

# דואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2035



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



## תוכן העניינים

1	משוואות ליניאריות מסדר שני
16	משוואות מסדר ראשון
38	משוואות ליניאריות מסדר n
47	מערכת משוואות ליניאריות
57	פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים
62	אינטגרלים מיידיים
67	אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"
69	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים
73	אינטגרלים בשיטת ההצבה
76	אינטגרלים של פונקציות רציונליות
81	אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות
92	האינטגרל המסוים, סכומי רימן
97	שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)
102	המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)
104	אינטגרלים לא אמיתיים
115	שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)
137	טורים עם איברים קבועים
151	טורי טיילור - מקלורן
162	סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי 2 ח 104035

פרק 1 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה ..... 1
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים ..... 3
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל" ..... 5
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם" ..... 7
5. וריאציית פרמטרים ..... 9
6. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר (ללא ספר) ..... 10
7. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל ..... 10
8. הוורונסקיאן ושימושיו ..... 11
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני ..... 13
10. השיטה האופרטורית ..... 14

## משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

## תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[ \frac{c^2 (x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k); y = c \quad (8)$$

## משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

### שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-11:

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 1, \quad 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3; \quad y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2} y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

**(12)** נתונה המד"ר:  $yy'' + (y')^2 = 0$ .

א. הראה כי  $y_1 = 4$  ו-  $y_2 = \sqrt{x}$  הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראה כי הפתרון  $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$ , אינו פתרון של המד"ר.

האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

### תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} \quad (3)$$

$$z = e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (5)$$

$$x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}} \quad (6)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (7)$$

$$y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x] \quad (8)$$

$$y = e^2 \sin 3x \quad (9)$$

$$y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[ c_1 \cos \left( \frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left( \frac{2}{5} x \right) \right] \quad (10)$$

$$y = 4e^{-\frac{|x|}{a}} \quad (11)$$

**(12)** שאלת הוכחה.

## השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + t e^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3x e^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## וריאצית פרמטרים

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[ \ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[ \frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

## משוואה לינארית, כללית – שיטת ד'אלמבר – שיטת הפתרון השני – שיטת אבל

### שאלות

(1) פתור  $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$ ,

כאשר ידוע  $y_1(x) = e^{2x}$ .

(2) פתור  $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ .

(3) הסבר את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגם על המד"ר:

$$(0 < x < 1), \quad (1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}$$

כאשר ידוע ש-  $y_1(x) = e^x$ , פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

### תשובות סופיות

(1)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

(2)  $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

(3) שאלת הדגמה.

## הוורונסקיאן ושימושיו

### שאלות

- (1) האם ייתכן כי  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = \sin x$  הם שני פתרונות של המשוואה  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  עם מקדמים רציפים בקטע  $[0, \pi]$ ?
- (2) הראו כי הפונקציות  $y_1(x) = \sin x^2$ ,  $y_2(x) = \cos x^2$  הן פתרונות בת"ל של המשוואה  $xy'' - y' + 4x^3y = 0$  בקטע  $(-4, \infty)$ .  
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור  $x = 0$ .  
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?
- (3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות  $y_1(x) = xe^x$ ,  $y_2(x) = e^{-x}$  הן פתרונות של המשוואה  $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$  בקטע  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ .  
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?
- (4) נתונות שתי פונקציות  $y_1 = x^3$ ,  $y_2 = |x^3|$  בקטע  $[-4, 4]$ .  
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.  
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.  
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?  
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר  $xy'' - 2y' = 0$ .  
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?
- (5) ענה על הסעיפים הבאים:  
א. יהיו  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  פונקציות גזירות פעמיים בקטע  $I$ , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- $I$ .  
הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  הם פתרונות שלה.  
ב. רשום משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע  $x > 0$ , שהפונקציות  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = x^4$  הן פתרונות שלה.

- 6 נתון כי  $y_1(x), y_2(x)$  הם פתרונות של המד"ר  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ , בקטע  $I$ , כאשר  $p, q$  רציפות בקטע  $I$ .  
 הראו, כי אם קיימת נקודה  $c$  בקטע  $I$ , שעבורה  $y_1(c) = y_2(c) = 0$ , אז  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

### תשובות סופיות

- (1) לא.  
 (2)  $W = -2x$   
 (3) כן.  
 (4) א.  $W = 0$       ב. שאלת בדיקה.      ג. לא.      ד. לא.  
 (5) א. שאלת הוכחה.      ב.  $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$   
 (6) שאלת הוכחה.

## משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

### שאלות

(1) נתונה המשוואה  $y'' - 4y = 12x$ .

א. פתור את המשוואה.

ב. מצא פתרון המקיים: 
$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$$

ג. נסה למצוא פתרון המקיים: 
$$\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תן דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים  $y(0) = 1$ .

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

(2) נתונה הבעיה: 
$$\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

הראה כי  $y_1(x) = 0$  ו-  $y_2(x) = x^2$ , הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

(3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה  $x = 0$ , כך שהפונקציות  $y = 4x$  ו-  $y = \sin 4x$  הן פתרונותיה?

### תשובות סופיות

(1) א.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 3x$  ב.  $y = 4e^{2x} - 3e^{-2x} - 3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו ל: [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il).

(2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

## משוואה לינארית לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – השיטה האופרטורית

### שאלות

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדוק עם מרצה הקורס אם אתה נדרש אליו.

בשאלות אלו הסימון הוא:  $(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x)$ .

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (6)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2\cos x \cos 2x \quad (7)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי 2 ח 104035

פרק 2 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא ..... (ללא ספר) 16
2. הפרדת משתנים ..... 18
3. משוואה הומוגנית ..... 20
4. משוואה מהצורה  $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$  ..... 21
5. משוואה מדויקת ..... 23
6. גורם אינטגרציה ..... 26
7. משוואה לינארית מסדר ראשון ..... 28
8. משוואת ברנולי ..... 29
9. משוואת ריקטי ..... 30
10. הצבות שונות ומשונות ..... 31
11. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד ..... 34
12. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון ..... 36
13. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה.

## הפרדת משתנים

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 \quad ; \quad (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 \quad ; \quad y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

## תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

## משוואה הומוגנית

### שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 8-1 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xy y' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 : \text{נתונה המשוואה} \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $n$ , על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $n$  שמצאת בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

## משוואה מהצורה $(ax + by + c)dx + (dx + ey + f)dy = 0$

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x + y + 2} \quad (1)$$

$$(x + 2y + 3)dx + (2x + 4y - 1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3 + x + 2y}{1 + x + y} \quad (4)$$

$$(2x + y - 3)dx + (x + y - 1)dy = 0 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x + y + 1) + \frac{1}{4} \ln(2(x + y + 1) + 1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x - 1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y + 2}{x - 1} - 1 \right| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{y + 2}{x - 1} + 1 \right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x + 2y + 3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x - 1| = \frac{1}{4} \left[ -(2 + \sqrt{2}) \ln \left| \sqrt{2} - 2 \frac{y + 2}{x - 1} \right| + (-2 + \sqrt{2}) \ln \left| \sqrt{2} + 2 \frac{y + 2}{x - 1} \right| \right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x - 2| = \frac{1}{2} \ln \left( 2 + 2 \frac{y + 1}{x - 2} + \left( \frac{y + 1}{x - 2} \right)^2 \right) + c \quad (5)$$

## משוואה מדויקת

### שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-6:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{-xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{-xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left( y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right) dx + \left( \frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } (3x^2 + ye^{-xy})dx + (2y^3 + kxe^{-xy})dy = 0, \text{ כאשר } k \text{ קבוע.}$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$ , על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $k$  שמצאת בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

## גורם אינטגרציה

### שאלות

(1) הראה שהמשוואה  $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$  אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $\frac{1}{xy^3}$ .

(2) הראה שהמשוואה  $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$  אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $ye^x$ .

(3) הראה שהמשוואה  $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$  אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $xe^x$ .

פתור את המשוואות בשאלות 4-9:

(4)  $(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0$

(5)  $(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0$

(6)  $(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0$

(7)  $(y^2 - y)dx + xdy = 0$

(8)  $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

(9)  $y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$

$$(10) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה מד"ר לא מדויקת}$$

א. הוכח: אם  $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$ , אז  $e^{\int f(x)dx}$  הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכח: אם  $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$ , אז  $e^{-\int g(y)dy}$  הוא גורם אינטגרציה.

$$(11) \quad (y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של  $xy$  בלבד. כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה  $\mu(xy)$ .

$$(12) \quad (5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה}$$

מצא את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה  $\mu(x+y)$ .

$$(13) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצא תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $\frac{x}{y}$  בלבד.

$$(14) \quad (x^2y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של  $x^\alpha y^\beta$ . כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה  $\mu(x^\alpha y^\beta)$ .

$$(15) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

א. מצא תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $xy$  בלבד.

ב. היעזר בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה  $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$ .

$$(16) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצא תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $x+y$  בלבד.

## תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

שאלת הוכחה. (10)

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{ב.} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

## משוואות ליניאריות מסדר ראשון

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

## תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[ \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

## משוואות ברנולי

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left( \frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left( \frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

## משוואות ריקטי

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = 1 + (x - y)^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (1)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (3)$$

## הצבות שונות ומשוונות

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y' = \cos(y - x) \quad (1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right); y(1) = 0 \quad (2)$$

$$y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4}, y(0) = 1 \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{1}{\sin z} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right) \quad (2)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

## משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

### שאלות

(1) נתונה הבעיה  $y(2) = -1$ ,  $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$ .

- א. הוכח ש- $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$ ,  $y_1(x) = -x+1$  הם פתרונות לבעיה.  
 קבע באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.  
 ב. הסבר מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

(2) נתונה הבעיה  $y(0) = 0$ ,  $y' = \sqrt[3]{y} + 4$ .

- א. הוכח שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.  
 ב. הוכח שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.  
 ג. הוכח שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצא אותו.

(3) פתור את הבעיה  $y(4) = 0$ ,  $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$ .

(4) נתונה הבעיה  $y(0) = 4$ ,  $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$ .

- א. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.  
 ב. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

(5) נתונה המד"ר  $xdx = (2x + y^3)dy$ .

- א. הראו שעבור  $x = x(y)$  המד"ר ליניארית מסדר ראשון, ופתרו אותה ככזאת.  
 ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית, מהן נקודות ההתחלה  $(x_0, y_0)$ , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד, העובר דרך  $(x_0, y_0)$ .  
 צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.  
 מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך  $(x_0, y_0)$ ?

$$(6) \quad \begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו 3 קרובי פיקארד לפתרון הבעיה.  
 ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר  $n$  (הוכיחו באינדוקציה).  
 ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר  $n$  מתכנס לפתרון כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

$$(7) \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases} \quad \text{כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה? } (x > 0)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית התחלה:}$$

- א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.  
 ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.  
 ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(9) \quad \begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית התחלה:}$$

- א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.  
 ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.  
 ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(10) \quad \begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(11) \quad \begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(12) \quad \begin{cases} y' = xy e^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

## תשובות סופיות

- (1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.
- (2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
- (3)  $y(x) = 0$
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.  
ב. כל נקודת התחלה  $(x_0, y_0)$ , שעבורה  $y_0 \neq 0$ .  
הקטע הארוך ביותר:  $(0, \infty)$  או  $(-\infty, 0)$ .
- (6) א.  $y_0(x) = 1, y_1(x) = 1 + x^2, y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$   
ב.  $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$ . ג. הוכחה.
- (7) אחד.
- (8) א.  $[-0.08, 0.08]$  ב.  $[-0.1, 0.1]$  ג. הוכחה.
- (9) א.  $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$  ב.  $[-0.5, 0.5]$  ג. הוכחה.
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.

## פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

### שאלות

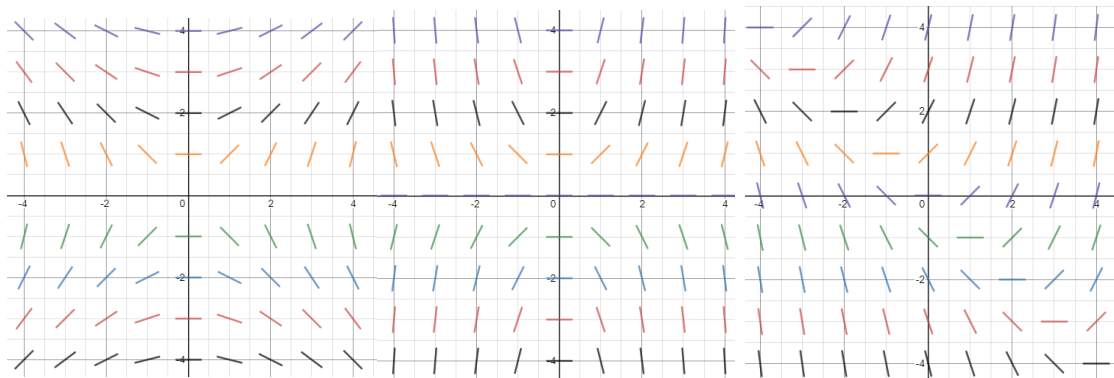
(1) שרטט שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית  $y' = 2y - x$ .

