מתמטיקה דיסקרטית 1

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית 1

פרק 1 - לוגיקה

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית 1

פרק 2 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

מבוא:

שאלות:

1) לגבי כל אחד והממדים הבאים רשום ב-$\square$ את הסימנים המתאימים : $\in,\notin,\subseteq,\subset,\not\subseteq$
תיתכן יותר מתשובה אחת. במקרה שרשמת את הסימן $\not\subseteq$ נמק את תשובתך.

א. $1\square\{1,\{1\}\}$.
ב. $\{1\}\square\{1,\{1\}\}$.
ג. $\{8,\varnothing\}\square\{1,2,8\}$.
ד. $\varnothing\square\{1,2\}$.
ה. $\varnothing\square\{\varnothing,1,2\}$.
ו. $\{2\}\square\{\{1,\{2\}\}\}$.
ז. $\{2\}\square\{2,\{2,\{2\}\}\}$.
ח. $\{2\}\square\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$.
ט. $\{2\}\square\{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$.
י. $\{\{2\},\varnothing\}\square\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$.
יא. $\varnothing\square\{1,\{\varnothing\}\}$.
יב. $\{\varnothing\}\square\{1,\{\varnothing\}\}$.
יג. $\{1,2\}\square\{1,\{2\}\}$.
יד. $1\square\mathbb{N}$.
טו. $\{1\}\square\mathbb{N}$.
טז. $1\square\{\mathbb{N}\}$.
יז. $\{1\}\square\{\mathbb{N}\}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\in$.
ב. $\in,\subseteq,\subset$.
ג. $\notin,\not\subseteq$.
ד. $\notin,\subseteq,\subset$.
ה. $\in,\subseteq,\subset$.
ו. $\notin,\not\subseteq$.
ז. $\notin,\subseteq,\subset$.
ח. $\in,\subseteq,\subset$.
ט. $\in,\subseteq,\subset$.
י. $\notin,\not\subseteq$.
יא. $\notin,\subseteq,\subset$.
יב. $\in,\not\subseteq$.
יג. $\notin,\not\subseteq$.
יד. $\in,\notin$.
טו. $\notin,\subseteq,\subset$.
טז. $\notin$.
יז. $\notin,\not\subseteq$.

פעולות על קבוצות:

שאלות:

1) עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$. ב. $(A\cap B)\cup C$. ג. $A\cap(B\cup C)$.

ד. $P(A)$. ה. $C\setminus A$.

2) עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$ ענה על השאלות הבאות:

א. האם $B\subseteq C$. ב. האם $\{1\}\subseteq B$. ג. האם $\{1\}\subseteq A$.

ד. האם $\{1\}\in P(A)$. ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$. ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$.

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$.

3) עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\},B=\{4,\varnothing\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $A\cup B$. ב. $A\cap B$. ג. $A-B$. ד. $B-A$. ה. $A\oplus B$.

תקיים: $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus(C\setminus B))$.

תשובות סופיות:

1) א. $\{1,2,6\}$. ב. $\{1,3,4,6\}$. ג. $\{1,3\}$. ד. $2\notin P(A)$.

2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.

ה. לא. ו. כן. ז. כן.

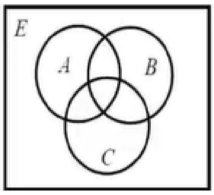
3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$. ב. $\{\varnothing\}$. ג. $\{1,\{3,*\}\}$. ד. $\{4\}$.

ה. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

דיאגרמת וון:

שאלות:

1) באיור שלפניך דיאגרמת וון :



קווקו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות :

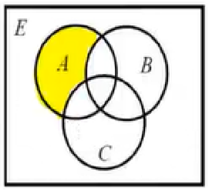
א. $(A-B)-C$. ב. $A-(B-C)$. ג. $A\cap B^c$.

ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$. ה. $(A\cap B)\cap C$. ו. $A\cap(B\cap C)$.

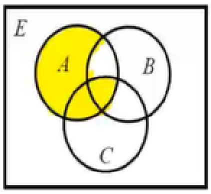
ז. $(A\cup B)\cup C$. ח. $A\cup(B\cup C)$.

תשובות סופיות:

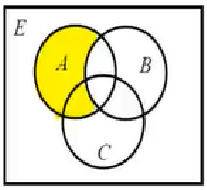
1) א.



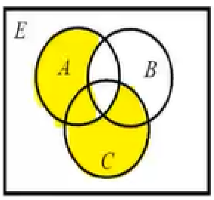
ב.



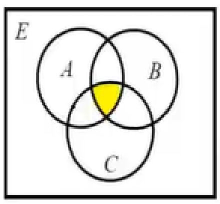
ג.



