

# מתמטיקה לחשבונאים א



## תוכן העניינים

1	משוואות אלגבריות
20	חוקי החזקות והשורשים
30	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
40	חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים
57	חילוק פולינומים
58	הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות
84	גבול של פונקציה
97	רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים
110	חישוב נגזרת של פונקציה
123	כלל לופיטל
130	חקירת פונקציה
153	הנגזרת של פונקציות יסודיות ושימושיה
168	הנגזרת של פונקציה מעריכית ושימושיה
173	הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ושימושיה
179	מספר הפתרונות של משוואה
180	אינטגרלים מיידיים
183	אינטגרלים בשיטת ההצבה
184	אינטגרלים של פונקציות רציונליות
186	האינטגרל המסוים
188	שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)
191	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים
195	משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

# מתמטיקה לחשבונאים א

## פרק 1 - משוואות אלגבריות

### תוכן העניינים

1. מערכת משוואות ממעלה שנייה ..... 1
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה ..... 3
3. משוואות ממעלה ראשונה ..... 6
4. משוואות דו-ריבועיות ..... 8
5. משוואה ממעלה שנייה ..... 10
6. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון ..... 12
7. משוואות עם פרמטרים ..... 13
8. משוואות מתקדמות מסכמות ..... 15
9. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית ..... 18

## מערכת משוואות ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- |   |  |
|---|--|
| $(\pm 4, -2)$ <b>(2)</b>  | $(2, 4), (4, 2)$ <b>(1)</b>  |
| $(5, -2), (-5, 2)$ <b>(4)</b>   | $(\pm 2, \pm 1)$ <b>(3)</b>  |
| $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$ <b>(6)</b> | $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$ <b>(5)</b> |
| $(5, -3)$ <b>(8)</b>  | $(7, 4)$ <b>(7)</b>  |
| $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ <b>(10)</b>                                      | $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$ <b>(9)</b>         |
| $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$ <b>(12)</b>  | $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ <b>(11)</b>                                |
|   | $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$ <b>(13)</b>                       |
|   | $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$ <b>(14)</b>                               |

## מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

**סיכום כללי:**

**הגדרה:**

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר  $a_1, b_1, c_1$  ו- $a_2, b_2, c_2$  הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x + 3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

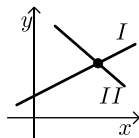
**פתרון של מערכת משוואות:**

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

**הצגה גרפית של מערכת משוואות:**

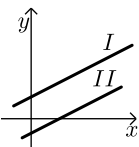
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



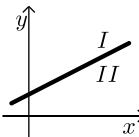
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

### פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה :  
 נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.  
 נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
  - פתרון ע"י השוואת מקדמים :
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
  2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
  3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

### הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

### שאלות:

#### 1) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} \text{ ג.}$	$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} \text{ א.}$
$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases} \text{ ו.}$	$\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} \text{ ה.}$	$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} \text{ ד.}$

#### 2) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \text{ א.}$
$\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases} \text{ ד.}$	$\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} \text{ ג.}$

#### 3) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} \text{ א.}$
---	--

4 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} & \text{ב.} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y & \text{א.} \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) & \text{ג.} \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

5 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 & \text{ג.} \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 & \text{ב.} \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 & \text{א.} \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

6 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} xy = 20 & \text{ב.} \\ y(3x-4) = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 & \text{א.} \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 & \text{ג.} \\ 6x + xy = -20 \end{cases}$$

### תשובות סופיות:

1 א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3)

2 א.  $(4, \frac{1}{3})$  ב.  $(-\frac{4}{5}, 9)$  ג. (4,1.6) ד. (-2,7)

3 א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4 א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2)

5 א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1)

6 א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4)

## משוואה ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה:  $ax = b$  (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא  $x = \frac{b}{a}$  כאשר  $a \neq 0$ .