(2) התאם כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א.  $y' = \frac{x}{y}$

ב.  $y' = xy$

ג.  $y' = x + y$



איור 3

איור 2

איור 1

(3) נתונה המד"ר:  $y' = y - x$ ,  $y(0) = 2$ .

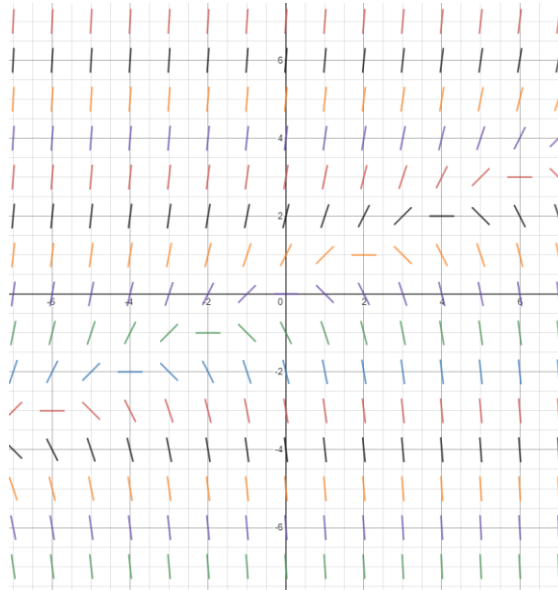
מצא בקירוב את  $y(1)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.1$ .

(4) נתונה המד"ר:  $y' = x + y$ ,  $y(1) = 2$ .

מצא בקירוב את  $y(2)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.2$ .

## תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

(3)  $y(1) = 4.593$

(4)  $y(2) = 6.95328$

## משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדוק עם מרצה הקורס אם אתה נדרש אליו.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן  $p = y' = \frac{dy}{dx}$ .

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$(p = y') \quad 4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(p = y') \quad x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$(p = y') \quad xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$(p = y') \quad y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$(p = y') \quad xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$(p = y') \quad (y > 0) \quad 6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

**תשובות סופיות**

$$(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left( \ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$\left( y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left( \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0 \quad (6)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 3 - משוואות ליניאריות מסדר n

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה מסדר שלישי..... 38
2. משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים..... 39
3. שיטת השוואת מקדמים..... 42
4. שיטת וריאציית הפרמטרים..... 44
5. משוואת אוילר מסדר שלישי..... (ללא ספר) 45
6. הוורונסקיאן ושימושיו..... 45
7. השיטה האופרטורית..... 46

## משוואה חסרה מסדר שלישי

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$, y' y''' - (y'')^2 - 3y''(y')^2 - 4(y')^4 = -16y(y')^3 \quad (1)$$

עם תנאי ההתחלה :  $y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = -12$ .

$$\begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y'' y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y'' y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = -1, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} 3y''' y - y' y'' &= 0 \\ y(1) = 1, y'(1) = 3, y''(1) = 6 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (y' y''' - 2(y'')^2) y^2 &= -(y')^4 \\ y > 0 \\ y(1) = y'(1) = y''(1) &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \ln |-3 + 4y| = x + \frac{1}{4} \ln 3 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{1-x} - 1 \quad (2)$$

$$y = \tan x - 1 \quad (3)$$

$$y = x^3 \quad (4)$$

$$y = e^{x-1} \quad (5)$$

## משוואות לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים

### שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-15 :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (4)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (7)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (8)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (10)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (11)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (12)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (13)$$

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} y'''' - 3y''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = -19 \\ y'''(0) = -47 \end{cases} \quad (15)$$

**16** נתונה משוואה דיפרניציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6,

אשר אחד הפתרונות שלה הוא  $x^2 e^x \cos 2x$ .

א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה.

ב. מצא את המשוואה.

## תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (5)$$

$$y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \quad (6)$$

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x} \quad (9)$$

$$y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x] \quad (10)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \quad (11)$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x \quad (12)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \quad (13)$$

$$y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (14)$$

$$y = e^x - 2e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (15)$$

$$y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x] \quad (16)$$

$$y'''' - 6y'''' + 27y'''' - 68y'''' + 135y'''' - 150y'''' + 125y'''' = 0 \quad \text{ג.}$$

## שיטת השוואת מקדמים

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2 \sin x - 4 \cos x \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (3)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (4)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 2 \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4 \sin x - 2 \cos x \quad (7)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (5)$$

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x} \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \quad (7)$$

## שיטת וריאציית הפרמטרים

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x| \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x + 1 - \ln(e^x + 1)) + e^x (-\ln(e^x + 1)) + e^{2x} \left( -\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right) \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln |x| \quad (3)$$

## הוורונסקיאן ושימושיו

### שאלות

- (1) האם קיימת מד"ר מהצורה  $y'''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ , בעלת מקדמים רציפים בקטע  $[-1,1]$ , כך שהפונקציות  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = x^2$ ,  $y_3(x) = x^3$  הן פתרונות שלה?
- (2) נתונות הפונקציות:  $y_1(x) = 4 - x$ ,  $y_2(x) = 4 + x$ ,  $y_3(x) = 20 + x$ .  
 א. חשב את הוורונסקיאן של הפונקציות.  
 ב. קבע האם הפונקציות תלויות בקטע  $(-\infty, \infty)$ .  
 ג. ענה שוב על סעיף ב', בידיעה ששלוש הפונקציות הן פתרון של המד"ר  $y'' = 0$ .
- (3) פתור את הסעיפים הבאים:  
 א. יהיו  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$  פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמים בקטע  $I$ , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- $I$ . הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע  $I$ , כך ש- $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$  הם פתרונות שלה.  
 ב. רשום משוואה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = x^2$ ,  $y_3(x) = x^3$  הן פתרונות שלה.

### תשובות סופיות

- (1) לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודה אחת  $x = 0$ .
- (2) א.  $W = 0$ . ב. הפונקציות תלויות. ג. הפונקציות תלויות.
- (3) א. שאלת הוכחה. ב.  $y'''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$ ,  $x \neq 0$ .

## השיטה האופרטורית

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 4e^x - 10e^{-2x} \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 10e^{4x} + 2e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)y = 10e^x + 4e^{2x} \quad (3)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = 24e^x + 81e^{4x} \quad (4)$$

$$(D^6 + D^4 + D^2)y = 104\sin(2x+1) + \cos(x+10) \quad (5)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = -5\sin 2x \quad (6)$$

$$(D^4 - 3D^3 + 6D^2 - 12D + 8)y = 30\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 48\cos^2 x - 16 \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1e^{0x} + c_2e^{-x} + c_3e^{3x} - e^x + e^{-2x} \quad (1)$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-5x} + \frac{5}{81}e^{4x} - \frac{1}{18}xe^x - \frac{1}{30} \quad (2)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{2x} + c_4xe^{2x} + 5x^2e^x + 2x^2e^{2x} \quad (3)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x + c_5e^{4x} - \frac{1}{3}x^4e^x + xe^{4x} \quad (4)$$

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x} + c_5e^{3x} + c_6e^{-3x} - 2\sin(2x+1) - \cos(x+10) \quad (5)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x + c_5e^{4x} + \frac{1}{500}[4\sin 2x - 22\cos 2x] \quad (6)$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x + \frac{5\sin x + 25\cos x}{26} + \frac{-3\cos 2x - 18\sin 2x}{37} + 1 \quad (7)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 4 - מערכת משוואות לינאריות

תוכן העניינים

1. חזרה מאלגברה לינארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ..... 47
2. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הלכסון ..... 49
3. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת וריאציית הפרמטרים ..... 54
4. מערכת משוואות כללית - שיטת ההצבה ..... 56

## חזרה מאלגברה לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

### שאלות

בשאלות הבאות מצא את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

## תשובות סופיות

$$x = 0, x = 1, x = 2, v_{x=0} = (-1, 0, 1), v_{x=1} = (0, 1, 0), v_{x=2} = (1, 0, 1) \quad (1)$$

$$x = 6, x = 2, x = -4, v_{x=6} = (0, 0, 1), v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=-4} = (-1, 1, 0) \quad (2)$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 3, v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0) \quad (3)$$

$$x = 1, x = 3, x = -2, v_{x=1} = (-1, 4, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=-2} = (-1, 1, 1) \quad (4)$$

$$x = 1, x = 4, x = -1, v_{x=1} = (1, -2, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=-1} = (-1, 0, 1) \quad (5)$$

$$x = -1, x = 3, v_{x=-1} = (-1, 2), v_{x=3} = (1, 2) \quad (6)$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = (1+i, 2), v_{x=1-2i} = (1-i, 2) \quad (7)$$

$$x = 1, x = 1 + \sqrt{3}i, x = 1 - \sqrt{3}i, v_{x=1} = (1, 1, 1),$$

$$v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, -2), v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -2) \quad (8)$$

## מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון

### שאלות

פתור את מערכות המשוואות בשאלות 1-2:

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (1)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ כד ש-}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

הוכח כי  $z(t) = y(t)$ .

פתור את מערכות המשוואות בשאלות 4-5:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases} \quad (4)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (5)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ כד ש-}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\text{חשב: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

$$(7) \quad \begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2' = 0 \\ 3y_2' - 4y_1' - 5y_2 = 0 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות:}$$

$$(8) \quad \text{פתור: } \bar{x}'(t) = A \cdot \bar{x}(t), \text{ כאשר } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: בשאלות 7 ו-8 יש להגיע לפתרון המרוכב מהפתרון ממשי.

פתור את מערכות המשוואות המופיעות בשאלות 9-14:  
(שים לב שכל המערכות אינן ניתנות ללכסון)

$$(9) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(10) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(11) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(12) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(13) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(14) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

$$(15) \text{ דני פתר את המערכת } x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} x(t)$$

$$. x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{0t} \left[ t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \text{ וקיבל}$$

$$. x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \text{ נתון תנאי התחלה}$$

עבור אילו ערכים של הקבועים הממשיים,  $a, b, c$ , הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה הנתון יהיה חסום לכל  $t$  ממשי?

## תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$z(t) = y(t) \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$0 \quad (6)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \left[ \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[ \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad (7)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[ \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \quad (8)$$

$$+ c_3 e^t \left[ \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ 2t-1 \\ t \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 0.5t^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} t^2-t+2 \\ \frac{t^2}{2}+1 \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t-1 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + c_4 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ t-2 \\ \frac{t^2}{2}-t+1 \\ \frac{t^3}{6} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ -4t \\ -2t \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$a = -c, \quad b = 2a \quad (15)$$

## מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

### שאלות

פתור את מערכת המשוואות בשאלות 1-4:

$$\begin{aligned} (1) \quad x_1' &= x_1 + x_2 + 2e^{-t} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 + 4e^{-t} \end{aligned} \quad (2) \quad \begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + e^{at} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \end{aligned} \quad (a \text{ קבוע})$$

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 2z + e^t \\ y' &= x + 2y + z \\ z' &= 2x + y + z + e^t \end{aligned} \quad (4) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(5) המר את המשוואה  $y'' + y'' - 2y = t^2$ , במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

$$(6) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 8t+3 \\ -3t+3 \\ t+3 \end{pmatrix} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות:}$$

(7) נתונה המד"ר  $e^{-x} y''''(x) - y''(x) + e^x x^2 y'(x) = 5e^{-x}$ .  
רשום את המד"ר כמערכת משוואות לינאריות מסדר ראשון,  
בהצגה מטריציאלינית.

(8) נתונה המד"ר  $x^2 y''(x) + 10xy'(x) + (1 + 4x^2)y(x) = \ln x$ .  
רשום את המד"ר כמערכת משוואות לינאריות מסדר ראשון,  
בהצגה מטריציאלינית.

הערה: בשאלות 7 ו-8 המערכת המתקבלת היא לא עם מקדמים קבועים.  
יחד עם זאת, אתם מתבקשים רק להציג את המערכת ולא לפתור אותה.

## תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} : \text{עבור } a = -1 \text{ נקבל:} \quad (2)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} e^{at} \\ -2e^{at} \end{pmatrix} : \text{עבור } a \neq 1 \text{ נקבל:}$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3t+2) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - (3t+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3t+1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}te^t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{9}e^t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} \\ (2t-1)e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t-1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -e^{2t}t^2 & e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{1}{t^2}+4\right) & -\frac{10}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\ln t}{t^2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

## מערכת משוואות כללית – שיטת ההצבה

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} y'' + 2z' = e^{3x} \\ y' - z'' + 3z = x^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$z(0) = y(0) = y'(0) = 0 \text{ , בהינתן } \begin{cases} y'' + z' = e^{-2x} \\ y + z = \sin x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 6x - 3y + e^{-t} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + \sin 2t \\ x_2' = x_1 + x_2 + \cos 2t \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} z'' - 3z' + 2z + y' - y = 0 \\ z' - 2z + y' + y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{24} e^{3x} + x^2, \quad y = \frac{1}{12} e^{3x} - \frac{2}{3} x^3 - 2c_2 e^x + 2c_3 e^{-x} + kx + l \quad (1)$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^x - \frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x, \quad y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{6} e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \quad (2)$$

$$x = c_1 + c_2 e^t + 4te^t - e^{-t}, \quad y = 2c_1 + \frac{3}{2} c_2 e^t + 6te^t - \frac{3}{2} e^t - \frac{5}{2} e^{-t} \quad (3)$$

$$x_1 = c_1 + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad x_2 = -c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{4} \sin 2t \quad (4)$$

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}, \quad y = 2c_1 + \frac{1}{2} c_2 e^x \quad (5)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 5 - פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים

תוכן העניינים

- 57 ..... 1. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית
- 59 ..... 2. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית-סינגולרית

## פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

### שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-7 על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב  $x=0$ . במיוחד, רשום נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי, וציין את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

**תזכורת:** טור חזקות סביב  $x=0$  שקול לטור טיילור סביב  $x=0$  ושקול לטור מקלורן.

$$y(0)=3, \quad y'(0)=12; \quad y''-2x^2y'+4xy = x^2+2x+2 \quad (1)$$

$$y(0)=1, \quad y'(0)=2; \quad y''-xy = 0 \quad (2)$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y = 0 \quad (3)$$

$$(x^2+4)y''+xy = x+2 \quad (4)$$

$$y''+(x-1)y'+(2x-3)y = 0 \quad (5)$$

$$y(0)=a_0=1, \quad y'(0)=a_1=2; \quad y''+ty = e^{t+1} \quad (6)$$

$$y''+(t-1)y'+(2t-3)y = 0 \quad (7) \quad (\text{השתמש בפתרון בסימן } \Sigma)$$

$$y(1)=1, \quad y'(1)=2; \quad y''(x)+(x-1)y(x) = e^x \quad (8)$$

על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב  $x=1$ .

$$y(-1)=2, \quad y'(-1)=-2; \quad y''+xy'+(2x-1)y = 0 \quad (9)$$

רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב  $x=-1$ .

## תשובות סופיות

$$a_n = \frac{2n-10}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 5) \quad , \quad y = 3 + 12x + x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \dots + a_n x^n \dots \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 3) \quad , \quad y = 1 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

$$a_n = \frac{n-3}{n-1} a_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad , \quad y = a_0 + a_1 x + -a_0 x^2 + 0x^3 - \frac{1}{3}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3 + \left(\frac{-1}{48}a_1 - \frac{1}{96}\right)x^4 + \dots + a_n x^n \quad (4)$$

$$a_n = \frac{-1}{4(n-1)n} a_{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n} a_{n-2} \quad , \quad (n \geq 4)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)x^3 + \frac{1}{6}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (5)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{e}{2}t^2 + \frac{e-1}{6}t^3 + \frac{e-4}{24}t^4 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (6)$$

$$a_n = \frac{e}{n(n-1)(n-2)!} - \frac{a_{n-3}}{n(n-1)} \quad (n \geq 3)$$

$$y = a_0 + a_1 t + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)t^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)t^3 + \frac{1}{6}a_0 t^4 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 1 + 2(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e-1}{6}(x-1)^3 + \frac{e-4}{24}(x-1)^4 + \dots + a_n (x-1)^n + \dots \quad (8)$$

$$a_n = \frac{e - a_{n-3}(n-2)!}{n!} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 2 - 2(x+1) + 2(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{3}(x+1)^4 + \dots \quad (9)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

## פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

### שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראה שהנקודה היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתור את המשוואה על ידי פיתוח המשוואה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

$$3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad (1)$$

$$2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0 \quad (2)$$

$$2x^2y'' - xy' + (x-5)y = 0 \quad (3)$$

$$3x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (4)$$

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \quad (5)$$

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (6)$$

$$x^2y'' + x(x+2)y' - 2y = 0 \quad (7)$$

$$x^2y'' + x(x-2)y' + 2y = 0 \quad (8)$$

### הערות:

בשאלות 2-5, הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרשם אינו מספר שלם. בשאלות 6 ו-7 הפתרונות שווים, ובשאלות 8 ו-9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

## תשובות סופיות

$$y = k_1 x^{1/3} \left( 1 - \frac{1}{14} x^2 + \frac{1}{728} x^4 + \dots \right) + k_2 \left( 1 - \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{440} x^4 + \dots \right) \quad (1)$$

$$y = k_1 x^{1/2} \left( 1 - \frac{7}{18} x^1 + \frac{147}{792} x^2 + \dots \right) + k_2 x^{-3} \left( 1 - \frac{21}{5} x^1 + \frac{49}{5} x^2 - \frac{343}{15} x^3 \right) \quad (2)$$

$$y = k_1 x^{-1} \left( 1 + \frac{1}{5} x + \frac{1}{30} x^2 + \frac{1}{90} x^3 + \dots \right) + k_2 x^{2.5} \left( 1 - \frac{1}{9} x + \frac{1}{198} x^2 - \frac{1}{7722} x^3 + \dots \right) \quad (3)$$

$$y = k_1 x + k_2 x^{1/3} \quad (4)$$

$$y = k_1 \left( 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + \quad (5)$$

$$+ k_2 \left[ \ln x \cdot \left( 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + \left( \frac{2}{2^3} x^2 + \frac{-12}{4^3 \cdot 2^3} x^4 + \dots \right) \right]$$

$$y(x) = k_1 x + k_2 x \ln x \quad (6)$$

$$y(x) = \frac{k_1}{x^2} \left( 1 - x + \frac{1}{2} x^2 - e^{-x} \right) + \frac{k_2}{x^2} e^{-x} \quad (7)$$

$$y = -a_0 x^2 \ln x \left( 1 - x + \frac{1}{2} x^2 + \dots \right) + a_0 x \left( 1 - x^2 - \frac{3}{4} x^3 + \dots \right) \quad (8)$$

## נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$ $-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$ $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 6 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

62 ..... 1. אינטגרלים מידיים

65 ..... 2. מציאת פונקציה קדומה

## אינטגרלים מידיים

### שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ):

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4 dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$ ):

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$ ):

$$\int \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \qquad \int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \qquad \int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$\left( \int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

$$\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשב את האינטגרל} \quad (30)$$

$$\left( \int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

## תשובות סופיות

- $$-\frac{1}{x} + c \quad (3) \qquad \frac{x^5}{5} + c \quad (2) \qquad 4x + c \quad (1)$$
- $$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \qquad -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) \qquad \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$
- $$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \qquad -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) \qquad \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$
- $$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \qquad -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) \qquad \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$
- $$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \qquad \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) \qquad \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$
- $$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \qquad \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$
- $$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19) \qquad -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$
- $$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \qquad \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) \qquad \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$
- $$x + \ln|x+2| + c \quad (25) \qquad \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) \qquad x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$
- $$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) \qquad \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) \qquad 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$
- $$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30) \qquad 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$
- $$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33) \qquad \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32) \qquad \frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

## מציאת פונקציה קדומה

### שאלות

- (1) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$ .  
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2, 3)$ .  
 מצא את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$ .  
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 4$ .  
 מצא את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$ .  
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -6$ .  
 מצא את הפונקציה.
- (4) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2x - 6$ .  
 ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.  
 מצא את הפונקציה.
- (5) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$ .  
 שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה  $y = 5\frac{2}{3}$ , הוא 3.  
 מצא את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה:  $f''(x) = 6x + 6$ .  
 שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,  
 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.  
 מצא את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה:  $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ .  
 המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר  $y = -4$ .  
 מצא את הפונקציה.

- (8) נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = 0$ , ונתון בנוסף כי לכל  $x_0$  ממשי:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$ .
- א. מצא את תחומי הרציפות של הפונקציה.  
 ב. חשב את הגבול הבא או קבע שהוא אינו קיים  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$   
 ג. מצא כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ד. מצא את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.  
 ה. תהי  $G(x)$  פונקציה קדומה של  $|x|$ .  
 חשב את הנגזרת  $(G(x) - f(x))'$ .

### תשובות סופיות

- (1)  $f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2$
- (2)  $f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20}$
- (3)  $f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6}$
- (4)  $f(x) = x^2 - 6x + 14$
- (5)  $f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3$
- (6)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$
- (7)  $f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2$
- (8) א. רציפה לכל  $x$ . ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . ג. נקודת חיתוך אחת  $(0,0)$ .  
 ד. נקודת פיתול אחת  $(0,0)$ . ה. 0.

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 7 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים ..... 67

## אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

### שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

## תשובות סופיות

- |   |   |   |
|---|---|---|
| $\frac{1}{3} \ln x^3+1 +c$ (3)                | $\ln \sin x +c$ (2)                       | $\ln x^2+1 +c$ (1)                        |
| $e^2 \ln e^x+1 +c$ (6)                        | $\ln \ln x  +c$ (5)                       | $-\ln \cos x +c$ (4)                      |
| $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$ (9)                  | $e^{\tan x}+c$ (8)                        | $e^{x^2}+c$ (7)                           |
| $\sin(\ln x)+c$ (12)                          | $\sin(\sin x)+c$ (11)                     | $\sin(2x^2+1)+c$ (10)                     |
| $-2\cos(\sqrt{x})+c$ (15)                     | $-\frac{1}{2}\cos(x^2+1)+c$ (14)          | $\frac{1}{40}\sin(10x^4+1)+c$ (13)        |
| $\frac{1}{2}(\tan x)^2+c$ (18)                | $\frac{1}{2}(\arctan x)^2+c$ (17)         | $\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$ (16)             |
| $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c$ (21)     | $\sqrt{2\sin x}+c$ (20)                   | $2\sqrt{x^2+1}+c$ (19)                    |
| $\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}+c$ (24) | $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$ (23) | $\frac{2}{9}(x^3+4)^{\frac{3}{2}}+c$ (22) |

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 8 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים ..... 69

## אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

---

### שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

(24) מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int x^n e^x dx$  באשר  $n$  טבעי.

(25) חשב את  $\int x^4 e^x dx$ .

(26) מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \cos^n x dx$  באשר  $n$  טבעי.

(27) חשב את  $\int \cos^4 x dx$ .

(28) מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \sin^n x dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(29) חשב את  $\int \sin^4 x dx$ .

(30) מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(31) חשב את  $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$ .

(32) חשב את האינטגרלים  $\int e^{ax} \cos bxdx$ ,  $\int e^{ax} \sin bxdx$ .

## תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left( \ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left( -\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right\} \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left( \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 9 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

73 ..... 1. אינטגרלים בשיטת ההצבה

## אינטגרלים בשיטת ההצבה

### שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left( \frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left( x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left( \frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left( \ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 10 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

- 76 ..... 1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית.
- 78 ..... 2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית.
- 79 ..... 3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית.

## אינטגרלים של פונקציה רציונלית

### שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

## תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left( \frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

## חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

### שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (5)$$

## אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

### שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx \quad (7)$$

## תשובות סופיות

$$-1.5 \ln |1 - \sqrt[3]{x^2}| + c \quad (1)$$

$$6 \left( \frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln |1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left( \frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln |1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln \left( (\sqrt[3]{x} - 0.5)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left( \frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln |1 + e^x| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

## נוסחאות

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 11 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות ..... 81
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות ..... 83
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית ..... 84
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים ..... 85
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות ..... 88

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int \tan x dx = -\ln  \cos x  + c$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln  \cos(ax+b)  + c$
$\int \cot x dx = \ln  \sin x  + c$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln  \sin(ax+b)  + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

זכור כי:

### שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 4x} \quad (2)$$

$$\int \left( \sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 10x} \quad (3)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8)$$

$$\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} \quad (9)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$$

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\frac{3}{4} x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8} x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left( \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(t) dt \quad \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right.$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t) (-dt) \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right.$$

זכור כי :

### שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (3)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (8)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c \quad (2)$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \left( \cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c \quad (4)$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad (5)$$

$$\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c \quad (8)$$

$$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (12)$$

$$-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c \quad (11)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \text{זכור כי:}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right\}$$

### שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left( \frac{2}{3\sqrt{1/3}} \arctan \left( \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}} \right) \right) + c \quad (3)$$

## הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$$

$$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$$

$$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$$

### שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2-1} dx \quad (3)$$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2+2x-3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad (11)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[ \ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} \quad (10)$$

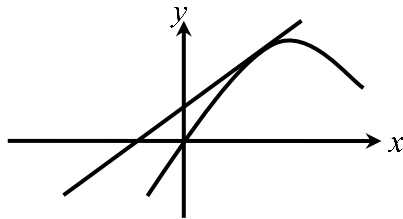
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

## חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2\sin x$ .

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

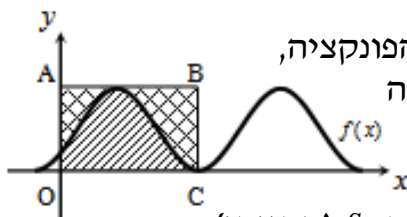


א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ , ברביעים הראשון והשני.

