משוואות דיפרנציאליות חלקיות

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 1 - חזרה - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x^2y''+xy'=\frac{1}{x}\quad (x\neq 0)$

2) $y''\tan x-1=y'\quad (\cos x\neq 0)$

3) $2xy'y''-(y')^2+1=0$

4) $y''x\ln x=y'$

5) $xy''=x^2e^x+y'$

6) $yy''+(y')^2=0$

7) $2y''y-(y')^2=1$

8) $y''\tan y=2(y')^2\quad (\cos y\neq 0)$

תשובות סופיות

1) $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$

2) $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

3) $y=\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{3/2}+C_2; y=\pm x+C_3$

4) $y=C_1\left(x\ln x-x\right)+C_2; y=C_3$

5) $y=e^x\left(x-1\right)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

6) $\frac{y^2}{2}=cx+k \;\; ; \;\; y=c$

7) $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2\left(x+k\right)^1}{4}+1\right]$

8) $\cot y=-\left(cx+k\right) \;\; ; \;\; y=c$

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות **1-11**:

1) $y''-100y=0$

2) $y''-4y'=0$

3) $y''-8y'+7y=0$

4) $z(0)=1\ ,\ z'(0)=1,\ 4z''+z'-5z=0$

5) $y''-2y'+y=0$

6) $4\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\dfrac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

7) $y''+4y=0$

8) $y''+10y'+125y=0$

9) $y(0)=0,\ \ y'(0)=3\ ;\ y''-2y'+10y=0$

10) $5y''+8y'+4y=0$

11)
$$\begin{cases} y''(x)-\dfrac{1}{a^2}y(x)=0 \qquad (a>0) \\ y(0)=4 \\ y(\infty)=y(-\infty)=0 \end{cases}$$

12) נתונה המד"ר: $yy''+\left(y'\right)^2=0$.

א. הראה כי $y_1=4$ ו- $y_2=\sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראה כי הפתרון $z(x)=y_1(x)+y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.
האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$

2) $y=c_1+c_2e^{4x}$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$

4) $z=e^{x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

6) $x(t)=c_1e^{\frac{-t}{2}}+c_2te^{\frac{-t}{2}}$

7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

8) $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

9) $y=e^{2}\sin 3x$

10) $y=e^{\frac{-4x}{5}}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

11) $y=4e^{-\frac{|x|}{a}}$

12) שאלת הוכחה.

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ \ y'(0)=7;\ \ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''-3y'+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

8) $y''+3y'=9x$

9) $y''-3y'+2y=e^x$

10) $y''-2y'=6x^2-2x$

11) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$

2) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

5) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^x-3xe^x+2e^{3x}$

8) $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

9) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-xe^x$

10) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

11) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$

12) $y=e^{-x}\sin 2x$

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ \ y'(0)=7;\ \ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''+3y'=9x$

8) $y''-3y'+2y=e^{x}$

9) $y''-2y'=6x^2-2x$

10) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

11) $y''-3y'+2y=2x^2+e^{x}+2xe^{x}+4e^{3x}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$

2) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

5) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7) $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

8) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-xe^{x}$

9) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

10) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$

11) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^{x}-3xe^{x}+2e^{3x}$

12) $y=e^{-x}\sin 2x$

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$

2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

3) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

4) $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}\quad ; \quad y(1)=0\ ,\ y'(1)=0$

5) $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

6) $y''+4y=\sec 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln|\sin x|$

2) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\dfrac{x^2}{2}\left[\ln x-\dfrac{1}{2}\right]+x^2e^{-2x}\left[\ln x-1\right]$

3) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\dfrac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-\dfrac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2(x+1)^{3/2}\right]$

4) $y=e^{x}-xe^{x}+xe^{x}\ln x\quad (x>0)$

5) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

6) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\sin 2x\cdot x$

משוואה לינארית לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – השיטה האופרטורית

שאלות

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדוק עם מרצה הקורס אם אתה נדרש אליו.

בשאלות אלו הסימון הוא: $ay''+by'+cy=Q(x) \Leftrightarrow (aD^2+bD+c)y=Q(x)$.