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- |                             |                                       |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$             | ב. $7 - 2x = 7$                       |
| ג. $2x + x = 24$            | ד. $2x + 6 = 8 + x$                   |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$     |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$   | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- |                              |                                     |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$        | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$            |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$            |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

3 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4 & \text{ב. } \frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1 \\
 \text{ג. } \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15} & \text{ד. } \frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1 \\
 \text{ה. } \frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2 & \text{ו. } 5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1
 \end{array}$$

4 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 & \text{ב. } \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} & \text{ד. } \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2} \\
 \text{ה. } \frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} & \text{ו. } \frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}
 \end{array}$$

5 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} & \text{ב. } \frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12
 \end{array}$$

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $x=1$     ב.  $x=0$     ג.  $x=8$     ד.  $x=2$     ה.  $x=2$     ו.  $x=-3$
- ז.  $x=\frac{1}{2}$     ח.  $x=4$
- (2) א.  $x=3$     ב.  $x=\frac{1}{2}$     ג.  $x=2\frac{1}{4}$     ד.  $x=1$     ה.  $x=4$     ו.  $x=-1$
- (3) א.  $x=-18$     ב.  $x=-30$     ג.  $x=-1$     ד.  $x=1$     ה.  $x=-10$     ו.  $x=-21$
- (4) א.  $x=8$     ב.  $x=-1$     ג.  $x=-3$     ד.  $x=-2$     ה.  $x=2$     ו.  $x=\frac{1}{2}$
- (5) א.  $x=-6$     ב.  $x=-7$     ג.  $x=-7$     ד.  $x=6, x \neq 3$

## משוואות דו-ריבועיות:

### סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  כאשר הנעלם הוא  $x$ .  
 פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר:  $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$  ומציאתו.  
 לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי  $x$ .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4 כגון:  
 $t = x^2 - 1$  : באמצעות פרמטר:  $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$   
 ובכך לפתור משוואה:  $t^2 + 3t - 2 = 0$  ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת  $x$ .  
 דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |  |   |
|--|---|
| $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2)   | $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$ (1)   |
| $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$ (4)   | $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ (3)                               |
| $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$ (6)   | $x^6 + x^3 = 56$ (5)  |
| $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$ (8)   | $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$ (7)  |
| $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$ (10)  | $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$ (9)   |
| $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$ (12)   | $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$ (11)   |
| $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$ (14) | $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$ (13)                 |
| $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$ (16)     | $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$ (15)          |
| $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$ (18)   | $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$ (17) |
| $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$ (20)  | $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$ (19)                                       |

**תשובות סופיות:**

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

$$x = \pm 1, \pm \sqrt{2} \quad (2)$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$x = \pm 2, \pm 5 \quad (4)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2 \quad (5)$$

$$x = -2, \sqrt[3]{4} \quad (6)$$

$$x = 49 \quad (7)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1 \quad (8)$$

$$x = 5, -1 \quad (9)$$

$$x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$x = -1 \quad (11)$$

$$x_{1,2} = 1, 3 \quad (12)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06 \quad (13)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \quad (14)$$

(15) אין פתרונות.

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (16)$$

$$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3 \quad (17)$$

$$x = -1, 2 \quad (18)$$

$$x = 3, -1 \quad (19)$$

$$x = \pm 1, 4, 6 \quad (20)$$

## משוואה ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

משוואה מהצורה:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ), נקראת משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה יסומנו ב-  $x_1$  ו-  $x_2$  ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**  
 אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.  
 דוגמא:  $x^2 + 5x - 4 = 0$ .
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**  
 אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.  
 דוגמא:  $x^2 + 4x + 4 = 0$ .
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**  
 אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.  
 דוגמא:  $x^2 + x + 4 = 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x^2 + 10x - 16 = 0$