(2) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$ .

בתחום:  $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$ .



מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה,

ומעלים אנך לציר ה- $x$  מנקודת החיתוך הראשונה

של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון,

המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$  (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$  יסומן ב- $S_2$ .

א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס:  $\frac{S_1}{S_2}$ .

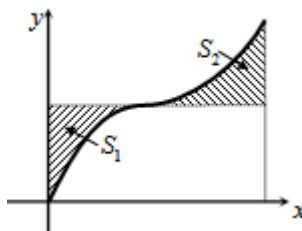
(3) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $y = \sin x + x$ , בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

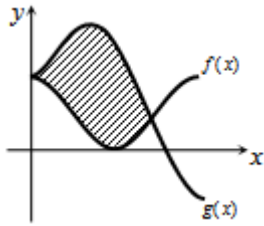
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכח.

ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2\pi$ ,

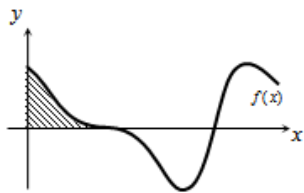
ומעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$  מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

הראה כי השטחים המסומנים בשרטוט,  $S_1$  ו- $S_2$ , שווים.

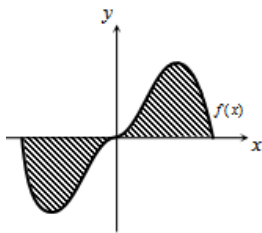




- 4 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \cos^2 x$  ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.  
 השתמש בזהות  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .



- 5 הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$ .  
 א. מצא את שיעורי ה- $x$  של הנקודות המקיימות  $f'(x) = 0$  בתחום  $0 < x < 2\pi$ .  
 ידוע כי הנקודה המקיימת  $f'(x) = 0$ , אשר אינה קיצון, נמצאת על ציר ה- $x$ .  
 ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- 6 נתונה הפונקציה  $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$ .  
 א. הוכח כי נגזרת הפונקציה היא  $y' = x^2 \sin x$ .  
 באיור שלפניך נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 \sin x$  בתחום:  $-\pi \leq x \leq \pi$ .  
 ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.  
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  בתחום הנתון.

- 7 נתונה הפונקציה  $f(x) = a \cos x + b \sin x$ , כאשר  $a, b$  פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{4}$ ,

והיא חיובית בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  הוא  $2\sqrt{2} - 2$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

## תשובות סופיות

1) א.  $y = x + 2$       ב.  $\pi$  יח"ש.

1) א.  $y = 1$       ב.  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$ .

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה  $(\pi, \pi)$  היא נקודת פיתול.

ב.  $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$ .

3) א.  $(0, 1), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$       ב.  $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$ .

4) א.  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$       ב.  $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$       ג.  $\frac{1}{2}$  יח"ש.

5) א. הוכחה      ב. הוכחה      ג.  $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$ .

6)  $b = -2, a = 2$

## נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 12 - האינטגרל המסוים, סכומי רימן

תוכן העניינים

- 92 ..... 1. האינטגרל המסוים
- 94 ..... 2. אי שוויונים עם אינטגרלים
- 95 ..... 3. סכומי רימן

## האינטגרל המסוים

### שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-10 :

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4 + |x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx \quad (10)$$

**(11)** נתונה פונקציה רציפה  $f$ . הוכח:

א. אם  $f$  זוגית, אזי  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

ב. אם  $f$  אי-זוגית, אזי  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (12)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (13)$$

### תשובות סופיות

(1) -6

(2)  $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3)  $-2e^{-1} + 1$

(4)  $\frac{1}{5}$

(5)  $\arctan 6 - \arctan 3$

(6)  $\frac{\pi}{2}$

(7)  $\frac{17}{12}$

(8)  $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(9)  $\frac{\pi^2}{4}$

(10)  $\frac{\pi}{4}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) 0

(13)  $2 \arctan 4$

## אי-שוויונים עם אינטגרלים

הוכח את אי-השוויונים הבאים:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (1)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (2)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (5)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (6)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (7)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (8)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## סכומי רימן

חשב את הגבולות בשאלות 1-6:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 7-10 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכל להיעזר בזהויות הבאות:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+n &= 0.5n(n+1) \\ 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n}{2} \alpha \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (9)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (8)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (7)$$

$$(11) \text{ חשב את הגבול: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$$

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$1 - \cos 1 \quad (2)$$

$$\ln 2 \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad (5)$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\frac{1}{3} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \quad (9)$$

$$2 \quad (10)$$

$$\infty \quad (11)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 13 - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

97	.....	1. חישוב נפח גוף-סיבוב
100	.....	2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב
101	.....	3. חישוב נפח גוף כללי

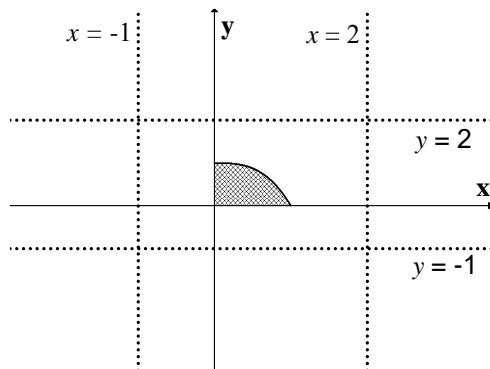
## חישוב נפח גוף-סיבוב

### שאלות

(1) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = 2x - 1$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
 חשב את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:  
 א. שיטת הדיסקות (cavalieri).  
 ב. שיטת הקליפות הגליליות.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = 2x - 1$  מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
 חשב את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:  
 א. שיטת הדיסקות (cavalieri).  
 ב. שיטת הקליפות הגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = 1 - x^3$  והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו.  
 מצא את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות 3-8:



(3) ציר ה- $x$ .

(4) הישר  $y = -1$ .

(5) הישר  $y = 2$ .

(6) ציר ה- $y$ .

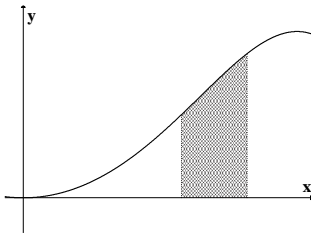
(7) הישר  $x = -1$ .

(8) הישר  $x = 2$ .

(9) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

(10) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

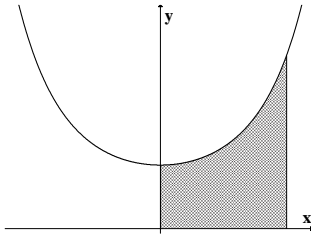
(11) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



(12) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = \sin(x^2)$

והישרים  $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ ,  $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ ,  $y = 0$

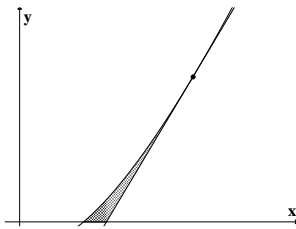
מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
מהו נפח הגוף המתקבל?



(13) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = e^{x^2}$

והישרים  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$

מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
מהו נפח הגוף המתקבל?



(14) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = x \ln x$

המשיק לגרף בנקודה  $(e, e)$  וציר ה- $x$ ,

מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
מהו נפח הגוף המתקבל?

(15) השטח הכלוא בין הגרפים של  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = 2x + 8$ ,  $x = 0$

מסתובב סביב הישר  $x = 4$ .

מצא את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

### תשובות סופיות

$$\frac{64}{15}\pi \quad \text{ב.} \quad \frac{64}{15}\pi \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\frac{8}{3}\pi \quad \text{ב.} \quad \frac{8}{3}\pi \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\frac{9\pi}{14} \quad (3)$$

$$\frac{15\pi}{7} \quad (4)$$

$$\frac{33\pi}{14} \quad (5)$$

$$\frac{3\pi}{5} \quad (6)$$

$$2.1\pi \quad (7)$$

$$\frac{12\pi}{5} \quad (8)$$

$$V = \pi R^2 \cdot H \quad (9)$$

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} \quad (10)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (11)$$

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1) \quad (12)$$

$$\pi(e-1) \quad (13)$$

$$\frac{e^3-4}{54}\pi \quad (14)$$

$$128\pi \quad (15)$$

## חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

### שאלות

- (1) הפונקציה  $y = \sqrt{4-x^2}$ , עבור  $-1 \leq x \leq 1$ , מסתובבת סביב ציר ה- $x$ .  
מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?
- (2) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.
- (3) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.
- (4) הפונקציה  $x = \sqrt{9-y^2}$ , עבור  $-2 \leq y \leq 2$ , מסתובבת סביב ציר ה- $y$ .  
מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

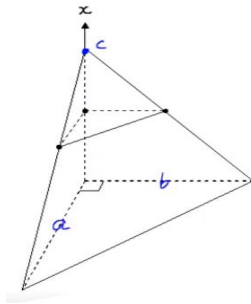
### תשובות סופיות

- (1)  $8\pi$
- (2)  $S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$
- (3)  $S = 4\pi R^2$
- (4)  $24\pi$

## חישוב נפח גוף כללי

## שאלות

(1) מצא נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה  $h$  ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו  $a$ .



(2) חשב את נפחה של פירמידה, שבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).

## תשובות סופיות

$$V = \frac{a^2 h}{3} \quad (1)$$

$$\frac{abc}{6} \quad (2)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 14 - המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל) ..... 102

## המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

### שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכח כי אם  $f(x)$  רציפה וגם  $a(x)$  ו- $b(x)$  גזירות, אזי:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזור את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשב את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

(10) חקור את הפונקציה  $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$ , לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

### תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3)  $I'(x) = e^{-x^2}$

(4)  $I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2$

(5)  $I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1)\ln(x^3 + x)$

(6)  $I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

(7)  $\frac{1}{2}$

(8)  $\frac{2}{3}$

(9)  $4e^{16}$

(10) תחום הגדרה: כל  $x$ .נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל  $x$ .נקודות פיתול:  $x = -1, 1, -\frac{3}{7}$ .תחומי קמירות:  $x > 1$ ,  $-1 < x < -\frac{3}{7}$ .תחומי קעירות:  $-1 < x < 1$ ,  $-\frac{3}{7} < x < 1$ .

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 15 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

104	1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון
106	2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני
107	3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי
108	4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים
109	5. מבחני השוואה
111	6. התכנסות בהחלט
112	7. מבחן דיריכלה
113	8. התכנסות בתנאי

## אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

### שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-5:

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

$$(6) \text{ הוכח כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ עבור } |\alpha| < 1.$$

$$(7) \text{ הוכח כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \text{ עבור } |\alpha| > 1.$$

**תשובות סופיות**

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2e} \quad (3)$$

(4) מתבדר :  $\infty$ .

$$\frac{5}{4e^2} \quad (5)$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

### שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

### תשובות סופיות

(1) מתבדר:  $\infty$ .

(2) מתבדר:  $\infty$ .

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

1) חשב את האינטגרל הבא:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ .

תשובה

1) מתבדר:  $\infty$ .

## שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

### שאלות

(1) חשב את השטח בין גרף הפונקציה  $y = e^{2x}$ , הישר  $x = 1$  וציר ה- $x$ , עבור  $x \leq 1$ .

(2) חשב את השטח בין גרף הפונקציה  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , ציר ה- $y$ , ציר ה- $x$  והישר  $x = 5$ .

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$ .

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום  $0 \leq x \leq k$ , שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום  $x \geq k$ . מצא את הקבוע  $k$ .

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

## מבחני השוואה

### שאלות

בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1 + x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

**תשובות סופיות**

- |             |             |
|-------------|-------------|
| (1) מתכנס.  | (2) מתבדר.  |
| (3) מתכנס.  | (4) מתכנס.  |
| (5) מתבדר.  | (6) מתבדר.  |
| (7) מתכנס.  | (8) מתכנס.  |
| (9) מתבדר.  | (10) מתכנס. |
| (11) מתכנס. | (12) מתבדר. |
| (13) מתכנס. | (14) מתבדר. |
| (15) מתכנס. | (16) מתכנס. |

## התכנסות בהחלט

### שאלות

בשאלות 1-3 בדוק אם האינטגרלים מתכנסים:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

$$(4) \text{ הוכח: אם } \int_a^{\infty} |f(x)| dx \text{ מתכנס, אז } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס.}$$

### תשובות סופיות

- (1) מתכנס.
- (2) מתכנס.
- (3) מתכנס.
- (4) שאלת הוכחה.

## מבחן דיריכלה

### שאלות

הוכח כי האינטגרלים הבאים מתכנסים :

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## התכנסות בתנאי

### שאלות

קבע האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

$$(1) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$$

$$\text{ב.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx$$

$$(4) \quad \int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$(5) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx$$

### תשובות סופיות

- (1) א. מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 2$  ומתבדר עבור  $p \geq 2$ .  
 ב. מתכנס בהחלט.  
 ג. מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 2$  ומתבדר עבור  $p \geq 2$ .
- (2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.
- (3) א. מתכנס בתנאי עבור  $0 < p \leq 1$ , מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 2$ ,  
 מתבדר עבור  $p \geq 2$ .  
 ב. מתכנס בתנאי עבור  $-3 < p \leq 1$ , מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 5$ ,  
 מתבדר עבור  $p \geq 5$ .
- (4) מתכנס בתנאי.
- (5) מתכנס בתנאי.

