מתמטיקה דיסקרטית

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 1 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

מבוא:

שאלות:

1) לגבי כל אחד והממדים הבאים רשום ב-$\square$ את הסימנים המתאימים: $\in,\notin,\subseteq,\subset,\not\subseteq$
תיתכן יותר מתשובה אחת. במקרה שרשמת את הסימן $\not\subseteq$ נמק את תשובתך.

א. $1\square\{1,\{1\}\}$.
ב. $\{1\}\square\{1,\{1\}\}$.
ג. $\{8,\varnothing\}\square\{1,2,8\}$.
ד. $\varnothing\square\{1,2\}$.
ה. $\varnothing\square\{\varnothing,1,2\}$.
ו. $\{2\}\square\{\{1,\{2\}\}\}$.
ז. $\{2\}\square\{2,\{2,\{2\}\}\}$.
ח. $\{2\}\square\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$.
ט. $\{2\}\square\{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$.
י. $\{\{2\},\varnothing\}\square\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$.
יא. $\varnothing\square\{1,\{\varnothing\}\}$.
יב. $\{\varnothing\}\square\{1,\{\varnothing\}\}$.
יג. $\{1,2\}\square\{1,\{2\}\}$.
יד. $1\square\mathbb{N}$.
טו. $\{1\}\square\mathbb{N}$.
טז. $1\square\{\mathbb{N}\}$.
יז. $\{1\}\square\{\mathbb{N}\}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\in$. ב. $\in,\subseteq,\subset$. ג. $\notin,\not\subseteq$. ד. $\notin,\subseteq,\subset$. ה. $\in,\subseteq,\subset$.
ו. $\notin,\not\subseteq$. ז. $\notin,\subseteq,\subset$. ח. $\in,\subseteq,\subset$. ט. $\in,\subseteq,\subset$. י. $\notin,\not\subseteq$.
יא. $\notin,\subseteq,\subset$. יב. $\in,\not\subseteq$. יג. $\notin,\not\subseteq$. יד. $\in,\notin$. טו. $\notin,\subseteq,\subset$.
טז. $\notin$. יז. $\notin,\not\subseteq$.

פעולות על קבוצות:

שאלות:

1) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$.
ב. $(A\cap B)\cup C$.
ג. $A\cap(B\cup C)$.
ד. $P(A)$.
ה. $C\setminus A$.

2) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$ ענה על השאלות הבאות:

א. האם $B\subseteq C$.
ב. האם $\{1\}\subseteq B$.
ג. האם $\{1\}\subseteq A$.
ד. האם $\{1\}\in P(A)$.
ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$.
ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$.
ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$.

3) עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\}, B=\{4,\varnothing\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $A\cup B$.
ב. $A\cap B$.
ג. $A-B$.
ד. $B-A$.
ה. $A\oplus B$.

תקיים: $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus(C\setminus B))$.

תשובות סופיות:

1) א. $\{1,2,6\}$. ב. $\{1,3,4,6\}$. ג. $\{1,3\}$. ד. $2\notin P(A)$.

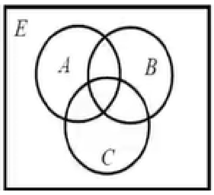
2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
ה. לא. ו. כן. ז. כן.

3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$. ב. $\{\varnothing\}$. ג. $\{1,\{3,*\}\}$. ד. $\{4\}$.
ה. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

דיאגרמת וון:

שאלות:

1) באיור שלפניך דיאגרמת וון:

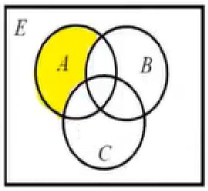


קווקו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

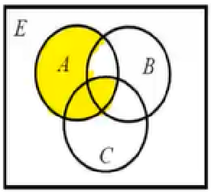
א. $(A-B)-C$.
ב. $A-(B-C)$.
ג. $A\cap B^c$.
ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$.
ה. $(A\cap B)\cap C$.
ו. $A\cap(B\cap C)$.
ז. $(A\cup B)\cup C$.
ח. $A\cup(B\cup C)$.

תשובות סופיות:

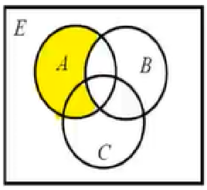
1) א.



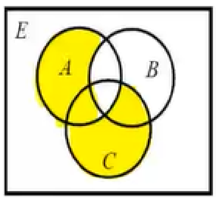
ב.



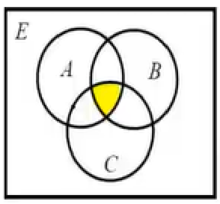
ג.



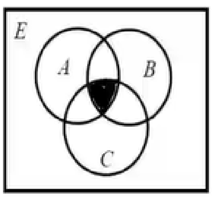
ד.



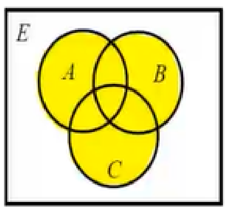
ה.



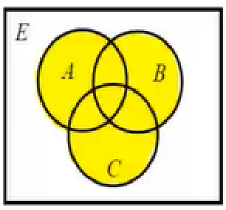
ו.



ז.



ח.



קריאת קבוצות:

שאלות:

1) צפה בשיעור קריאת קבוצות ועבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ רשום בשתי הדרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים:
$\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,\ldots\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי:
$A=\{1,4,9,16,25,36,49,\ldots\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי:
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,\ldots\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים:
$C=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\ldots\right\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2:
$D=\left\{2^1,2^2,2^3,\ldots\right\}=\{2,4,8,16,32,\ldots\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $C=\left\{3n-1 \middle| n\in\mathbb{N}\right\}$.

ב. $K=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| |x|\ge 2\to x^2>41\right\}$.

ג. $C=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| |x|\ge 7\to x<20\right\}$.

ד. $C=\left\{3n-1 \middle| n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\right\}=\left\{3n-1 \middle| \sqrt{n}\in\mathbb{N}\right\}$.

ה. $C=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| x\ge 8\to x^2<67\right\}$.

תשובות סופיות:

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$.

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$.

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$.

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$.

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$.

שאלות הוכחה:

שאלות:

לכל אחת משאלות הפרק פעל באופן הבא:

1) תהיינה A,B קבוצות.
אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ותן נימוק קצר מדוע היא נכונה.
אם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית.
בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם.
את הטענות הנכונות מבין יב-כא נסה להוכיח. במיוחד טענה יב' בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x\notin A$ אז $x\notin A\cup B$.
ב. אם $x\notin A\cup B$ אז $x\notin A$.
ג. אם $x\notin A$ אז $x\notin A\cap B$.
ד. אם $x\notin A\cap B$ אז $x\notin A$.
ה. אם $x\notin A$ אז $x\notin A-B$.
ו. אם $x\notin A-B$ אז $x\notin A$.
ז. אם $x\in B$ אז $x\notin A-B$.
ח. אם $x\notin A-B$ אז $x\in B$.
ט. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\notin A$.
י. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\in B$.
יא. השלם $x\notin A-B \Leftrightarrow$ ______.
יב. $A\subseteq B\cap C \Leftrightarrow (A\subseteq B \wedge A\subseteq C)$.
יג. $A\subseteq B\cup C \Leftrightarrow (A\subseteq B \vee A\subseteq C)$.
יד. אם $A=A\cup B$ אז $A\subseteq B$.
טו. אם $A=A\cup B$ אז $B\subseteq A$.
טז. אם $A=A\cap B$ אז $A\subseteq B$.
יז. אם $A=A\cap B$ אז $B\subseteq A$.
יח. אם $A\subseteq B$ אז $A=A\cup B$.
יט. אם $B\subseteq A$ אז $A=A\cup B$.
כ. אם $A\subseteq B$ אז $A=A\cap B$.
כא. אם $B\subseteq A$ אז $A=A\cap B$.

2) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות:

א. אם $A=A-B$ אז $B=\varnothing$.
ב. אם $A=A-B$ אז $A\cap B=\varnothing$.
ג. אם $A=A\cup B$ אז $A\cap B=B$.
ד. אם $B=A\cup B$ אז $A\cap B=B$.
ה. אם $A\cap B=A$ אז $A=A\cup B$.
ו. אם $A\cap B=B$ אז $A=A\cup B$.
ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.
ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$.
ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$.
י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$.
יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.
יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.
יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$.
יד. לפניך שתי טענות הוכח את הנכונה והפרך את השגויה:
i. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$.
ii. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$.

תשובות סופיות:

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x \in B \vee x \notin A$. יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.i. נכונה. יד.ii. לא נכונה.

דרך השלילה:

שאלות:

הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α אז β מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$ אז $A\cap C=\varnothing$.
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$ אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$ אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$ אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$. אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$ אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

קבוצת חזקה:

שאלות:

1) עבור $A=\{3,\{\varnothing\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$ רשום את הקבוצות הבאות:

א. את $P(C)$ ואת $P(B)$ ואת $P(A)$.

