

מתמטיקה ב לכלכלנים



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



תוכן העניינים

1	חישוב נגזרת של פונקציה
14	משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי
23	כלל לופיטל
29	חקירת פונקציה
46	חקירת פונקציה ("שאלות מסביב")
50	מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה
53	בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)
66	אינטגרלים מיידיים ואינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"
72	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים
74	אינטגרלים בשיטת ההצבה
76	אינטגרלים של פונקציות רציונליות
80	האינטגרל המסוים, סכומי רימן
85	שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)
96	שימושי האינטגרל המסוים - נפח גוף סיבוב
99	המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)
101	אינטגרלים לא אמיתיים
106	פונקציות של שני משתנים
116	נגזרות חלקיות
122	קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים
124	קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')
127	קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה
128	פונקציות הומוגניות-משפט אוילר
136	כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

138	24. פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים
(ללא ספר)	25. פתרון בחינות לדוגמא בר אילן
140	26. גבולות ורציפות של פונקציה של שני משתנים

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 1 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה (ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה..... 1
3. תרגילים נוספים לפי סוגים 4
4. גזירה סתומה 7
5. כלל השרשרת 9
6. גזירה לוגריתמית..... 12
7. נגזרת הפונקציה ההפוכה..... 13

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 22-24 מצא רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$y = x^{\sqrt{x}} \quad (21) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (24) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (23) \quad y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} (\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1-4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3-4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1-\ln x) \quad (20)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right) \quad (21)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{x} \right] \quad (22)$$

$$y' = (x^2+1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \cdot x\right) \quad (23)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (24)$$

תרגול נוסף בכללי הגזירה

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$ | ב. $f(x) = x^7$ | ג. $f(x) = x^2$ |
| ד. $f(x) = x^1$ | ה. $f(x) = x^{-3}$ | ו. $f(x) = x^{-1}$ |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$ | ב. $f(x) = 3x^7$ | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x^1$ | ו. $f(x) = 3x^{-2}$ |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

הנגזרת של קבוע

3) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | |
|----------------|-------------------------|
| א. $f(x) = 12$ | ב. $f(x) = \frac{7}{8}$ |
|----------------|-------------------------|

הנגזרת של סכום והפרש

4) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | |
|---------------------------------|---|
| א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------|---|

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x-2)^3 \quad \text{ב.} & f(x) = (x^3+6)^5 \\ \text{ב.} & f(x) = (x-x^2)^2 \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה.} & \end{array}$$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב.} & f(x) = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ה.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ו.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ז.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \end{array}$$

הנגזרת של מכפלה

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x+1)(x-3) \\ \text{ב.} & f(x) = (5x+1)^3(x-3) \\ \text{ג.} & f(x) = x^3(6-x)^4 \end{array}$$

הנגזרת של מנה

(8) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \end{array}$$

הנגזרת של שורש

(9) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} \\ \text{ב.} & f(x) = 4\sqrt{x+1} \\ \text{ג.} & f(x) = \sqrt{x^3-1} \\ \text{ד.} & f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \\ \text{ה.} & f(x) = x^2\sqrt{x+3} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = 2x & \text{ג.} & f'(x) = 7x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 3x^2 & \text{א.} \\
 f'(x) = -\frac{1}{x^2} & \text{ו.} & f'(x) = 3x^{-4} & \text{ה.} & f'(x) = 1 & \text{ד.} \\
 f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ז.}
 \end{array}$$

(1)

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = 2x^3 & \text{ג.} & f'(x) = 21x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 6x^2 & \text{א.} \\
 f'(x) = -\frac{6}{x^3} & \text{ו.} & f'(x) = 8 & \text{ה.} & f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ד.} \\
 f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ח.} & f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ז.}
 \end{array}$$

0 ב. 0 א. (2)

$$f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} \text{ ב.} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \text{ א.} \quad (3)$$

$$f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4 \text{ ב.} \quad f'(x) = 15(5x - x)^2 \text{ א.} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \text{ ה.} \quad f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \text{ ד.} \quad f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x) \text{ ג.}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \text{ ז.} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \text{ ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{x^2} \text{ ב.} \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \text{ א.} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \text{ ז.} \quad f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \text{ ו.} \quad f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \text{ ה.}$$

$$f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \text{ ב.} \quad f'(x) = 10x-14 \text{ א.} \quad (6)$$

$$f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \text{ ג.}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \text{ ג.} \quad f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \text{ ב.} \quad f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \text{ א.} \quad (7)$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \text{ ו.} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ ה.} \quad f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \text{ ד.}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \text{ ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \text{ ב.} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ א.} \quad (8)$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \text{ ו.} \quad f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \text{ ה.} \quad f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \text{ ד.}$$

גזירה סתומה

שאלות

- (1) גזור את הפונקציה הסתומה: $x^2 + y^5 - 1 = 1$.
- (2) גזור את הפונקציה הסתומה: $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.
- (3) גזור את הפונקציה הסתומה: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
- (4) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה $(3, 4)$.
- (5) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1, 1)$.
- (6) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (7) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$, דרך הנקודה $(1, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (8) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (9) נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.
 א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.
 ב. מצא את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שמצאת בסעיף א.
- (10) גזור את הפונקציה הסתומה: $x^y - xy = 10$.
- (11) גזור את הפונקציה הסתומה: $x^y - y^x = 1$.
- (12) נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$. מצא את ערך y^n בנקודה בה $y = 1$.

- (13)** נתון כי המשוואה $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$ מגדירה את $y = y(x)$ כפונקציה סתומה של x . נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת. הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

- (9)** א. $(0,0)$, $(1,0)$. ב. בראשית הצירים: $y = -x$, המשוואה השנייה: $y = x - 1$.

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

(12) -1

(13) הוכחה.

כלל השרשרת

שאלות

- (1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4) = 10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$.
חשב את $g'(2)$.

- (2) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(2) = 4$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
א. חשב את $g'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכח כי g יורדת.

- (3) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = x^2 + f(\ln x)$.
א. חשב את $g'(e)$.

ב. הוכח שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

ג. חשב את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$.

- (4) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f(1) = -2$, $f'(1) = e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f^2(\ln x)$.
א. חשב את $g'(e)$.

ב. האם g עולה או יורדת, בנקודה $x = e$?

ג. נתון כי f שלילית ועולה. מה ניתן לומר על g ?

(5) נתונה פונקציה, $f(x)$, יורדת וחיובית.

$$g(x) = \sqrt{f(x^2 + 4)}$$

מי מהבאים נכון?

א. g עולה לכל x .

ב. g יורדת לכל x .

ג. g עולה לכל $x > 0$.

ד. g יורדת לכל $x > 0$.

$$(6) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי $f(10) = f'(10) = 4$. חשב $g'(100)$.

$$(7) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$. חשב $g'(1)$.

$$(8) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$. חשב $g'(1)$.

$$(9) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי $f(4) = 2$, $f'(4) = 1$. חשב $g'(1)$.

$$(10) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$. חשב $g'(1)$.

תשובות סופיות

		40 (1)
	ב. הוכחה.	א. -16 (1)
ג. $2e+1$	ב. הוכחה.	א. $2e+1$ (2)
ג. $g'(x) < 0$	ב. יורדת.	א. -4 (3)
		ד (4)
		$\frac{17}{80}$ (5)
		36 (6)
		$\frac{8}{9}$ (7)
		44 (8)
		-2 (9)

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזור את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x} \quad (1)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלה

הוכח, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 2 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

14	1. המשיק
16	2. בעיות משיקים
18	3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק
21	4. הנורמל
22	5. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם

המשיק

שאלות

- (1) מצא את שיפוע הפונקציה
- א. $f(x) = 2x^3 - 7x$, בנקודה $(2, 2)$.
- ב. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$, בנקודה $x = -2$.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, כאשר $a > 0$. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$, הוא בעל שיפוע 1. מצא את הקבוע a .
- (3) הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x) = 3\sqrt{x}$. מצא את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$, בנקודה $(1, 15)$, הוא $21 \ln 3$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$, בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (6) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$, לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$? לכל ערך k כזה מצא את נקודת ההשקה.

תשובות סופיות

(1) א. 17 ב. 4

(2) $a = 2$

(3) $(1, 3)$

(4) $a = 2, b = -1$

(5) $a = 2, b = -2$

(6) לערך $k = 6$, בנקודה $x = 1$; לערך $k = \frac{158}{27}$, בנקודה $x = \frac{1}{3}$.

בעיות משיקים

שאלות

(1) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$.

מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$.

מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$.

מצא את a ו- c .

(4) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$.

מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

בשאלות 6-7 מצא את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6) $(2, -3), y = x^2 - 2x + 1$

(7) $(-3, 1), y = \sqrt{x}$

(8) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y = x^2$

ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(9) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו.

מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות

- (1) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.
- (2) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.
- (3) נקודת ההשקה היא $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.
- (4) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.
- (5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.
- (6) $y = 6x - 15, (4,9)$; $y = -2x + 1, (0,1)$
- (7) המשיק $(9,3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.
- (8) $y = 2x - 1, y = -2x - 1$
- (9) נקודת ההשקה $(1,1)$, $k = 1.5$.

בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

שאלות

- (1) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$, בנקודה $x = -1$.
- (2) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$, ששיפועו 2 .
- (3) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$, בנקודה $x = 0$.
- (4) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$, בנקודה $x_1 = 1$.
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$, בנקודה $y = 2$, הוא -4 .
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.
- (6) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$, היוצרים זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$, ששיפועו -2 .
- (8) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$, בנקודה $x = 2$.
- (9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$, בנקודה $(1,6)$, הוא -6 .
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (10) נתונה הפונקציה $y = e^{2x} + 3ex$, והעבירו לה משיק בנקודה $x = 2$.
מצא את משוואת המשיק.

(11) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$, בנקודה $x = 0$.

(12) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$, בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.

(13) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$. מצא את משוואת המשיק.

(14) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$, בנקודה $x = 1$.

(15) הגרפים של $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - x$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצא את משוואת המשיק והוכח שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

(16) מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1,1)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(17) מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(18) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3,4)$.

תשובות סופיות

$$y = 24x + 22 \quad (1)$$

$$y = 2x - 3 \quad (2)$$

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = -12x + 9 \quad (4)$$

$$a = 2, \quad y = -4x - 2 \quad (5)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, \quad y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (6)$$

$$y = -2x + 8 \quad (7)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16} \quad (8)$$

$$a = 6, \quad b = 2, \quad y = -6x + 12 \quad (9)$$

$$y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4 \quad (10)$$

$$y = 3x + 1 \quad (11)$$

$$y = (-e^2 + e)x + e^2, \quad y = (e - 1)x + e \quad (12)$$

$$y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2} \quad (13)$$

$$y = (\ln 2 + 1)x - 1 \quad (14)$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad (15)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (17)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (18)$$

הנורמל

שאלות

- (1) מצא את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-2}$, בנקודה $(3, 2)$.
- (2) מצא את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^4$, המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5, 0)$ ו- $(2, 4)$.
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, בנקודה מסוימת, היא $4y + x = 6$. מצא את הנקודה.