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 16 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

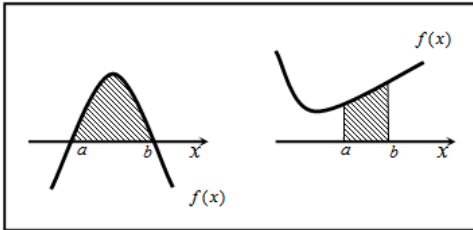
תוכן העניינים

115	.....	1. חישוב שטחים
135	.....	2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y
136	.....	3. אורך קשת

## חישוב שטחים

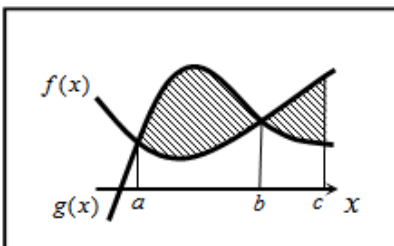
### חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$  :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

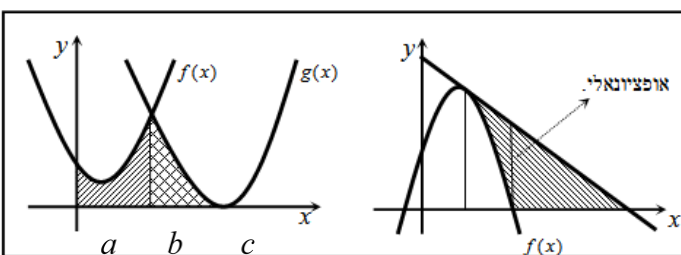


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

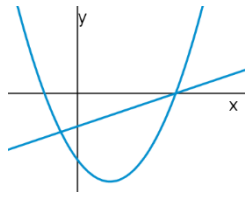
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$  :

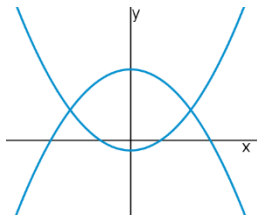


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

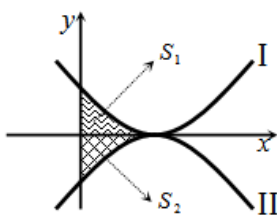
## שאלות



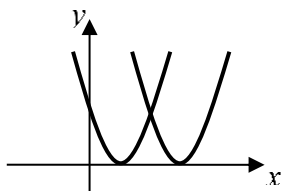
- (1) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 4x - 12$  ו-  $g(x) = x - 6$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .



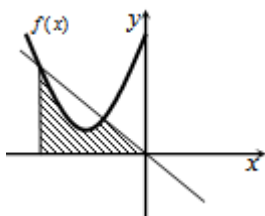
- (2) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 1$  ,  $g(x) = 7 - x^2$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .



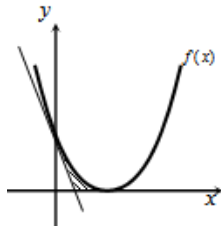
- (3) נתונות הפונקציות  $f(x) = (x-2)^2$  ו-  $g(x) = -(x-2)^2$ ,  
 כמתואר באיור.  
 א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.  
 ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים  
 ב-  $S_1$  ו-  $S_2$ , כמתואר באיור.  
 הראה כי השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$  שווים זה לזה.



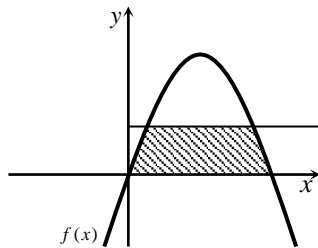
- (4) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  ,  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$ .



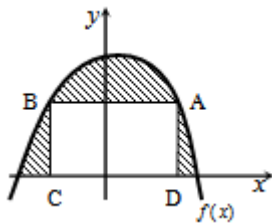
- (5) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 + 6x + 12$ .  
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה  
 בנקודה שבה  $x = -4$ , כמתואר באיור.  
 א. מצא את משוואת הישר.  
 ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.  
 ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x = -4$ .



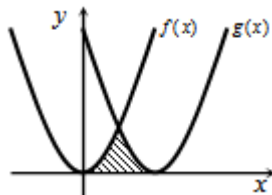
- 6) נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-2)^2$ .  
 בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  מעבירים משיק.  
 א. מצא את משוואת המשיק.  
 ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .  
 ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



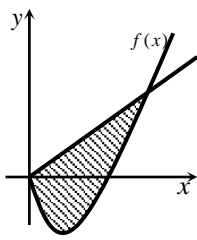
- 7) נתונה הפונקציה  $f(x) = kx - x^2$ .  
 הישר  $y = 9$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.  
 ידוע כי שיעור ה- $x$  של אחת מנקודות אלה הוא  $x = 9$ .  
 א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .  
 ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.  
 ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



- 8) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ , המתוארת באיור שלפניך, היא  $f'(x) = 3 - 2x$ . ישר  $AB$ , שמשוואתו  $y = 6$ , חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות  $A$  ו- $B$ . מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ , כך שנוצר מלבן  $ABCD$ . ידוע ששיעור ה- $x$  של הנקודה  $A$  הוא  $x = 4$ .  
 א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



- 9) באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה  $f(x) = x^2$  את גרף הפונקציה  $g(x)$ , בנקודה שבה  $x = 2$ . הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  היא  $g'(x) = 2x - 8$ .  
 א. מצא את הפונקציה  $g(x)$ .  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



10 באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  והישר  $y = 2x$ .

נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = 2x - 6$ ,

וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

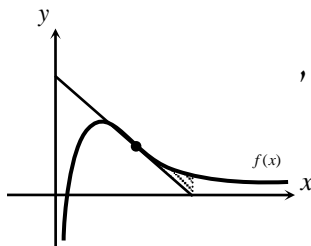
בנקודה שבה ערך ה- $y$  הוא  $y = 16$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

11 ענה על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ ,

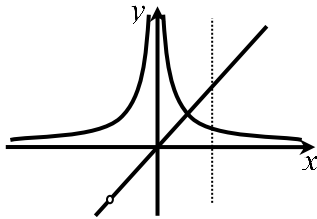
מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף א'.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- $x$ ,

היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .



12 נתונות שתי פונקציות  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר  $x = 2$  וציר ה- $x$ .

13 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות

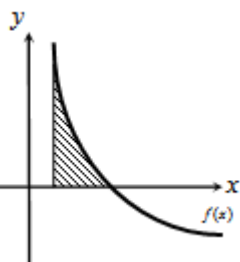
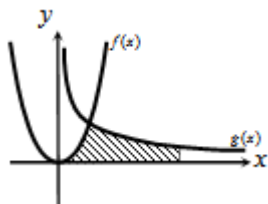
$f(x) = 2x^2$  ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$  (קבוע,  $a > 0$ ), בתחום  $x > 0$ .

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,

בנקודה הנמצאת על הישר  $y = 4x$ .

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת  $a$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר  $x = 4$ .



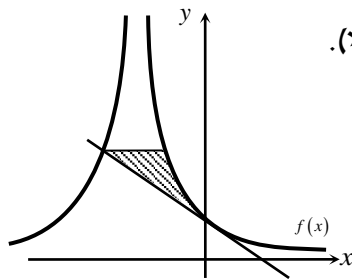
14 גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$  (קבוע  $a$ )

חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $(6, 0)$ .

א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

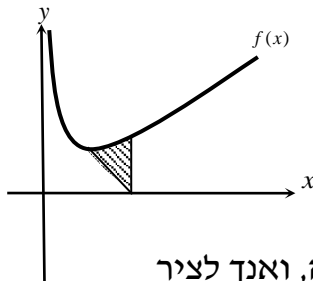
ציר ה- $x$  והישר  $x = 2$ .



15 נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$  (פרמטר חיובי).

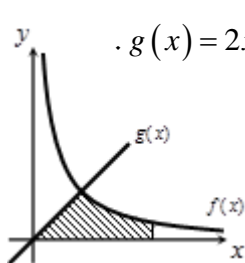
ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ , הוא  $-\frac{1}{9}$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $A$ .  
 ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ .  
 ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -4.5$ .  
 ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.  
 ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).



16 באיור שלפניך נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$ .

- א. מצא את נקודת המינימום שלה.  
 ב. מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה  $(2, 0)$ , שעל ציר ה- $x$ .  
 מצא את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- $x$ , היוצא מהנקודה  $(2, 0)$  עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

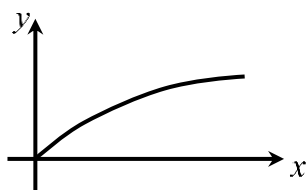


17 באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$  ו- $g(x) = 2x - 1$ .

- א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.  
 ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר  $x = 9$ .

18 נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- $y$ .



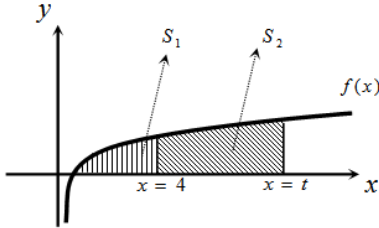
19 נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר  $x = \sqrt{3}$ .

**(20)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

מעבירים שני אנכים לציר ה- $x$ ,  $x=4$  ו- $x=t$  (כאשר  $t > 4$ ).  
 נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  ב- $S_1$ ,  
 ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנכים ב- $S_2$ .

ידוע כי  $8S_1 = S_2$ .  
 מצא את  $t$ .



**(21)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$ .

א. ענה על הסעיפים הבאים:

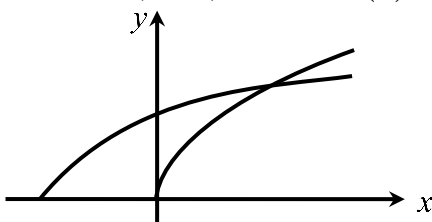
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא  $m = \frac{17}{16}$ .

מצא את נקודת ההשקה.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  ואנך לציר ה- $x$  מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

**(22)** נתונות שתי פונקציות  $f(x) = \sqrt{x+b}$ ,  $g(x) = \sqrt{2x}$ , כאשר  $(b > 0)$ .



גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- $x$  הוא  $\frac{2}{3}$  יחידות שטח.

מצא את ערכו של הפרמטר  $b$ .

**(23)** באיור שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = x^2$  ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$ ,

ברביע הראשון.

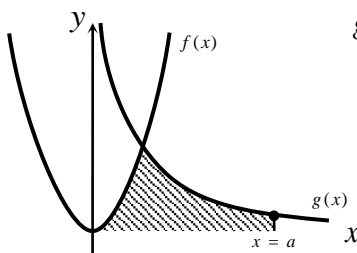
מעבירים ישר  $x=a$ , החותך את גרף הפונקציה  $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- $x$  והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $\frac{1}{3}85$ .

מצא את  $a$ .



**(24)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$  ו-  $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$ .

מעבירים שני ישרים  $x = k$  ו-  $x = t$ , אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

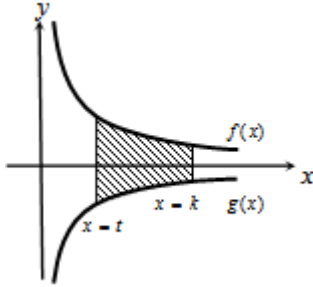
ידוע כי  $AB = 2CD$ .

א. הראה כי  $k = 4t$ .

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות

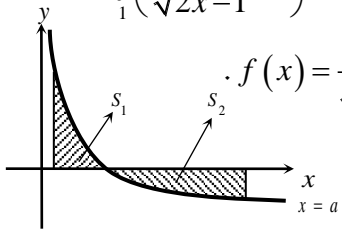
לבין הישרים  $x = k$  ו-  $x = t$ , הוא  $S = 12$ .

מצא את  $t$ .



**(25)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא עבור איזה ערך של  $a$ ,  $(a > 1)$  יתקיים  $\int_1^a \left( \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$ .



ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$ .

מעבירים שני אנכים לציר ה- $x$ ,  $x = 1$  ו-  $x = 13$ ,

כך שנוצרים השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ .

מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

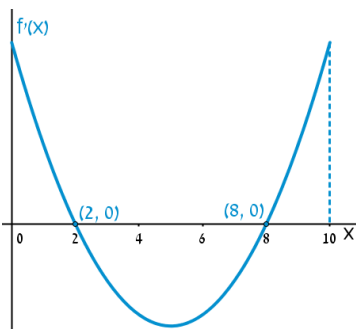
ג. ענה על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- $x$  והאנך  $x = 1$ , כלומר את  $S_1$ .

2. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח  $S_2$ .

נמק את טענתך.



**(26)** הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 10$ .

בציור מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$ .