ב. $P(A)\cap B$ ואת $P(A)\cap A$ ואת $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$:

א. רשום את $P(A)$ ואת $P(B)$.

ב. רשום את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.

ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשום את $P(\varnothing)$ ואת $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות:

א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.

ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$.

ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$.

ה. $P(A)\cap A=\varnothing$.

ו. תן דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.

ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה:

ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$ אז $A\cap B=\varnothing$.

ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. נתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכח כי $B-A=B$.

תשובות סופיות:

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.

ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.

ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.

ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראה סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

מכפלה קרטזית:

שאלות:

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח כל אחת מהטענות הבאות:
א. $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$.
ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$.
ג. הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים:
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.
ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$ אז
$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.
ה. הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים:
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

2) הוכיחו או הפריכו: תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$ אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$ כך ש-$S=C\times D$.

3) הוכח או הפרך: קיימות שתי קבוצות A,B כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$
(סימן $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכח או הפרך: לכל שלוש קבוצות A,B,C $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגם שלוש קבוצות A,B,C כך ש-$(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
2) לא נכונה.
3) לא נכונה.
4) נכונה.
5) ראה סרטון.

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 2 - לוגיקה

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 3 - פונקציות

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 4 - עוצמות

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 5 - יחסים

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 6 - תורת הגרפים

תוכן העניינים

מבוא לתורת הגרפים:

שאלות:

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג עץ.
רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. יהי $G=(V,E)$ גרף על 43 צמתים. 10 צמתים מדרגה 7, 17 צמתים מדרגה 6, 12 צמתים מדרגה 4 והיתר מדרגה. כמה קשתות יש ב- G?

ב. הוכח כי בכל גרף מספר הצמתים מדרגה אי זוגית הוא זוגי.

2) עבור $n\in\mathbb{N}$ נגדיר גרף פשוט G_n באופן הבא: צמתיו הם 2^n הסדרות הבינאריות באורך n. ושני קודקודים מחוברים ביניהם בקשת אם ורק אם הם נבדלים בקורדינטה אחת. מה מספר הקשתות של G_5? של G_n? (גרף כזה נקרא גרף הקובייה).

3) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\left\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\}\middle\| |A|=3\right\}$
$E=\left\{\{A,B\}\middle\| |A\cap B|=1\right\}$. למשל: $\{\{2,4,7\},\{1,4,6\}\}\in E$ כי בחיתוך יש איבר אחד.

א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?

ב. האם G דו"צ?

4) חזור על שאלה קודמת עבור גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: V כמו קודם ו- $E=\left\{\{A,B\}\middle| A\cap B=\varnothing\right\}$.

5) יהי $G=(V,E)$ על 7 צמתים. 4 מהצמתים הם מדרגה 5 וכל יתר הדרגות קטנות מ-3. מהן האפשרויות הנכונות?

א. יש גרף פשוט כזה שהוא קשיר.

ב. יש גרף פשוט כזה אבל הוא לא קשיר.

ג. יש גרף כזה אבל הוא לא פשוט ולא קשיר.

ד. יש גרף כזה והוא לא פשוט וקשיר.

6) נתונים שני גרפים G_2 , G_1 על 5 קודקודים סדרת דרגותיו של G_1 היא: 2,2,3,4,5,5,6 וסדרת דרגותיו של G_2 היא: 1,2,3,4,4.
לגבי כל אחד משני הגרפים קבע איזו מן הטענות הבאות נכונה:
א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה אבל הוא לא פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

7) ענה על הסעיפים הבאים:
א. יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכח כי אם לכל שני קודקודים $x,y\in V$ מתקיים: $d(x)+d(y)\geq n-1$ אז G קשיר.
ב. הוכח באינדוקציה כי גרף על n קודקודים ופחות מ-$n-1$ קשתות אינו קשיר.

8) יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים. הוכח כי אם: $|E|>\binom{n-1}{2}$ $(*)$ אז G קשיר. כאשר $|E|$ זה מספר הקשתות. הראה כי חסם זה הדוק. כלומר הראה גרף פשוט G עבורו: $|E|=\binom{n-1}{2}$ כך ש- G אינו קשיר. זה מראה שלא ניתן לשפר את אי השוויון $(*)$.

9) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט ויהיו: $u,v\in V$, $x,y\in V$ שני קודקודים לא שכנים.
הוכח כי אם: $d(x)+d(y)\geq n$ אז יש ל- x ול- y לפחות שני שכנים משותפים.

10) יהי G גרף פשוט על $n\geq 2$ צמתים ויהיו קודקודים שאינם שכנים.
הוכח כי אם: $d(u),d(v)\geq\frac{n+1}{2}$ אז יש ל- u,v לפחות שלושה שכנים משותפים.

11) יהי $G=(V,E)$ גרף כך ש-: $V=P_2(\{1,2,..,n\}),\ (n\geq 2)$,
$A,B\in V \qquad A\cap B=\phi, \quad \Leftrightarrow \quad e\in E$.
א. חשבו את $|V|$.
ב. מהי דרגת כל צומת?
ג. הוכיחו כי אם $n\geq 5$ אזי G קשיר (רמז: דרך השלילה).

(12 יהי G גרף פשוט על 10 קודקודים שיש בו 41 קשתות.
הוכיחו:
א. יש לפחות שני קודקודים ב-G שדרגתם היא 9.
ב. G קשיר.

(13 יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט הוכח כי אם: $|V|=|E|$ אז ב-G יש מעגל ואם G קשיר אז המעגל יחיד.

(14 יהי G גרף פשוט קשיר בן 7 קודקודים שסדרת דרגותיו היא: 3,2,2,2,1,1,1.
כמה מעגלים פשוטים יש בגרף?

(15 יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכח כי אם לכל קודקוד $x\in V$ מתקיים: $d(x)\geq \frac{n}{2}$ אז יש ב-G מעגל באורך 4.

(16 הוכח כי בכל גרף פשוט על 100 קודקודים שבו כל הדרגות הן לפחות 10 יש מעגל באורך ≥ 4.

(17 יהי G גרף פשוט הוכח כי לפחות אחד מבין הגרפים $G,\bar{G}$ הוא קשיר.
ובניסוח שקול: הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים לפחות אחד הגרפים החד צבעיים הוא קשיר.

(18 הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים יש משולש מונוכרומטי. (משולש חד צבעי).

(19 הוכיחו כי בכל קבוצה של 9 אנשים יש בהכרח לפחות 4 המכירים זה את זה או לפחות 3 שאף שניים מהם אינם מכירים זה את זה.

(20 יהי G גרף שקודקודיו הם תתי קבוצות בנות 4 אברים של הקבוצה: $\{1,2,\ldots,n\}$ (n גדול מ-6). שני קודקודים מחוברים בקשת בגרף אם בחיתוך שלהם יש שני אברים <u>בדיוק</u>. לדוגמה, הקודקוד: $\{1,2,3,4\}$ שכן של: $\{1,2,7,8\}$ אך לא של: $\{1,2,3,7\}$.
כמה קודקודים בגרף סה"כ הם שכנים של: $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$ או $\{1,2,4,5\}$?

(21 הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_{17} ב-8 צבעים יש מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבע אחד. (מעגל מונוכרומטי).

22) כמה מעגלים פשוטים באורך $3 \le k \le n$ יש בגרף השלם K_n על קבוצת הקודקודים: $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$? שני מעגלים המתקבלים אחד מין השני ע"י סיבוב נחשבים זהים. למשל עבור $n=5$ שני המעגלים הבאים: $1,2,3,4,5,1$ ו- $3,4,5,1,2,3$ נחשבים זהים ואילו המעגלים: $1,2,3,1$ ו- $1,3,2,1$ אינם זהים.

23) צובעים ב- $n \ge 2$ צבעים את קשתות הגרף השלם K_n כך שכל צבע מופיע לפחות פעם אחת. הוכח כי קיים מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבעים שונים.

24) יהי G גרף קשיר על 13 קודקודים, שניתן לצבוע בשלושה צבעים (כלומר אפשר לצבוע את הקודקודים בשלושה צבעים, כך שאין שני קודקודים מאותו צבע שמחוברים בקשת). הוכיחי שיש בגרף אנטי קליקה בגודל 5. (כלומר 5 קודקודים שאף אחד מהם לא מחובר לאף אחד אחר.)

25) נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים: $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ ו- $G_3=(V,E_3)$. נגדיר: $G=(V,E_1\cup E_2\cup E_3)$ איחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב-V דרגתו ב-G היא לפחות 6.
הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים: G_1, G_2 ו- G_3 <u>אינו</u> חסר-מעגלים.
שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים.

