מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

פרק 1 - גרפים

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

פרק 2 - נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

פרק 3 - מבוא לקומבינטוריקה

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

פרק 4 - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

פרק 5 - פונקציות

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

פרק 6 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

מבוא:

שאלות:

1) לגבי כל אחד והממדים הבאים רשום ב-$\square$ את הסימנים המתאימים: $\in,\notin,\subseteq,\subset,\not\subseteq$ תיתכן יותר מתשובה אחת. במקרה שרשמת את הסימן $\not\subseteq$ נמק את תשובתך.

א. $1\square\{1,\{1\}\}$.
ב. $\{1\}\square\{1,\{1\}\}$.
ג. $\{8,\varnothing\}\square\{1,2,8\}$.
ד. $\varnothing\square\{1,2\}$.
ה. $\varnothing\square\{\varnothing,1,2\}$.
ו. $\{2\}\square\{\{1,\{2\}\}\}$.
ז. $\{2\}\square\{2,\{2,\{2\}\}\}$.
ח. $\{2\}\square\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$.
ט. $\{2\}\square\{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$.
י. $\{\{2\},\varnothing\}\square\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$.
יא. $\varnothing\square\{1,\{\varnothing\}\}$.
יב. $\{\varnothing\}\square\{1,\{\varnothing\}\}$.
יג. $\{1,2\}\square\{1,\{2\}\}$.
יד. $1\square\mathbb{N}$.
טו. $\{1\}\square\mathbb{N}$.
טז. $1\square\{\mathbb{N}\}$.
יז. $\{1\}\square\{\mathbb{N}\}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\in$. ב. $\in,\subseteq,\subset$. ג. $\notin,\not\subseteq$. ד. $\notin,\subseteq,\subset$. ה. $\in,\subseteq,\subset$.
ו. $\notin,\not\subseteq$. ז. $\notin,\subseteq,\subset$. ח. $\in,\subseteq,\subset$. ט. $\in,\subseteq,\subset$. י. $\notin,\not\subseteq$.
יא. $\notin,\subseteq,\subset$. יב. $\in,\not\subseteq$. יג. $\notin,\not\subseteq$. יד. $\in,\notin$. טו. $\notin,\subseteq,\subset$.
טז. $\notin$. יז. $\notin,\not\subseteq$.

פעולות על קבוצות:

שאלות:

1) עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$. ב. $(A\cap B)\cup C$. ג. $A\cap(B\cup C)$.

ד. $P(A)$. ה. $C\setminus A$.

2) עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$ ענה על השאלות הבאות:

א. האם $B\subseteq C$. ב. האם $\{1\}\subseteq B$. ג. האם $\{1\}\subseteq A$.

ד. האם $\{1\}\in P(A)$. ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$. ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$.

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$.

3) עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\},B=\{4,\varnothing\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $A\cup B$. ב. $A\cap B$. ג. $A-B$. ד. $B-A$. ה. $A\oplus B$.

תקיים: $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus(C\setminus B))$.

תשובות סופיות:

1) א. $\{1,2,6\}$. ב. $\{1,3,4,6\}$. ג. $\{1,3\}$. ד. $2\notin P(A)$.

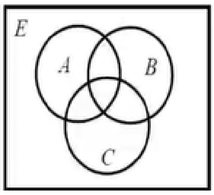
2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
ה. לא. ו. כן. ז. כן.

3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$. ב. $\{\varnothing\}$. ג. $\{1,\{3,*\}\}$. ד. $\{4\}$.
ה. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

דיאגרמת וון:

שאלות:

1) באיור שלפניך דיאגרמת וון:

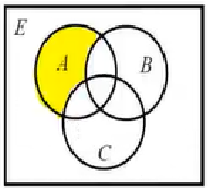


קווקו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

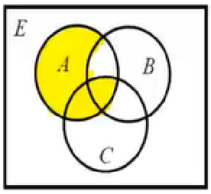
א. $(A-B)-C$.
ב. $A-(B-C)$.
ג. $A\cap B^c$.
ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$.
ה. $(A\cap B)\cap C$.
ו. $A\cap(B\cap C)$.
ז. $(A\cup B)\cup C$.
ח. $A\cup(B\cup C)$.