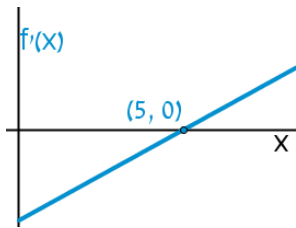
א. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

אם  $f(5) = 0$ ,  $f(0) = -4$ ,  $f(2) = 6$

וכן  $f(10) > 0$ .

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה  $x = 2$ .



**(27)** לפניך גרף הפונקציה  $f'(x)$ , אשר חותך את

ציר ה- $x$  בנקודה אחת בלבד,  $(5, 0)$ .

א. מצא את התחומים שבהם  $f'(x)$  חיובית,

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי שיעור ה- $y$

שלה הוא  $y = -2$ .

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך

את ציר ה- $y$  כאשר  $y = 8$ .

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים.

**(28)** באיור שלפניך מתוארת הנגזרת  $f'(x)$ .

א. האם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודות קיצון? נמק.

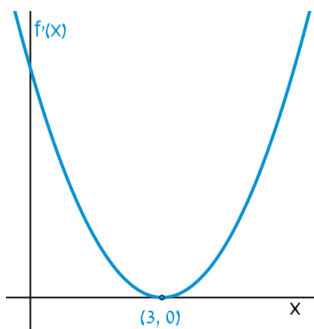
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

אם ידוע כי  $f(3) = 4$ , וכי היא חותכת את

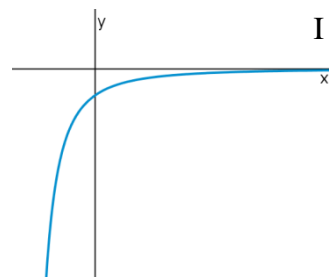
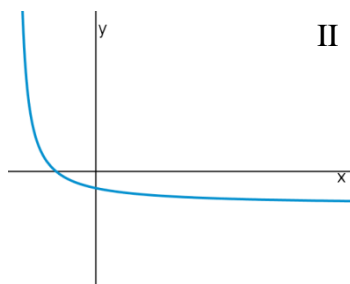
ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -5$ .

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.



**(29)** באיורים שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$ :

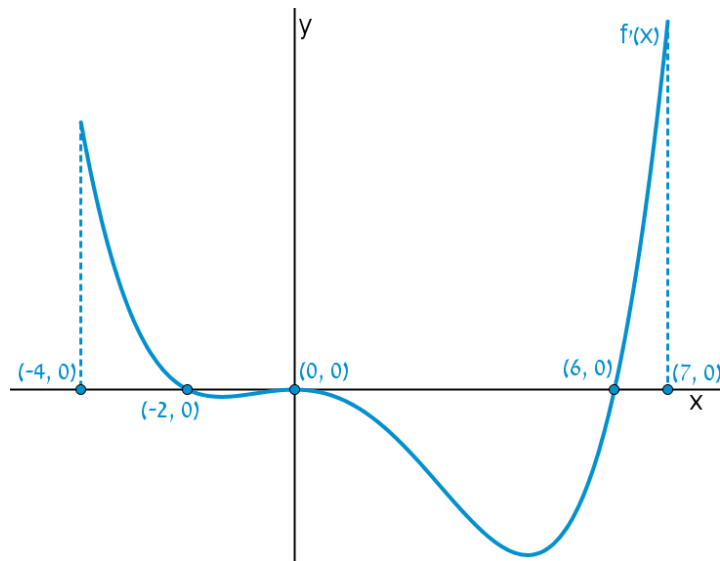


א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.

ב. נתון  $f(10) = -3$ , וכי  $f(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -2$ .

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$ , הצירים והישר  $x = 10$ ?

30 נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$  :

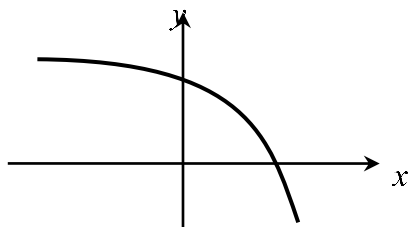


- א. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 7$ ,  
 לפי הנתונים  $f(0) = -2$ ,  $f(-2) = 7.6$  ו-  $f(6) = -606.8$ .
- ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע השלישי.
- ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע הרביעי.

## פונקציות מעריכיות

## אינטגרלים מייזים של פונקציות מעריכיות

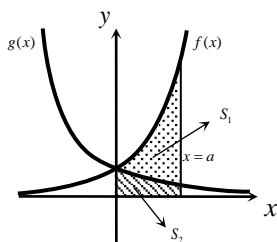
אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



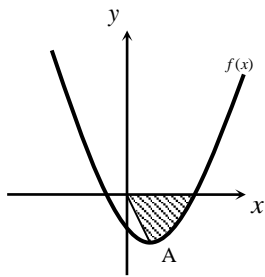
- (31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 5 - e^x$ .  
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו  $-e$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין  
 הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .  
 ניתן להשאיר  $e$  ו- $\ln$  בתשובה.

- (32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{bx}$ , כאשר  $b > 0$ .  
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים  
 וציר ה- $y$  הוא  $\frac{e-2}{4}$ .  
 מצא את ערכו של הפרמטר  $b$ .

- (33)** נתונות הפונקציות  $f(x) = e^{-x}$  ו- $g(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ .  
 מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  ברביע הראשון הורידו אנך לשני  
 הצירים. המשך האנך לציר ה- $y$  חותך את הפונקציה  $f(x)$ ,  
 ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- $x$ , כך שנוצר מלבן.  
 הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא  $\frac{3}{e}$ .

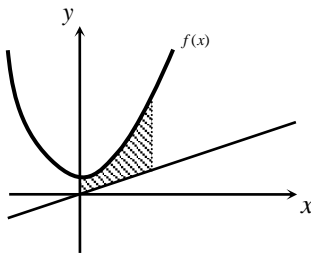


- (34)** באיור שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציות  
 $f(x) = e^{2x}$  ו- $g(x) = e^{-2x}$ .  
 מעבירים אנך לציר ה- $x$  את הישר  $x = a$ ,  
 כאשר  $a > 0$ , כמתואר באיור.  
 אנך זה יוצר את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .  
 ידוע כי השטח  $S_1$  גדול פי 3 מהשטח  $S_2$ .  
 מצא את  $a$ .



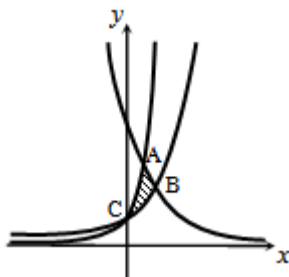
**(35)** נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$ .

- הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.  
 א. מצא את שיעורי הנקודה A.  
 מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.  
 ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.  
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 1.7$ .



**(36)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$ .

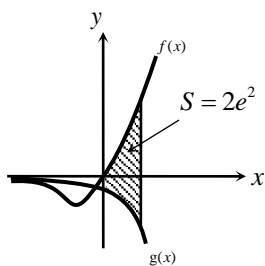
- ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה  $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$ .  
 א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.  
 ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$ , והישר  $y = 0.1x$ .  
 חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- $y$  והאנך  $x = 2$ .



**(37)** באיור שלפניך מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$1. f(x) = 2^x \quad 2. g(x) = 4^x \quad 3. h(x) = 2^{4-2x}$$

- א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.  
 ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).  
 ג. חשב את השטח המסומן באיור.



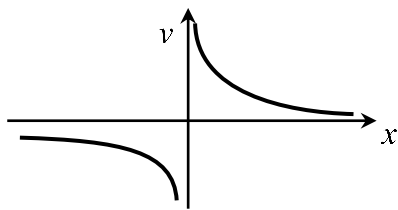
**(38)** ענה על הסעיפים הבאים:

- א. גזור את הפונקציה  $y = e^x(x-1)$ .  
 ב. באיור שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = xe^x - 1$  ו- $g(x) = -e^x$ .  
 מעבירים ישר  $x = a$ , כאשר  $a > 0$ , החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$  והישר (מקווקו).  
 ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ .  
 מצא את  $a$ .

## פונקציות לוגריתמיות

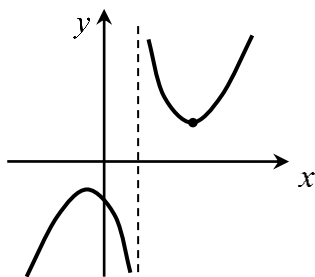
## אינטגרלים מייזים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + c$



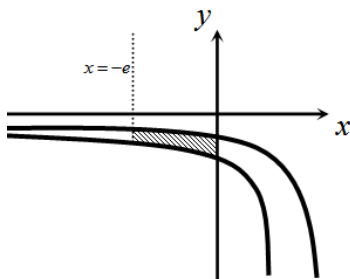
39) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x = -1$  ו- $x = -4$  וציר ה- $x$ . ניתן להשאיר  $\ln$  בתשובה.



40) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$ , ואנך לציר ה- $x$  העובר בנקודת המינימום שלה. אפשר להשאיר ביטוי עם  $\ln$  בתשובה.

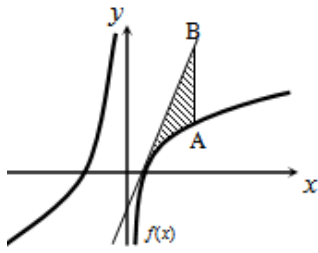


41) באיור שלפניך נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ , בתחום  $x < 0$ .

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה  $x = 3$ .

- מצא את  $a$  וכתוב את שתי הפונקציות.
- חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$  והישר  $x = -e$ .

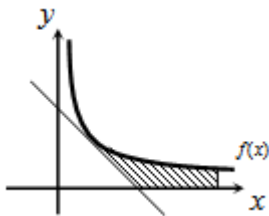


**(42)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$ .

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא  $y = 18x - 9$ .  
 א. מצא את  $a$  ו- $b$  וכתוב את הפונקציה.

מעבירים ישר המקביל לציר ה- $y$ , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

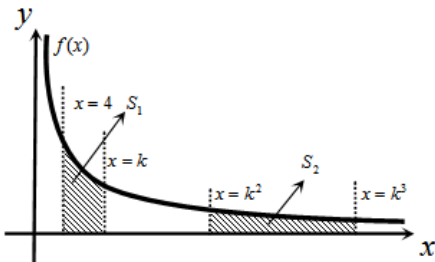
- ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



**(43)** נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$  היא  $y = 4 - x$ .  
 א. מצא את  $f(x)$ .

- ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  ומשיק, בתחום  $x > 0$ .  
 חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- $x$  והישר  $x = e^2$ .



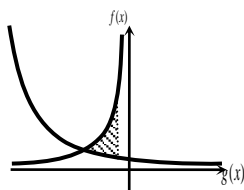
**(44)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad x > 0$$

מעבירים את הישרים  $x = k^2$ ,  $x = k^3$ ,  $x = k$  ו- $x = 4$  (כמתואר באיור) ( $x > 4$ ).

א. הבע באמצעות  $k$  את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .

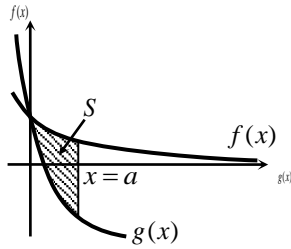
- ב. הראה כי ההפרש  $S_2 - S_1$  אינו תלוי ב- $k$ , וחשב את ערכו.  
 ג. נתון כי השטח  $S_2$  גדול פי 3 מהשטח  $S_1$ . מצא את  $k$ .



**(45)** נתונות הפונקציות  $f(x) = -\frac{4}{x}$  ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ .

גרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 0.4$ .  
 א. מצא את הפונקציה  $g(x)$ .

- ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.  
 ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר  $x = -1$ .



**(46)** באיור שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1) \text{ ו- } g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$$

בתחום  $x \geq 0$ .

א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$ .

ב. מעבירים ישר  $x = a$  ( $a > 1$ ), המאונך

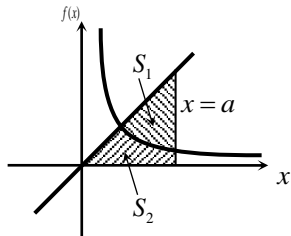
לציר ה- $x$ , חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח  $S$  (ראה איור).

מצא את ערכו של  $a$ , עבורו מתקיים  $S = 4$ .

**(47)** באיור שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{3x-1}$  והישר  $y = x$ .

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



מעבירים אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$ , הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים

$S_1$  ו- $S_2$ , המתוארים באיור.

ב. מצא את הערך של  $a$ , עבורו השטח  $S_2$

$$\text{יהיה שווה ל- } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7.$$

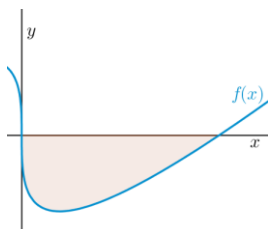
ג. עבור ערך ה- $a$  שמצאת בסעיף הקודם, חשב את יחס השטחים  $\frac{S_1}{S_2}$ .

## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מייזים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

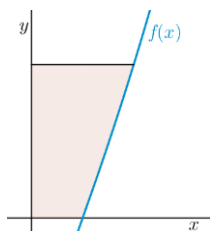
אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה  $\frac{m}{n} \neq -1$ .