26) יהי G_n גרף פשוט שקודקודיו הם כל התת קבוצות של: $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ למעט $\varnothing$ ו- $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ עצמה. שני קודקודים הם שכנים אם ורק אם אף אחד אינו מוכל במשנהו.

א. הוכח כי לכל $n \ge 2$, G_n קשיר.

ב. הוכח כי אם v תת קבוצה בת k איברים של: $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ אז דרגתה כקודקוד ב- G_n היא: $2^n-2^{n-k}-2^k+1$.

ג. הוכח כי לכל $n \ge 3$ קיים מעגל המילטון ב- G_n. מותר להסתמך על סעיפים קודמים ועל העובדה ש- $2^{n-k}+2^k \le 2^{n-1}+2$.

27) כמה זיווגים מושלמים יש? (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).

א. בגרף המלא K_5 ?

ב. בגרף המלא K_6 ?

ג. בגרף הדו"צ המלא $K_{5,5}$? (הגדרת גרף דו"צ בפרק גרף דו צדדי).

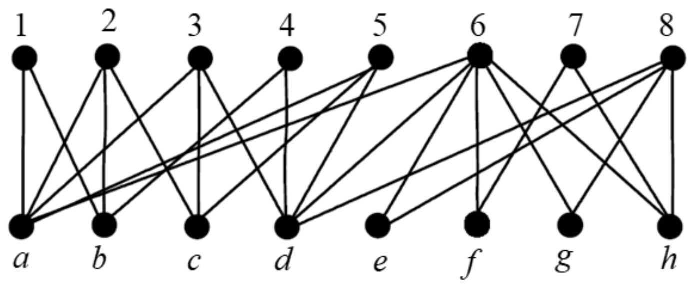
ד. בגרף הדו"צ המלא $K_{5,5}$ כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

28) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי בגרף הבא אין זווג מושלם?

ב. מצא זווג מקסימום.

ג. מהו המספר המינימלי של קשתות שיש להוסיף לגרף כך שיהיה זווג?



29) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט. נגדיר גרף חדש $H=(V,E')$ באופן הבא:

$E'=\left\{\{x,y\}\middle|x,y\in V\wedge\exists z\in V:\{\{x,z\},\{y,z\}\}\subseteq E\right\}$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

א. אם G קשיר אז H קשיר.

ב. אם G קשיר אז H לא קשיר.

ג. אם H קשיר אז G קשיר.

ד. אם H קשיר אז G לא קשיר.

30) נתון גרף G הוכח כי אם $\bar{G}$ לא קשיר אז לכל שני קודקודים x,y ב- G מתקיים $d(x,y)\le 2$ (כאשר $d(x,y)$ המרחק בין x ל- y).

31) נתונה קבוצה בת 5 קודקודים: $V=\{v,u,t,s,r\}$.

כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים V מקיימים שדרגת כל קודקוד קטנה ממש מ-4?

32) יהי G גרף חסר מעגלים כעל 20 קודקודים ו-15 קשתות.

כמה רכיבי קשירות בגרף?

33) הוכח כי בכל צביעה של קשתות K_{2t+1} ב- t צבעים נקבל מעגל חד צבעי.

גרף דו צדדי:

שאלות:

1) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\} \| |A|=3\}$
$E=\{\{A,B\} \| |A\cap B|=1\}$.
א. האם G דו צדדי?
ב. האם G דו קשיר?

2) יהי $G=(V,E)$ גרף. כל צומת של G היא סדרה בינארית באורך 6.
למשל 000000 צומת של G. שני צמתים אם מחוברים אם הם נבדלים זה מזה בשני מקומות בדיוק. למשל 010111 מחובר ל- 011101 כי הם נבדלים במקוות השלישי והחמישי.
א. כמה קשתות יש ל- G?
ב. האם G קשיר? כמה רכיבי קשירות יש ל- G?
ג. האם G דו"צ?
ד. (למי שלמד גרפים מישוריים, האם G מישורי?)

3) מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם: $K_{2,n}$ $(n\geq 1)$ והתקבל גרף G שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר אין בו קודקודים שדרגתם אפס).
הוכיחו ש- G הוא עץ. (שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים).

4) מה הגרף המשלים של הגרפים הדו"צ $K_{4,4},K_{5,5}$ ובאופן כללי $K_{n,n}$?

5) יהיו $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$ שני גרפים. האיחוד שלהם מוגדר להיות: $G_1\cup G_2=(V,E)$ כאשר $V=V_1\cup V_2, E=E_1\cup E_2$.
הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות:
א. איחוד של שני גרפים דו"צ הוא גרף דו"צ.
ב. איחוד של שני גרפים דו"צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו"צ.
ג. איחוד של n גרפים דו"צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו"צ.
ד. איחוד של n גרפים דו"צ על קבוצות צמתים זרות בזוגות הוא גרף דו"צ.

6) הצג את K_{16} כאיחוד של 4 גרפים דו"צ.

7) הוכח או הפרך את הטענה הבאה:
אם $G=(V,E)$ גרף דו״צ k רגולרי שצדדיו הם A,B אז $|A|=|B|$.

8) יהיו: $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_7$ שבעה גרפים דו״צ שונים על אותה קבוצות צמתים V. לכל גרף צדדים A_i,B_i כאשר: $i=1,2,3,4,5,6,7$ כמובן שבסימונים אלה מתקיים: $A_i\cap B_i=\varnothing$, $A_i\cup B_i=V$ לכל $1\le i\le 7$.
יהי G איחוד כל הגרפים האלו כאשר אם יש קשר המופיע בכמה גרפים ניקח רק קשת אחת כך שאין קשתות מרובות והגרף שהגדרנו הוא גרף פשוט.
לכל צומת ב- G נתאים סדרה בת 7 אותיות לפי הצדדים אליה הוא שייך בגרפים: $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_7$ בהתאמה.
למשל אם v שייך לקבוצות: $A_1,A_2,B_3,B_4,B_5,A_6,A_7$ כלומר בשני הגרפים הראשונים הוא בצד A בשלושת הגרפים הבאים בצד B ובשני הגרפים האחרונים בצד A אז נשמיט את האינדקסים ונתאים לו את המילה: $AABBBAA$.
כלומר ל- v שלנו תתאים המילה: $AABBBAA$ ובאופן דומה לכל צומת תתאים מילה בת 7 אותיות.
הוכח כי אם לשני צמתים u,v מתאימה אותה מילה אז אין צומת ב- G בין u לבין v.

9) יהי G גרף דו צדדי: $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\varnothing$ נתון כי G הוא d רגולרי, $d\ge 1$.
הוכח כי: $|V_1|=|V_2|$.

10) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק אז הגרף המשלים הוא דו צדדי.
ב. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק אז הגרף המשלים אינו דו צדדי.

11) כמה זיווגים מושלמים יש? (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).
א. בגרף המלא K_5?
ב. בגרף המלא K_6?
ג. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$? (הגדרת גרף דו״צ בפרק גרף דו צדדי).
ד. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$ כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

12) יהי $G=(V,E)$ גרף דו-צדדי פשוט. $|V|=n$. הוכיחו כי: $|E|\le \frac{n^2}{4}$.

13) נגדיר גרף שצמתיו הם: $P\left(\{1,2,3,\cdots n\}\right)$ (יש 2^n צמתים) ושני צמתים הם מחוברים אם אחד מהם מכיל את השני והם הבדלים באיבר אחד.
(למשל: $\{1,2,5,7\},\{1,5,7\}$ מחוברים).

א. הוכח כי G קשיר.
ב. הוכח כי G רגולרי.
ג. הוכח כי G הוא גרף דו"צ.

14) הוכח או הפרך: אם $G=(V,E)$ אוילרי דו צדדי אז: $|V|\in\mathbb{N}_{even}$.
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים).

עצים:

שאלות:

1) יהי T עץ על $n \geq 2$ קודקודים שלו בדיוק שני עלים. מהן דרגות קודקודי T?
רשמו אותן, לכל $n \geq 2$, בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות) והוכיחו נכונות תשובתכם.

2) יהי $T=(V,E)$ עץ. הוכיחו שאם כל דרגותיו אי-זוגיות אזי גם $|E|$ הוא מספר אי-זוגי.

3) יהי T עץ על $n \geq 4$ קודקודים. אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר ב-T הוא $n-2$ (יש מסלול פשוט באורך $n-2$ ואין מסלול ארוך יותר).
מהן דרגות קודקודי T? רשמו אותן בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות).

4) יהי T עץ. נוסיף ל-T קודקוד שנקרא לו v, וקשתות מ-v לחלק מקודקודי T.
מה צריכה להיות דרגת v כדי שבגרף המתקבל יהיה בדיוק מעגל פשוט אחד?
הוכיחו שאם דרגת v תהיה גדולה יותר, בגרף יהיה יותר ממעגל פשוט אחד.