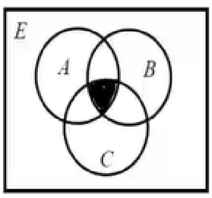
ד.



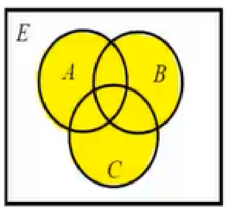
ה.



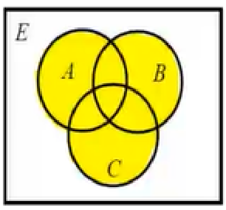
ו.



ז.



ח.



קריאת קבוצות:

שאלות:

1) צפה בשיעור קריאת קבוצות ועבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ רשום בשתי הדרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים:
$\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,...\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי:
$A=\{1,4,9,16,25,36,49,...\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי:
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,...\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים:
$C=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},...\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2:
$D=\{2^1,2^2,2^3,...\}=\{2,4,8,16,32,...\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $C=\{3n-1 | n\in\mathbb{N}\}$.

ב. $K=\{x\in\mathbb{Z} | |x|\geq 2\rightarrow x^2>41\}$.

ג. $C=\{x\in\mathbb{Z} | |x|\geq 7\rightarrow x<20\}$.

ד. $C=\{3n-1 | n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}=\{3n-1 | \sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$.

ה. $C=\{x\in\mathbb{Z} | x\geq 8\rightarrow x^2<67\}$.

תשובות סופיות:

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\left|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right.\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$.

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$.

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$.

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$.

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$.

שאלות הוכחה:

שאלות:

לכל אחת משאלות הפרק פעל באופן הבא:

1) תהיינה A,B קבוצות.
אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ותן נימוק קצר מדוע היא נכונה.
אם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית.
בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם.
את הטענות הנכונות מבין יב-כא נסה להוכיח. במיוחד טענה יב' בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x\notin A$ אז $x\notin A\cup B$.
ב. אם $x\notin A\cup B$ אז $x\notin A$.
ג. אם $x\notin A$ אז $x\notin A\cap B$.
ד. אם $x\notin A\cap B$ אז $x\notin A$.
ה. אם $x\notin A$ אז $x\notin A-B$.
ו. אם $x\notin A-B$ אז $x\notin A$.
ז. אם $x\in B$ אז $x\notin A-B$.
ח. אם $x\notin A-B$ אז $x\in B$.
ט. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\notin A$.
י. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\in B$.
יא. השלם $x\notin A-B \Leftrightarrow$ ______.
יב. $A\subseteq B\cap C \Leftrightarrow (A\subseteq B \wedge A\subseteq C)$.
יג. $A\subseteq B\cup C \Leftrightarrow (A\subseteq B \vee A\subseteq C)$.
יד. אם $A=A\cup B$ אז $A\subseteq B$.
טו. אם $A=A\cup B$ אז $B\subseteq A$.
טז. אם $A=A\cap B$ אז $A\subseteq B$.
יז. אם $A=A\cap B$ אז $B\subseteq A$.
יח. אם $A\subseteq B$ אז $A=A\cup B$.
יט. אם $B\subseteq A$ אז $A=A\cup B$.
כ. אם $A\subseteq B$ אז $A=A\cap B$.
כא. אם $B\subseteq A$ אז $A=A\cap B$.

2) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות:

א. אם $A=A-B$ אז $B=\varnothing$.
ב. אם $A=A-B$ אז $A\cap B=\varnothing$.
ג. אם $A=A\cup B$ אז $A\cap B=B$.
ד. אם $B=A\cup B$ אז $A\cap B=B$.
ה. אם $A\cap B=A$ אז $A=A\cup B$.
ו. אם $A\cap B=B$ אז $A=A\cup B$.
ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.
ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$.
ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$.
י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$.
יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.
יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.
יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$.
יד. לפניך שתי טענות הוכח את הנכונה והפרך את השגויה:
i. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$.
ii. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$.

תשובות סופיות:

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x \notin A$ V $x \in B$. יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.i. נכונה. יד.ii. לא נכונה.

דרך השלילה:

שאלות:

הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α אז β מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$ אז $A\cap C=\varnothing$.
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$ אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$ אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$ אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$. אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$ אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

קבוצת חזקה:

שאלות:

1) עבור $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $A=\{3,\{\varnothing\}\}$ רשום את הקבוצות הבאות:

א. את $P(C)$ ואת $P(B)$ ואת $P(A)$.

ב. $P(A)\cap B$ ואת $P(A)\cap A$ ואת $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$:

א. רשום את $P(A)$ ואת $P(B)$.

ב. רשום את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.

ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשום את $P(\varnothing)$ ואת $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות:

א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.

ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$.

ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$.

ה. $P(A)\cap A=\varnothing$.

ו. תן דוגמא לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.

ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה:

ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$ אז $A\cap B=\varnothing$.

ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. נתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכח כי $B-A=B$.

תשובות סופיות:

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.
ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.
ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.
ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראה סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

מכפלה קרטזית:

שאלות:

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א. $(A=B) \Leftrightarrow (A\times A=B\times B)$.

ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B)) \Leftrightarrow (A\times B=B\times A)$.

ג. הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים:

$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.

ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$ אז

$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.

ה. הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים:

$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

2) הוכיחו או הפריכו: תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$ אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$ כך ש-$S=C\times D$.

3) הוכח או הפרך: קיימות שתי קבוצות A,B כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$

(סימן $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכח או הפרך: לכל שלוש קבוצות A,B,C $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגם שלוש קבוצות A,B,C כך ש-$(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.

2) לא נכונה.

3) לא נכונה.

4) נכונה.

5) ראה סרטון.

מתמטיקה דיסקרטית 1

פרק 3 - פונקציות

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית 1

פרק 4 - יחסים

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית 1

פרק 5 - קומבינטוריקה בסיסית

תוכן העניינים

מבוא לקומבינטוריקה בסיסית:

שאלות:

1) חשב, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$ ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$

2) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{n^2-2}{(n+1)!}+\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

3) חשב ללא מחשבון:

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\frac{1}{13}\binom{14}{11}$

4) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $1=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$ ב. $\binom{n-1}{k-1}=\frac{k}{n}\binom{n}{k}$

ג. $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$ ד. $\binom{2n+1}{n}=\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}$

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון?
רשום את כל התוצאות.

ב. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון ואחר כך מטבע? רשום את כל התוצאות.

ג. עושים ניסוי. מטילים מטבע. אם יצא עץ אז מטילים סביבון ואם יצא פלי אז מטילים שוב את המטבע ולאחר מכן סביבון.
כמה תוצאות אפשריות לניסוי?
למשל (פלי, פלי, גדול) ו-(עץ, היה) הן תוצאות אפשריות.
רשום את כל התוצאות.

6) ענה על הסעיפים הבאים:
א. מהאותיות ב, ג, ד, ה יוצרים מילה בת שתי אותיות לא בהכרח בעלת משמעות. רשום את כל המילים האפשריות ואשר עם עיקרון הכפל.
ב. מהאותיות א, ב, ג, ד, ה יוצרים מילה בת שלוש אותיות לא בהכרח בעלת משמעות. כמה מהמילים הנ"ל מתחילות באות א וגם א מופיעה פעם אחת בדיוק? (רמז סעיף קודם).

7) במסעדה מציעים ארוחה עסקית. הארוחה מורכבת ממנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. מנה ראשונה יכולה להיות סלט ירקות, סלט פטריות, סלט כבד קצוץ או מרק עוף. מנה עיקרית יכולה להיות סטייק אנטריקוט, שניצל, כבד אווז, דג, לזניה טבעונית, או שניצל מהצומח, ולשתייה מוצע, קפה, תה, לימונדה או קולה.
א. כמה ארוחות אפשריות יש?
ב. כמה ארוחות אפשריות יש אם אין שתיה חמה?
ג. כמה ארוחות אפשרויות יש למסעדה להציע לסועד טבעוני?

8) כמה תת קבוצות יש לקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$?
א. בנות שלושה איברים? רשום את כולן.
ב. בנות ארבעה איברים? השווה לסעיף א'.
ג. רשום את כל התמורות של 0001111 והשווה לסעיפים קודמים.
ד. בכמה תמורות של המספרים 00112222222 כל 0 חייב להופיע ליד 1?

9) בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב זוג מתלמידי כיתות א' אם בכיתה א' 1 יש 20 בנים ובכיתה א' 2 יש 15 בנות כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. זוג מעורב. (בן ובת)
ג. זוג חד מיני. (שני בנים, או שתי בנות)

10) בלוטו יש 45 מספרים וצריך לנחש 6 מספרים ואת המספר החזק בתוך הקבוצה $\{1,2,3,4,\cdots,10\}$. כמה אפשרויות יש?

11) בכמה אופנים שונים ניתן לבחור מספר תלת ספרתי כך ש:
א. ללא הגבלה. (זכרו שמספר לא יכול להתחיל באפס)
ב. כל ספרותיו שונות.
ג. כל ספרותיו שונות וסדר הספרות לא משנה? (למשל 123 ו-321 נחשבים אותו דבר)
ד. כל ספרותיו שונות וגם בסדר יורד כלומר ספרת המאות גדולה או שווה מספרת העשרות גדולה או שווה מספרת היחידות.
ה. כל ספרותיו שונות וגם בסדר עולה כלומר ספרת המאות קטנה או שווה מספרת העשרות קטנה או שווה מספרת היחידות.