תשובות סופיות

- (1) $y = -2x + 8$
- (2) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3) $(2, 1)$

נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

שאלות

(1) חשב בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
 $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$

(2) חשב בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים: $\ln 2$, $\sqrt[3]{9}$

תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \cong 2.25, \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \cong 1, \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12} \quad (2)$$

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 3 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

- 23 1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף
- 25 2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף
- 26 3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף
- 27 4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף
- 28 5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ ו- $\frac{\infty}{\infty}$

חשב את הגבולות בשאלות 1-3 (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשב את הגבולות בשאלות 4-8 (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x} - 2 - 1} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x-1} \quad (7)$$

חשב את הגבולות בשאלות 9-12 (פונקציות חזקות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשב את הגבולות בשאלות 13-15 (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשב את הגבולות בשאלות 16-20 (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (20)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\ln \frac{a}{b}$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)	$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)
1 (15)	2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)
0 (20)	0 (19)	∞ (18)	$\frac{1}{2}$ (17)	$\frac{1}{2}$ (16)

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty \cdot 0$

חשב את הגבולות בשאלות 1-7:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x-3) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (7)$$

תשובות סופיות

0 (4)

0 (3)

0 (2)

∞ (1)

$\frac{5}{2}$ (7)

6 (6)

0 (5)

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty - \infty$

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: $1^{\pm\infty}$, $0^{\pm\infty}$, ∞^0

חשב את הגבולות בשאלות 1-4:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, \quad (a > 0) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$e \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

הגבולות בשאלות 1 ו-2 הם מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

הראה זאת והסבר מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים. לבסוף, חשב את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 4 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד	(ללא ספר)
2. חקירת פולינום	29
3. חקירת פונקציה רציונלית	31
4. חקירת פונקציה מעריכית	35
5. חקירת פונקציה לוגריתמית	38
6. חקירת פונקציה עם שורשים	42
7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט	43

הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
 - תחום הגדרה ורציפות.
 - נקודות חיתוך עם הצירים.
 - זוגיות ואי-זוגיות.
 - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - נקודות קיצון.
 - תחומי קמירות וקעירות.
 - נקודות פיתול.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.

3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.

4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.

5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

חקירת פולינום

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

תשובות סופיות

(1) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 9 .

נקודות קיצון: מינימום: $(9, 0)$, מקסימום: $(3, 108)$.

תחום עלייה: $x < 3$ or $x > 9$, ירידה: $3 < x < 9$.

תחום קמירות: $x > 6$, קעירות: $x < 6$.

נקודת פיתול: $(6, 54)$.

(2) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 2 .

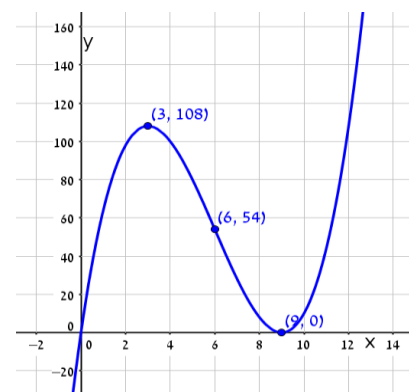
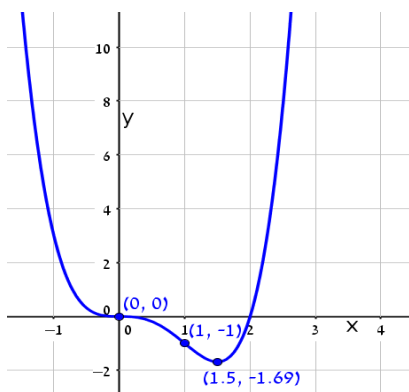
נקודות קיצון: מינימום: $(1.5, \frac{-27}{16})$.

תחום עלייה: $x > 1.5$, ירידה: $x < 1.5$.

תחום קמירות: $x < 0$ or $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.

נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(1, -1)$.

גרפים



חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y = x - 1$.

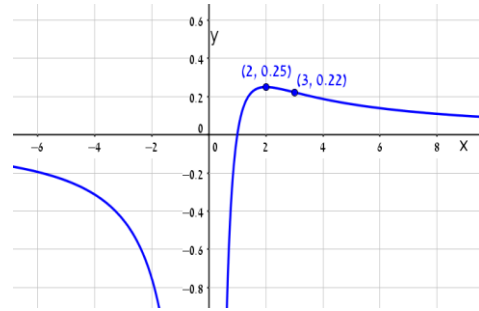
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2, 0.25)$. נקודת פיתול: $(3, \frac{2}{9})$.
תחום עלייה: $0 < x < 2$, ירידה: $x > 2$ or $x < 0$.
תחום קמירות: $x > 3$, קעירות: $0 < x < 3$ or $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, 0)$. נקודת פיתול: $(\frac{1}{2}, \frac{2}{9})$.
תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 0$, ירידה: $-1 < x < 0$.
תחום קמירות: $-1 < x < \frac{1}{2}$ or $x < -1$, קעירות: $x > \frac{1}{2}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, מקסימום: $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$.
תחום עלייה: $x > \sqrt{12}$ or $x < -\sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$, $x \neq \pm 2$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $-2 < x < 0$ or $x > 2$, קעירות: $0 < x < 2$ or $x < -2$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-3, -\frac{27}{4})$.
תחום עלייה: $x > -1$ or $x < -3$, ירידה: $-3 < x < -1$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.

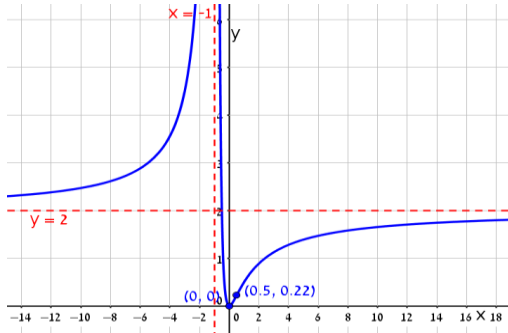
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : -1 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3 < x < -1$ & $x > 1$, קעירות: $-1 < x < 1$ or $x < -3$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$, $x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78, -3.88)$, מינימום: $(0.36, -0.11)$.
תחום עלייה: $0.36 < x < 2$ or $2 < x < 2.78$,
ירידה: $x < 0.36$ or $2.78 < x < 5$ or $x > 5$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 2$ or $x > 5$, קעירות: $2 < x < 5$ or $x < -1$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x : $x=1$, $x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85, -0.09)$.
תחום קמירות: $0.85 < x < 2$ or $x < -2$, קעירות: $-2 < x < 0.85$ or $x > 2$.
- (8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$, $x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2, -4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x < -2$, $x > 1$ or $-2 < x < -1$; ירידה: $-1 < x < 0$ or $-1 < x < 0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$ or $x > 1$, קעירות: $x < -1$.

גרפים

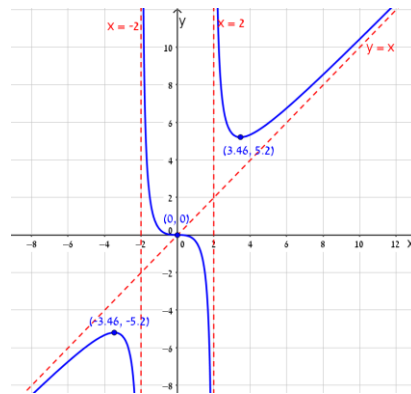
(1)



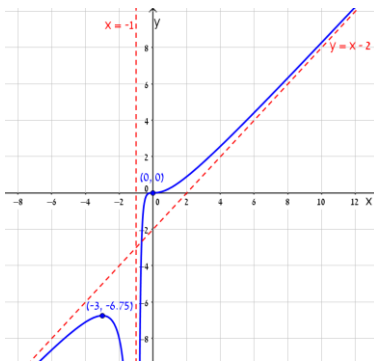
(2)



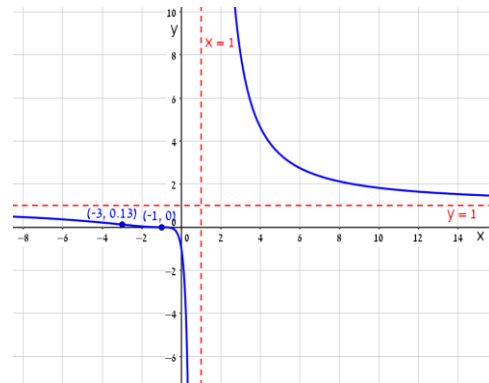
(3)



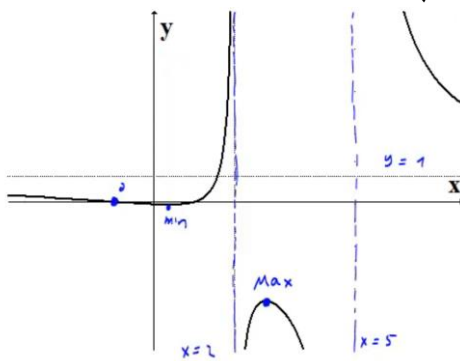
(4)



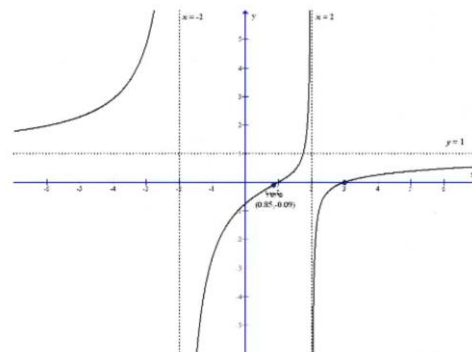
(5)



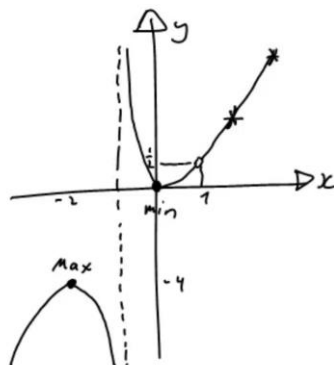
(6)



(7)



(8)



חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

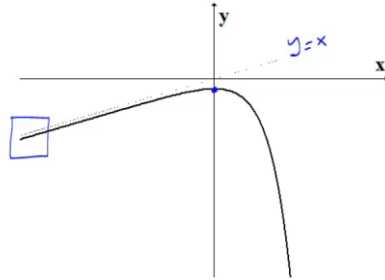
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

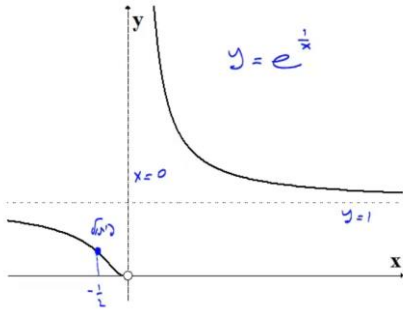
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : אין (ראו בהרחבה בסרטון).
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y = x$ ב- $-\infty$ בלבד.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0, -1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.
 נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: $(-0.5, e^{-2})$.
 תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.5 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.5$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : -2 .
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת: הישר $y = x + 3$ ב- $\pm\infty$.
 אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, e^{-1})$, מינימום: $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$.
 תחום עלייה: $x > 2$ or $x < -1$, ירידה: $0 < x < 2$ or $-1 < x < 0$.
 נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$.
 תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.4 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y = 0$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$, מינימום: $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$.
 תחום עלייה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, ירידה: $x > \frac{1}{2}$ or $x < -\frac{1}{2}$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$, $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$.
 תחום קמירות: $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ or $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$, תחום קעירות: $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$ or $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$.