5) G גרף עם 20 קודקודים ו-15 קשתות ללא מעגלים. כמה רכיבי קשירות בגרף?

6) נתונה קבוצה של 10 קודקודים, ואוסף שקפים שעליהם מצוירים <u>עצים</u> על אותם עשרה קודקודים. גיורא מניח מספר כלשהו של שקפים זה על זה, ומקפיד שאף קשת משקף אחד לא תכסה על אותה קשת בשקף אחר (כלומר אין אף קשת משותפת לשני עצים שונים).
הוכיחו שהגרף שגיורא מקבל מאיחוד העצים שמצויירים על השקפים לא יכול להיות גרף שכל דרגותיו שווֹת ל-5. רמז: חשבו את מספר הקשתות בגרף.

7) יהיו: $T_2=(V,E_2)$, $T_1=(V,E_1)$ שני עצים על אותה קבוצת קודקודים.
נגדיר גרף G על אותה קבוצת קודקודים וקשתותיו: $E=E_1 \cup E_2$.
הוכח כי קיים: $x \in V$ כך ש-$d(x) \leq 3$. (x דרגתו של x ב- G).

8) יהיו: $T_2=\langle V_2,E_2\rangle$, $T_1=\langle V_1,E_1\rangle$ עצים.
נגדיר גרף G באופן הבא: $G=\langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2\rangle$.
א. נתון כי: $V_1 \cap V_2=\{v\}$. האם G בהכרח עץ? נמקו.
ב. נתון כי: $E_1 \cap E_2=\{e\}$. האם G בהכרח עץ? נמקו.

9) יהי T עץ על $n\ge 3$ קודקודים ויהי v קדקוד ב-T מדרגה 2. יהי k מספר רכיבי הקשירות של $T-v$ (שהוא תת הגרף של T המתקבל ממחיקת v והקשתות ש-v קצה שלהן). מה הם הערכים האפשריים עבור k? הוכיחו טענתכם!

10) יהי T עץ בעל n קודקודים. נתון כי דרגותיו הן: 1,3,5 בלבד. יש 7 קודקודים מדרגה 3 ו-10 מדרגה 5. כמה עלים יש בעץ?

11) יהי $T=(V,E)$ עץ שבו: $|V|=n$. דרגות צמתי T הן: 1,3,5 בלבד. מס' הצמתים שלהם דרגה 3 הוא 10 ומס' הצמתים שלהם דרגה 5 הוא 12.
כמה עלים (צמתים מדרגה 1) יש לעץ?

12) הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים קיים עץ פורש מונוכרומטי.
הערה: עץ פורש הוא עץ שקודקודיו הם כל קודקודי G וקשתותיו הן חלק מקשתות G.

13) יהי: $G=(V,E)$ $|V|=n,$, גרף פשוט וחסר מעגלים שבו k רכיבי קשירות,
הוכיחו כי: $|E|=n-k$.

14) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים: $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק איזומורפיזם).

15) מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם $K_{2,n}$ $(n\ge 1)$ והתקבל גרף G שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר אין בו קודקודים שדרגתם אפס).
הוכיחו ש-G הוא עץ. (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).

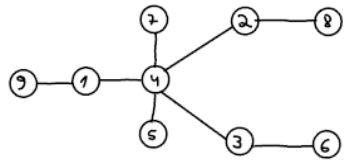
16) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים: $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ ו-$G_3=(V,E_3)$.
נגדיר: $G=(V,E_1\cup E_2\cup E_3)$ איחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב-V דרגתו ב-G היא לפחות 6.
הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים: G_1, G_2 ו-G_3 אינו חסר-מעגלים

ב. יהיו: $G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2),G_3=(V_3,E_3)$ שלושה עצים על אותה קבוצת צמתים V.
לכל צומת $v\in V$ נסמן: $d_i(v)$ את הדרגה של v ב-G_i אשר $i=1,2,3$.
הוכח כי קיים צומת $v\in V$ עבורו: $\sum_{i=1}^{3} d_i(v)\le 5$.

17) מיהו העץ הממוספר המותאם למילה : $(1,1,3,4,3,6,10,1)$?

18) מה היא סדרת פרופר של העץ הבא?



19) בכמה עצים שונים על קבוצת הצמתים : $\{1,2,3,4,5,6\}$ אין שום צומת מדרגה זוגית?

20) בכמה עצים על קבוצת הקודקודים : $\{1,2,3,4,\cdots,10\}$ כל העלים הם מספרים זוגיים?

21) כמה עצים שונים יש על הקודקודים $\{1,\ldots n\}$ שלהם בדיוק שני עלים?

22) T הוא עץ בעל 60 צמתים, מתוכם בדיוק 10 צמתים מדרגה 3 ואין בצמתים מדרגה גדולה מ-3.

א. הדגם עץ כזה.

ב. מצא את מספר העלים ללא שימוש בקוד פרופר. (הדוגמה מסעיף א. אינה מהווה הוכחה. דוגמה אף פעם אינה מהווה הוכחה).

ג. מצא את מספר העלים בעזרת קוד פרופר.

23) בכמה עצים על הקודקודים : $\{1,2,3,\cdots,10\}$ יש שלושה עלים והם (ורק הם) : 8,9,10?

24) יהי G גרף פשוט על n קודקודים המכיל מעגל המילטון. נתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של G שהוא עץ.
האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף G ? אם כן מהו מספר הקשתות? (שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים).

25) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים : $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה זו מופיעה בפרק איזומורפיזם).

מעגלים מיוחדים:

שאלות:

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג עץ.
רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

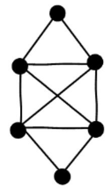
מבוא:

1) צפה בסרטון על מעגלי המילטון והוכח כי:
א. תנאי אורה אינו תנאי הכרחי.
ב. החסם במשפט אורה הוא הדוק.

2) בשאלה זו נחקור את הקשר בין המושג מעגל אוילר לבין מעגל המילטון.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם G המילטוני אז G אוילרי.
ב. אם G המילטוני אז G לא אוילרי.
ג. אם G לא המילטוני אז G אוילרי.
ד. אם G לא המילטוני אז G לא אוילרי.
ה. לעניין הקשר בין המושגים, מה המסקנה המתבקשת מסעיפים א-ד?
ו. אם G הוא גם אוילרי וגם המילטוני אז יש בו מסלול שהוא בעת ובעונה אחת גם מסלול אוילר וגם מסלול המילטון.
ז. אם G אוילרי וגם המילטוני אז G הוא מעגל פשוט.
ח. אם יש ב-G מסלול שהוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר וגם מעגל המילטון אז G הוא מעגל פשוט.

כללי:

1) ענה על הסעיפים הבאים:
א. מצא מעגל אוילר, מעגל המילטון, ומסלול המילטון שאינו מעגל המילטון בגרף הבא:



ב. הוכיחו את הטענה הבאה, או תני דוגמה נגדית והסבר שמראה שאכן מדובר בדוגמה נגדית: אם בגרף יש מעגל המילטון, אז יש בו מעגל אוילר.

2) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\} \| |A|=3\}$
$E=\{\{A,B\} \| |A\cap B|=1\}$. למשל: $\{\{2,4,7\},\{1,4,6\}\}\in E$.
א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?
ב. האם G דו"צ?
ג. האם G אוילריי?
ד. האם G המילטוניי?

3) מהו האורך המירבי של מסלול ב- K_{2n+1}? נמקו.

4) הוכיחו בכל גרף שכל דרגותיו 4 ניתן לצבוע את קשתותיו כך מכל קודקוד יצאו בדיוק שתי קשתות מכל צבע.

5) ענה על הסעיפים הבאים:
א. יהי G גרף שקודקודיו הן תתי קבוצות בנות 4 איברים של: $\{1,2,3,\cdots,8\}$ כאשר שני קודקודים הם מחוברים אם ורק אם הקבוצות יש 2 איברים בדיוק. האם ב- G יש מעגל המילטון?
ב. יהי $K_{m,n}$ גרף דו צדדי שלם. הוכח כי $K_{m,n}$ המילטוני $\Leftrightarrow m=n$.

6) יהיו: $G_2=(V_2,E_2)$, $G_1=(V_1,E_1)$, $V_2\cap V_2=\varnothing$, $E_1\cap E_1=\varnothing$ שני גרפים אוילריים פשוטים. נגדיר: $G=(V,E)$ באופן הבא: $E=E_1\cup E_2$, $V=V_1\cup V_2$, ומלכדים צומת $u_1\in V_1$ עם צומת $u_2\in V_2$. האם G אוילריי? ואם נחבר את u_1 עם u_2 במקום ללכד אותם האם כעת G אוילריי?