12) כמה מספרים מורכבים מהמספרים 1,2,3,4,5,6,7 יש כך ש:

א. באורך 7?

ב. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לכל היותר?

ג. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לפחות?

13) בכמה אופנים שונים ניתן להושיב 5 זוגות נשואים על ספסל בן 10 מקומות (ענה גם לגבי שולחן עגול) כך ש:

א. ללא הגבלה.

ב. כל אישה תשב לצד בעלה.

ג. גבר ישב רק ליד אישה.

ד. אף שתי נשים לא ישבו זו לצד זו ואף שני גברים לא ישבו זה לצד זה.

14) כמה מספרים שונים בני חמש ספרות ניתן להרכיב מהספרות 1,2,3,4,5,6,7 כך ש:

א. ללא הגבלה.

ב. המספר מתחיל בספרה 2.

ג. המספר לא מתחיל בספרה 2.

ד. כל הספרות שונות.

ה. הספרות 1 וגם 2 לא מופיעות.

ו. בדיוק 1 מן הספרות 1 או 2 מופיעה.

ז. ספרות 1 וגם 2 מופיעות.

ח. חזור על סעיפים ה-ז כאשר כל הספרות שונות.

ט. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות צמודות.

י. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות ולא צמודות.

יא. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות.

יב. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות וגם הספרות 6,7 מופיעות וצמודות.

יג. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות וגם הספרות 6,7 מופיעות ולא צמודות.

15) בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב קוד סודי המורכב מארבע ספרות מתוך הספרות $0,1,2,3,\cdots,9$ כך ש-

א. ללא הגבלה?

ב. הקוד מגדיר מספר זוגי?

ג. הקוד מגדיר מספר המתחלק בחמש?

ד. אין בקוד ספרות זהות?

ה. יש בקוד לפחות שתי ספרות זהות?

ו. יש בקוד בדיוק שתי ספרות זהות?

ז. אין בקוד את הספרה 5?

ח. הספרה 5 חייבת להופיע בקוד?

ט. יש בקוד לפחות אחד מהספרות 4,5?

י. אין בקוד לא את הספרה 4 ולא את הספרה 5?

יא. אם יש את הספרה 5 אז אין ספרה יותר גדולה מ-5? (רשום שני מספרים המקיימים את התנאי ושני שאינם מקיימים את התנאי וכתוב מהו המשלים של סעיף זה? נסח זאת על דרך החיוב כלומר בלי להשתמש במילים "אין" ו-"לא").

16) נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,\cdots,17\}$ כמה תת קבוצות יש ל- A כך ש- :

א. ללא הגבלה? (צפה בשיעור על חישוב מספר האיברים בקבוצת חזקה)

ב. בנות 3 איברים?

ג. בעלות 3 איברים לפחות?

ד. מכילות רק מספרים זוגיים?
רק אי זוגיים?
מכילים רק מספרים מאותה זוגיות?

ה. מכילות אי זוגי אחד לפחות?
מכילות זוגי אחד לפחות וגם אי זוגי אחד לפחות?

ו. אם הן מכילות את 1 אז מכילות גם את 2?
(זה סעיף קשה אם הינך מתקשה נסה בעזרת משלים)

ז. מכילות ממש את $\{1,2,3\}$.

17) בכמה אופנים שונים ניתן להכניס 7 כדורים ל-13 תאים כך ש- :

א. הכדורים שונים ומותר יותר מכדור בתא?

ב. הכדורים זהים ומותר יותר מכדור בתא?

ג. הכדורים שונים ואסור יותר מכדור בתא?

ד. הכדורים זהים ואסור יותר מכדור בתא?

ה. הכדורים שונים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?

ו. הכדורים זהים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?

18) נתונים חמישה כדורים ונתונים שבעה צבעים שונים. (נניח שחור, לבן, אפור, צהוב אדום כחול וסגול) בכמה אופנים שונים ניתן לצבוע את הכדורים ולסדרם בשורה אם :

א. סדר הכדורים בשורה משנה.