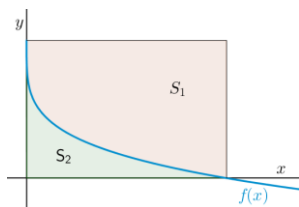
48) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה  $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$ .

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



49) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$ .

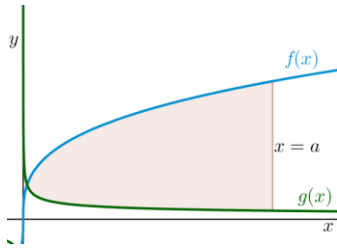
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ג. מעבירים אנך לציר ה- $y$  מהנקודה  $(4, 6)$ .  
 חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.



50) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$ .

- נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן, ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- $S_1$ , ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- $S_2$ .

מצא את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .



**51** באיור שלפניך מתוארים גרפים של הפונקציות

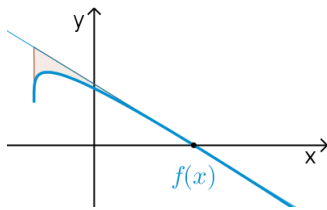
$$f(x) = 4\sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום  $x > 0$ .

ב. מעבירים אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$  (פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך,

הוא  $42\frac{3}{16}$  יח"ש.

מצא את  $a$ .



**52** נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$ , פרמטר  $a$ .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2$ .

א. מצא את הפרמטר  $a$  וכתוב את הפונקציה.

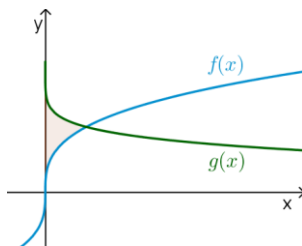
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.

חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק.



**53** באיור שלפניך נתונים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$$

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .

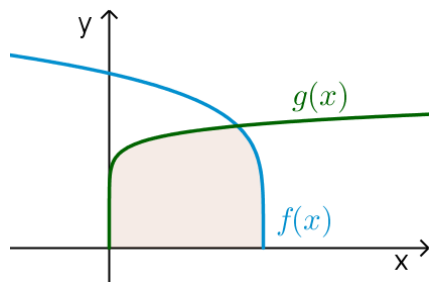
**54** הנגזרת של  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$ .

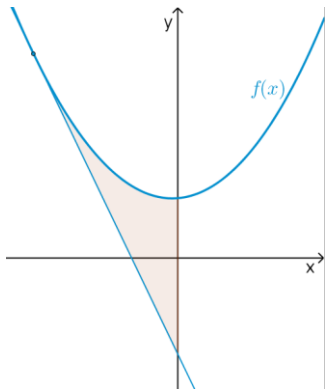
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 1.2$ .

א. מצא את  $f(x)$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , גרף הפונקציה

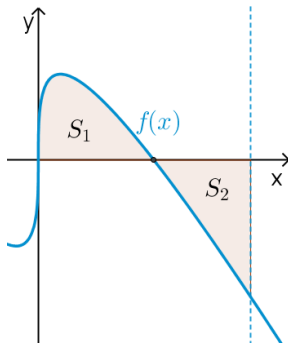
$g(x) = \sqrt[10]{x}$  וציר ה- $x$ .





55) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$ .

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -3$ .
- ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .



56) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$ .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  יסומן ב- $S_1$ . מעבירים ישר  $x = k$ , אשר יוצר את השטח  $S_2$ , כמתואר באיור. מצא את  $k$ , אם ידוע כי  $S_1 = S_2$ .

## תשובות סופיות

- (1)  $57\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (2)  $21\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (3) א.  $f(x) = I$ ,  $g(x) = II$  ב. שאלת הוכחה.
- (4)  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (5) א.  $y = -x$  ב.  $(-3, 3)$  ג.  $7\frac{5}{6}$  יח"ש.
- (6) א.  $y = -4x + 4$  ב.  $(1, 0)$  ג.  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (7) א.  $k = 10$  ב.  $(1, 9)$  ג.  $81\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (8) א.  $f(x) = -x^2 + 3x + 10$  ב.  $27\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (9) א.  $g(x) = (x-4)^2$  ב.  $5\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (10) א.  $f(x) = x^2 - 6x$  ב.  $(0, 0)$  ג.  $85\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (11) א.  $y = -x + 2$  ב.  $\frac{1}{8}$  יח"ש.
- (12) 1 יח"ש.
- (13) א.  $a = 32$ ,  $(2, 8)$  ב.  $13\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (14) א.  $a = 36$ ,  $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}$  ב. 8 יח"ש.
- (15) א.  $A = 6$  ב.  $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$  ג. הוכחה. ד.  $(-1.5, \frac{2}{3})$  ה.  $\frac{5}{8}$  יח"ש.
- (16) א.  $\min(0.5, 1.5)$  ב. 1.75 יח"ש.
- (17) א.  $(4, 8)$  ב. 48 יח"ש.
- (18) 2.26 יח"ש.
- (19) 0.5 יח"ש.
- (20)  $t = 16$
- (21) א. i.  $x > 0$  ii.  $(4, 0)$  iii.  $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$  ב.  $(16, 14)$  ג. 88 יח"ש.
- (22)  $b = 2$
- (23)  $a = 9$

- (24) א. שאלת הוכחה. ב.  $t=1$ .
- (25) א.  $a=13$ . ב.  $(5,0)$ . ג. i.  $S_1=2$ . ii.  $S_2=|-S_1|=2$ .
- (26) ב. 10 יח"ש.
- (27) א. חיובית:  $x>5$ , שלילית:  $x<5$ . ב. עולה:  $x>5$ , יורדת:  $x<5$ . ג.  $\min(5,-2)$ . ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (28) א. לא. הנקודה  $(3,0)$  היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש. ד. 1 יח"ש.
- (29) א.  $f(x): \mathbb{R}, f'(x): \mathbb{I}$ . ב. 1 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (31)  $S=0.192$  יח"ש.
- (32)  $b=2$ .
- (33) שאלת הוכחה.
- (34)  $a=\ln 2$ .
- (35) א.  $A(1,-e-2)$ . ב.  $y=-(e+2)x$ . ג.  $S=4.744$  יח"ש.
- (36) א.  $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}, a=-2$ . ב. 1.52.
- (37) א.  $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$ . ב.  $S=1.03$  יח"ש.
- (38) א.  $y'=xe^x$ . ב.  $a=2$ .
- (39)  $S=\ln 4$  יח"ש.
- (40)  $S=4\ln 2-2$  יח"ש.
- (41) א.  $f(x)=\frac{2}{x-1}, g(x)=\frac{1}{x-2}, a=2$ . ב.  $S=1.76$  יח"ש.
- (42) א.  $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}, a=2, b=-4$ . ב.  $x=2$ . ג.  $S=6+\ln 256 \approx 11.54$  יח"ש.
- (43) א.  $f(x)=\frac{4}{x}$ . ב.  $S=6-4\ln 2$  יח"ש.
- (44) א.  $S_1=2\ln k - \ln 16, S_2=2\ln k$ . ב.  $S_2-S_1=\ln 16$ . ג.  $k=8$ .
- (45) א.  $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ . ב.  $(-2,2)$ . ג.  $S=\ln 5\frac{1}{3} \approx 1.674$  יח"ש.
- (46) ב.  $a=2$ .
- (47) א.  $(1,1)$ . ב.  $a=5$ . ג.  $\frac{S_1}{S_2}=5.955$ .
- (48) א.  $(0,0), (8,0)$ . ב.  $S=16$  יח"ש.
- (49) א.  $x>0$ . ב.  $(2,0)$ . ג.  $S=18.149$  יח"ש.

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a = 8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2\right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$(-1.2, 1.2) \quad \text{ג.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, \quad a = 1 \quad \text{א.} \quad (52)$$

$$. \text{ה.} \quad S = 4.56 \quad \text{יח"ש.} \quad y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ד.} \quad (53)$$

$$. \text{ב.} \quad S = \frac{11}{28} \quad \text{יח"ש.} \quad (1, 1) \quad \text{א.} \quad (54)$$

$$. \text{ב.} \quad S = 1 \frac{5}{66} \quad \text{יח"ש.} \quad f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad (55)$$

$$. \text{ב.} \quad S = 4.56 \quad \text{יח"ש.} \quad y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad (56)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296.. \quad \text{ג.} \quad (0, 0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \text{כל } x \quad (57)$$

## חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

### שאלות

(1) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה  $y^2 = -x$  והישר  $y = x + 6$ .

(2) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה  $x = y^2 + 2$  והישר  $y = x - 8$ .

### תשובות סופיות

(1)  $20\frac{5}{6}$

(2)  $20\frac{5}{6}$

## אורך קשת

### שאלות

בשאלות הבאות חשב את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad (2) \qquad (1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4) \qquad (1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6) \qquad (0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad (8) \qquad (0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = x^2 \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \{82^{1.5} - 1\} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17}+4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5}+2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad (9)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 17 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

137	1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים
140	2. מבחן ההתבדרות של טורים
141	3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים
143	4. מבחני התכנסות לטורים כלליים
145	5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי
146	6. תרגילי תיאוריה

## טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

### שאלות

#### טור גיאומטרי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

#### טור טלסקופי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

#### טור הרמוני מוכלל

12) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ו.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{ד.}$$

**תכונות אלגבריות של טורים**

13) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$  . ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$  . ג.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשב את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$ , אם ידוע כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

15) מצא את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא  $0.123123123\dots + 0.141414\dots$ .

## תשובות סופיות

- (1) מתכנס ל-  $\frac{11}{14}$
- (2) מתכנס ל-  $\frac{1}{3}$
- (3) מתבדר.
- (4) מתכנס ל-  $-\frac{64}{7}$
- (5) מתכנס ל-  $\frac{11}{12}$
- (6) מתכנס ל- 8.
- (7) מתכנס ל-  $\frac{1}{2}$
- (8) מתכנס ל-  $\frac{1}{12}$
- (9) מתבדר.
- (10)  $S = \frac{1}{\ln 2}$
- (11)  $\frac{1}{12}$
- (12) א. מתכנס.  
ד. מתבדר.
- (13) א. מתכנס.  
ב. מתבדר.
- (14)  $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$
- (15)  $\frac{323}{1221}$
- ג. מתבדר.  
ו. מתכנס.  
ג. מתבדר.
- ב. מתבדר.  
ה. מתכנס.  
ב. מתבדר.

## מבחן ההתבדרות של טורים

### שאלות

1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ ג.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ב.	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ א.
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ ו.	$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ה.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}$ ד.

### תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

## מבחני התכנסות לטורים חיוביים

### שאלות

#### מבחן האינטגרל

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (5) \quad (p \leq 1) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (4) \quad (p > 1)$$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בדוק את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ .

ב. מצא את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$ .

#### מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (15) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (14) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן ראָפֶה

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

### תשובות סופיות

- |               |             |             |
|---------------|-------------|-------------|
| (1) מתבדר.    | (2) מתבדר.  | (3) מתכנס.  |
| (4) מתכנס.    | (5) מתבדר.  |             |
| (6) א. מתכנס. | ב. 0        |             |
| (7) מתכנס.    | (8) מתבדר.  | (9) מתכנס.  |
| (10) מתבדר.   | (11) מתכנס. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר.   | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתבדר.   | (17) מתכנס. | (18) מתכנס. |
| (19) מתכנס.   | (20) מתכנס. | (21) מתכנס. |
| (22) מתכנס.   | (23) מתכנס. | (24) מתכנס. |
| (25) מתבדר.   | (26) מתבדר. |             |

## מבחני התכנסות לטורים כלליים

### מבחן לייבניץ

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

### מבחן זיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבע אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{הוכח שהטורים } \sum \sin n\theta, \sum \cos n\theta, \text{ כאשר } \theta \neq 2\pi k, \text{ חסומים.}$$

(7) הוכח את התכנסות הטורים הבאים :

$$. (\theta \neq 2\pi k) \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}$$

$$(8) \quad \text{בדוק התכנסות הטור } \sum \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$(9) \quad \text{הוכח שאם הסדרה } b_n \text{ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור } \sum b_n \sin n \text{ מתכנס.}$$

(10) ענה על שני הסעיפים הבאים :

$$א. \text{ הוכח שהטור } \sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\bmod 7) \text{ הוא טור חסום.}$$

$$ב. \text{ בדוק את התכנסות הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}.$$

**מבחן אבל**

בשאלות הבאות קבע אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}} \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

**תשובות סופיות**

- |                |             |             |
|----------------|-------------|-------------|
| (1) מתכנס.     | (2) מתכנס.  | (3) מתכנס.  |
| (4) מתכנס.     | (5) מתכנס.  | (6) הוכחה.  |
| (7) הוכחה.     | (8) מתבדר.  | (9) הוכחה.  |
| (10) א. הוכחה. | ב. מתכנס.   | (11) מתכנס. |
| (12) מתכנס.    | (13) מתכנס. | (14) מתכנס. |

## התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

### שאלות

בשאלות הבאות, קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

- |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|
| (1) מתבדר.       | (2) מתכנס בהחלט. | (3) מתכנס בתנאי. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |

## תרגילי תיאוריה

(1) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.