גרפים

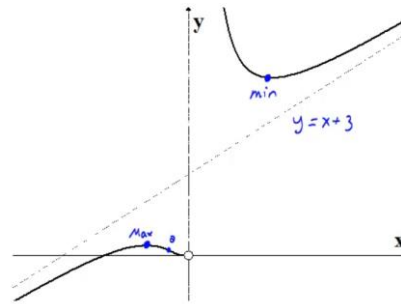
(1)



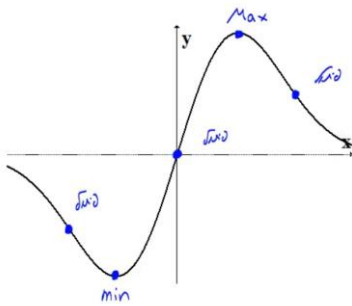
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

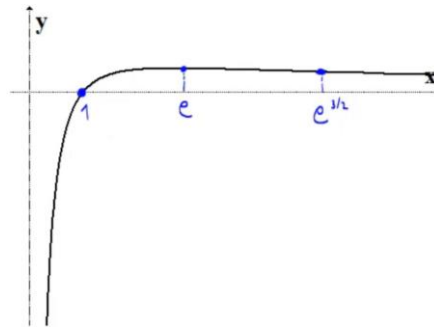
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e$, ירידה: $x > e$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
 תחום קמירות: $x > e^{1.5}$, קעירות: $0 < x < e^{1.5}$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e^2$, ירידה: $x > e^2$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$.
 תחום קמירות: $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x > e^{\frac{8}{3}}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x < 2$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{2} \ln 2$, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -e^{-1})$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

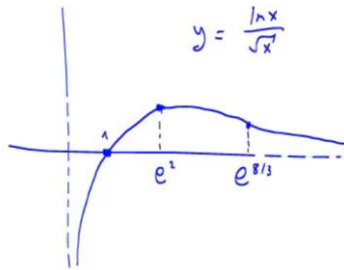
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^1$, $x = e^{-3}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(1, -3)$. תחום קמירות: $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^{1.5}$, $x = e^{-0.5}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}}, -4\right)$.
 תחום עלייה: $x > e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$.
 נקודת פיתול: $(e^{1.5}, 0)$. תחום קמירות: $0 < x < 1.5$, קעירות: $x > 1.5$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$, $x \neq 1$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 1$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, 2)$, $(e, 2)$.
 תחום עלייה: $e^{-1} < x < 1$ or $x > e$, ירידה: $1 < x < e$ or $x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(5.15, 3.06)$.
 תחום קמירות: $1 < x < 5.15$ or $0 < x < 1$, קעירות: $x > 5.15$.

גרפים

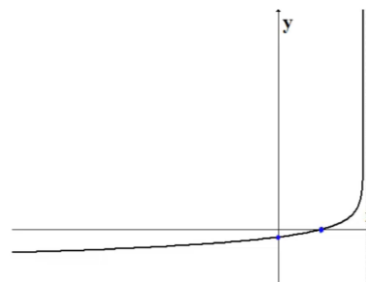
(1)



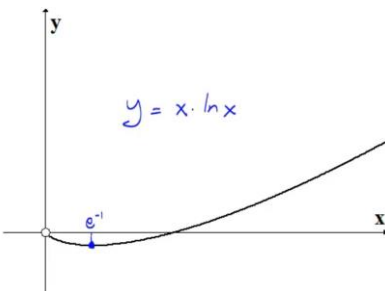
(2)



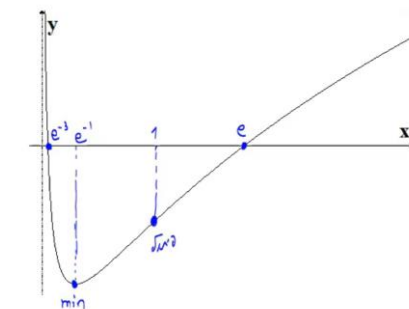
(3)



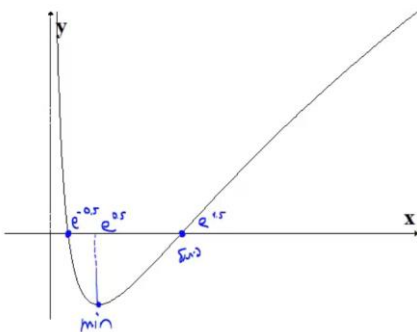
(4)



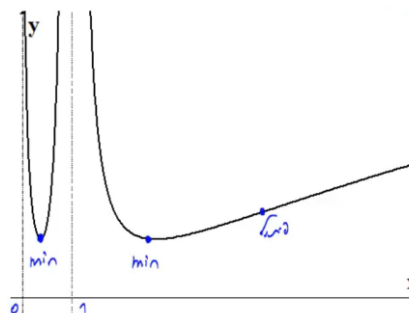
(5)



(6)



(7)



חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

תשובה

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = 1$, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y = 0$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.

נקודות פיתול: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

תחום קמירות: $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ or $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, קעירות: $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

גרף:



חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 \quad (2)$$

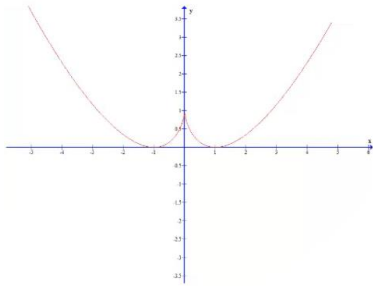
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1 \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

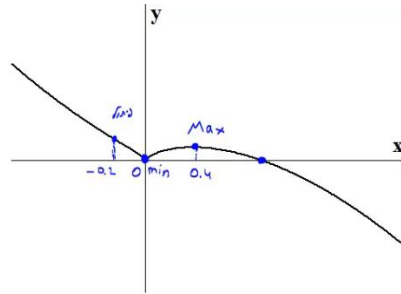
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 או 1 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$, מינימום: $(0, 0)$.
 תחום עלייה: $0 < x < \frac{2}{5}$, ירידה: $x < 0$ or $x > \frac{2}{5}$.
 נקודות פיתול: $(-0.2, 0.41)$.
 תחום קמירות: $x < -0.2$, קעירות: $-0.2 < x < 0$ or $x > 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1 , עם ציר ה- x : -1 או 1 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0, 1)$, מינימום: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.
 תחום עלייה: $-1 < x < 0$ or $x > 1$, ירידה: $0 < x < 1$ or $x < -1$.
 נקודות פיתול: אין.
 תחום קמירות: קמורה לכל x .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: זוגית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : ± 1 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(0, -1)$.
 תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.
 נקודות פיתול: $(1, 0)$, $(-1, 0)$.
 תחום קמירות: $-1 < x < 1$, קעירות: $x > 1$ or $x < -1$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1.5 , עם ציר ה- x : 3 .
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$,
 משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- ∞ , ו- $y = -1$ ב- $-\infty$.
 נקודות קיצון: מינימום: $(3, 0)$.
 תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $2 < x < 3$ or $x < 2$.
 נקודות פיתול: $(3, 0)$.
 תחום קמירות: $2 < x < 3$, קעירות: $x > 3$ or $x < 2$.

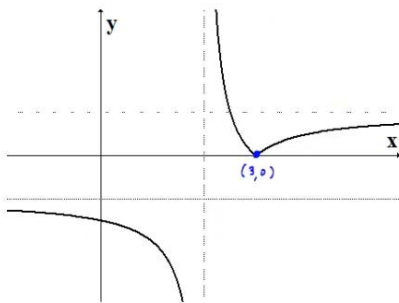
גרפים



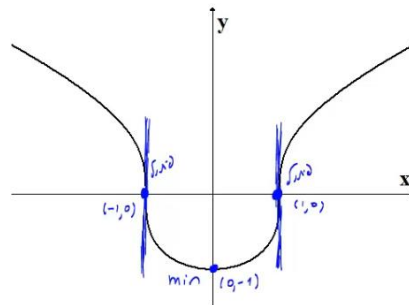
(2)



(1)



(4)



(3)

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 5 - חקירת פונקציה ("שאלות מסביב")

תוכן העניינים

46	1. חקירת פונקציה - שאלות מסביב
49	2. הוכחת אי שוויונים

חקירת פונקציה – "שאלות מסביב"

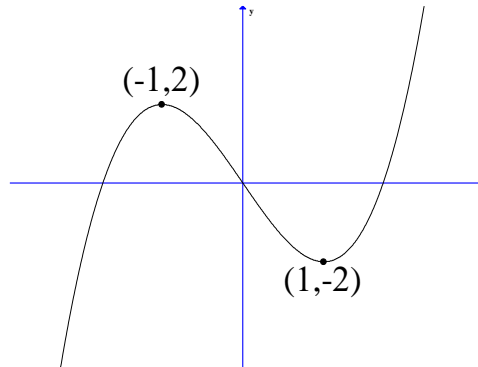
שאלות

- (1) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון. מצא את הקבוע a .
- (2) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון. מצא את הקבועים a, b .
- (3) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת פיתול. מצא את הקבוע a .
- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת פיתול. מצא את הקבועים a, b .
- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=3$ הוא 33. מצא את a .
- (6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3,9)$ הוא 12. מצא את a, b .
- (7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y=4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצא את a .
- (8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y=0.5x+1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצא את a ואת b .

9 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$

ידוע שהישר $x = 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצא את a .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:



10 מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?

11 מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?

12 מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?

13 עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?

14 עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?

15 עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

16 האם קיים ערך של k , עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

17 מצא את התחומים בהם הפונקציה היא חז"ע.

תשובות סופיות

$$a = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$a = -4, b = 6 \quad (2)$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$a = -1, b = 3 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (6)$$

$$a = 8 \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad (8)$$

$$a = -7 \quad (9)$$

$$1 \quad (10)$$

$$2 \quad (11)$$

$$3 \quad (12)$$

$$k < -2, k > 2 \quad (13)$$

$$k = \pm 2 \quad (14)$$

$$-2 < k < 2 \quad (15)$$

$$\text{לא} \quad (16)$$

$$x < -1, -1 < x < 1, x > 1 \quad (17)$$

הוכחת אי שוויונים

שאלות

בשאלות 1-3 הוכח את אי השוויונים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2$$

$$(2) \quad (x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$$

$$(3) \quad (x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 6 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה..... 50
2. הוכחת אי שוויונים..... 52

מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

שאלות

מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות הבאות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$(-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2)$$

$$(-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{2/3}(20 - x) \quad (3)$$

$$\left[\frac{1}{2}; \frac{7}{2} \right] \quad f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x - 2)(x - 3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$(-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

תשובות סופיות

- 1) $(-1, -7)$ מינימום מוחלט, $(3, 9)$ מקסימום מוחלט.
- 2) $(-1, 0)$ מינימום מוחלט, $(5, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 3)$ מקסימום מוחלט.
- 3) $(0, 0)$ מינימום מוחלט, $(20, 0)$ מינימום מוחלט, $(8, 48)$ מקסימום מוחלט.
- 4) $(2.5, -0.25)$ מינימום מוחלט, $(1, 2)$ מקסימום מוחלט.
- 5) $(-3, 1)$ מינימום מוחלט, $(-5, 17)$ מקסימום מוחלט.
- 6) $(-2, -4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.
- 7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.

הוכחת אי שוויונים

שאלות

בשאלות 1-3 הוכח את אי השוויונים שמימין, לגבי התחום בסוגריים משמאל:

$$(1) \quad (x \text{ לכל}), x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3}$$

$$(2) \quad (x \geq 0), x e^{-\sqrt{x}} \leq 1$$

$$(3) \quad (x \leq 1), 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1$$

הערת סימון: $[a,b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$; $(a,b) \Leftrightarrow a < x < b$; $[a,b) \Leftrightarrow a \leq x < b$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 7 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1. הסבר כללי על בעיות קיצון (ללא ספר)
2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים 53
3. בעיות קיצון בהנדסת המישור 54
4. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים 56
5. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון 58
6. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני 64

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

שאלות

- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (2) מצא את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו, הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
 א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
 ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
 ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (4) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x + 6y = 60$.
 א. הבע את y באמצעות x .
 ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y , כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
 ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות

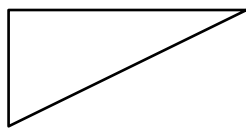
- (1) 8,8,8
- (2) 1
- (3) א. 12, 12, 12 ב. 8, 12, 16 ג. מקרה א'
- (4) א. $y = 10 - \frac{x}{6}$ ב. $x = 30, y = 5$ ג. $M = 22500$

בעיות קיצון בהנדסת המישור

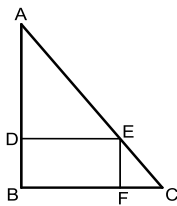
שאלות



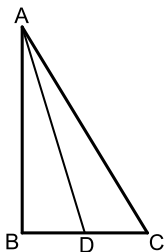
- 1) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר, ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



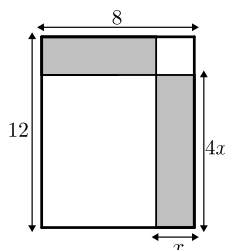
- 2) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



- 3) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC, כך שהמרובע EDBF הוא מלבן. נתון: $AB = 20$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ. מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



- 4) במשולש ישר הזווית ABC ($\angle B = 90^\circ$), AD הוא תיכון לניצב BC. ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצא מה צריכים להיות אורכי הניצבים, עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



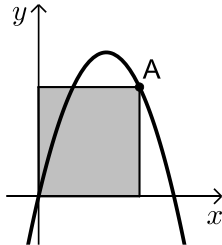
- 5) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$ על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים. מצא את x עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.