ד.  $2x^2 - 6x + 5 = 0$

א.  $x^2 + 3x - 10 = 0$

ג.  $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

ד.  $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

א.  $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ג.  $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $b$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & x^2 - 36 = 0 \\ \text{ב.} & 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג.} & 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 \\ \text{ד.} & (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $c$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & -7x^2 - 14x = 0 \\ \text{ב.} & 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג.} & 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 \\ \text{ד.} & (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג.} & \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 \\ \text{ד.} & \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} \text{(1)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \\ & \text{ג. } x = \frac{2}{5} \quad \text{ד. אין פתרון.} \\ \text{(2)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1 \quad \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} \\ & \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 \quad \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2 \\ \text{(3)} & \text{א. } x = \pm 6 \quad \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \\ & \text{ג. } x = \pm 3 \quad \text{ד. } x = \pm 1 \\ \text{(4)} & \text{א. } x_1 = 0, x_2 = -2 \quad \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} \quad \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8} \\ \text{(5)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 \quad \text{ב. } x = 5, x \neq -3 \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5 \quad \text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7} \end{array}$$

## משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

### סיכום כללי:

#### משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה:  $ax = b$  יתכן פתרון יחיד אם ורק אם  $a \neq 0$   
 מכיוון שניתן לחלק ולכתוב:  $x = \frac{b}{a}$ .

כאשר  $a = 0$  מתקבלת המשוואה  $0 \cdot x = b$  ויתכנו שני מצבים:

1. אם  $b = 0$  את המשוואה היא  $0x = 0$  ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם  $b \neq 0$  את המשוואה היא  $0x = b \neq 0$  ואין אף ערך של  $x$  המקיים אותה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$x + 4 = 6 + x \quad (1) \qquad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2 \quad (2)$$

$$6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (3) \qquad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

### תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. 13      ב. 6      ג.  $-7x$       ד.  $-7x + 1$  (או כל מספר במקום 1 השונה מאפס).

## משוואות עם פרמטרים:

### סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטרים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה:  $mx=4$  (כאשר  $x$  הוא הנעלם ו- $m$  הוא פרמטר) הוא  $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר  $m$ .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא  $m \neq 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b + 1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$\text{(2) א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left( \frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left( m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$\text{(3) א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

## משוואות מסכמות מתקדמות:

### סיכום כללי:

### תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.
- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.
- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.
- משוואה עם פרמטרים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטרים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטרים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 & \text{(2)} & x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 & \text{(1)} \\
 2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 & \text{(4)} & 4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 & \text{(3)} \\
 x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 & \text{(6)} & x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 & \text{(5)} \\
 \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} & \text{(8)} & \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x & \text{(7)} \\
 \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{(9)} & & \\
 \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14} & \text{(10)} & & \\
 \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 & \text{(11)} & & \\
 \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x} & \text{(12)} & & 
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות עבור  $a > 0$ :

$$x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0 \quad \text{(14)} \quad x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \quad \text{(13)}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 |4 - |5 - x|| = |x + 3| & \text{(16)} & |3 - |2 - x| + |x|| = 1 & \text{(15)} \\
 \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x+1| & \text{(18)} & \left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 & \text{(17)} \\
 & & \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0 & \text{(19)}
 \end{array}$$

$$\frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x|+2 : \text{הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה:} \quad \text{(20)}$$

**תשובות סופיות:**

$$x = 3 \quad (1)$$

$$x_1 = 4, x_2 = -9 \quad (2)$$

$$x_1 = 0.5, x_2 = -4.5 \quad (3)$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4 \quad (4)$$

$$x_{1,2} = \pm 1 \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \pm 2 \quad (6)$$