פתור את המשוואות הבאות:

1) $(D^2-D-2)y=4e^{-2x}+10e^x+11$

2) $(D^2-2D+1)y=10e^{4x}+e^x-1$

3) $(D^2+D-2)y=4e^x+e^{10x}+14$

4) $(D^2+4)y=\sin 5x$

5) $(D^2-4)y=\sin x\cos x\cos 2x$

6) $(D^2+D-2)y=\cos x-3\sin x$

7) $(D^2+2D-3)y=2\cos x\cos 2x$

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^{x} - 5.5$

2) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^{x} - 1$

3) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - 4xe^{x} + \frac{1}{72} e^{10x} + 7$

4) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$

5) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x$

6) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \sin x$

7) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$

משוואה לינארית, כללית – שיטת ד'אלמבר – שיטת הפתרון השני – שיטת אבל

שאלות

1) פתור $y''+\tan x\cdot y'-\left(2\tan x+4\right)y=0$,
כאשר ידוע $y_1(x)=e^{2x}$.

2) פתור $\left(1-x^2\right)y''+2xy'-2y=0$.

3) הסבר את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגם על המד"ר:
$$(1-x)y''+x\cdot y'-y=2(1-x)^2e^{-x},\quad (0<x<1),$$
כאשר ידוע ש- $y_1(x)=e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}\left(\sin x-4\cos x\right)$

2) $y=c_1x+c_2\left(x^2+1\right)$

3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

1) האם ייתכן כי $y_1(x)=e^x,\ \ y_2(x)=\sin x$, הם שני פתרונות של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, עם מקדמים רציפים בקטע $[0,\pi]$?

2) הראו כי הפונקציות $y_1(x)=\sin x^2,\ \ y_2(x)=\cos x^2$ הן פתרונות בת״ל של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$, בקטע $(-4,\infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x=0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x)=xe^x,\ \ y_2(x)=e^{-x}$,
הן פתרונות של המשוואה $y''-\frac{2}{1+2x}y'-\frac{2x+3}{1+2x}y=0$, בקטע $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת״ל בקטע?

4) נתונות שתי פונקציות $y_1=x^3$, $y_2=|x^3|$, בקטע $[-4,4]$.

א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.

ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.

ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד״ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?

ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד״ר $xy''-2y'=0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג׳?

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $y_1(x)\ ,\ \ y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I,
ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I.
הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)\ ,\ \ y_2(x)$ הם פתרונות שלה.

ב. רשום משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x>0$,
שהפונקציות $y_1(x)=x^2\ ,\ \ y_2(x)=x^4$, הן פתרונות שלה.

6) נתון כי $y_1(x),\ y_2(x)$, הם פתרונות של המד"ר $y''(x)+p(x)y'+q(x)=0$,
בקטע I, כאשר p, q רציפות בקטע I.
הראו, כי אם קיימת נקודה c בקטע I, שעבורה $y_1(c)=y_2(c)=0$,
אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

1) לא.

2) $W=-2x$

3) כן.

4) א. $W=0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

5) א. שאלת הוכחה. ב. $y''-\frac{5}{x}y'+\frac{8}{x^2}y=0$

6) שאלת הוכחה.

משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

שאלות

1) נתונה המשוואה $y''-4y=12x$.

א. פתור את המשוואה.

ב. מצא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=11 \end{cases}$.

ג. נסה למצוא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=1 \end{cases}$.

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תן דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0)=1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

2) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''-2xy'+2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

הראה כי $y_1(x)=0$ ו- $y_2(x)=x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x=0$, כך שהפונקציות $y=4x$ ו- $y=\sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

1) א. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-3x$ ב. $y=4e^{2x}-3e^{-2x}-3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו ל: www.GooL.co.il.

2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 2 - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

תוכן העניינים

מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים:

שאלות:

1) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b |f(x)|dx$ מהווה נורמה במרחב זה.

2) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב זה.

3) יהי $V=R_{\le 2}[x]$ המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה / שווה מ-2 מעל הממשיים.

לכל שני פולינומים $p(x),q(x)$ ב- V נגדיר:

$\langle p(x),q(x)\rangle = p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1)$.

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

4) נגדיר את המרחב $V=C^1[-1,1]$ (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$).

נגדיר: $\langle f(x),g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx+\int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}dx$.

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

5) הוכיחו כי בכל מרחב מכפלה פנימית E מתקיים לכל $f,g\in E$:

א. $\langle u,f+g\rangle=\langle u,f\rangle+\langle u,g\rangle$ $\forall u\in E$.

ב. $\mathrm{Re}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2\right)$.

ג. $\mathrm{Im}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+ig\|^2-\|f-ig\|^2\right)$.

ד. $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left\{\|f\|^2+\|g\|^2\right\}$ (שוויון המקבילית).