ב. סדר הכדורים בשורה לא משנה? (כלומר ארבעה כדורים שחורים ואחד לבן זה נחשב אותו דבר לא משנה היכן הלבן ממוקם)

19) עבור $B=\{x,y\}$ $A=\{1,2,3\}$ חשבו כמה פונקציות יש מ- A ל- B ומ- B ל- A ואשרו עם עיקרון הכפל.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{30}$. ב. $\frac{1001}{285}$.
2) הוכחה.
3) א. 10. ב. 4. ג. 1. ד. 28.
4) הוכחה.
5) א. 24. ב. 48. ג. 12.
6) א. 16. ב. 16.
7) א. 96. ב. 48. ג. 16.
8) א. 35. ב. 35. ג. 35. ד. 180.
9) א. 595. ב. 300. ג. 295.
10) 81,450,600.
11) א. 900. ב. 648. ג. $\binom{10}{3}$. ד. $\binom{10}{3}$. ה. $\binom{9}{3}$.
12) א. $\binom{7}{7}$. ב. אין. ג. אין.
13) א. ספסל: $10!$, מעגל: $9!$. ב. ספסל: $5!\cdot 2^5$, מעגל: $4!\cdot 2^5$.
ג. ספסל: $2!\cdot(5!)^2$, מעגל: $5!\cdot 4!$. ד. ספסל: $2!\cdot(5!)^2$, מעגל: $5!\cdot 4!$.
14) א. 7^5. ב. 7^4. ג. $6\cdot 7^4$. ד. $3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$. ה. 5^5.
ו. $2(6^5-5^5)$. ז. $7^5-2\cdot 6^5+5^5$. ח. (ה). $5!$. ח. (ו). $10\cdot 5!$.
ח. (ז). $10\cdot 5!$. ט. $4\cdot 5!$. י. $6\cdot 5!$. יא. 216. יב. 24.
יג. 12.
15) א. 10^4. ב. $5\cdot 10^3$. ג. $2\cdot 10^3$. ד. $10\cdot9\cdot8\cdot7$.
ה. $10^4-10\cdot9\cdot8\cdot7$. ו. $10\cdot9\cdot8\cdot\binom{4}{2}$. ז. 9^4.
ח. 10^4-9^4. ט. 10^4-8^4. י. 8^4. יא. $9^4+6^4-5^4$.
16) א. 2^{17}. ב. 680. ג. 130,918. ד. זוגיים: 2^8, אי זוגיים: 2^9,
אותה זוגיות: 768. ה. לפחות אי זוגי אחד: 130,816,
לא מאותה זוגיות: 130,304. ו. 98,304. ז. 16,383.
17) א. 13^7. ב. $\binom{19}{7}$. ג. $\binom{131}{61}$. ד. $\binom{13}{7}$.
ה. $5!\binom{12}{5}\binom{7}{2}13$. ו. $\binom{16}{5}\cdot 13$.
18) א. 7^5. ב. $\binom{11}{5}$.
19) מ-A ל-B: 8, מ-B ל-A: 9.

קומבינטוריקה יותר לעומק:

שאלות:

1) בכמה אופנים ניתן לסדר 10 אנשים בשורה כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. אבי ובני סמוכים.
ג. אבי, בני וגדי סמוכים.
ד. אבי ובני לא סמוכים.
ה. אבי ובני סמוכים וגם גדי ודני סמוכים.
ו. אבי ובני סמוכים וגדי ודני לא סמוכים.

2) בכיתה בה יש 10 בנים ו-15 בנות יש להרכיב נבחרת כדורסל בה יש לפחות 2 בנים ולפחות 2 בנות בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

3) בכמה אופנים שונים ניתן להניח 8 צריחים על לוח 8×8 בלי שאף צריח יאיים על חברו כך ש:
(צריח מאיים על חברו אם הוא נמצא באותה שורה או באותה עמודה של חברו).
א. כל הצריחים הם לבנים.
ב. שלושה צריחים הם לבנים וחמישה הם שחורים.
ג. הצריחים נלקחים מתוך שקית ובה מלאי בלתי מוגבל של צריחים לבנים ומלאי בלתי מוגבל של צריחים שחורים.

4) בכמה מספרים 6 ספרתיים מופיעה הספרה:
א. 0 פעם אחת בדיוק.
ב. 0 פעם אחת לפחות.
ג. 7 פעם אחת לפחות.
ד. 7 פעם אחת בדיוק.
יש לזכור שמספר לא יכול להתחיל בספרה 0.

5) ענה על הסעיפים הבאים:
א. יהי n טבעי בכמה תת קבוצות של $\{1,2,3,...,2n\}$ יש אי זוגי אחד לפחות?
ב. בכמה תת קבוצות של $\{1,2,3,...,2n\}$ יש לפחות $n+1$ איברים.

6) בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 10 לימונדות זהות 1 כוס קולה ו-1 כוס קינלי ל-4 תלמידים צמאים כך שכל תלמיד מקבל לפחות משקה אחד והקולה והקינלי ניתנים לתלמידים שונים?