$$. x = 1 \quad (7)$$

$$. x = 3 \quad (8)$$

$$. x = 2 \quad (9)$$

$$. 3.5 \leq x \leq 7 \quad (10)$$

$$. x = 4 \quad (11)$$

$$. x = 1, x = \frac{9}{16} \quad (12)$$

$$x_1 = -2a, x_2 = a \quad (13)$$

$$x_1 = -2a, x_2 = 3a \quad (14)$$

$$. x \leq 0 \quad (15)$$

$$. x = -1 \quad (16)$$

$$. x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18} \quad (17)$$

$$. x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4} \quad (18)$$

$$. x = -\sqrt{5} \quad (19)$$

$$. שאלת הוכחה. \quad (20)$$

## ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

### סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

### שאלות:

#### פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

$$(2y+5)^3 \quad (2)$$

$$(x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4)$$

$$8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3y^6z^9 - 1 \quad (6)$$

$$a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8)$$

$$11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

#### משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12)$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14)$$

$$x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

#### משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

## מערכת משוואות:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad (17) \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad (18) \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

## תשובות סופיות:

$$8y^3 + 60y^2 + 150y + 125 \quad (10)$$

$$(2y + 7)(4y^2 - 17y + 49) \quad (11)$$

$$(xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1) \quad (12)$$

$$8mn^4(2 - mn)(4 + 2mn + m^2n^2) \quad (13)$$

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{x} \quad (14)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$x_{1,2,3} = -2, -1, 3 \quad (16)$$

$$x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1 \quad (17)$$

$$(-5, -6), (6, 5) \quad (18)$$

$$x^3 - 9x + 27x - 27 \quad (1)$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \quad (2)$$

$$(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) \quad (3)$$

$$8(1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 4x^8) \quad (4)$$

$$\frac{1}{x + 2} \quad (5)$$

$$x = 4 \quad (6)$$

$$x = 3 \quad (7)$$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2 \quad (8)$$

$$(3, 6), (6, 3) \quad (9)$$

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 2 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

20	.....	1. חוקי החזקות
25	.....	2. חוקי השורשים
29	.....	3. כתיבה מדעית של מספרים

## חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 a^n \cdot a^m = a^{m+n} & .3 & a^1 = a & .2 & a^0 = 1 & .1 \\
 a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 & \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 & \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 b^2 b^5 b^{12} b^3 & .ג & t^3 t^5 t^7 & .ב & a^2 a^6 & .א \\
 \frac{c^6}{c^2} & .ו & \frac{n^{14}}{n^9} & .ה & \frac{k^8}{k^3} & .ד \\
 \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} & .ט & \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & .ח & \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & .ז \\
 \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8} & .יב & \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & .יא & 3^2 3^3 3^4 & .י
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4} & .ג & \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & .ב & \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & .א
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא:  $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין הביטוי  $243 \cdot 2^n$  לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$	ב.	$\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$	א.
$2^3 + 2^5$	ד.	$\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$	ג.

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק:  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ .

$(x^3 x^{10})^2$	ג.	$(c^3)^{10}$	ב.	$(a^2)^4$	א.
$\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$	ו.	$\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$	ה.	$\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$	ד.
$\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$	ט.	$\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$	ח.	$\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$	ז.
$\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$	יב.	$\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$	יא.	$\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$	י.

(6) לפניך הביטויים הבאים:  $\left((3^6)^n\right)^2$  ו-  $\left((3^2)^3\right)^4$ .

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

$\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$	ג.	$\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$	ב.	$\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$	א.
---------------------------------------	----	---	----	---------------------------	----

(8) פשט את הביטויים הבאים:

$125 \cdot 25 \cdot 5^5$	ג.	$64^2 2^3 8^2$	ב.	$3^2 9 \cdot 81^2$	א.
$\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$	ו.	$\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$	ה.	$\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$	ד.

9 פשט את הביטויים הבאים :

$\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$	ב.	$\frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$	א.
$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}$	ד.	$\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}}$	ג.

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $(ab)^n = a^n b^n$  ו-  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(x^{12}y^3)^3$	ג.	$(m^4n^3)^5$	ב.	$(a^2b)^3$	א.
$\left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$	ו.	$\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7$	ה.	$\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$	ד.
$\left(\frac{(b^{12}c)^2 c^{14}}{c(c^3b^5)^4 b^3}\right)^2$	ט.	$\left(\frac{t^7 r^{20} t^3}{r^2 r^{12} t^8}\right)^2$	ח.	$\left(\frac{x^3 y^5 y^2 x^6}{y^4 x^7}\right)^6$	ז.