תשובות סופיות

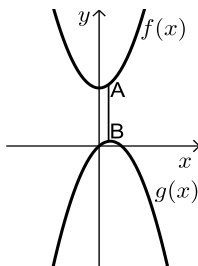
- (1) 4.6
- (2) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר ג. $8.48 \approx 6\sqrt{2}$ ס"מ.
- (3) 80 סמ"ר = S .
- (4) 4 ס"מ, 16 ס"מ.
- (5) $x = 2.75$

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

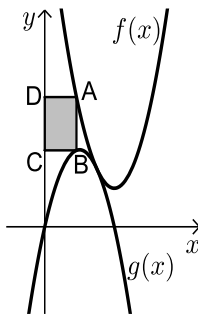
שאלות



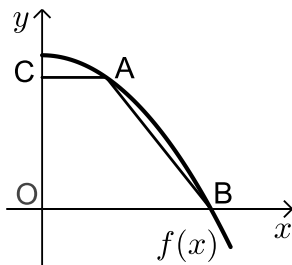
- (1) נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



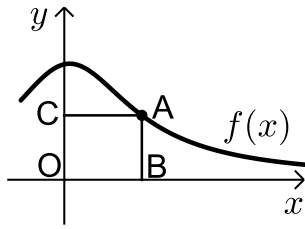
- (2) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2$ כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



- (3) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 א. הבע באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
 ב. מצא את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
 ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



- (4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 36 - x^2$. על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- x , שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו- O ראשית הצירים.
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
 ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

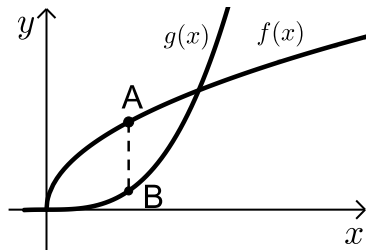


(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום $x \geq 0$.

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



(6) נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

תשובות סופיות

(1) A(4,8)

(2) A(0.5,12.25)

(3) א. $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$ ב. $t = 1$ ג. $S = 8$

(4) א. A(2,32) ב. $S = 128$

(5) א. A(2,2) ב. A(0,4)

(6) A(1,2)

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום, היא יכולה לקבל מחיר של $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$ שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
- שרטט את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצא את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנה את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם $x = 20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטט את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצא את פונקציית הביקוש ושרטט את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$.

- מצא את תחום הפונקציה.
- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצא את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6 פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- א. מצא את המחיר, הנותן את הפדיון המקסימלי.
 ב. מהו הביקוש במקרה זה?
 ג. מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאת? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר x קפה ביום, היא $C(x) = 5x + 150$.

- א. שרטט גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
 ב. מצא כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.
 ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?
 ד. מצא את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- א. חשב את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.
 ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
 ג. חשב את העלות השולית ליום, עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- א. חשב את העלות, כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
 ב. חשב את העלות השולית, כאשר $x = 100$.
 ג. חשב כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$, והשווה עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
 ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

- מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 20$,

ופונקציית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

12 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$,
 ופונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13 ליצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$,
 ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$.
 מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

14 ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מצא את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$,
 אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

15 ענה על הסעיפים הבאים:
 א. הוכח שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.
 ב. הוכח שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה שולית שווה למחיר המוצר.

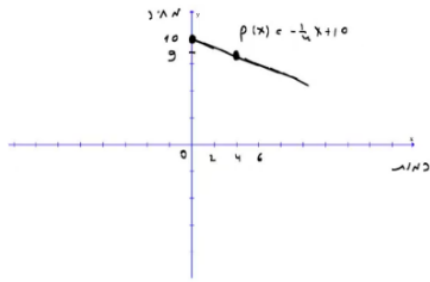
16 $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.
 א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?
 ב. האם ייתכן להפך?
 ג. הוכח, כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

17 מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי הייצור.
 נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- p_1 וב- p_2 , בהתאמה.
 אם משתמשים ב- x יחידות מג"י אחד וב- y יחידות מג"י 2,
 המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.
 א. הוכח, כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

$$\text{כאשר מתקיימת הנוסחה: } \frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}$$

ב. חשב x ו- y , עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
 $p_1 = 100$ ₪, $p_2 = 3,000$ ₪, $A = 372,000$ ₪.

תשובות סופיות

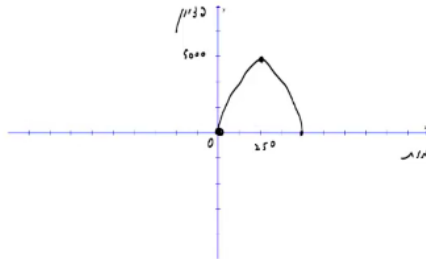


1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p) = 40 - 4p$ ד.

2) א. $R(x) = -0.6x^2 + 120x$, בתחום: $x \geq 0$ ב. 2,160 ג. 2,160



3) א. $x \geq 0$ ב. ג.



4) א. $x \geq 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x) = -0.04x^2 + 100x$

הפדיון הממוצע: $AR(x) = -0.4x + 100$ $x > 0$ ג. $R'(x) = -0.08x + 100$

ד. 1,250; הפדיון המקסימלי: 62,500.

5) א. פונקציית הפדיון: $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$

הפדיון השולי: $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$ ב. לא.

ג. 30; הפדיון המקסימלי: 108,000.

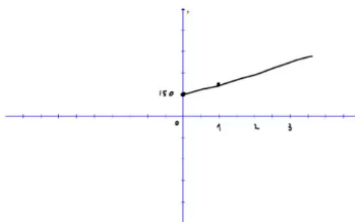
6) א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

7) א. ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל,

גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x) = 5$



8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ש; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה

אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ש בערך.

9) א. $C(100) = 1240$, $C(101) = 1250.804$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

(12) 25**(13)** הכמות : 800 , המקסימום : 38,200 .

(14) $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$

(15) הוכחה.**(16)** א. כן. ב. לא. ג. הוכחה.**(17)** א. הוכחה. ב. $x = 4, y = 3600$

בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

שאלות

- (1) יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של \$225 למכונה. עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא \$125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של \$5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.

א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?
 ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמק.
- (2) מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות. בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.

לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה (כלומר, מה המחיר שיש לקבוע ולכמה דקות) כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית?
- (3) אמן מייצר תכשיטים, בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט. הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט. על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.

א. מצא כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי.
 ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?
 ג. מהי עלות הייצור של האמן (עבור כל התכשיטים) במצב זה?
- (4) חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.

מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?
- (5) מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג', ומספר ה-SMS החודשי הממוצע הוא 200.

על כל 5 אג' ש'סלקום מעלה – יורד מספר ה-SMS החודשי הממוצע בעשר. מצא מה צריך להיות מחיר שליחת SMS, כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.
- (6) קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.

מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה בגדולה ביותר? מצא גם מהי ההכנסה המקסימלית.

- (7) הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪. אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום. על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום. מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?
- (8) חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪. 5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר, ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר. הוכח שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.
- (9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים בחיר של 500 ₪ לזוג אופניים. לכל x זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- x ₪ לזוג אופניים. מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

תשובות סופיות

- (1) א. 200 ב. \$93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.
- (2) 70 ₪ ל-350 דקות.
- (3) א. 60 ב. 60 ג. 1,800 ₪
- (4) 40
- (5) 75 אג'.
 (6) מחיר הכרטיס : 30 ₪, ההכנסה המקסימלית : 3,600 ₪.
- (7) 4,500 ₪.
- (8) הוכחה.
- (9) 350

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 8 - אינטגרלים מידיים ואינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

- 1. אינטגרלים מידיים 66
- 2. מציאת פונקציה קדומה 69
- 3. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" 71

אינטגרלים מידיים

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-12 :

$$\left(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c : \text{פתיחה על ידי הכלל} \right)$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 13-20 :

$$\left(\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c : \text{פתיחה על ידי הכלל} \right)$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

(פתירה על ידי הכלל : $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

(פתירה על ידי הכלל : $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$)

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (30) \text{ חשב את האינטגרל :}$$

(פתירה על ידי הכלל : $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$)

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (31) \text{ חשב את האינטגרל :}$$

תשובות סופיות

- (1) $4x + c$
- (2) $\frac{x^5}{5} + c$
- (3) $-\frac{1}{x} + c$
- (4) $\frac{x^{1.5}}{1.5} + c$
- (5) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + c$
- (6) $\frac{4x^{11}}{11} + c$
- (7) $\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$
- (8) $-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c$
- (9) $\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c$
- (10) $\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c$
- (11) $-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c$
- (12) $\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c$
- (13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c$
- (14) $\frac{(x-1)^{21}}{21} + c$
- (15) $-\frac{1}{(x-2)^4} + c$
- (16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c$
- (17) $10\sqrt{2x+4} + c$
- (18) $-\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c$
- (19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c$
- (20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c$
- (21) $\frac{\ln|x|}{4} + c$
- (22) $\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c$
- (23) $x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c$
- (24) $\frac{\ln|4x-1|}{4} + c$
- (25) $x + \ln|x+2| + c$
- (26) $4(x - 1.75\ln|x+2|) + c$
- (27) $\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c$
- (28) $\frac{e^{2x+2}}{2} + c$
- (29) $8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c$
- (30) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c$
- (31) $-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c$

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

- (1) נתונה הנגזרת $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
 מצא את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.
 מצא את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -6$.
 מצא את הפונקציה.
- (4) נתונה הנגזרת $f'(x) = 2x - 6$.
 ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
 מצא את הפונקציה.
- (5) נתונה הנגזרת $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.
 שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$, הוא 3.
 מצא את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה $f''(x) = 6x + 6$.
 שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12, וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
 מצא את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.
 המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y = -4$.
 מצא את הפונקציה.

8 נתונה פונקציה $f: R \rightarrow R$ המקיימת $f(0) = 0$ וכן לכל x_0 ממשי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$$

- א. מצא את תחומי הרציפות של הפונקציה.
 ב. חשב את הגבול הבא או קבע שהוא אינו קיים $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 ג. מצא כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ד. מצא את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
 ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
 חשב את הנגזרת $(G(x) - f(x))'$.

תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

8 א. רציפה לכל x . ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.

ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0.

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (3) \qquad \int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (6) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (4)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (9) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (8) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (11) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (10)$$

תשובות סופיות

$$\ln|\ln|x|| + c \quad (3) \qquad \frac{1}{3} \ln|x^3+1| + c \quad (2) \qquad \ln|x^2+1| + c \quad (1)$$

$$-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c \quad (6) \qquad e^{x^2} + c \quad (5) \qquad e^2 \ln|e^x+1| + c \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c \quad (9) \qquad 2\sqrt{x^2+1} + c \quad (8) \qquad \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c \quad (7)$$

$$\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c \quad (11) \qquad \frac{2}{9} (x^3+4)^{\frac{3}{2}} + c \quad (10)$$

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 9 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 72

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-12 :

$$\int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (4) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (3)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (6) \qquad \int \ln x dx \quad (5)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (8) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt{x-2} dx \quad (7)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (10) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (9)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (12) \qquad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (11)$$

(13) מצא נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$, כאשר n טבעי.