7) יהי $G=(V,E)$ גרף אוילריאני בעל מספר אי זוגי של צמתים.
הוכח כי יש ב- G לפחות שלושה צמתים בעלי אותה דרגה.
(שובך היונים, מספר הקודקודים $2n+1$ ויש n דרגות אפשריות כי כולן זוגיות.

8) יהי G גרף בעל שני רכיבי קשירות, T_1 ו- T_2, שכל אחד מהם עץ. מוסיפים שתי קשתות חדשות ל-G (קבוצת הקודקודים נשארת ללא שינוי) ומתקבל גרף חדש $\tilde{G}$.
א. הוכיחו שב- $\tilde{G}$ בהכרח יש מעגל.
ב. בנו דוגמה שבה ב- $\tilde{G}$ יש מעגל המילטון.

9) יהי G גרף פשוט על $n \ge 3$ קודקודים.
נתון:
(i) n מספר זוגי.
(ii) כל הדרגות ב-G שוות (כלומר G גרף רגולרי).
(iii) גם G וגם $\bar{G}$ קשירים.
הוכיחו שלפחות באחד מבין G ו- $\bar{G}$ יש מעגל המילטון.

10) הוכח או הפרך את הטענה הבאה: אם G אוילרי דו"צ אז מספר הצמתים של G הוא זוגי.

11) עבור: $A=\{1,2,3\}$ נגדיר: $G=(V,E)$ כאשר: $V=A\times A$ (9 צמתים)
ואת E קבוצת הצמתים נגדיר באופן הבא: $\{(a,b),(c,d)\}\in E$ אם ורק אם: $a+b\neq c+d$.
א. הוכח כי G קשיר.
ב. מה דרגת הצומת $(1,1)$ ומה דרגת הצומת $(2,3)$? כמה קשתות יש ב- G?
ג. הוכח כי באין ב- G מסלול אוילר.

12) יהי G גרף פשוט 3-רגולארי על $n \ge 4$ קודקודים. נתון שב-G יש מעגל המילטון. הוכיחו שתת הגרף של G המתקבל ממחיקת כל הקשתות ששייכות למעגל המילטון הוא בעל $\frac{n}{2}$ רכיבי קשירות (בפרט, עליכם להוכיח ש-n זוגי!).

13) יהיו: $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני גרפים על אותה קבוצת קודקודים V.
מגדירים את הגרף: $G=(V,E_1\oplus E_2)$ כאשר: $E_1\oplus E_2$ הוא ההפרש הסימטרי של שתי קבוצות הקשתות. (כל הקשתות שנמצאות ב-E_1 או ב-E_2 אבל לא בשתיהן) הוכח כי אם ב-G_1,G_2 יש מעגל אוילר ואם G קשיר אז גם בו יש מעגל אוילר.

14) יהי $G=(V,E)$ גרף על n צמתים.
א. הוכח כי אם: $|E|>\binom{n-1}{2}+1$ אז G המילטוני.
ב. הוכח כי החסם הנ"ל הדוק כלומר כי הטענה:
אם: $|E|\ge\binom{n-1}{2}+1$ אז G המילטוני, איננה נכונה.

15) נתון $G=(V,E)$ גרף אוילרי ויש בו שלוש קשתות: $e_1,e_2,e_3 \in E$ שלאחר הסרתן מהגרף G נשאר אוילרי.
א. הדגם גרף כזה.
ב. הוכח כי G לא דו"צ.

16) נתון G גרף אוילר. נגדיר שיטה: נבחר קודקוד ונתחיל ממנו מסלול ונמשיך אותו כרצוננו כל עוד אפשר בלי לחזור על קשת פעמיים.
א. הוכח כי בשיטה זו תמיד נקבל מעגל.
ב. האם בשיטה זו מתקבל תמיד מעגל אוילר?
ג. נתון G גם המילטוני האם בהכרח יש בו מסלול שהוא גם מעגל אוילר וגם מעגל המילטון?

17) יהי G גרף פשוט על n קודקודים המכיל מעגל המילטון. נתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של G שהוא עץ. האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף G? אם כן מהו מספר הקשתות?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים).

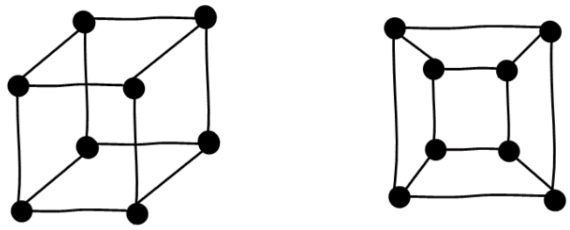
18) יהי G גרף, לאו דווקא קשיר, שכל דרגותיו אי זוגיות. נבנה גרף H שקודקודיו הם קודקודי G ועוד קודקוד חדש v, וקשתותיו הם קשתות G וכל הקשתות האפשריות בין v לקודקודי G. הוכיחו שב-H יש מעגל אוילר.

19) הוכח או הפרך: אם $G=(V,E)$ אוילרי דו צדדי אז: $|V| \in \mathbb{N}_{even}$.
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).

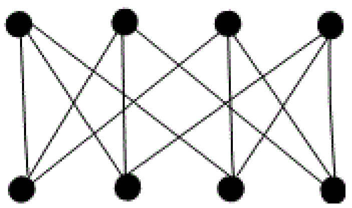
איזומורפיזם:

שאלות:

1) הוכח כי הגרפים הבאים איזומורפיים זה לזה.
זה אומר שגרף הקובייה התלת מימדי הוא מישורי.
(ניתן לשכן אותו במישור מבלי שאף צלע חותכת צלע אחרת).
(לשכן = למצוא גרף איזומורפי לו).

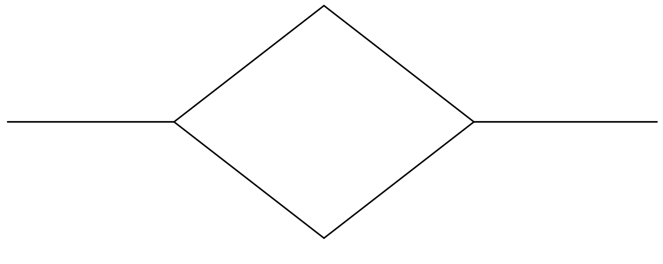


2) הוכח כי ניתן לשכן במישור את הגרף הבא:
כלומר קיים גרף G איזומורפי לו, מבלי שאף צלע ב- G חותכת צלע אחרת).

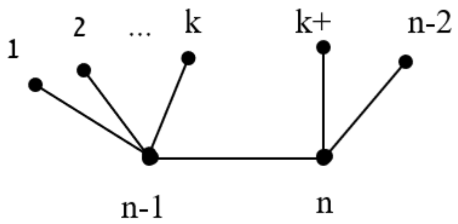


3) יהיו G_1, G_2 שני גרפים איזומורפיים. הוכח כי G_1 חסר מעגלים $\Leftrightarrow$ G_2 חסר מעגלים. הסק כי G_1 עץ $\Leftrightarrow$ G_2 עץ.

4) כמה גרפים שונים זה מזה ואיזומורפיים לגרף שמצויר להלן אפשר לבנות על קבוצת הקודקודים: $\{a,b,c,d,e,f\}$?

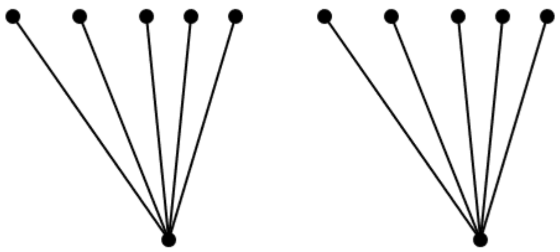


5) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים: $V=\{1,2,...,n\}$ איזומורפיים לגרף הבא:



תנו תשובה לכל k,n טבעיים המקיימים: $2\le k\le n-3$.
הפרידו בין המקרים: $n=2k+2$, $n\ne 2k+2$.

6) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים: $V=\{v_1,v_2,...,v_{12}\}$ איזומורפים לגרף הבא:



7) הוכיחו, או תנו דוגמה נגדית והסבירו מדוע היא דוגמה נגדית:
אם לשני גרפים אותה רשימת דרגות (כלומר אם נסדר את דרגות קודקודי כל אחד מהגרפים בסדר עולה, נקבל אותה סדרה), אז הגרפים איזומורפיים.

8) נגדיר C_n להיות מעגל על n קודקודים. לאלו ערכים של n מתקיים ש-C_n איזומורפי ל-$\bar{C}_n$? (כאשר $\bar{C}_n$ הוא הגרף המשלים).

9) יהי T עץ. מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים: $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה לא קלה).