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית.

נסמן $w=u+v$ וקטורים במרחב.

הוכיחו כי אם $\langle u,v\rangle=0$ אזי $\|w\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

7) נגדיר את המרחב V להיות מרחב הפונקציות $f(x)$ הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע $[a,b]$ (כלומר $f''(x)$ רציפה ב-$[a,b]$).
בדקו האם $\langle f,g\rangle=\int_a^b f''(x)g''(x)dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

8) נגדיר את המרחב V להיות מרחב של פונקציות $f(x)$ ממשיות וגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$ (כלומר הנגזרת $f'(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$) כך ש- $f(-1)=0$.
נגדיר $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx$.
הוכיחו כי $\langle f,g\rangle$ מהווה מכפלה פנימית במרחב V.

9) יהי V מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b|f(x)|dx+\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב V.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) $f(x)=1$
8) הוכחה.
9) הוכחה.

מערכות אורתונורמליות:

שאלות:

1) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x)=\cos(nx)$ במרחב $L^2[-\pi,\pi]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

2) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x)=\sin(nx)$ במרחב $L^2[0,\pi]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

3) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ מערכת של פולינומים כך

ש-$\varphi_n(x)$ הינו פולינום ממעלה n.

נניח כי לכל n,m טבעיים כך ש- $m<n$ מתקיים $\langle\varphi_n(x),x^m\rangle=0$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

4) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $\left[e^{-\pi},e^{\pi}\right]$ עם המכפלה

הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} f(x)\overline{g(x)}\frac{1}{x}dx$ נגדיר $\varphi_n(x)=\sin(n\ln(x))$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

5) נניח כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2[a,b]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_1=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$. יהיו $c>0$ ו- d ממשי כלשהוא.
הוכיחו כי המערכת $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $\psi_n(x)=\sqrt{c}\cdot\varphi_n(c\cdot x+d)$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2\left[\frac{a-d}{c},\frac{b-d}{c}\right]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_2=\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x)\overline{g(x)}dx$.

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ מערכת אורתונורמלית סופית.
הוכיחו כי לכל $v\in V$ מתקיים $\left\|\sum_{n=1}^{N}\langle v,e_n\rangle e_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{N}\left|\langle v,e_n\rangle\right|^2$.

מערכת פולינומי צ'בישב:

7) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$
ונגדיר ב- K מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
הוכיחו כי אוסף הפונקציות $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $T_n(x)=\cos\left[n\cdot\arccos(x)\right]$ (הנקראת גם פולינומי צ'בישב) הינה מערכת אורתוגונלית ב- K ומצאו קבועים α_n כך שהמערכת $\{\alpha_n T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית.

מערכת פולינומי הרמיט:

8) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\cdot e^{-x^2}dx<\infty$.
נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\cdot e^{-x^2}dx$.
הוכיחו כי פולינומי הרמיט, המוגדרים על ידי הנוסחה $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]$ (נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתוגונלית במרחב K ומצאו להם קבועי נרמול.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח כי לכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle H_n, x^k\rangle = 0$. ניתן להיעזר בעובדה כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

מערכת פולינומי לג'נדר:

9) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$ ונגדיר ב- K מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי פולינומי לג'נדר, הנתונים על ידי נוסחת רודריגז $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ מהווים מערכת אורתוגונלית ב- K וכי $\langle P_n, P_n\rangle = \frac{2}{2n+1}$ לכל n טבעי.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle P_n, x^k\rangle = 0$.

מערכת פולינומי לגר:

10) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_0^{\infty}|f(x)|^2 \cdot e^{-x}dx < \infty$.

נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle = \int_0^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x}dx$.

הוכיחו כי פולינומי לגר, המוגדרים על ידי הנוסחה $L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right]$ (נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב K.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle L_n, x^k\rangle = 0$.

ניתן להיעזר בנוסחה $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = n!$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) מערכת פולינומי צ'בישב: הוכחה.
8) מערכת פולינומי הרמיט: הוכחה.
9) מערכת פולינומי לג'נדר: הוכחה.
10) מערכת פולינומי לגר: הוכחה.

קירוב מיטבי:

שאלות:

1) מצאו את נקודות המינימום של הפונקציה:

$$F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\alpha-\beta\cos(x)-\gamma\cos(10x)\right|^2dx$$

א. כאשר $f(x)=\cos^2(x)$

ב. כאשר $f(x)=x^3$

ג. כאשר $f(x)=\sin(x)$

2) במרחב $C[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

נגדיר תת מרחב $W=span\{1,\sin(x),\cos(x),x\}$ ופונקציה $f(x)=|x|$.