(14) חשב את $\int x^4 e^x dx$.

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (3)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (4)$$

$$x \ln x - x + c \quad (5)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (8)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (10)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (11)$$

$$\frac{2}{9} (x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99} (x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (12)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (13)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (14)$$

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 10 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 74

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (6) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (5) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (4)$$

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (9) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (8) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (12) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (11) \quad \int \ln^3 x dx \quad (10)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (15) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (14) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (13)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (5)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (8)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (9)$$

$$x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6) + c \quad (10)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (11)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + c \quad (14)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (15)$$

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 11 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

- 76 1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית.
- 78 2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית.
- 79 3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית.

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (4)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln |1-\sqrt[3]{x^2}| + c \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{(1+\sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1+\sqrt[6]{x})}{2} + 3(1+\sqrt[6]{x}) - \ln |1+\sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left(\frac{(1+\sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1+\sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1+\sqrt[4]{x-1}) - \ln |1+\sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$-\ln |1+e^x| + x + c \quad (4)$$

$$2\sqrt{1+e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + c \quad (5)$$

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 12 - האינטגרל המסוים, סכומי רימן

תוכן העניינים

- 80 1. האינטגרל המסוים
- 82 2. אי שוויונים עם אינטגרלים
- 83 3. סכומי רימן

האינטגרל המסוים

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-6:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (6)$$

(7) נתונה פונקציה רציפה f . הוכח:

א. אם f זוגית, אזי $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

ב. אם f אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

תשובות סופיות

(1) -6

(2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3) $-2e^{-1} + 1$

(4) $\frac{1}{5}$

(5) $\frac{17}{12}$

(6) $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(7) הוכחה.

אי שוויונים עם אינטגרלים

הוכח את אי-השוויונים הבאים :

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (1)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (2)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (5)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (6)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

סכומי רימן

חשב את הגבולות בשאלות 1-5 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (5)$$

חשב את האינטגרלים הבאים על פי ההגדרה (של רימן).

תוכל להיעזר בזהויות הבאות :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 0.5n(n+1) \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (8)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (7)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\ln(1+\sqrt{2}) \quad (4)$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (6)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{1}{4} \quad (8)$$

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 13 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

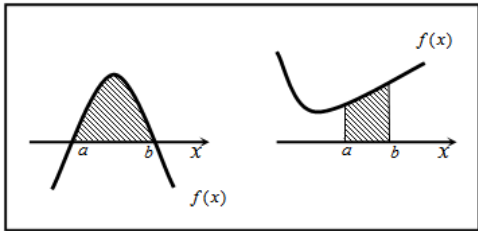
תוכן העניינים

85	1. חישוב שטחים
94	2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y
95	3. אורך קשת

חישוב שטחים

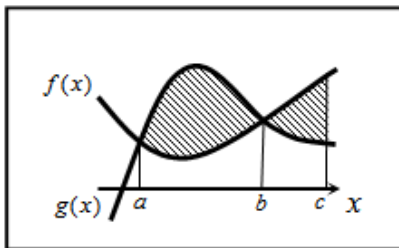
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

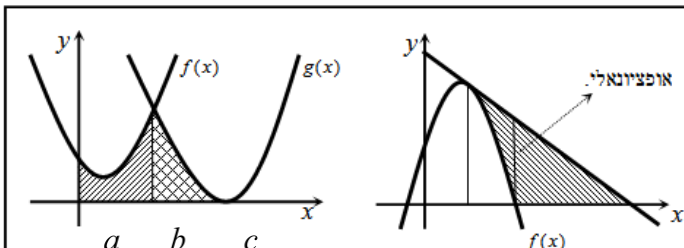


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

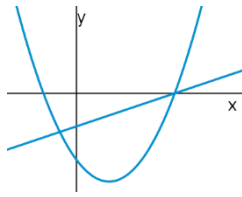
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

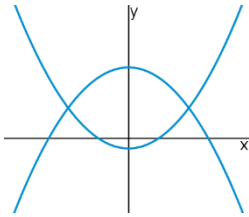


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

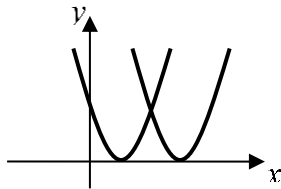
שאלות



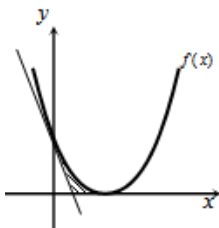
- (1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות.



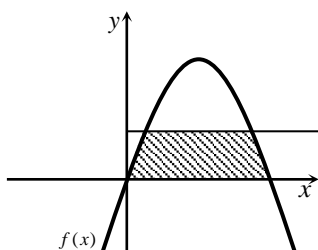
- (2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות.



- (3) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .



- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.
א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.
הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות החיתוך הוא $x = 9$.
א. מצא את ערך הפרמטר k .
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).

6 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלפניך,

היא $f'(x) = 3 - 2x$. ישר AB, שמשוואתו $y = 6$,

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.

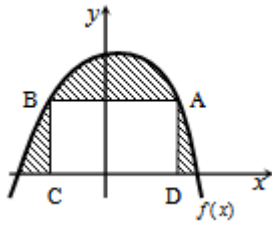
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x ,

כך שנוצר מלבן ABCD.

ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x .



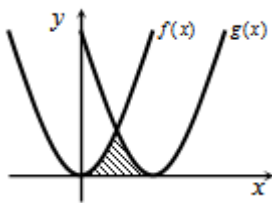
7 באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x) = x^2$,

את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x = 2$.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (המסומן).



8 באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$,

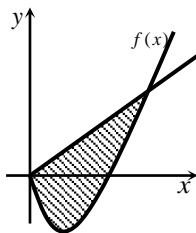
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

בנקודה שבה ערך ה- y הוא 16.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



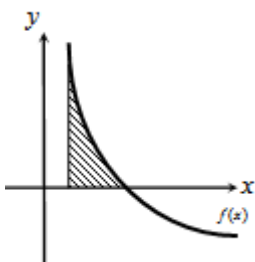
9 גרף הפונקציה $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע)

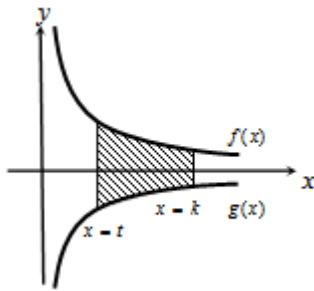
חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והישר $x = 2$.





10 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} \quad \text{ו-} \quad g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$$

מעבירים שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

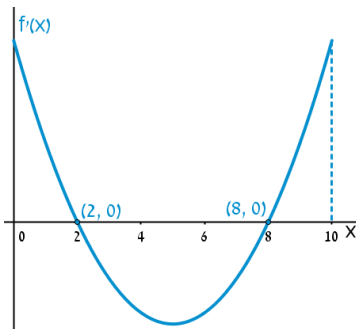
ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראה כי $k = 4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים $x=k$ ו- $x=t$,

הוא $S = 12$.

מצא את t .



11 הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

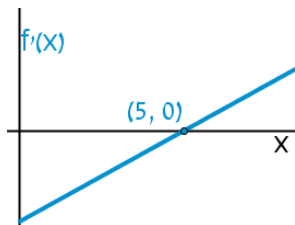
א. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

$$\text{אם } f(5) = 0, f(0) = -4, f(2) = 6$$

וכן $f(10) > 0$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x = 2$.



12 לפניך גרף הפונקציה $f'(x)$.

הגרף המתואר חותך את ציר ה- x

בנקודה אחת בלבד והיא $(5,0)$.

א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

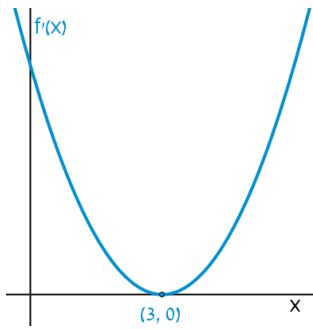
ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y

שלה הוא -2 .

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך

את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



13 הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור.

א. האם ל- $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

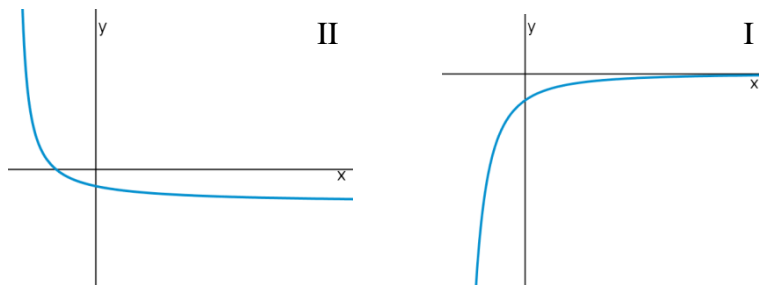
אם ידוע כי $f(3) = 4$ וכי היא חותכת את

ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.

14 באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:

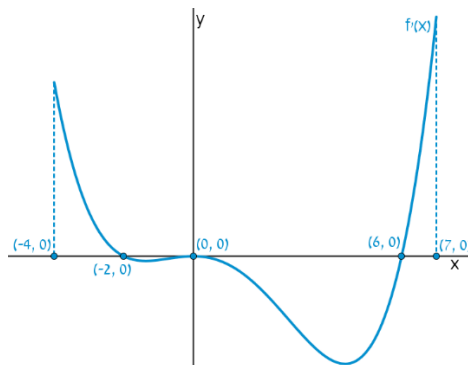


א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.

ב. נתון כי $f(10) = -3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$.

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

15 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:



א. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-4 \leq x \leq 7$,

לפי הנתונים $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.

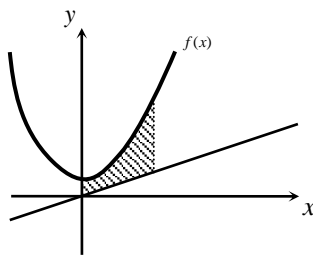
ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מייזים של פונקציות מעריכיות

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



16 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2}\right)$.

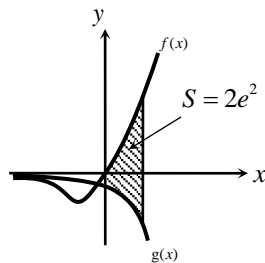
א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$,

והישר: $y = 0.1x$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y

והאנך $x = 2$.



17 ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות $f(x) = xe^x$, $g(x) = -e^x$.

מעבירים ישר $x = a$, $(a > 0)$, החותך את

הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את

השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר.

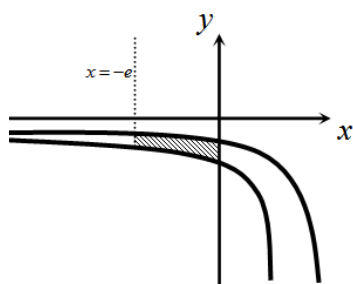
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.

מצא את a .

פונקציות לוגריתמיות

אינטגרלים מייזים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$

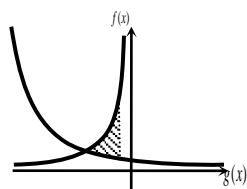


18 באיור שלפניך נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x < 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

- מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.
- חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.



19 נתונות הפונקציות $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה $y = 0.4$.