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 7 - קומבינטוריקה בסיסית

תוכן העניינים

מבוא לקומבינטוריקה בסיסית:

שאלות:

1) חשב, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$

2) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{n^2-2}{(n+1)!}+\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

3) חשב ללא מחשבון:

א. $\binom{5}{3}$

ב. $\binom{4}{1}$

ג. $\binom{10}{0}$

ד. $\frac{1}{13}\binom{14}{11}$

4) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$

ב. $\binom{n-1}{k-1}=\frac{k}{n}\binom{n}{k}$

ג. $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

ד. $\binom{2n+1}{n}=\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}$

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון?
רשום את כל התוצאות.

ב. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון ואחר כך מטבע? רשום את כל התוצאות.

ג. עושים ניסוי. מטילים מטבע. אם יצא עץ אז מטילים סביבון ואם יצא פלי אז מטילים שוב את המטבע ולאחר מכן סביבון.
כמה תוצאות אפשריות לניסוי?
למשל (פלי, פלי, גדול) ו-(עץ, היה) הן תוצאות אפשריות.
רשום את כל התוצאות.

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מהאותיות ב, ג, ד, ה יוצרים מילה בת שתי אותיות לא בהכרח בעלת משמעות. רשום את כל המילים האפשריות ואשר עם עיקרון הכפל.

ב. מהאותיות א, ב, ג, ד, ה יוצרים מילה בת שלוש אותיות לא בהכרח בעלת משמעות. כמה מהמילים הנ"ל מתחילות באות א וגם א מופיעה פעם אחת בדיוק? (רמז סעיף קודם).

7) במסעדה מציעים ארוחה עסקית. הארוחה מורכבת ממנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. מנה ראשונה יכולה להיות סלט ירקות, סלט פטריות, סלט כבד קצוץ או מרק עוף. מנה עיקרית יכולה להיות סטייק אנטריקוט, שניצל, כבד אווז, דג, לזניה טבעונית, או שניצל מהצומח, ולשתייה מוצע, קפה, תה, לימונדה או קולה.

א. כמה ארוחות אפשריות יש?

ב. כמה ארוחות אפשריות יש אם אין שתיה חמה?

ג. כמה ארוחות אפשרויות יש למסעדה להציע לסועד טבעוני?

8) כמה תת קבוצות יש לקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$?

א. בנות שלושה איברים? רשום את כולן.

ב. בנות ארבעה איברים? השווה לסעיף א'.

ג. רשום את כל התמורות של 0001111 והשווה לסעיפים קודמים.

ד. בכמה תמורות של המספרים 00112222222 כל 0 חייב להופיע ליד 1?

9) בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב זוג מתלמידי כיתות א' אם בכיתה א' 1 יש 20 בנים ובכיתה א' 2 יש 15 בנות כך ש:

א. ללא הגבלה.

ב. זוג מעורב. (בן ובת)

ג. זוג חד מיני. (שני בנים, או שתי בנות)

10) בלוטו יש 45 מספרים וצריך לנחש 6 מספרים ואת המספר החזק בתוך הקבוצה $\{1,2,3,4,\cdots,10\}$. כמה אפשרויות יש?

11) בכמה אופנים שונים ניתן לבחור מספר תלת ספרתי כך ש:

א. ללא הגבלה. (זכרו שמספר לא יכול להתחיל באפס)

ב. כל ספרותיו שונות.

ג. כל ספרותיו שונות וסדר הספרות לא משנה? (למשל 123 ו-321 נחשבים אותו דבר)

ד. כל ספרותיו שונות וגם בסדר יורד כלומר ספרת המאות גדולה או שווה מספרת העשרות גדולה או שווה מספרת היחידות.

ה. כל ספרותיו שונות וגם בסדר עולה כלומר ספרת המאות קטנה או שווה מספרת העשרות קטנה או שווה מספרת היחידות.

12) כמה מספרים מורכבים מהמספרים 1,2,3,4,5,6,7 יש כך ש:
א. באורך 7?
ב. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לכל היותר?
ג. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לפחות?

13) בכמה אופנים שונים ניתן להושיב 5 זוגות נשואים על ספסל בן 10 מקומות (ענה גם לגבי שולחן עגול) כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. כל אישה תשב לצד בעלה.
ג. גבר ישב רק ליד אישה.
ד. אף שתי נשים לא ישבו זו לצד זו ואף שני גברים לא ישבו זה לצד זה.

14) כמה מספרים שונים בני חמש ספרות ניתן להרכיב מהספרות 1,2,3,4,5,6,7 כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. המספר מתחיל בספרה 2.
ג. המספר לא מתחיל בספרה 2.
ד. כל הספרות שונות.
ה. הספרות 1 וגם 2 לא מופיעות.
ו. בדיוק 1 מן הספרות 1 או 2 מופיעה.
ז. ספרות 1 וגם 2 מופיעות.
ח. חזור על סעיפים ה-ז כאשר כל הספרות שונות.
ט. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות צמודות.
י. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות ולא צמודות.
יא. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות.
יב. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות וגם הספרות 6,7 מופיעות וצמודות.
יג. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות וגם הספרות 6,7 מופיעות ולא צמודות.

15) בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב קוד סודי המורכב מארבע ספרות מתוך הספרות $0,1,2,3,\cdots,9$ כך ש-
א. ללא הגבלה?
ב. הקוד מגדיר מספר זוגי?
ג. הקוד מגדיר מספר המתחלק בחמש?
ד. אין בקוד ספרות זהות?
ה. יש בקוד לפחות שתי ספרות זהות?
ו. יש בקוד בדיוק שתי ספרות זהות?
ז. אין בקוד את הספרה 5?
ח. הספרה 5 חייבת להופיע בקוד?
ט. יש בקוד לפחות אחד מהספרות 4,5?
י. אין בקוד לא את הספרה 4 ולא את הספרה 5?

יא. אם יש את הספרה 5 אז אין ספרה יותר גדולה מ-5? (רשום שני מספרים המקיימים את התנאי ושני שאינם מקיימים את התנאי וכתוב מהו המשלים של סעיף זה? נסח זאת על דרך החיוב כלומר בלי להשתמש במילים "אין" ו-"לא").

16) נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,\cdots,17\}$ כמה תת קבוצות יש ל- A כך ש- :

א. ללא הגבלה? (צפה בשיעור על חישוב מספר האיברים בקבוצת חזקה)
ב. בנות 3 איברים?
ג. בעלות 3 איברים לפחות?
ד. מכילות רק מספרים זוגיים?
רק אי זוגיים?
מכילים רק מספרים מאותה זוגיות?
ה. מכילות אי זוגי אחד לפחות?
מכילות זוגי אחד לפחות וגם אי זוגי אחד לפחות?
ו. אם הן מכילות את 1 אז מכילות גם את 2?
(זה סעיף קשה אם הינך מתקשה נסה בעזרת משלים)
ז. מכילות ממש את $\{1,2,3\}$.

17) בכמה אופנים שונים ניתן להכניס 7 כדורים ל-13 תאים כך ש- :

א. הכדורים שונים ומותר יותר מכדור בתא?
ב. הכדורים זהים ומותר יותר מכדור בתא?
ג. הכדורים שונים ואסור יותר מכדור בתא?
ד. הכדורים זהים ואסור יותר מכדור בתא?
ה. הכדורים שונים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?
ו. הכדורים זהים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?

18) נתונים חמישה כדורים ונתונים שבעה צבעים שונים. (נניח שחור, לבן, אפור, צהוב אדום כחול וסגול) בכמה אופנים שונים ניתן לצבוע את הכדורים ולסדרם בשורה אם :

א. סדר הכדורים בשורה משנה.
ב. סדר הכדורים בשורה לא משנה? (כלומר ארבעה כדורים שחורים ואחד לבן זה נחשב אותו דבר לא משנה היכן הלבן ממוקם)

19) עבור $B=\{x,y\}$ $A=\{1,2,3\}$ חשבו כמה פונקציות יש מ-A ל- B ומ-B ל-A ואשרו עם עיקרון הכפל.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{30}$. ב. $\frac{1001}{285}$.

2) הוכחה.

3) א. 10. ב. 4. ג. 1. ד. 28.

4) הוכחה.

5) א. 24. ב. 48. ג. 12.

6) א. 16. ב. 16.

7) א. 96. ב. 48. ג. 16.

8) א. 35. ב. 35. ג. 35. ד. 180.

9) א. 595. ב. 300. ג. 295.

10) 81,450,600.

11) א. 900. ב. 648. ג. $\binom{10}{3}$. ד. $\binom{10}{3}$. ה. $\binom{9}{3}$.

12) א. $\binom{7}{7}$. ב. אין. ג. אין.