א. אם  $\sum a_n$  מתכנס ו- $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

ב. אם  $\sum a_n$  מתבדר ו- $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

(2) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.

א. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס, אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

ב. אם  $\sum a_n$  חיובי ומתכנס, אז  $\sum \frac{1}{a_n}$  מתבדר.

ג. אם  $\sum a_n$  מתכנס, אז  $\sum a_n^2$  מתכנס.

(3) הוכח: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$  מתבדר.

(4) הוכח: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ומתכנס, אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  מתכנס.

(5) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכח כי  $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$  מתכנס.

(6) א. נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .

הוכח כי  $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס  $\sum a_n$ .

הוכח ש- $\sum |a_n|$  מתבדר אם  $\sum a_n^2$  מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

(7) תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכח כי  $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$  מתכנס.

(8)  $\sum a_n$  הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכח כי  $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$  מתכנס.

(9) הוכח או הפרך:

אם הסדרה  $(a_n)_{n \geq 1}$  מקיימת  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$  לכל  $n$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  מתכנס.

(10) נניח כי  $a_n \geq 0$ .

הוכח כי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  מתכנס.

(11) הוכח או הפרך:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס והסדרה  $b_n$  חסומה, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  מתכנס.

(12) הוכח: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$  מתבדר.

(13) הוכח או הפרך:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .

הוכח או הפרך:

א. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכח כי  $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$  מתכנס.

(16) נתונים שני טורים חיוביים  $\sum a_n, \sum b_n$ .

א. נתון שהטורים  $\sum a_n^2, \sum b_n^2$  מתכנסים.

1. הוכח כי  $\sum a_n b_n$  מתכנס.

2. הוכח כי  $\sum (a_n + b_n)^2$  מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכח כי  $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  מתכנס.

(17) הוכח :

א. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$ , אז הטור מתבדר.

ב. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\sum (na_n - k)$  מתכנס (כאשר  $k \neq 0$ ),

אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר.

(18) הוכח כי אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$ , אז הטור מתכנס.

(19) נתון  $a_n \geq 0$  לכל  $n$ .

א. נתון כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$ .

הוכח כי  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  מתכנס.

ב. נתון כי  $\sum (n^3 a_n^2 - k)$  מתכנס (כאשר  $k > 0$ ).

הוכח כי  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  מתכנס.

(20) הסדרה  $(a_n)$  מוגדרת על ידי  $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ ,  $a_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_1 = \frac{21}{20}$ , כאשר  $(n \geq 1)$ .

האם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס?

$$(21) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכח כי הטור מתכנס.

$$(22) \text{ נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n. \text{ הוכח כי } \sum n(a_n - a_{n+1}) \text{ מתכנס.}$$

$$(23) \text{ נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1$$

$$\text{האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$(24) \text{ נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיימת } a_n > 0, a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1} \text{ לכל } n \text{ טבעי. הוכח כי } \sum a_n \text{ מתבדר.}$$

$$(25) (a_n) \text{ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.}$$

$$\text{הוכח כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

$$(26) \text{ נתון טור חיובי } \sum a_n. \text{ הוכח או הפרך:}$$

- א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.  
 ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

$$(27) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

א. הוכח כי הסדרה  $a_n$  מתכנסת אם ורק אם  $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$  מתכנס.

ב. בדוק האם הסדרה  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$  מתכנסת.

ג. בדוק האם הסדרה  $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמד את הנושא טורי מקלורן עם שארית לגראנז'.

**(28)** פונקציה  $f$  מוגדרת לכל  $x$ , גזירה ב-0 ומקיימת  $f(0) = 0$ . הוכח כי אם  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט, אז  $\sum f(a_n)$  מתכנס בהחלט.

**(29)** נתון פולינום  $p(x)$ .

$\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

הוכח כי  $\sum P(a_n)$  מתכנס  $\Leftrightarrow p(0) = 0$ .

**(30)** יהיו  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  טורים חיוביים.

נתון כי:

(1) הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס. (2) לכל  $n$  טבעי  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ .

הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 18 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

151	1. טור טיילור וטור מקלורן
153	2. טור טיילור סביב $X=X_0$
154	3. חישוב סכום של טור
155	4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן
156	5. חישובים מקורבים של פונקציות
158	6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים
159	7. השארית של לגראנז'

## טור טיילור וטור מקלורן

### שאלות

מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב  $x = 0$  (טור מקלורן) בשאלות 1-24 :

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, עליך להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.  
 לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24, עליך להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.  
 תוכל להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח שבעמוד האחרון.

מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות בשאלות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27) \quad f(x) = \tan x \quad (26) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

## תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$(-1 < x < 1)$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

## טור טיילור סביב $x = x_0$

### שאלות

מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב  $x = x_0$  של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

$$(0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$(0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

## חישוב סכום של טור

### שאלות

חשב את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$\pi/4 \quad (5) \qquad 2e \quad (4) \qquad \sqrt{e} \quad (3) \qquad e^{-2} \quad (2) \qquad e \quad (1)$$

$$\ln \frac{3}{2} \quad (9) \qquad \ln 2 \quad (8) \qquad \cos 1 \quad (7) \qquad \sin 1 \quad (6)$$

## חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

### שאלות

בשאלות 1-3 חשב את ערך הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(4) נתון כי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k$  כאשר  $k$  קבוע שונה מאפס.  
מצאו את  $n$  ואת  $k$ .

### תשובות סופיות

$$k = 1, n = 3 \quad (4) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{120} \quad (1)$$

## חישובים מקורבים של פונקציות

### שאלות

בשאלות 1-3 חשב בשגיאה הקטנה מ-0.001 :

$$\frac{1}{e} \quad (1) \qquad \sin 3^\circ \quad (2) \qquad \arctan 0.25 \quad (3)$$

בשאלות 4-6 חשב בעזרת  $n$  איברים ראשוניים (שוניים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והערך את השגיאה בחישוב :

$$(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4) \qquad (n=1)\cos 4^\circ \quad (5) \qquad (n=4)\ln 1.5 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ עבור } |x| \leq \frac{\pi}{6} ?$$

$$(8) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \ln(1+x) \cong x \text{ עבור } |x| < 0.01 ?$$

$$(9) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \text{ עבור } |x| \leq 0.2 ?$$

$$(10) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.001?}$$

$$(11) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.01?}$$

**תשובות סופיות**

$$\frac{53}{144} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{60} \quad (2)$$

$$\frac{47}{192} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8}, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{48} \quad (4)$$

$$1, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{\pi \cdot \pi}{4050} \quad (5)$$

$$\frac{77}{192}, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{160} \quad (6)$$

$$\frac{(\pi/6)^5}{5!} \quad (7)$$

$$\frac{(0.01)^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad (9)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (10)$$

$$|x| < \sqrt[2]{9/100} \quad (11)$$

## חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

### שאלות

חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- $\varepsilon$ :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

## השארית של לגראנז'

- (1) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$  סביב  $x_0 = 0$ , כולל שארית לגראנז'.  
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את  $\sqrt[3]{66}$  והערך את השגיאה בקירוב.
- (2) רשום את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה  $f(x) = \tan x$  סביב  $x_0 = 0$ , כולל שארית לגראנז'.  
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את  $\tan 0.1$  והערך את השגיאה בקירוב.
- (3) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt{x+4}$  סביב  $x_0 = 0$ , כולל שארית לגראנז'.  
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את  $\sqrt{5}$  והערך את השגיאה בקירוב.
- (4) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt[4]{x}$  סביב  $x_0 = 16$ , כולל שארית לגראנז'.  
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את  $\sqrt[4]{15}$  והערך את השגיאה בקירוב.

### הערה לגבי קירובים

אם מבקשים קירוב שהוא מדויק ל- $n$  ספרות אחרי הנקודה, אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-n}$ . למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$ . בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

## תשובות סופיות

$$(1) \text{ נוסחה: } \sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81 \cdot \sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{5}{663552}$$

$$(2) \text{ נוסחה: } \tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2, \text{ חישוב: } \tan 0.1 = \frac{1}{10}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{970}$$

$$(3) \text{ נוסחה: } \sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{512}$$

$$(4) \text{ נוסחה: } \sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128 \cdot \sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{3130}$$

## נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$	$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$
$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$
	$-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$
	$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות וחשבון אינפיניטסימלי ח 2 104035

פרק 19 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

162	.....	1. סדרות פונקציות.
165	.....	2. טורי פונקציות.
167	.....	3. טורי חזקות.
169	.....	4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות.

## סדרות פונקציות

### שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות 1-11 :

א. בדוק התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצא את הפונקציה הגבולית.

ב. בדוק התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$(1) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} [0, 0.5] \quad (2) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} (0, 1)$$

$$(3) \quad f_n(x) = \arctan(nx) \quad \text{ב-} (0, \infty) \quad (4) \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(5) \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{ב-} [0, 1] \quad (6) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{ב-} [0.5, 4]$$

$$(7) \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+n} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (8) \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{ב-} \mathbb{R}$$

$$(9) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (10) \quad f_n(x) = n(1-x)x^n \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(11) \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1)+1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(12) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית ב-  $[0, 4]$  ?  
 ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[0, 4]$  ?  
 ג. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?  
 ד. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(13) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע  $[0, \infty)$  ?  
 ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע  $[0, \infty)$  ?  
 ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע  $[1, \infty)$  ?

$$(14) \text{ נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[ n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?  
 ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(15) \text{ נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = [1 - \chi_n(x)] \left( x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left( n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ כאשר}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$ , עבורם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית ב-  $[1, \infty)$  ?  
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?  
 ב. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$ , עבורם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[1, \infty)$  ?

## תשובות סופיות

- (1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \frac{\pi}{2}$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.
- (5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.
- (7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \sqrt{x^2}$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.
- (12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- (14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (15) א. לכל ערך של  $\alpha$  ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום  $[1, \infty)$ , לפונקציה  $\frac{1}{x}$ .  
ב. רק אם  $\alpha < 0$ .

## טורי פונקציות

### שאלות

מצא את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-6:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידן:

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left( \frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (12)$$

**תשובות סופיות**

(1)  $x > 0$

(2)  $x \neq 5$

(3)  $x < 3\frac{9}{10}$  or  $4\frac{1}{10}$

(4)  $0 < x \neq \frac{1}{n}$

(5)  $x > 0$

(6)  $x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

(7) מתכנס במידה שווה.

(8) מתכנס במידה שווה.

(9) מתכנס במידה שווה.

(10) מתכנס במידה שווה.

(11) מתכנס במידה שווה.

(12) מתכנס במידה שווה.

## טורי חזקות

### שאלות

מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצא את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבע את תחום ההתכנסות:

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15) \qquad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14) \qquad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18) \qquad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17) \qquad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20) \qquad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

### הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא "פירוק לשברים חלקיים".

## תשובות סופיות

- |  |  |
|--|--|
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (2)                               | $-1 \leq x < 1, R = 1$ (1)   |
| $-1 \leq x \leq 1, R = 1$ (4)  | $-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2$ (3)  |
| $-1 < x < 1, R = 1$ (6)  | $-3 < x \leq -1, R = 1$ (5)  |
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (8)                               | $x = 1, R = 0$ (7)   |
| $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3$ (10)                    | $-5 < x \leq 3, R = 4$ (9)   |
| $-7 < x < -3, R = 2$ (12)  | $-9 \leq x \leq 11, R = 10$ (11)   |
| $( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n}$ (14)                         | $( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (13)  |
| $( x  < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$ (16)          | $( x  < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$ (15)                       |
| $( x  < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ (18) | $( x  < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1}$ (17)                      |
| $( x  < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n$ (20)   | $( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n$ (19) |

## גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

### שאלות

פתח לטור חזקות את הפונקציות בשאלות 1-7:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{חשב את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$$

$$(9) \quad \text{חשב את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n)x^{n-1}$$

(10) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

ב. מהו סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)}$  ?

**(11)** ענה על הסעיפים הבאים :

א. חשב את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

ב. חשב את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$

**(12)** חשב את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$

**(13)** חשב את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

### תשובות סופיות

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \text{(2)} \qquad (|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad \text{(1)}$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{(4)} \qquad (-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{(3)}$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad \text{(6)} \qquad (-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad \text{(5)}$$

$$\frac{20}{27} \quad \text{(8)} \qquad (|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad \text{(7)}$$

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad |x| < 1 \quad \text{א.} \quad \text{(10)} \qquad \frac{2}{(1-x)^3} \quad |x| < 1 \quad \text{(9)}$$

$$\frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right) \quad \text{ב.} \qquad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x \quad |x| < 1 \quad \text{א.} \quad \text{(11)}$$

$$\arctan x \quad |x| \leq 1 \quad \text{(13)} \qquad \frac{1}{10} \left( \frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right) \quad \text{(12)}$$