מצאו פונקציה $g\in W$ כך ש-$\|f-g\|$ מינימלי.

<u>הערה:</u>

שימו לב שהמערכת $\{1,\sin(x),\cos(x),x\}$ איננה אורתונורמלית.

3) נתבונן במרחב $C[-1,1]$ מעל $\mathbb{C}$.

א. הוכיחו כי $\langle f,g\rangle=f(-1)\overline{g(-1)}+\int_{-1}^{1}f'(x)\overline{g'(x)}dx$ מהווה מכפלה פנימית.

ב. מצאו את כל הערכים של $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$|-1-\alpha+\beta-\gamma|^2+\int_{-1}^{1}\left|3x^2-\beta-2\gamma x\right|^2dx$$

4) נתבונן במרחב $C[-1,1]$ מעל $\mathbb{C}$.

נתון כי $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx+\int_{-1}^{1}f'(x)\overline{g'(x)}dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

מצאו את כל הערכים של $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$\int_{-1}^{1}\left|x^3-\alpha-\beta x-\gamma x^2\right|^2dx+\int_{-1}^{1}\left|3x^2-\beta-2\gamma x\right|^2dx.$$

5) תהי V קבוצת הפונקציות הרציפות על הישר הממשי המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 e^{-x^2}dx<\infty$.

א. הוכיחו כי V עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר, מהווה מרחב מכפלה פנימית כאשר $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}dx$.

ב. הוכיחו כי כל הפולינומים שייכים ל- V.

ג. מצאו את הקירוב המיטבי של x^3 על מרחב הפולינומים מדרגה 2 לכל היותר.

<u>הערה:</u>
ניתן להשתמש באינטגרלים הבאים:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\quad,\quad\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad,\quad\int_{-\infty}^{\infty}x^4e^{-x^2}dx=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

6) יהי L מרחב וקטורי של פונקציות ממשיות ורציפות למקוטעין על הקטע $[1,\infty)$ המקיימות $\int_1^{\infty}x|f(x)|^2dx<\infty$.

במרחב L מוגדרת המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_1^{\infty}f(x)g(x)xdx$.

נגדיר $W=span\left\{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right\}$.

מצאו את ההיטל האורתוגונלי $P_W\left(\frac{x}{e^{\sqrt{x}}}\right)$

7) תהי $f\in C[-1,1]$.

הוכיחו כי לכל פונקציה אי זוגית $g\in C[-1,1]$

מתקיים $\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}|f(x)+f(-x)|^2dx\le\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|^2dx$.

תשובות סופיות:

1) א. $\alpha=0.5\ ,\ \beta=\gamma=0$ ב. $\alpha=0\ ,\ \beta=0\ ,\ \gamma=0$ ג. $\alpha=0\ ,\ \beta=0\ ,\ \gamma=0$

2) $g(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos(x)$

3) א. הוכחה. ב. $\alpha=0\ ,\ \beta=1\ ,\ \gamma=0$

4) $\alpha=\gamma=0\ ,\ \beta=\frac{9}{10}$

5) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $P_W\left(x^3\right)=\frac{3}{2}x$

6) $\frac{28}{e}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{36}{e}x^{-\frac{5}{2}}$

7) הוכחה.

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 3 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 4 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 5 - משוואת החום

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 6 - אינטגרל אנרגיה

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 7 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 8 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 9 - פתרון מד"ר באמצעות טורים

תוכן העניינים

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות **1-7** על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=0$.
במיוחד, רשום נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי,
וציין את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

תזכורת: טור חזקות סביב $x=0$ שקול לטור טיילור סביב $x=0$ ושקול לטור מקלורן.