7) בכמה דרכים ניתן לחלק 400 כדורים זהים ל-3 תאים כך ש:
א. יש תא ובו יותר מ-200 כדורים.
ב. בכל תא מספר זוגי של כדורים.
ג. בשני תאים מתוך השלוש מספר אי זוגי של כדורים ובתא אחד מספר זוגי של כדורים.

8) 7 אנשים נכנסים למעלית בבניין בן 13 קומות בכמה אופנים הם יכולים ללחוץ על כפתורי המעלית כך ש:
א. המעלית תעצור בקומה החמישית? (יתכן ותמשיך הלאה משם)
ב. המעלית תעצור בקומה החמישית לכל היותר.
ג. המעלית תגיע לפחות עד הקומה החמישית.
ד. המעלית תעצור בקומה החמישית. (ולא תמשיך משם הלאה)

9) בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים זהים ו- n כדורים צבעוניים (שונים) ל- $2n$ כך שבכל תא יהיה:
א. לכל היותר כדור אחד.
ב. לכל היותר כדור לבן אחד ואין מגבלה על מספר הצבעוניים.
ג. לכל היותר כדור צבעוני אחד ואין הגבלה על מספר הלבנים.
ד. מספר שווה של לבנים וצבעוניים.

10) במלבן בן k שורות ו- m עמודות יש לסמן $\times$ או $\bigcirc$ בכל משבצת.
א. הראו כי יש $\left(2^m-1\right)^k$ דרכים לעשות זאת כך שבכל שורה יופיע $\times$ אחד לפחות.
ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת כך שיופיע $\bigcirc$ אחד לפחות בכל עמודה.
ג. הסיקו כי: $2^{mk}\le\left(2^m-1\right)^k+\left(2^k-1\right)^m$.

11) ענה על הסעיפים הבאים:
א. כמה תמורות של $1,2,3,\cdots,n$ מספר 2 מופיע בין 1 ל-3? (לאו דווקא צמודים).
(למשל עבור $n=7$ התמורה 4352981 חוקית כי 2 נמצא בין 1 ל-3).
ב. בכמה תמורות של $1,2,3,\cdots 5$ מימין למספר 3 אין מספרים קטנים מ-3.
(למשל 24135 חוקית ואילו 43152 לא חוקית).

12) ענה על הסעיפים הבאים:
א. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 12 אנשים לשלושה זוגות ושתי שלשות?
ב. כמו סעיף א, אך בנוסף דני ודנה לא נמצאים באותה קבוצה.

13) כמה פתרונות בשלמים אי שליליים יש לכל אחת מהמשוואות הבאות?

א. $x_1 + x_2 + \cdots x_7 = 20$.

ב. $x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 14$.

ג. $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6) = 18$.

14) בכמה דרכים ניתן לבחור ועדה בת n אנשים מתוך n זוגות נשואים כך ש:

א. בוועדה לא ישתתף אף זוג נשוי.

ב. מספר הגברים יהיה שווה למספר הנשים.

ג. מספר הגברים יהיה קטן ממש ממספר הנשים.

15) מצאו בכמה פונקציות: $f:\{1,2,3,\dots,3n-1,3n\} \to \{1,2,3,\dots,n-1,n\}$ מקיימות את התנאי הבא: לכל אבר בתמונה יש בדיוק 3 מקורות.

16) מה מספר הדרכים לפזר 50 כדורים אדומים ו-20 כדורים כחולים ל-10 תאים, כך שבכל תא מספר הכדורים האדומים יהיה לפחות כמספר הכדורים הכחולים?

17) בכמה דרכים ניתן לחלק קבוצה בגודל $2n$ לקבוצה בגודל n ולזוגות. (ניתן להניח כי n זוגי).

18) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה 8 פילים <u>שונים</u>, 2 שועלים <u>זהים</u> ושתי תרנגולות <u>זהות</u>, כך שהפילים מסודרים משמאל לימין על פי משקלם בסדר עולה, ואף שועל לא יהיה צמוד לתרנגולת?

19) בכמה דרכים ניתן לחלק 100 כדורים לבנים ו-100 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ל-250 תאים באופן שיתקיימו שני התנאים הבאים: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור לבן אחד, וכמו-כן יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד?

20) בכמה דרכים ניתן לסדר n גברים ו-n נשים במעגל כך שבני אותו מין לא ישבו זה לצד זה? כנ"ל לגבי שורה.

21) יש לבחור קבוצה של ששה ילדים מבין תלמידי כיתות א1 ו-א2, באופן ששלושה מהם יהיו מ-א1 ושלושה מ-א2. מספר הבנים בקבוצה צריך להיות שווה למספר הבנות בקבוצה (3 ו-3). ב-א1 יש 10 בנים ו-15 בנות וב-א2 יש 15 בנים ו-10 בנות. בכמה אופנים ניתן לבחור את הקבוצה?

