{15g}{26R}} \quad \text{ה. (13)}$$

$$x = u \cdot \frac{u}{\mu g} \quad \text{ד.} \quad T = \frac{u}{\mu g} \quad \text{ג.} \quad a' = \mu g \quad \text{ב.} \quad F_{\text{ext}} = \mu mg \quad \text{א. (14)}$$

$$\Delta E = mu^2 - \frac{1}{2}u^2 \quad \text{ח.} \quad W' = \frac{1}{2}mu^2 \quad \text{ז.} \quad W = mu^2 \quad \text{ו.} \quad x' = \frac{1}{2}\mu g \cdot \left(\frac{u}{\mu g}\right)^2 \quad \text{ה.}$$

(15) ראה סרטון.

$$\frac{-\left(-m_1 g \left(x - \frac{L}{4}\right) + m_2 g \frac{L}{4} - m_3 g \frac{L}{4}\right) \theta}{I} = \ddot{\theta} \quad \text{ה. (16)}$$

(17) ראה סרטון.

(18) ראה סרטון.

$$mgh + \frac{1}{2}mv_y^2 = mgH \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{2}mv_i^2 = mgh \quad \text{א. (19)}$$

$$\frac{1}{2}x_A^2 + 5\left(e^{\frac{1}{5}(5x_1^2)} - e\right) = \frac{1}{2}mv_s^2 \quad \text{ג.}$$

$$\Delta = \frac{mg}{K} = A \quad \text{א. (20)} \quad \varphi_0 = \pi - 1.12 \approx 2 \quad \text{ב.}$$

$$N_{\min} = m_2 g, \quad N_{\max} = m_2 g + 2m_1 g \quad \text{ג.}$$

$$\Delta = \frac{4}{3} x_{1(t)} \quad \text{ג.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. ראה סרטון.} \quad \text{(21)}$$

$$\vec{v} = 23.1 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x} + 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{y} \quad \text{ב.} \quad x(t) \approx 53.3 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{א. (22)}$$

$$v_{Ax} = 2.1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \quad v_{Ay} = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ה.} \quad \omega_F = -75 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad \text{ד.} \quad u_x = 17.1 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.}$$

$$y(t) = 0.4 \cos(\sqrt{50}t + 0) + 0.2 \quad \text{ג.} \quad T \approx 0.89 \text{sec} \quad \text{ב.} \quad A = 0.4 \text{m} \quad \text{א. (23)}$$

$$U_{el} = 2J \quad \text{ז.}$$

$$t \approx 1 \text{sec} \quad \text{ג.} \quad \frac{T_1}{T_3} \approx 11.63 \quad \text{ב.} \quad a \approx 1.87 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{א. (24)}$$