1) $y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \qquad y(0)=3, \quad y'(0)=12;$

2) $y''-xy=0 \quad ; \quad y(0)=1, \; y'(0)=2$

3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

4) $(x^2+4)y''+xy=x+2$

5) $y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0$

6) $y''+ty=e^{t+1} \qquad y(0)=a_0=1, \quad y'(0)=a_1=2;$

7) $y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0$ (השתמש בפתרון בסימן Σ)

8) פתור את המשוואה $y''(x)+(x-1)y(x)=e^x$; $y(1)=1$, $y'(1)=2$,
על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

9) פתור את המשוואה $y''+xy'+(2x-1)y=0$; $y(-1)=2, \quad y'(-1)=-2$.
רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

תשובות סופיות

1) $$a_n=\frac{2n-10}{(n-1)n}a_{n-3}\ \ (n\ge 5)\quad ,\quad y=3+12x+x^2-\frac{5}{3}x^3-\frac{23}{12}x^4+\ldots+a_nx^n\ldots$$

2) $$.\ a_n=\frac{1}{(n-1)n}a_{n-3}\ \ (n\ge 3)\quad ,\quad y=1+2x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

3) $$a_n=\frac{n-3}{n-1}a_{n-2}\quad (n\ge 2)\quad ,\quad y=a_0+a_1x+-a_0x^2+0x^3-\frac{1}{3}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

4) $$y=a_0+a_1x+\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3+\left(\frac{-1}{48}a_1-\frac{1}{96}\right)x^4+\ldots+a_nx^n$$
$$a_n=\frac{-1}{4(n-1)n}a_{n-3}-\frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n}a_{n-2}\ ,\ (n\ge 4)$$

5) $$y=a_0+a_1x+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)x^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)x^3+\frac{1}{6}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3)$$

6) $$y(t)=1+2t+\frac{e}{2}t^2+\frac{e-1}{6}t^3+\frac{e-4}{24}t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e}{n(n-1)(n-2)!}-\frac{a_{n-3}}{n(n-1)}\quad (n\ge 3)$$

7) $$y=a_0+a_1t+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)t^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)t^3+\frac{1}{6}a_0t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3)$$

8) $$y=1+2(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e-1}{6}(x-1)^3+\frac{e-4}{24}(x-1)^4+\ldots+a_n(x-1)^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e-a_{n-3}(n-2)!}{n!}\quad (n\ge 3)$$

9) $$y=2-2(x+1)+2(x+1)^2-\frac{2}{3}(x+1)^3+\frac{1}{3}(x+1)^4+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\ge 3)$$

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראה שהנקודה היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתור את המשוואה על ידי פיתוח המשוואה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

1) $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

2) $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$

3) $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$

4) $3x^2y''-xy'+y=0$

5) $x^2y''+xy'+x^2y=0$

6) $x^2y''-xy'+y=0$

7) $x^2y''+x(x+2)y'-2y=0$

8) $x^2y''+x(x-2)y'+2y=0$

הערות:

בשאלות 2-5, הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרש אינו מספר שלם.
בשאלות 6 ו-7 הפתרונות שווים, ובשאלות 8 ו-9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

תשובות סופיות

1)
$$y=k_1x^{1/3}\left(1-\frac{1}{14}x^2+\frac{1}{728}x^4+\dots\right)+k_2\left(1-\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{440}x^4+\dots\right)$$

2)
$$y=k_1x^{1/2}\left(1-\frac{7}{18}x^1+\frac{147}{792}x^2+\dots\right)+k_2x^{-3}\left(1-\frac{21}{5}x^1+\frac{49}{5}x^2-\frac{343}{15}x^3\right)$$

3)
$$y=k_1x^{-1}\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{90}x^3+\dots\right)+k_2x^{2.5}\left(1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2-\frac{1}{7722}x^3+\dots\right)$$

4)
$$y=k_1x+k_2x^{1/3}$$

5)
$$y=k_1\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\dots\right)+$$
$$+k_2\left[\ln x\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\dots\right)+\left(\frac{2}{2^3}x^2+\frac{-12}{4^3\cdot 2^3}x^4+\dots\right)\right]$$

6)
$$y(x)=k_1x+k_2x\ln x$$

7)
$$y(x)=\frac{k_1}{x^2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-e^{-x}\right)+\frac{k_2}{x^2}e^{-x}$$

8)
$$y=-a_0x^2\ln x\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\dots\right)+a_0x\left(1-x^2-\frac{3}{4}x^3+\dots\right)$$

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

תחום התכנסות	טור מקלורן
$-\infty < x < \infty$	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
$-\infty < x < \infty$	$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$
$-\infty < x < \infty$	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$
$-1 < x \le 1$	$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$
$-1 \le x \le 1$	$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$
$-1 < x < 1$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots$
$-1 \le x \le 1 \ (m > 0)$ $-1 < x \le 1 \ (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \ (m \le -1)$ $m \ne 0, 1, 2, 3, \ldots$	$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots$