מתמטיקה דיסקרטית

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 1 - לוגיקה

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 2 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

מבוא:

שאלות:

(1 לגבי כל אחד והממדים הבאים רשום ב-$\square$ את הסימנים המתאימים: $\in, \notin, \subseteq, \subset, \not\subseteq$
תיתכן יותר מתשובה אחת. במקרה שרשמת את הסימן $\not\subseteq$ נמק את תשובתך.

א. $1 \square \{1,\{1\}\}$.
ב. $\{1\} \square \{1,\{1\}\}$.
ג. $\{8,\varnothing\} \square \{1,2,8\}$.
ד. $\varnothing \square \{1,2\}$.
ה. $\varnothing \square \{\varnothing,1,2\}$.
ו. $\{2\} \square \{\{1,\{2\}\}\}$.
ז. $\{2\} \square \{2,\{2,\{2\}\}\}$.
ח. $\{2\} \square \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$.
ט. $\{2\} \square \{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$.
י. $\{\{2\},\varnothing\} \square \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$.
יא. $\varnothing \square \{1,\{\varnothing\}\}$.
יב. $\{\varnothing\} \square \{1,\{\varnothing\}\}$.
יג. $\{1,2\} \square \{1,\{2\}\}$.
יד. $1 \square \mathbb{N}$.
טו. $\{1\} \square \mathbb{N}$.
טז. $1 \square \{\mathbb{N}\}$.
יז. $\{1\} \square \{\mathbb{N}\}$.

תשובות סופיות:

(1 א. $\in$.
ב. $\in, \subseteq, \subset$.
ג. $\notin, \not\subseteq$.
ד. $\notin, \subseteq, \subset$.
ה. $\in, \subseteq, \subset$.
ו. $\notin, \not\subseteq$.
ז. $\notin, \subseteq, \subset$.
ח. $\in, \subseteq, \subset$.
ט. $\in, \subseteq, \subset$.
י. $\notin, \not\subseteq$.
יא. $\notin, \subseteq, \subset$.
יב. $\in, \not\subseteq$.
יג. $\notin, \not\subseteq$.
יד. $\in, \notin$.
טו. $\notin, \subseteq, \subset$.
טז. $\notin$.
יז. $\notin, \not\subseteq$.

פעולות על קבוצות:

שאלות:

1) עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$. ב. $(A\cap B)\cup C$. ג. $A\cap(B\cup C)$.

ד. $P(A)$. ה. $C\setminus A$.

2) עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$ ענה על השאלות הבאות:

א. האם $B\subseteq C$. ב. האם $\{1\}\subseteq B$. ג. האם $\{1\}\subseteq A$.

ד. האם $\{1\}\in P(A)$. ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$. ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$.

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$.

3) עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\},B=\{4,\varnothing\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $A\cup B$. ב. $A\cap B$. ג. $A-B$. ד. $B-A$. ה. $A\oplus B$.

תקיים: $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus(C\setminus B))$.

תשובות סופיות:

1) א. $\{1,2,6\}$. ב. $\{1,3,4,6\}$. ג. $\{1,3\}$. ד. $2\notin P(A)$.

2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.

ה. לא. ו. כן. ז. כן.

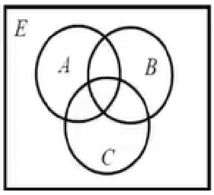
3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$. ב. $\{\varnothing\}$. ג. $\{1,\{3,*\}\}$. ד. $\{4\}$.

ה. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

דיאגרמת וון:

שאלות:

1) באיור שלפניך דיאגרמת וון:

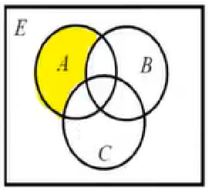


קווקו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

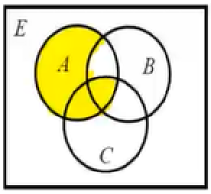
א. $(A-B)-C$.
ב. $A-(B-C)$.
ג. $A\cap B^c$.
ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$.
ה. $(A\cap B)\cap C$.
ו. $A\cap(B\cap C)$.
ז. $(A\cup B)\cup C$.
ח. $A\cup(B\cup C)$.

תשובות סופיות:

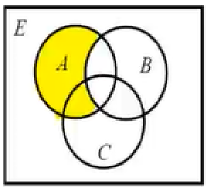
1) א.



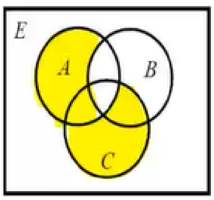
ב.



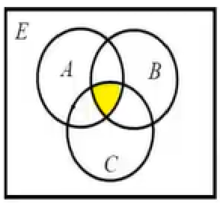
ג.



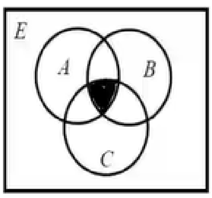
ד.



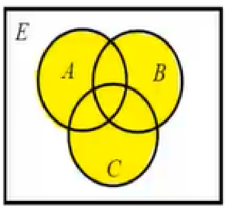
ה.



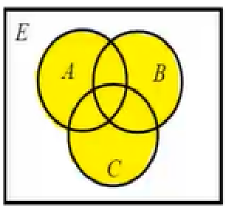
ו.



ז.



ח.



קריאת קבוצות:

שאלות:

1) צפה בשיעור קריאת קבוצות ועבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ רשום בשתי הדרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים:
$\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,...\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי:
$A=\{1,4,9,16,25,36,49,...\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי:
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,...\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים:
$C=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},...\right\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2:
$D=\left\{2^1,2^2,2^3,...\right\}=\{2,4,8,16,32,...\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $C=\left\{3n-1 \middle| n\in\mathbb{N}\right\}$.

ב. $K=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| |x|\ge 2\rightarrow x^2>41\right\}$.

ג. $C=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| |x|\ge 7\rightarrow x<20\right\}$.

ד. $C=\left\{3n-1 \middle| n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\right\}=\left\{3n-1 \middle| \sqrt{n}\in\mathbb{N}\right\}$.

ה. $C=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| x\ge 8\rightarrow x^2<67\right\}$.

תשובות סופיות:

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$.

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$.

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$.

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$.

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$.

שאלות הוכחה:

שאלות:

לכל אחת משאלות הפרק פעל באופן הבא:

1) תהיינה A,B קבוצות.
אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ותן נימוק קצר מדוע היא נכונה.
אם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית.
בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם.
את הטענות הנכונות מבין יב-כא נסה להוכיח. במיוחד טענה יב' בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x\notin A$ אז $x\notin A\cup B$.
ב. אם $x\notin A\cup B$ אז $x\notin A$.
ג. אם $x\notin A$ אז $x\notin A\cap B$.
ד. אם $x\notin A\cap B$ אז $x\notin A$.
ה. אם $x\notin A$ אז $x\notin A-B$.
ו. אם $x\notin A-B$ אז $x\notin A$.
ז. אם $x\in B$ אז $x\notin A-B$.
ח. אם $x\notin A-B$ אז $x\in B$.
ט. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\notin A$.
י. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\in B$.
יא. השלם. $x\notin A-B \Leftrightarrow$ ______ .
יב. $A\subseteq B\cap C \;\Leftrightarrow\; (A\subseteq B \wedge A\subseteq C)$.
יג. $A\subseteq B\cup C \;\Leftrightarrow\; (A\subseteq B \vee A\subseteq C)$.
יד. אם $A=A\cup B$ אז $A\subseteq B$.
טו. אם $A=A\cup B$ אז $B\subseteq A$.
טז. אם $A=A\cap B$ אז $A\subseteq B$.
יז. אם $A=A\cap B$ אז $B\subseteq A$.
יח. אם $A\subseteq B$ אז $A=A\cup B$.
יט. אם $B\subseteq A$ אז $A=A\cup B$.
כ. אם $A\subseteq B$ אז $A=A\cap B$.
כא. אם $B\subseteq A$ אז $A=A\cap B$.

2) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות:

א. אם $A=A-B$ אז $B=\varnothing$.
ב. אם $A=A-B$ אז $A\cap B=\varnothing$.
ג. אם $A=A\cup B$ אז $A\cap B=B$.
ד. אם $B=A\cup B$ אז $A\cap B=B$.
ה. אם $A\cap B=A$ אז $A=A\cup B$.
ו. אם $A\cap B=B$ אז $A=A\cup B$.
ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.
ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$.
ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$.
י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$.
יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.
יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.
יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$.
יד. לפניך שתי טענות הוכח את הנכונה והפרך את השגויה:
i. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$.
ii. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$.

תשובות סופיות:

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x \in B \vee x \notin A$. יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.i. נכונה. יד.ii. לא נכונה.

דרך השלילה:

שאלות:

הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α אז β מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$ אז $A\cap C=\varnothing$.
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$ אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$ אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$ אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$. אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$ אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

קבוצת חזקה:

שאלות:

1) עבור $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $A=\{3,\{\varnothing\}\}$ רשום את הקבוצות הבאות:

א. את $P(C)$ ואת $P(B)$ ואת $P(A)$.

ב. $P(A)\cap B$ ואת $P(A)\cap A$ ואת $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$:

א. רשום את $P(A)$ ואת $P(B)$.

ב. רשום את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.

ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשום את $P(\varnothing)$ ואת $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות:

א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.

ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$.

ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$.

ה. $P(A)\cap A=\varnothing$.

ו. תן דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.

ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה:

ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$ אז $A\cap B=\varnothing$.

ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. נתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכח כי $B-A=B$.

תשובות סופיות:

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.

ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.

ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.

ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראה סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

מכפלה קרטזית:

שאלות:

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א. $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$.

ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$.

ג. הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים:
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.

ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$ אז
$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.

ה. הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים:
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

2) הוכיחו או הפריכו: תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$ אז קיימות $C\subseteq A$ ו- $D\subseteq B$ כך ש- $S=C\times D$.

3) הוכח או הפרך: קיימות שתי קבוצות A,B כך ש- $|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$
(סימן | | על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכח או הפרך: לכל שלוש קבוצות A,B,C $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגם שלוש קבוצות A,B,C כך ש- $(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
2) לא נכונה.
3) לא נכונה.
4) נכונה.
5) ראה סרטון.

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 3 - פונקציות

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 4 - יחסים

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 5 - אינדוקציה

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 6 - גרפים

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 7 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

סיכום כללי:

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:

בדיקה:

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $n=k$ (k טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

הוכחת האינדוקציה:

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

סיכום:

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

שאלות:

1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 8^n-3^n מתחלק ב-5 ללא שארית לכל n טבעי.

2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 11^n-4^n מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי.

3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $4^{n+2}+8\cdot7^n$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל n טבעי.

4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5^{n+1}-5\cdot3^{2n}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל n טבעי.

5) a_n הוא האיבר במקום ה-n בסדרה החשבונית: $1,3,5,7,\ldots$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $4+2^{a_n}$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל n טבעי הגדול מ-1.

6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^2+n מתחלק ב-2 ללא שארית לכל n טבעי.

7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n-2n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.

9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9\left(9^n-1\right)-40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל n טבעי.

10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+5^n-2^n\left(2^n+1\right)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

11) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 7^n+2^{2n} מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

12) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי a^n-b^n מתחלק ב- $(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

13) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2}+1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב- 3 לכל n טבעי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדרות:

סיכום כללי:

תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים: $a_1, a_2, ..., a_n$, כאשר n הוא מיקום האיבר בסדרה ו- a_n הוא ערך האיבר העומד במקום ה-n-י בסדרה.
    - סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.
    - סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב-S_n
      והוא מקיים: $S_n = a_1 + ... + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר d הפרש הסדרה.
    - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר q היא מנת הסדרה.
    - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

שאלות:

14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$.

15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $4+7+10+13+...+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$.

16) נתונה סדרה שבה: $a_n=n(n+2)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$.

17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{6}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}=\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right].$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

עצרת:

סיכום כללי:

תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

מגדירים: $0!=1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n!=n\cdot(n-1)!$, $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$.

שאלות:

20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{4}+\frac{3\cdot 4!}{8}+\ldots+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\frac{(p+2)!}{2!}+\ldots+\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n!}$$

24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1\cdot 4}-\frac{11}{4\cdot 7}+\frac{17}{7\cdot 10}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

שאלות:

25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+\ldots+2n=n(2n+1)$$

26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

שאלות:

28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(3n)=2n(2n+1)$$

29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\ldots+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

שאלות:

33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{n}{n+1}$$

34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$$

36) נתונה סדרה שבה: $a_n=n^n$. נגדיר: $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$.
הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $T_n\le n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

37) נתון אי-השוויון: $2^n>n^2$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

38) נתון אי-השוויון: $4^n>5n^2+1$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

39) נתון אי-השוויון: $n^3-n<5^{n-1}$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

40) נתון אי-השוויון: $3^n+4^n+5^n<6^n$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

41) נתון אי-השוויון : $n^n \geq n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי.

42) נתון אי-השוויון : $a^n + b^n < (a+b)^n$, $(a,b>0)$.
הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-1.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות כוללות ומסכמות:

שאלות:

43) נתון השוויון: $4+7+10+13+...=\frac{n}{2}(3n+5)$.

א. מצא את האיבר במקום ה- n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $37+40+43+...+85$.

44) נתון השוויון: $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+...=2-\frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה- n.

45) נתון השוויון: $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots=\frac{n}{4n+1}$.

א. מצא את האיבר במקום ה- n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $\frac{1}{25\cdot29}+\frac{1}{29\cdot33}+\frac{1}{33\cdot37}+\cdots+\frac{1}{89\cdot93}$.

46) נתון השוויון: $(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2+27^2+28^2+...+48^2$.

47) נתון השוויון: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $4^2+6^2+8^2+\cdots+(4n)^2$.

48) נתונים השוויונים הבאים:

א. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7}{3}(n^2+3n-1)$.

ב. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=n^2+11n-5$.

ג. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7n}{2}(n+1)$.

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

49) נתון השוויון: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=an(2n+b)$.

א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו-$n=2$. מצא את ערכי a ו-b.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

50) נתון אי-השוויון: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-2.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{18}>\frac{1}{2}$.

51) נתון אי-השוויון: $n^2<2^n$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-4.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2\cdot 6^2\cdot 7^2\cdot 8^2\cdot...\cdot 20^2<2^{200}$.

52) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום: $9+27+81+\cdots+3^{3n+1}$ מתחלק ב-117 ללא שארית לכל n טבעי.

53) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
הוכח כי a^3+b^3 מתחלק ב-6 ללא שארית.

54) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח את הטענה: אם ל-n טבעי מסוים 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי?

ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n+5^n מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי אי-זוגי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.