13) א. ספסל: $10!$, מעגל: $9!$. ב. ספסל: $5!\cdot 2^5$, מעגל: $4!\cdot 2^5$.
ג. ספסל: $2!\cdot(5!)^2$, מעגל: $4!\cdot 5!$. ד. ספסל: $2!\cdot(5!)^2$, מעגל: $4!\cdot 5!$.

14) א. 7^5. ב. 7^4. ג. $6\cdot 7^4$. ד. $3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$. ה. 5^5.
ו. $2\left(6^5-5^5\right)$. ז. $7^5-2\cdot 6^5+5^5$. ח. (ה) $5!$. ח. (ו) $10\cdot 5!$.
ח. (ז) $10\cdot 5!$. ט. $4\cdot 5!$. י. $6\cdot 5!$. יא. 216. יב. 24.
יג. 12.

15) א. 10^4. ב. $5\cdot 10^3$. ג. $2\cdot 10^3$. ד. $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$.
ה. $10^4-10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$. ו. $10\cdot 9\cdot 8\cdot\binom{4}{2}$. ז. 9^4.
ח. 10^4-9^4. ט. 10^4-8^4. י. 8^4. יא. $9^4+6^4-5^4$.

16) א. 2^{17}. ב. 680. ג. 130,918. ד. זוגיים: 2^8, אי זוגיים: 2^9,
אותה זוגיות: 768. ה. לפחות אי זוגי אחד: 130,816,
לא מאותה זוגיות: 130,304. ו. 98,304. ז. 16,383.

17) א. 13^7. ב. $\binom{19}{7}$. ג. $\binom{131}{61}$. ד. $\binom{13}{7}$.
ה. $5!\binom{12}{5}\binom{7}{2}13$. ו. $\binom{16}{5}\cdot 13$.

18) א. 7^5. ב. $\binom{11}{5}$.

19) מ-A ל-B: 8, מ-B ל-A: 9.

קומבינטוריקה יותר לעומק:

שאלות:

1) בכמה אופנים ניתן לסדר 10 אנשים בשורה כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. אבי ובני סמוכים.
ג. אבי, בני וגדי סמוכים.
ד. אבי ובני לא סמוכים.
ה. אבי ובני סמוכים וגם גדי ודני סמוכים.
ו. אבי ובני סמוכים וגדי ודני לא סמוכים.

2) בכיתה בה יש 10 בנים ו-15 בנות יש להרכיב נבחרת כדורסל בה יש לפחות 2 בנים ולפחות 2 בנות בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

3) בכמה אופנים שונים ניתן להניח 8 צריחים על לוח 8×8 בלי שאף צריח יאיים על חברו כך ש:
(צריח מאיים על חברו אם הוא נמצא באותה שורה או באותה עמודה של חברו).
א. כל הצריחים הם לבנים.
ב. שלושה צריחים הם לבנים וחמישה הם שחורים.
ג. הצריחים נלקחים מתוך שקית ובה מלאי בלתי מוגבל של צריחים לבנים ומלאי בלתי מוגבל של צריחים שחורים.

4) בכמה מספרים 6 ספרתיים מופיעה הספרה:
א. 0 פעם אחת בדיוק.
ב. 0 פעם אחת לפחות.
ג. 7 פעם אחת לפחות.
ד. 7 פעם אחת בדיוק.
יש לזכור שמספר לא יכול להתחיל בספרה 0.

5) ענה על הסעיפים הבאים:
א. יהי n טבעי בכמה תת קבוצות של $\{1,2,3,...,2n\}$ יש אי זוגי אחד לפחות?
ב. בכמה תת קבוצות של $\{1,2,3,...,2n\}$ יש לפחות $n+1$ איברים.

6) בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 10 לימונדות זהות 1 כוס קולה ו-1 כוס קינלי ל-4 תלמידים צמאים כך שכל תלמיד מקבל לפחות משקה אחד והקולה והקינלי ניתנים לתלמידים שונים?

7) בכמה דרכים ניתן לחלק 400 כדורים זהים ל-3 תאים כך ש:
א. יש תא ובו יותר מ-200 כדורים.
ב. בכל תא מספר זוגי של כדורים.
ג. בשני תאים מתוך השלוש מספר אי זוגי של כדורים ובתא אחד מספר זוגי של כדורים.

8) 7 אנשים נכנסים למעלית בבניין בן 13 קומות בכמה אופנים הם יכולים ללחוץ על כפתורי המעלית כך ש:
א. המעלית תעצור בקומה החמישית? (יתכן ותמשיך הלאה משם)
ב. המעלית תעצור בקומה החמישית לכל היותר.
ג. המעלית תגיע לפחות עד הקומה החמישית.
ד. המעלית תעצור בקומה החמישית. (ולא תמשיך משם הלאה)

9) בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים זהים ו-n כדורים צבעוניים (שונים) ל-$2n$ כך שבכל תא יהיה:
א. לכל היותר כדור אחד.
ב. לכל היותר כדור לבן אחד ואין מגבלה על מספר הצבעוניים.
ג. לכל היותר כדור צבעוני אחד ואין הגבלה על מספר הלבנים.
ד. מספר שווה של לבנים וצבעוניים.

10) במלבן בן k שורות ו-m עמודות יש לסמן $\times$ או $\bigcirc$ בכל משבצת.
א. הראו כי יש $\left(2^m-1\right)^k$ דרכים לעשות זאת כך שבכל שורה יופיע $\times$ אחד לפחות.
ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת כך שיופיע $\bigcirc$ אחד לפחות בכל עמודה.
ג. הסיקו כי: $2^{mk}\le\left(2^m-1\right)^k+\left(2^k-1\right)^m$.

11) ענה על הסעיפים הבאים:
א. כמה תמורות של $1,2,3,\cdots,n$ מספר 2 מופיע בין 1 ל-3? (לאו דווקא צמודים).
(למשל עבור $n=7$ התמורה 4352981 חוקית כי 2 נמצא בין 1 ל-3).
ב. בכמה תמורות של $1,2,3,\cdots 5$ מימין למספר 3 אין מספרים קטנים מ-3.
(למשל 24135 חוקית ואילו 43152 לא חוקית).

12) ענה על הסעיפים הבאים:
א. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 12 אנשים לשלושה זוגות ושתי שלשות?
ב. כמו סעיף א, אך בנוסף דני ודנה לא נמצאים באותה קבוצה.

13) כמה פתרונות בשלמים אי שליליים יש לכל אחת מהמשוואות הבאות?

א. $x_1+x_2+\cdots x_7=20$.

ב. $x_1+x_2+5x_3+x_4=14$.

ג. $(x_1+x_2+x_3)(x_4+x_5+x_6)=18$.

14) בכמה דרכים ניתן לבחור ועדה בת n אנשים מתוך n זוגות נשואים כך ש:

א. בוועדה לא ישתתף אף זוג נשוי.

ב. מספר הגברים יהיה שווה למספר הנשים.

ג. מספר הגברים יהיה קטן ממש ממספר הנשים.

15) מצאו בכמה פונקציות: $f:\{1,2,3,\ldots,3n-1,3n\}\to\{1,2,3,\ldots,n-1,n\}$ מקיימות את התנאי הבא: לכל אבר בתמונה יש בדיוק 3 מקורות.

16) מה מספר הדרכים לפזר 50 כדורים אדומים ו-20 כדורים כחולים ל-10 תאים, כך שבכל תא מספר הכדורים האדומים יהיה לפחות כמספר הכדורים הכחולים?

17) בכמה דרכים ניתן לחלק קבוצה בגודל $2n$ לקבוצה בגודל n ולזוגות. (ניתן להניח כי n זוגי).

18) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה 8 פילים <u>שונים</u>, 2 שועלים <u>זהים</u> ושתי תרנגולות <u>זהות</u>, כך שהפילים מסודרים משמאל לימין על פי משקלם בסדר עולה, ואף שועל לא יהיה צמוד לתרנגולת?

19) בכמה דרכים ניתן לחלק 100 כדורים לבנים ו-100 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ל-250 תאים באופן שיתקיימו שני התנאים הבאים: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור לבן אחד, וכמו-כן יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד?

20) בכמה דרכים ניתן לסדר n גברים ו-n נשים במעגל כך שבני אותו מין לא ישבו זה לצד זה? כנ"ל לגבי שורה.

21) יש לבחור קבוצה של ששה ילדים מבין תלמידי כיתות א1 ו-א2, באופן ששלושה מהם יהיו מ-א1 ושלושה מ-א2. מספר הבנים בקבוצה צריך להיות שווה למספר הבנות בקבוצה (3 ו-3). ב-א1 יש 10 בנים ו-15 בנות וב-א2 יש 15 בנים ו-10 בנות. בכמה אופנים ניתן לבחור את הקבוצה?

22) בכמה קבוצות של n כדורים ב-10 צבעים יש לפחות כדור אחד מכל צבע?