22) בכמה קבוצות של n כדורים ב-10 צבעים יש לפחות כדור אחד מכל צבע?

23) כמה פונקציות: $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ $(n\geq 1)$ מקיימות את התנאי $f(k)\neq f(k+1)$ לכל $1\leq k\leq n-1$?

24) כמה פונקציות: $f:\{1,2,3,\cdots,n\}\to\{1,2,3,\cdots,n\}$ חח״ע ועל יש המקיימות $f(k)-k$ זוגי לכל: $k\in\{1,2,3,\cdots,n\}$.

25) בכמה דרכים ניתן לחלק 60 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ו-90 כדורים לבנים זהים ל-100 תאים כך שיתקיימו שני התנאים הבאים גם יחד. יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד וכמו כן בכל תא יהיו לכל היותר 50 כדורים לבנים.

26) בכמה דרכים ניתן לחלק 4 בננות, 2 תפוזים, ו-4 תפוחים ל-10 אנשים כך שכל אחד יקבל בדיוק פרי אחד? שימו לב שפירות מאותו סוג נחשבים זהים.

27) בכמה דרכים ניתן לבנות שורה מ- $k\geq 0$ כדורים לבנים זהים ו- $m\geq 0$ כדורים צבעוניים שונים. (ושונים מלבן)?

28) כמה תת קבוצות בגודל 7 יש לקבוצה $A=\{1,2,3,...,12,13\}$ שיש בהם שני איברים עוקבים?

29) תהי $A_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$ כאשר $n\in\mathbb{N}_{odd}$ ותהי $a_1,a_2,\cdots a_n$ תמורה כלשהיא של A_n. הוכח כי המכפלה $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ בהכרח זוגית. (יש לפתור)

30) מטילים n קוביות. כמה תוצאות יש אם:

א. הקוביות שונות.

ב. הקוביות זהות.

31) נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,\cdots n\}$ כמה זוגות של קבוצת (C,D) , $C,D\subseteq A$ כך ש:

א. ללא הגבלה. עבור $A=\{1,2\}$ רשום את כל הפתרונות.

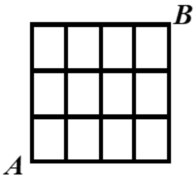
ב. $C\cap D=\varnothing$ עבור $A=\{1,2\}$ רשום את כל הפתרונות.

ג. $C\subseteq D$ עבור $A=\{1,2\}$ רשום את כל הפתרונות.

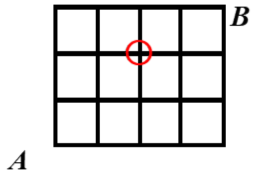
ד. $C\cup D=A$ עבור $A=\{1,2\}$ רשום את כל הפתרונות.

ה. אם $2\in C$ אז $2\in D$. (עבור $A=\{1,2,3\}$ הדגם זוג שמקיים את הדרישה וזוג שאינו מקיים את הדרישה).
ו. אם יש מספר אי זוגי ב- C אז יש כזה גם ב- D. (שים לב לא נתון ש- n הוא זוגי).

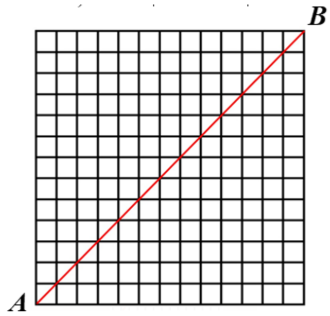
32) חרגול נמצא בנקודה A בשריג המתואר להלן. בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.



א. בכמה אופנים שונים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B?
ב. בכמה אופנים הוא יכול לעשות זאת מבלי לעבור דרך נקודה המסומנת להלן? (הנקודה $(2,2)$).



33) החרגול החביב משאלה קודמת לא התעייף (מדובר בחרגול ספורט) ונמצא עכשיו בנקודה A בשריג $n\times n$ (בציור 13×13) המתואר להלן. להזכירכם בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה. בכמה דרכים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B. (שים לב השריג שבשאלה הוא $n\times n$)
א. ללא הגבלה.
ב. מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות $(7,3),(5,9)$? (מה המשלים של הסעיף?)
ג. מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות $(5,3),(7,9)$?
ד. מבלי לגעת באלכסון האדום? (פרט לנקודת ההתחלה ונקודת הסיום).



34) למורה צילה מאגר בלתי מוגבל של חרוזים בשלושה צבעים, אדום, צהוב, ירוק. (חרוזים מאותו צבע נחשבים זהים). בכיתה ג' 27 תלמידים. בשיעור מלאכה המורה צילה נותנת לכל ילד שקית והילד בוחר חמישה חרוזים ומכניס לשקית. בסוף השיעור המורה מכניסה את כל השקיות למחסן. כמה תכולות מחסן אפשריות?

תשובות סופיות:

1) א. $10!$. ב. $2!9!$. ג. $3!8!$. ד. $8!9!$. ה. $4!8!$. ו. $14!8!$.

2) 2 דרכים.

3) א. $8!$. ב. $8!\cdot\binom{8}{3}$. ג. $8!\cdot 2^8$.

4) א. $5\cdot 9^5$. ב. $9\cdot 10^5-9^6$. ג. $9\cdot 10^5-8\cdot 9^5$. ד. $9^5+5\cdot 8\cdot 9^4$.

5) א. $2^{2n}-2^n$. ב. $|A|=\dfrac{2^{2n}-\binom{2n}{n}}{2}$.

6) $4\cdot 3\cdot\binom{11}{3}$.

7) א. $3\cdot\binom{201}{2}$. ב. $\binom{202}{2}$. ג. $3\cdot\binom{201}{2}$.

8) א. 13^7-12^7. ב. 5^7. ג. 13^7-4^7. ד. 5^7-4^7.

9) א. $\binom{2n}{n}n!$. ב. $\binom{2n}{n}\cdot(2n)^2$. ג. $\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot\binom{3n-1}{n}$. ד. $(2n)^2$.

10) א. ראה סרטוט. ב. $(2^k-1)^m$. ג. הוכחה.

11) א. $\frac{1}{3}5!$. ב. $\frac{1}{3}5!$.

12) א. $\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}$.

ב. $\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}-\left(\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}+10\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{3!}\right)$.

13) א. $\binom{26}{20}\binom{26}{6}$. ב. $\binom{16}{2}+\binom{11}{2}+\binom{6}{2}$. ג. $2\left[3\cdot\binom{20}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{11}{2}+\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{2}\right]$.

14) א. 2^n. ב. $\binom{n}{\frac{n}{2}}^2$.

ג. כאשר n זוגי: $\dfrac{\binom{2n}{n}-\binom{n}{\frac{n}{2}}^2}{2}$, כאשר n אי זוגי: $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2}$.

15) $\dfrac{(3n)!}{6^n}$.

16) $\binom{29}{9}\binom{39}{9}$.

17) $\frac{(2n)!}{n!\left(\frac{n}{2}\right)!2^{\frac{n}{2}}}$.

18) 1638.

19) $\left(\binom{349}{100}-\binom{250}{100}\right)\left(250^{50}-\frac{250!}{200!}\right)$.

20) $2(n!)^2$.

21) $\binom{10}{3}^2+\binom{10}{2}^2+\binom{15}{1}^2+\binom{10}{1}^2\binom{15}{2}^2+\binom{15}{3}^2$.

22) $\binom{n-1}{9}$.

23) $n(n-1)^{n-1}$.

24) $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil ! \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor !$.

25) $\left(100^{60}-\frac{100!}{40!}\right)\cdot\left(\binom{189}{90}-100\cdot\binom{138}{39}\right)$.

26) $\frac{10!}{4!4!2!}$.

27) $\frac{(m+k)!}{k!}$.

28) $2^{13}-1$.

29) הוכחה.

30) א. 6^n. ב. $\binom{n+5}{5}$.

31) א. 4^n. ב. 3^n. ג. 3^n. ד. 3^n. ה. $3\cdot 4^{n-1}$.

ו. $4^n-\left(2^n-2^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\right)2^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}$.

32) א. $\binom{7}{4}$. ב. 17.

33) א. $\binom{2n}{n}$. ב. $\left|\bar{A}\cap\bar{B}\right|=\binom{2n}{n}-\left(\binom{10}{3}\binom{2n-10}{n-3}+\binom{14}{5}\binom{2n-14}{n-5}\right)$.

ג. $\left|\bar{A}\cap\bar{B}\right|=\binom{2n}{n}-\left(\binom{8}{3}\binom{2n-8}{n-3}+\binom{16}{7}\binom{2n-16}{n-7}-\binom{8}{5}\binom{8}{2}\binom{2n-16}{7}\right)$.

ד. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

34) $\binom{47}{20}$.

מתמטיקה דיסקרטית 1

פרק 6 - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית 1

פרק 7 - הכלה והדחה

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית 1

פרק 8 - נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית 1

פרק 9 - שובך היונים

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית 1

פרק 10 - אינדוקציה

תוכן העניינים