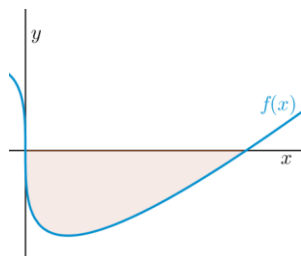
- מצא את הפונקציה $g(x)$.
- מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
- חשב את השטח המוגבל על ידי שני הגרפים והישר $x = -1$.

פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מייזים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

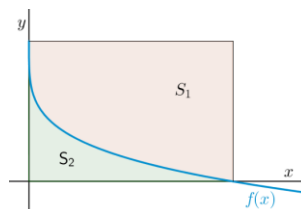
אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$.



20 באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.

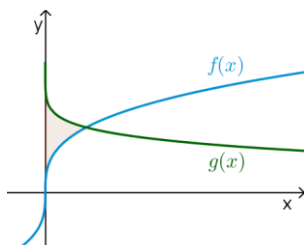
- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



21 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - 4\sqrt[4]{x}$.

- מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן. מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1 ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 .

מצא את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



22 באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - 1 \quad g(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$$

- א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

תשובות סופיות

- (1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש. א. $y = -4x + 4$ ב. $(1, 0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש. (3)
- (2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש. א. $k = 10$ ב. $(1, 9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (3) $\frac{2}{3}$ יח"ש. א. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (4) $y = -4x + 4$ א. $g(x) = (x - 4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (5) $k = 10$ א. $f(x) = x^2 - 6x$ ב. $(0, 0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (6) $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ א. $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ ב. 8 יח"ש.
- (7) $g(x) = (x - 4)^2$ א. הוכחה ב. $t = 1$
- (8) $f(x) = x^2 - 6x$ א. הוכחה ב. 10 יח"ש.
- (9) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. חיובית: $x > 5$, שלילית: $x < 5$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$. ג. $\min(5, -2)$ ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.
- (10) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. לא. הנקודה $(3, 0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.
- (11) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. $f(x): \text{II}$, $f'(x): \text{I}$ ב. 1 יח"ש.
- (12) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. הוכחה ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (13) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$, $a = -2$ ב. 1.52
- (14) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. $y' = xe^x$ ב. $a = 2$
- (15) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$, $a = 2$ ב. $S = 1.76$ יח"ש.
- (16) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. $g(x) = \frac{2}{2x+5}$ ב. $S = \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674$ יח"ש.
- (17) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. $(0, 0)$, $(8, 0)$ ב. $S = 16$ יח"ש.
- (18) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (19) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. $(1, 1)$ ב. $S = \frac{11}{28}$ יח"ש.
- (20) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. $(1, 1)$ ב. $S = \frac{11}{28}$ יח"ש.

חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

שאלות

(1) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

(2) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

תשובות סופיות

(1) $20\frac{5}{6}$

(2) $20\frac{5}{6}$

אורך קשת

שאלות

חשב את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad \text{(2)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad \text{(1)}$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad \text{(4)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad \text{(3)}$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad \text{(6)}$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad \text{(5)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad \text{(8)}$$

$$(0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad \text{(7)}$$

תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad \text{(1)}$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad \text{(2)}$$

$$\frac{1097}{480} \quad \text{(3)}$$

$$21 \quad \text{(4)}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad \text{(5)}$$

$$9 \quad \text{(6)}$$

$$\frac{8}{243} \{82^{1.5} - 1\} \quad \text{(7)}$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad \text{(8)}$$

מתמטיקה ב לכלכלנים

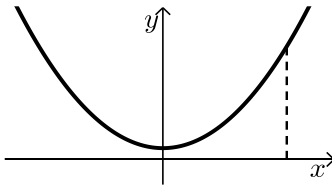
פרק 14 - שימושי האינטגרל המסוים - נפח גוף סיבוב

תוכן העניינים

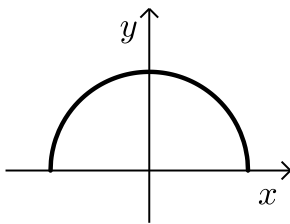
1. חישוב נפח גוף-סיבוב.....96

חישוב נפח גוף-סיבוב

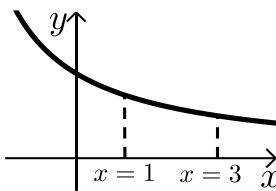
שאלות



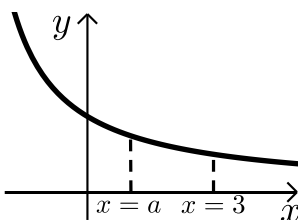
- (1) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 1$.
 השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $x = 3$
 והצירים מסתובב סביב ציר ה- x .
 חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה.



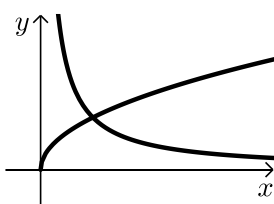
- (2) באיור שלפניך נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה
 עם ציר ה- x .
 ב. חשב את נפח הגוף שנוצר ע"י סיבוב
 גרף הפונקציה סביב ציר ה- x .



- (3) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{12}{x+3}$ בתחום $x \geq 0$.
 גרף הפונקציה מסתובב סביב ציר ה- x .
 מסמנים את נפח הגוף שנוצר בתחום $0 \leq x \leq 1$,
 ב- V_1 ואת נפח הגוף שנוצר בתחום $1 \leq x \leq 3$, ב- V_2 .
 חשב את היחס $\frac{V_1}{V_2}$.

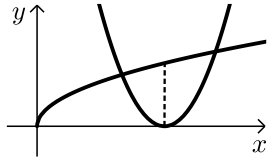


- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{12}{x+3}$ בתחום $x \geq 0$.
 גרף הפונקציה מסתובב סביב ציר ה- x .
 מסמנים את נפח הגוף הנוצר בתחום $0 \leq x \leq a$,
 ב- V_1 ואת נפח הגוף שנוצר בתחום $a \leq x \leq 3$, ב- V_2 .
 מתקיים $V_1 = V_2$.
 מצא את a .



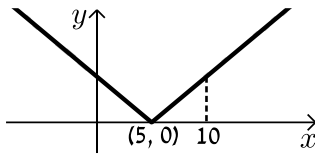
- (5) בשרטוט הבא נתונות הפונקציות ברביע הראשון
 $f(x) = \sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{x}$.
 מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר, כאשר השטח הכלוא
 בין הפונקציות והישר $x = 2$ מסתובב סביב ציר ה- x .

6 נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \sqrt{x}$ ו- $g(x) = (2x-3)^2$.

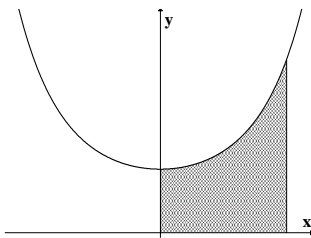


- א. הראה כי הפונקציות נפגשות בנקודה שבה $x=1$.
 ב. השטח הכלוא בין הפונקציות ונמצא משמאל לאורך ציר ה- x , היוצא מקודקוד הפרבולה $g(x)$ מסתובב סביב ציר ה- x . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

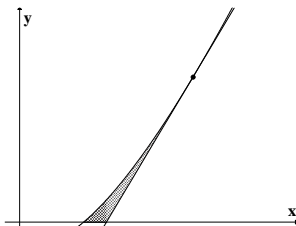
7 לפי גרף הפונקציה $f(x) = |x-5|$.



- א. חשב את נפח הגוף שנוצר כאשר השטח בין גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 10$ ובין ציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .
 ב. האם תוצאת החישוב של הסעיף הקודם תשתנה, אם במקום $f(x) = |x-5|$ נשתמש בפונקציה $g(x) = x-5$? נמק.



8 השטח, הכלוא בין גרף הפונקציה $y = e^{x^2}$ והישרים $y=0$, $x=0$, $x=1$, מסתובב סביב ציר ה- y . מהו נפח הגוף המתקבל?



9 השטח, הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = x \ln x$, המשיק לגרף בנקודה (e, e) וציר ה- x , מסתובב סביב ציר ה- x . מהו נפח הגוף המתקבל?

תשובות סופיות

$$(1) \quad V = 69\frac{3}{5}\pi \text{ יח"ינ}$$

$$(2) \quad \text{א. } (-2,0), (2,0) \quad \text{ב. } V = 10\frac{2}{3}\pi \text{ יח"ינ}$$

$$(3) \quad \frac{V_1}{V_2} = 1$$

$$(4) \quad a = 1$$

$$(5) \quad V = \pi \text{ יח"ינ}$$

$$(6) \quad V = \frac{21}{40}\pi \text{ יח"ינ}$$

$$(7) \quad \text{א. } V = 83\frac{1}{3}\pi \text{ יח"ינ} \quad \text{ב. לא}$$

$$(8) \quad \pi(e-1)$$

$$(9) \quad \frac{e^3 - 4}{54}\pi$$

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 15 - המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל) 99

המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכח כי אם $f(x)$ רציפה ו- $b(x)$, $a(x)$ גזירות, אזי:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזור את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

$$(7) \quad \text{חשב את הגבול: } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt$$

$$(8) \quad \text{חקור את הפונקציה } F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt, \text{ לפי הפירוט הבא:}$$

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

$$I'(x) = e^{-x^2} \quad (3)$$

$$I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2 \quad (4)$$

$$I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1) \ln(x^3 + x) \quad (5)$$

$$I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} \quad (6)$$

$$4e^{16} \quad (7)$$

(8) תחום הגדרה: כל x .

נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל x .

נקודות פיתול: $x = -1, 1, -\frac{3}{7}$.

תחומי קמירות: $x > 1$, $-1 < x < -\frac{3}{7}$.

תחומי קעירות: $-\frac{3}{7} < x < 1$, $x < -1$.

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 16 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

101	1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון
102	2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני
103	3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי
104	4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים
105	5. מבחני השוואה

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2e} \quad (3)$$

$$\text{מתבדר: } \infty \quad (4)$$

$$\frac{5}{4e^2} \quad (5)$$

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלה

(1) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

תשובה

(1) מתבדר: ∞ .

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

(1) חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

תשובה

(1) מתבדר: ∞ .

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

(1) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x = 1$ וציר ה- x , עבור $x \leq 1$.

(2) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x = 5$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$.

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0 \leq x \leq k$, שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x \geq k$. מצא את הקבוע k .

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

מבחני השוואה

שאלות

בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1 + x^2} dx \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (8)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x} dx \quad (7)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (10)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (9)$$

תשובות סופיות

(2) מתבדר.

(1) מתכנס.

(4) מתבדר.

(3) מתבדר.

(6) מתכנס.

(5) מתכנס.

(8) מתכנס.

(7) מתבדר.

(10) מתבדר.

(9) מתכנס.

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 17 - פונקציות של שני משתנים

תוכן העניינים

106	1. מבוא לפונקציה של שני משתנים
108	2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים
110	3. משטחים מפורסמים

מבוא לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצא את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטט סקיצה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x-4y}{x+4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$(11) \quad u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (\text{ענו על סעיף א בלבד})$$

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו, ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטט מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2\ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטט את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k=1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

א. שרטט את קו הגובה $f(x, y) = 0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף?

ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

- * בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
 ** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

(1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

(2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור.

(4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.

(5) $y < x^2$

(6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר GooL.co.il

משטחים מפורסמים

שאלות

זהה ושרטט את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהה ושרטט את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהה כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

מצא את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

ענה על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. זהה את המשטח } 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$$

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשטח הנייל עם הישר

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$$

מצא את החיתוך בין שני המשטחים $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$,

$$\text{ו- } x^2 + y^2 + z^2 = 64$$

הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

9) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. זהה את המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$ ושרטט אותו.
 ב. רשום הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח מסעיף א'.