23) כמה פונקציות: $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ $(n\geq 1)$ מקיימות את התנאי $f(k)\neq f(k+1)$ לכל $1\leq k\leq n-1$?

24) כמה פונקציות: $f:\{1,2,3,\cdots,n\}\to\{1,2,3,\cdots,n\}$ חח״ע ועל יש המקיימות $f(k)-k$ זוגי לכל: $k\in\{1,2,3,\cdots,n\}$.

25) בכמה דרכים ניתן לחלק 60 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ו-90 כדורים לבנים זהים ל-100 תאים כך שיתקיימו שני התנאים הבאים גם יחד. יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד וכמו כן בכל תא יהיו לכל היותר 50 כדורים לבנים.

26) בכמה דרכים ניתן לחלק 4 בננות, 2 תפוזים, ו-4 תפוחים ל-10 אנשים כך שכל אחד יקבל בדיוק פרי אחד? שימו לב שפירות מאותו סוג נחשבים זהים.

27) בכמה דרכים ניתן לבנות שורה מ- $k\geq 0$ כדורים לבנים זהים ו- $m\geq 0$ כדורים צבעוניים שונים. (ושונים מלבן)?

28) כמה תת קבוצות בגודל 7 יש לקבוצה $A=\{1,2,3,...,12,13\}$ שיש בהם שני איברים עוקבים?

29) תהי $A_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$ כאשר $n\in\mathbb{N}_{odd}$ ותהי $a_1,a_2,\cdots a_n$ תמורה כלשהיא של A_n. הוכח כי המכפלה $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ בהכרח זוגית. (יש לפתור)

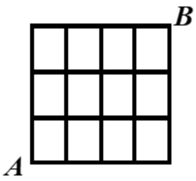
30) מטילים n קוביות. כמה תוצאות יש אם:
א. הקוביות שונות.
ב. הקוביות זהות.

31) נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,\cdots n\}$ כמה זוגות של קבוצת (C,D) , $C,D\subseteq A$ כך ש:
א. ללא הגבלה. עבור $A=\{1,2\}$ רשום את כל הפתרונות.
ב. $C\cap D=\varnothing$ עבור $A=\{1,2\}$ רשום את כל הפתרונות.
ג. $C\subseteq D$ עבור $A=\{1,2\}$ רשום את כל הפתרונות.
ד. $C\cup D=A$ עבור $A=\{1,2\}$ רשום את כל הפתרונות.

ה. אם $2\in C$ אז $2\in D$. (עבור $A=\{1,2,3\}$ הדגם זוג שמקיים את הדרישה וזוג שאינו מקיים את הדרישה).

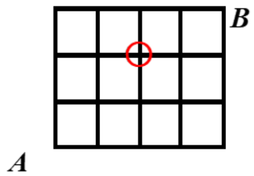
ו. אם יש מספר אי זוגי ב- C אז יש כזה גם ב- D. (שים לב לא נתון ש- n הוא זוגי).

32) חרגול נמצא בנקודה A בשריג המתואר להלן. בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.



א. בכמה אופנים שונים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B?

ב. בכמה אופנים הוא יכול לעשות זאת מבלי לעבור דרך נקודה המסומנת להלן? (הנקודה $(2,2)$).



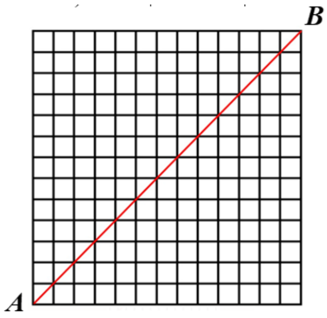
33) החרגול החביב משאלה קודמת לא התעייף (מדובר בחרגול ספורט) ונמצא עכשיו בנקודה A בשריג $n\times n$ (בציור 13×13) המתואר להלן. להזכירכם בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה. בכמה דרכים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B. (שים לב השריג שבשאלה הוא $n\times n$)

א. ללא הגבלה.

ב. מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות $(7,3),(5,9)$? (מה המשלים של הסעיף?)

ג. מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות $(5,3),(7,9)$?

ד. מבלי לגעת באלכסון האדום? (פרט לנקודת ההתחלה ונקודת הסיום).



34) למורה צילה מאגר בלתי מוגבל של חרוזים בשלושה צבעים, אדום, צהוב, ירוק. (חרוזים מאותו צבע נחשבים זהים). בכיתה ג' 27 תלמידים. בשיעור מלאכה המורה צילה נותנת לכל ילד שקית והילד בוחר חמישה חרוזים ומכניס לשקית. בסוף השיעור המורה מכניסה את כל השקיות למחסן.
כמה תכולות מחסן אפשריות?

תשובות סופיות:

(1 א. $10!$. ב. $2!9!$. ג. $3!8!$. ד. $8!9!$. ה. $4!8!$. ו. $14!8!$.

(2 2 דרכים.

(3 א. $8!$. ב. $8!\cdot\binom{8}{3}$. ג. $8!\cdot 2^8$.

(4 א. $5\cdot 9^5$. ב. $9\cdot 10^5-9^6$. ג. $9\cdot 10^5-8\cdot 9^5$. ד. $9^5+5\cdot 8\cdot 9^4$.

(5 א. $2^{2n}-2^n$. ב. $|A|=\dfrac{2^{2n}-\binom{2n}{n}}{2}$.

(6 $4\cdot 3\cdot\binom{11}{3}$.

(7 א. $3\cdot\binom{201}{2}$. ב. $\binom{202}{2}$. ג. $3\cdot\binom{201}{2}$.

(8 א. 13^7-12^7. ב. 5^7. ג. 13^7-4^7. ד. 5^7-4^7.

(9 א. $\binom{2n}{n}n!$. ב. $\binom{2n}{n}\cdot(2n)^2$. ג. $\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot\binom{3n-1}{n}$. ד. $(2n)^2$.

(10 א. ראה סרטון. ב. $(2^k-1)^m$. ג. הוכחה.

(11 א. $\frac{1}{3}5!$. ב. $\frac{1}{3}5!$.

(12 א. $\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}$.

ב. $\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}-\left(\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}+10\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{3!}\right)$.

(13 א. $\binom{26}{20}\binom{26}{6}$. ב. $\binom{16}{2}+\binom{11}{2}+\binom{6}{2}$. ג. $2\left[3\cdot\binom{20}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{11}{2}+\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{2}\right]$.

(14 א. 2^n. ב. $\binom{n}{\frac{n}{2}}^2$.

ג. כאשר n זוגי: $\dfrac{\binom{2n}{n}-\binom{n}{\frac{n}{2}}^2}{2}$, כאשר n אי זוגי: $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2}$.

(15 $\dfrac{(3n)!}{6^n}$.

16) $\binom{29}{9}\binom{39}{9}$.

17) $\dfrac{(2n)!}{n!\left(\frac{n}{2}\right)!2^{\frac{n}{2}}}$.

18) 1638.

19) $\left(\binom{349}{100}-\binom{250}{100}\right)\left(250^{50}-\dfrac{250!}{200!}\right)$.

20) $2(n!)^2$.

21) $\binom{10}{3}^2+\binom{10}{2}^2+\binom{15}{1}^2+\binom{10}{1}^2\binom{15}{2}^2+\binom{15}{3}^2$.

22) $\binom{n-1}{9}$.

23) $n(n-1)^{n-1}$.

24) $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil!\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor!$.

25) $\left(100^{60}-\dfrac{100!}{40!}\right)\cdot\left(\binom{189}{90}-100\cdot\binom{138}{39}\right)$.

26) $\dfrac{10!}{4!4!2!}$.

27) $\dfrac{(m+k)!}{k!}$.

28) $2^{13}-1$.

29) הוכחה.

30) א. 6^n. ב. $\binom{n+5}{5}$.

31) א. 4^n. ב. 3^n. ג. 3^n. ד. 3^n. ה. $3\cdot 4^{n-1}$.

ו. $4^n-\left(2^n-2^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\right)2^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}$.

32) א. $\binom{7}{4}$. ב. 17.

33) א. $\binom{2n}{n}$.   ב. $\left|\bar{A}\cap\bar{B}\right|=\binom{2n}{n}-\left(\binom{10}{3}\binom{2n-10}{n-3}+\binom{14}{5}\binom{2n-14}{n-5}\right)$.

ג. $\left|\bar{A}\cap\bar{B}\right|=\binom{2n}{n}-\left(\binom{8}{3}\binom{2n-8}{n-3}+\binom{16}{7}\binom{2n-16}{n-7}-\binom{8}{5}\binom{8}{2}\binom{2n-16}{7}\right)$.

ד. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

34) $\binom{47}{20}$.

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 8 - אינדוקציה

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 9 - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 10 - הכלה והדחה

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 11 - שובך היונים

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 12 - נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

תוכן העניינים