תשובות סופיות:

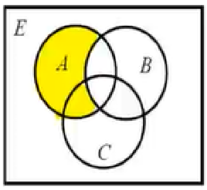
1) א.



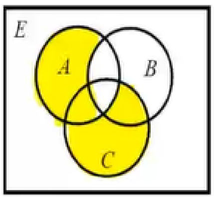
ב.



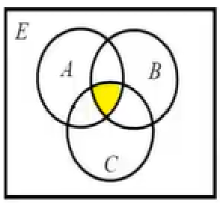
ג.



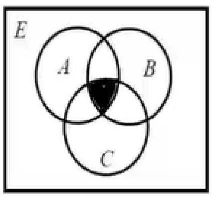
ד.



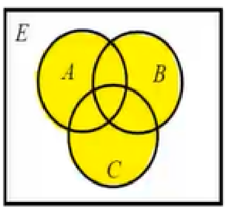
ה.



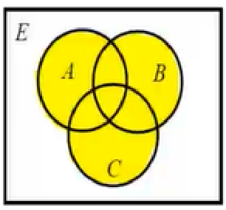
ו.



ז.



ח.



קריאת קבוצות:

שאלות:

1) צפה בשיעור קריאת קבוצות ועבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ רשום בשתי הדרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים:
$\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,...\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי:
$A=\{1,4,9,16,25,36,49,...\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי:
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,...\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים:
$C=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},...\right\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2:
$D=\left\{2^1,2^2,2^3,...\right\}=\{2,4,8,16,32,...\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $C=\left\{3n-1 \middle| n\in\mathbb{N}\right\}$.

ב. $K=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| |x|\geq 2\rightarrow x^2>41\right\}$.

ג. $C=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| |x|\geq 7\rightarrow x<20\right\}$.

ד. $C=\left\{3n-1 \middle| n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\right\}=\left\{3n-1 \middle| \sqrt{n}\in\mathbb{N}\right\}$.

ה. $C=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| x\geq 8\rightarrow x^2<67\right\}$.

תשובות סופיות:

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$.

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$.

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$.

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$.

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$.

שאלות הוכחה:

שאלות:

לכל אחת משאלות הפרק פעל באופן הבא:

1) תהיינה A,B קבוצות.
אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ותן נימוק קצר מדוע היא נכונה.
אם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית.
בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם.
את הטענות הנכונות מבין יב-כא נסה להוכיח. במיוחד טענה יב' בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x\notin A$ אז $x\notin A\cup B$.
ב. אם $x\notin A\cup B$ אז $x\notin A$.
ג. אם $x\notin A$ אז $x\notin A\cap B$.
ד. אם $x\notin A\cap B$ אז $x\notin A$.
ה. אם $x\notin A$ אז $x\notin A-B$.
ו. אם $x\notin A-B$ אז $x\notin A$.
ז. אם $x\in B$ אז $x\notin A-B$.
ח. אם $x\notin A-B$ אז $x\in B$.
ט. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\notin A$.
י. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\in B$.
יא. השלם $x\notin A-B \Leftrightarrow$ ______.
יב. $A\subseteq B\cap C \Leftrightarrow (A\subseteq B \wedge A\subseteq C)$.
יג. $A\subseteq B\cup C \Leftrightarrow (A\subseteq B \vee A\subseteq C)$.
יד. אם $A=A\cup B$ אז $A\subseteq B$.
טו. אם $A=A\cup B$ אז $B\subseteq A$.
טז. אם $A=A\cap B$ אז $A\subseteq B$.
יז. אם $A=A\cap B$ אז $B\subseteq A$.
יח. אם $A\subseteq B$ אז $A=A\cup B$.
יט. אם $B\subseteq A$ אז $A=A\cup B$.
כ. אם $A\subseteq B$ אז $A=A\cap B$.
כא. אם $B\subseteq A$ אז $A=A\cap B$.

2) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות:

א. אם $A=A-B$ אז $B=\varnothing$.
ב. אם $A=A-B$ אז $A\cap B=\varnothing$.
ג. אם $A=A\cup B$ אז $A\cap B=B$.
ד. אם $B=A\cup B$ אז $A\cap B=B$.
ה. אם $A\cap B=A$ אז $A=A\cup B$.
ו. אם $A\cap B=B$ אז $A=A\cup B$.
ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.
ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$.
ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$.
י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$.
יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.
יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.
יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$.
יד. לפניך שתי טענות הוכח את הנכונה והפרך את השגויה:
i. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$.
ii. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$.

תשובות סופיות:

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x \in B \vee x \notin A$. יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.i. נכונה. יד.ii. לא נכונה.

דרך השלילה:

שאלות:

הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α אז β מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$ אז $A\cap C=\varnothing$.
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$ אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$ אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$ אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$. אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$ אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

קבוצת חזקה:

שאלות:

1) עבור $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $A=\{3,\{\varnothing\}\}$ רשום את הקבוצות הבאות:

א. את $P(C)$ ואת $P(B)$ ואת $P(A)$.

ב. $P(A)\cap B$ ואת $P(A)\cap A$ ואת $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$:

א. רשום את $P(A)$ ואת $P(B)$.

ב. רשום את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.

ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשום את $P(\varnothing)$ ואת $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות:

א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.

ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$.

ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$.

ה. $P(A)\cap A=\varnothing$.

ו. תן דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.

ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה:

ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$ אז $A\cap B=\varnothing$.

ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. נתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכח כי $B-A=B$.

תשובות סופיות:

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,

$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.

ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.

ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.

ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P\left(P(P(\varnothing))\right)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראה סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

מכפלה קרטזית:

שאלות:

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א. $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$.

ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$.

ג. הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים:
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.

ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$ אז
$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.

ה. הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים:
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

2) הוכיחו או הפריכו: תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$ אז קיימות $C\subseteq A$ ו- $D\subseteq B$ כך ש- $S=C\times D$.

3) הוכח או הפרך: קיימות שתי קבוצות A,B כך ש- $|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$
(סימון $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכח או הפרך: לכל שלוש קבוצות A,B,C $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגם שלוש קבוצות A,B,C כך ש- $(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.

2) לא נכונה.

3) לא נכונה.

4) נכונה.

5) ראה סרטון.

מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

פרק 7 - עוצמות

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

פרק 8 - יחסים

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

פרק 9 - לוגיקה

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

פרק 10 - אינדוקציה

תוכן העניינים

אינדוקציה

שאלות

1) הוכח באינדוקציה כי $4\cdot 10^n+14\cdot 19^n$ מתחלק ב-9 לכל n טבעי.

2) הוכח באינדוקציה כי $\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$ $(k,n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R})$.

3) מצא את ה- n הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים $2^n\ge n^2$,
והוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

4) הוכח את הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה כי $(1+x)^n\ge 1+nx$, לכל n טבעי ולכל $x\ge -1$ ממשי.
הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכח כי $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, לכל n טבעי.
רמז: היעזר בתוצאת סעיף א'.

5) הוכח באינדוקציה כי $\frac{1}{1+xn}>(1-x)^n$ לכל $0<x<1,\ n\in\mathbb{N}$.

6) הוכח באינדוקציה כי $n!\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
רמז: היעזר במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

7) נתון כי $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$.
הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:

א. $a_n\le 2$

ב. $a_n\le a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיביות.

8) הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי,
אם $a_1=-1,\ a_2=0$, $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$,
אז $a_n=n^2-2n$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיבית.

9) הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי,

אם $a_1 = 1,\ a_2 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$,

אז $a_n = \frac{1}{6}\cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n$.

הערה : תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיביות.

10) הוכח באינדוקציה כי $4^n - 1$ מתחלק ב-15, לכל n טבעי **זוגי**.

11) הוכח באינדוקציה כי $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ $(n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R})$.

הערה : תרגיל זה מיועד רק למי שלמד כפל מטריצות (אלגברה ליניארית).

הערה : תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים" בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

פרק 11 - הכלה והדחה

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית למהנדסי נתונים

פרק 12 - שובך היונים

תוכן העניינים