• להלן נספח עם סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

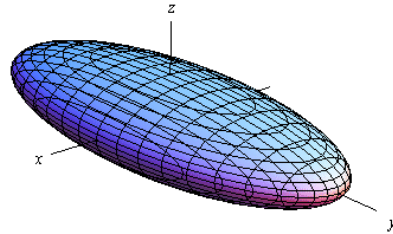
- 1) אליפסואיד.
- 2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- 3) היפרבולואיד חד יריעתי.
- 4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.
 ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.
- 5) א. אליפסואיד.
 ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.
 ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.
- 6) החיתוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$ שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.
- 7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
 נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12)$, $B(\frac{59}{5}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9})$.
- 8) החיתוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$ שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.
- 9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
 ב. $\ell_1 : (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2 : (x, y, z) = (3, 2t, t)$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

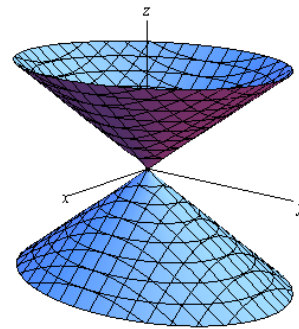
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

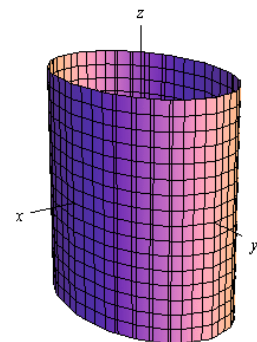
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. * מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים. * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע

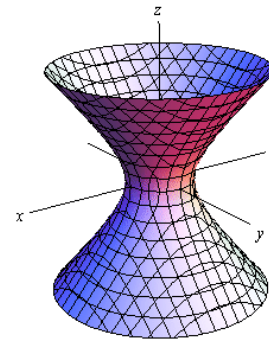


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

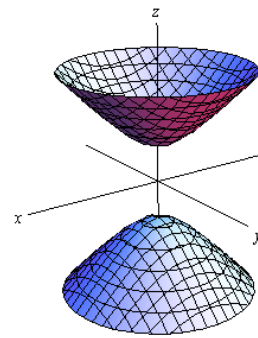
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 : \text{משוואה}$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים

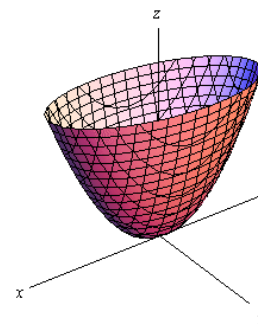
פרבולואיד אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$



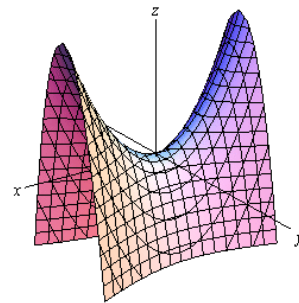
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

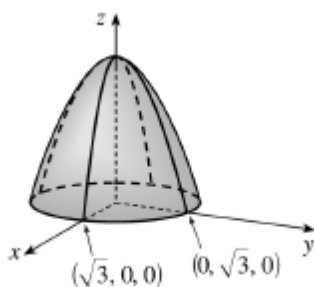
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$

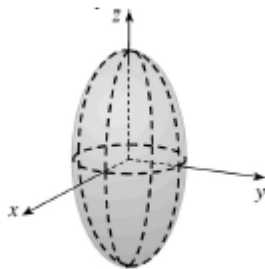
פרבולואיד היפרבולי



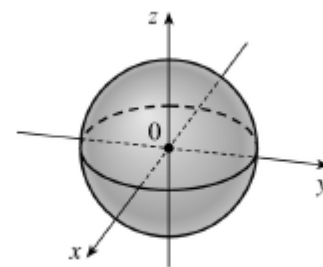
דוגמאות שונות



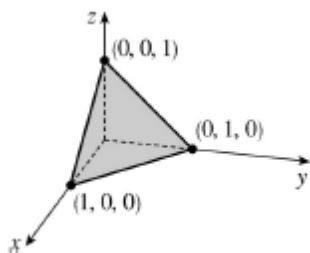
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



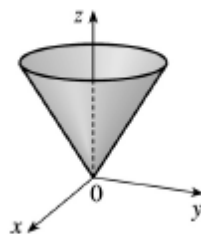
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



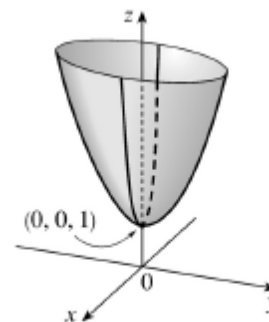
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm\infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 18 - נגזרות חלקיות

תוכן העניינים

116	1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון
118	2. נגזרות חלקיות מסדר שני

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות 1-6 חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \text{ (רק } f_x)$$

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad \text{נתון: } (7)$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \quad \text{הוכח כי:}$$

$$f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad \text{נתון: } (8)$$

$$\text{חשב: } \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \qquad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \qquad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \qquad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \qquad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \qquad f_y = 2xyz^3 \qquad f_x = y^2z^3 \quad (6)$$

שאלת הוכחה. (7)

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (8)$$

הערת סימון

	$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow$	$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$	$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
	$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$	$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-13 חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (13)$$

14) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$

15) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

16) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

17) נתון: $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$

חשב: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$

הערת סימון

$$\begin{array}{l}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

תשובות סופיות

$$f_y = -2x^2y + 10 \quad f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1)$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy \quad f_{yy} = -2x^2$$

$$f_y = \frac{x^4}{y} \quad f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$$

$$f_y = 3y^2 - 6x \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 - 6y \quad (3)$$

$$f_{yx} = -6 \quad f_{xy} = 6 \quad f_{yy} = 6y$$

$$f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4)$$

$$f_{xy} = -3 \quad f_{yy} = 6y - 6$$

$$f_y = x^2 - 2xy \quad f_{xx} = 2y \quad f_x = 2xy - y^2 \quad (5)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y \quad f_{yy} = -2x$$

$$f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] \quad (6)$$

$$f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

$$, f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

$$f_y = e^{xy}(x^2 + xy + 1) \quad f_x = e^{xy}(xy + y^2 + 1) \quad (7)$$

$$f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

$$f_y = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) \quad f_x = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) \quad (8)$$

$$f_{xx} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y}$$

$$f_{yy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y}$$

$$f_{xy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

$$f_y = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) \quad f_x = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9)$$

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_y = xz \qquad f_{xz} = y \qquad f_{xy} = z \qquad f_{xx} = 0 \qquad f_x = yz \quad (13)$$

$$f_{zx} = y \qquad f_z = xy \qquad f_{yz} = x \qquad f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = z$$

$$f_{zz} = 0 \qquad f_{zy} = x$$

$$-2 \quad (14)$$

$$-1 \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (16)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) \quad (17)$$

16

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 19 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 122

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-7,

מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$z = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (8)$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(9) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(10) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.

עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8.

מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2

למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$, $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$.

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 ,

על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

$$(11) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = x^2 + y^2 + axy.$$

א. הוכח שהנקודה $(0, 0)$, היא נק' קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבע עבור אילו ערכים של a , הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכלף, או שלא ניתן לדעת.

תשובות סופיות

- (1) $(-0.5, 1)$ אוכלף; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום; $(-1, -2)$ מקסימום; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכלף.
- (3) $(0, 0)$ אוכלף; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום; $(1, 0)$ מקסימום; $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$ אוכלף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום.
- (6) $(4, 4)$ מקסימום.
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום.
- (8) $z = 4$, $z = 3$
- (9) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (10) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$ רווח מקסימלי 288\$.
- (11) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = -2$, $a = 2$, לא ניתן לדעת; $a < -2$, $a > 2$ אוכלף; $-2 < a < 2$ מינימום.

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 20 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז') 124

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות 1-4, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\max \{xy\} \quad s.t. \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\max \{2x + y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \quad x, y \geq 0 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12, \quad (7)$$

מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$\text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצא את הנקודות} \quad (8)$$

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן

מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$\text{מיושליה קונה בשוק } x \text{ ק"ג מלפפונים ו- } y \text{ ק"ג עגבניות.} \quad (9)$$

התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.

מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מיושליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,

והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.

נסח ופתור את בעיית מיושליה.

- 10** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.
 מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
 לדני תקציב של 12 ש"ח.
 נסח ופתור את בעיית דני.
- 11** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.
 לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה,
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
 נסח ופתור את הבעיה.
- 12** ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
 המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2, P_L = 1$.
 היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) ,
 המביא למינימום את העלות.
 נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(1)}$$

$$\max(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0) \quad \text{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \text{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \text{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \text{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \text{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(8)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \text{(9)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(10)}$$

$$\max(2, 3) \quad \text{(11)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \text{(12)}$$

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 21 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 127

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

- (1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור בצורת משולש שקודקודיו הם $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 5)$.
- (2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 0)$.
- (3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$.
- (5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$.

תשובות סופיות

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| (1) מקסימום מוחלט 7. | מינימום מוחלט -11. |
| (2) מקסימום מוחלט 3. | מינימום מוחלט -1. |
| (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. | מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$. |
| (4) מקסימום מוחלט 6. | מינימום מוחלט -1. |
| (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. | מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$. |

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 22 - פונקציות הומוגניות-משפט אוילר

תוכן העניינים

128	1. פונקציות הומוגניות
131	2. משפט אוילר

פונקציות הומוגניות

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאיזה סדר:

$$f(x, y) = x^3 \sqrt{y} + y^3 \sqrt{x} \quad (1)$$

$$h(x, y) = \frac{\ln(e^{5x})}{\sqrt[3]{ex^6 - 7y^6}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \ln(4^x) \cdot g\left[\frac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right] \quad (3)$$

(4) נתון כי $z(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.

בדוק האם הפונקציה $z(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} + \frac{1}{z(x, y)} - 4$ הומוגנית.

במידה ואינה הומוגנית, השמט ממנה חלק, כך שתתקבל פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

(5) מצא עבור איזה ערך של הפרמטר α , כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות. כמו כן, מצא את סדר ההומוגניות עבור ה- α שמצאת.

$$f(x, y) = \frac{x^4 y + xy^\alpha}{4x + 10y} \quad \text{א.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}} (\ln \alpha x - \ln y) \quad \text{ב.}$$

6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות :
 אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז אם נחלק אותה ב- x^n ,

$$\text{נקבל פונקציה של } \frac{y}{x}.$$

א. הדגם את הטענה על הפונקציות הבאות :

$$1. f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$$

$$2. f(x, y) = \sqrt{x+y}$$

ב. הוכח את הטענה לעיל.

הערה

ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא :

אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז קיימת פונקציה $g(t)$, כך ש- $t = \frac{y}{x}$,

$$\text{המקיימת } \frac{f(x, y)}{x^n} = g(t)$$

7) תהיינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2 , בהתאמה. קבע, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה :

א. $f \cdot g$ ב. $\frac{f}{g}$ ג. $\frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}}$ ד. $f + g$

8) נתון כי f פונקציה הומוגנית מסדר 4.

$$\text{ידוע כי } f(1, 2) = 4, f_x(1, 2) = 10$$

חשב את $f(2, 4)$, $f(0.5, 1)$, $f_x(2, 4)$, $f_x(1.5, 3)$.

9) נתונה פונקציה $f(x, y) = x^4 + y^2 z(x, y)$.

ידוע כי z פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי $f(4, 10) = 1$.

$$\text{א. חשב את } f(2, 5)$$

$$\text{ב. ידוע כי } f_x(1, 1) = 4$$

חשב את $f_x(a, a)$, לכל קבוע a .

תשובות סופיות

- (1) הומוגנית מסדר 3.5
- (2) הומוגנית מסדר -1
- (3) הומוגנית מסדר 1
- (4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השמטת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:
- $f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{1}{z(x, y)}$ הומוגנית מסדר -3
- $f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}$ הומוגנית מסדר -2
- $f(x, y) = -4$ הומוגנית מסדר 0
- (5) א. עבור $\alpha = 4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha > 0$.
- (6) א.1. $g(t) = 1 - t + 2t^2$ א.2. $g(t) = \sqrt{1+t}$ ב. הוכחה.
- (7) א. הומוגנית מדרגה $r_1 + r_2$ ב. הומוגנית מדרגה $r_1 - r_2$.
- ג. הומוגנית מדרגה $2r_1 - \frac{r_2}{n}$
- ד. הומוגנית מדרגה r_1 רק אם $r_1 = r_2$. אחרת לא הומוגנית.
- (8) $f_x(2, 4) = 80$, $f_x(1.5, 3) = 33.75$, $f(2, 4) = 64$, $f(0.5, 1) = \frac{1}{4}$
- (9) א. $f(2, 5) = \frac{1}{16}$ ב. $f_x(a, a) = 4a^3$

משפט אוילר

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$.

- א. הוכח שהפונקציה הומוגנית ומצא את דרגתה.
 ב. הראה שמשפט אוילר מתקיים.

(2) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- $f = f(x, y)$ הומוגנית מסדר 0.

הוכח כי $\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y}{x}$.

ב. נתון כי $f(x, y) = \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{(x-y)(\ln x - \ln y)}$.

הוכח כי $x \cdot f_x = -y \cdot f_y$.

(3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי פונקציית התועלת $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הנח כי m קבוע חיובי.

ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$.

ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2, 2) + u_y(1, 1) = 1$.

(4) תהי f פונקציה הומוגנית מסדר 2.

נגדיר $h(x, y) = x^2 - y^2 + f\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$.

א. הוכח כי h הומוגנית מסדר 2.

ב. נתון $f(8, 1) = 16$, $h'_x(6, 3) = 9$.

מצא את $h(2, 1)$ ואת $h'_y(2, 1)$.

(5) g ו- h הינן פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאמה. נגדיר:

$$f(x, y) = (x + y)h(x, y) + \frac{\sqrt{g(x, y)}}{x^2 + y^2}$$

א. הוכח כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $h(4, 32) = 16$, $f'_y(1, 8) = 3$, $f'_x(2, 16) = 12$,

מצא את: $f(1, 8)$ ואת $g(1, 8)$.

(6) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

מגדירים את הפונקציה: $p(x, y) = f(x, y) + g(x, y) - h(x, y)$.

נתון: $p(1, 2) = \frac{7}{2}$, $h\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{5}{2}$, $f'_y(-1, -2) = -4$, $f'_x(2, 4) = 64$,

חשב את: $g\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

(7) הפונקציה $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 3, והנתונים בשרטוט.

א. מצא את שיעורי הנקודה B.

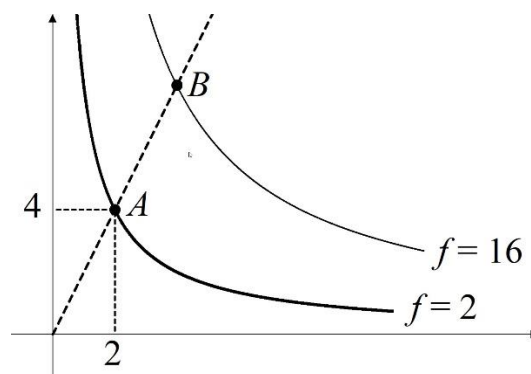
ב. מצא את ערך הסכום $f_x(4, 8) + 2f_y(4, 8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x, y)$, על ידי $u(x, y) = (f(x, y))^2$.

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f_x(x, y)$.
הסבר זאת בקצרה.

2. הוכח כי $x \cdot u_x(x, y) + y \cdot u_y(x, y) = 6(f(x, y))^2$.

היעזר בתת-הסעיף הקודם ובנתונים על f .



8) תהי פונקציה הומוגנית מסדר m ,

$$f(2,1) = 27 \text{ ו- } f(6,3) = 243.$$

א. מצא את סדר ההומוגניות m .

ב. בנקודה $(2,1)$ עוברת עש״ע של f .

מעבירים משיק לעש״ע בנקודה הנ״ל.

$$\text{המשיק הוא } 2x + 3y = 7.$$

מצא את $f_x(2,1)$, $f_y(2,1)$, $f_x(1,0.5)$.

9) תהי פונקציה של משתנה אחד $g(t)$.

$$\text{על הפונקציה } g \text{ ידוע, כי } g'(8) = 2, g(1) = 3, g(4) = 5.$$

המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x, y) , כך: $t = \frac{4y}{x}$.

מגדירים תועלת u כפונקציה של המשתנים (x, y) , באופן הבא:

$$u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right)$$

א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1.

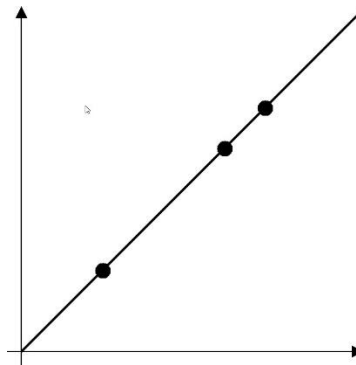
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכח כי הקרן $4y - x = 0$ היא עקומת אדישות של התועלת.

צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכח כי $u_x(1,2) = -16$.



10) נניח ש- $f = f(x, y)$ הומוגנית מסדר 1.

$$\text{הוכח כי } x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0.$$

- 11** מפעל מייצר x חולצות ו- y מכנסיים. הרווח השולי, המתקבל מייצור כל אחד מהמוצרים, נתון על ידי:
- $$f_x(x, y) = 4x + 8y, \quad f_y(x, y) = 8x + 20y$$
- מצא את פונקציית הרווח של המפעל, אם ידוע שפונקציה זו הומוגנית.
- 12** לחברת 'מזון בריא' יש 300 מכונות:
- א. מצא את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.
 - ב. מצא כמה מכונות מכל סוג על המפעל להחזיק, כדי לקבל את התפוקה הכוללת המקסימלית.
- הערה: סעיף ב אינו קשור להומוגניות ועוסק בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".
- 13** בחברת 'שוקולד פנדה' בדקו ומצאו, כי התפוקה השולית, המתקבלת משימוש ב- x טון סוכר ו- y טון קקאו, נתונה על ידי $f_x(x, y) = 3x^2y^2$, $f_y(x, y) = 2x^3y$.
- א. מצא את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.
 - ב. מצא את כמות הסוכר והקקאו בהם מתקבלת תפוקה מקסימלית. מהי התפוקה במקרה זה?
 - ג. כיצד תשתנה התשובה, אם מחירי הסוכר והקקאו יהיו שניהם 5,000 ₪ לטון?
- הערה: סעיפים ב-ג אינם קשורים להומוגניות ועוסקים בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".
- 14** הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
- א. אם $f_x(x, y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 5.
 - ב. אם פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $f(2, 4) = 2^3 f(1, 2)$, אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. $h_y'(2,1) = 8$ $h(2,1) = 4$
- (5) א. שאלת הוכחה. ב. $f(1,8) = 9$, $g(1,8) = 0$
- (6) $-\frac{3}{4}$
- (7) א. $B(4,8)$ ב. 12 ג. הוכחה והסבר.
- (8) א. 2 ב. $f_x(1,0.5) = \frac{54}{7}$, $f_y(2,1) = \frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}$, $f_x(2,1) = \frac{108}{7}$
- (9) א. 5 ב-ד. שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) $f(x, y) = 2x^2 + 8xy + 10y^2$
- (12) א. $f(x, y) = 9x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ ב. על המפעל להחזיק 200 מכונות לייצור שוקולד ו-100 מכונות לייצור גלידה, כדי לקבל תפוקה מקסימלית.
- (13) א. $f(x, y) = x^3y^2$ ב. אם המפעל ישתמש ב-10 טון סוכר ו-10 טון קקאו, הוא יקבל תפוקה מקסימלית השווה ל- $f(10,10) = 10^310^2 = 100000$ חפיסות שוקולד. ג. התשובה לא תשתנה.
- (14) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 23 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים 136

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

(1) נתון: $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = \ln(x^2 - y^2)$
 חשב: z_u , z_v .

(2) נתון: $v = 4t + k$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$
 חשב: z_t , z_m , z_k .

(3) נתון: $z = f(x^2 - y^2)$
 הוכח: $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$

(4) נתון: $z = f(xy)$
 הוכח: $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$

(5) נתון: $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$
 הוכח: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$

(6) נתון: $z = f(x - y, y - x)$
 הוכח: $z_x + z_y = 0$

(7) נתון: $w = f(x - y, y - z, z - x)$
 הוכח: $w_x + w_y + w_z = 0$

(8) נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$
 הוכח: $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$

$$(9) \text{ נתון: } z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{הוכח: } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$$

$$(10) \text{ נתון: } u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

$$\text{הוכח: } xu_x + yu_y + zu_z = 2u$$

$$(11) \text{ נתון: } h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$$

$$\text{הוכח: } h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u$$

$$(2) \quad z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1$$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 24 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

1. פונקציות סתומות - הפן הטכני 138

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

(1) מצא את y' , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$,
וחשב את $y'(0)$.

(2) מצא את $y'(1)$, כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.

(3) מצא את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.

(4) נתונה המשוואה $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$.
הוכח כי $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$.

(5) נתון $z^3 - 2xz + y = 0$ ($z = z(x, y) \geq 0$).
מצא $z_{xx}(1, 1)$.

(6) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2, 1, -2)$. מצא:

א. $z_{xx}(2, 1)$

ב. $z_{xy}(2, 1)$

ג. $z_{yy}(2, 1)$

(7) נתונה מערכת משוואות:
$$\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$$

א. חשב את u_x, v_x, u_y, v_y .

ב. הראה כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, \quad y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

שאלת הוכחה. (4)

$$z_x(1,1) = -16 \quad (5)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, \quad z_{yy}(2,1) = 4 \quad (6)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left(uv \neq \frac{1}{8} \right) \text{ א.} \quad (7)$$

ב. שאלת הוכחה.

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 25 - פתרון בחינות לדוגמא בר אילן

תוכן העניינים

1. סמסטר ב מועד א תשסח (ללא ספר)
2. סמסטר ב מועד ב תשסח (ללא ספר)
3. סמסטר ב מועד א תשסט (ללא ספר)
4. סמסטר ב מועד ב תשסט (ללא ספר)

מתמטיקה ב לכלכלנים

פרק 26 - גבולות ורציפות של פונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

140	1. גבול של פונקציה של שני משתנים
142	2. רציפות של פונקציה של שני משתנים

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-3 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (3)$$

חשב את הגבולות בשאלות 4-10 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (6)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (5)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (4)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (9)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (8)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (7)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (10)$$

חשב את הגבולות בשאלות 11-16 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (12)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (11)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (13)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (16)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (15)$$

(17) שימוש בגבולות ידועים מחדו"א במשתנה אחד :

א. העזר בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, וחשב את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$.

ב. העזר בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$, וחשב את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שכותב השאלה לא ייתן את הגבול הידוע בגוף השאלה.

תשובות סופיות

(1) 0

(2) $\frac{1}{2}$

(3) 2

(4) – 10 אין לפונקציה גבול.

(11) 0

(12) 0

(13) 0

(14) 3

(15) 0

(16) 0

(17) א-ב. 0

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

(1) בדוק את רציפות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.
 במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
 האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2) נתונה פונקציה ממשית רציפה $f = f(x)$, שאינה פונקציה קבועה.

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0,0)$?

(3) הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

אם $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y)$ לכל y ,

וגם $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0)$ לכל x ,

אז $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$.

תשובות סופיות

(1) הפונקציה רציפה.

(2) הפונקציה לא רציפה.

(3) שאלת הוכחה.