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$\left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^27)^5}\right)^3$	ג.	$\left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2$	ב.	$\left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2$	א.
---	----	--	----	--	----

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$\frac{1}{2^{10}}$	ג.	$\frac{1}{5^3}$	ב.	$\frac{1}{4^6}$	א.
$\frac{1}{125}$	ו.	$\frac{1}{81}$	ה.	$\frac{1}{8}$	ד.

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$\frac{1}{5^{-3}}$	ג.	$\frac{1}{3^{-2}}$	ב.	$\frac{1}{4^{-3}}$	א.
--------------------	----	--------------------	----	--------------------	----

14) חשב את הביטויים הבאים :

ג.  $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב.  $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א.  $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו.  $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה.  $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד.  $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג.  $\frac{2^{-3}5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב.  $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2}4^3)^{-6}}$

א.  $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

16) פשט את הביטויים הבאים :

ג.  $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב.  $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א.  $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $a^8$  ב.  $t^{15}$  ג.  $b^{22}$  ד.  $k^5$  ה.  $n^5$  ו.  $c^4$   
 ז.  $a^7$  ח.  $x^3$  ט. 1 י.  $3^9$  יא.  $2^8$  יב.  $5^5$
- (2) א. 18 ב.  $ab$  ג.  $x^6 y^{10}$
- (3)  $n=16$
- (4) א. 2 ב.  $\frac{1}{3}$  ג.  $\frac{5}{8}$  ד. 40
- (5) א.  $a^8$  ב.  $c^{30}$  ג.  $x^{26}$  ד.  $b$  ה.  $n^3$  ו.  $d^{10}$   
 ז. 2 ח. 9 ט.  $8^{18}$  י.  $3^7$  יא. 3 יב.  $3^5$
- (6)  $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א.  $3^{12}$  ב.  $2^{21}$  ג.  $5^{10}$  ד.  $2^{12}$  ה.  $2^7$  ו.  $3^{51}$
- (9) א.  $\frac{2b^3}{a}$  ב.  $k$  ג.  $3\frac{1}{5}$  ד.  $\frac{1}{x} + x$
- (10) א.  $a^6 b^3$  ב.  $m^{20} n^{15}$  ג.  $x^{36} y^9$  ד.  $\frac{a^{12}}{b^8}$  ה.  $\frac{i^{28}}{k^{21}}$  ו.  $a^{21} b^3$
- ז.  $x^{12} y^{18}$  ח.  $t^4 r^{12}$  ט.  $b^2 c^6$  ג. 8
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א.  $4^{-6}$  ב.  $5^{-3}$  ג.  $2^{-10}$  ד.  $2^{-3}$  ה.  $3^{-4}$  ו.  $5^{-3}$
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד.  $\frac{1}{9}$  ה. 1000 ו. 3
- (15) א.  $5^{24} \cdot 3^{12}$  ב.  $\frac{4^2}{3^{23}}$  ג.  $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א.  $a^{1-5n}$  ב.  $k$  ג.  $m^{2n+12}$

## חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} & .3 & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .2 & \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} & .6 & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & .4
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה:  $\sqrt[n]{a^m}$ .

א. $3^{\frac{1}{4}}$	ב. $2^{\frac{3}{5}}$	ג. $6^{\frac{5}{6}}$
ד. $-12^{\frac{2}{7}}$	ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$	ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$
ז. $5^{-\frac{1}{4}}$	ח. $27^{\frac{1}{3}}$	ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$	ב. $-\sqrt{25}$	ג. $\sqrt[3]{8}$
ד. $-\sqrt[3]{128}$	ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$	ו. $(\sqrt[5]{1024})^2$
ז. $(\sqrt[5]{-243})^3$	ח. $\sqrt[4]{-16}$	ט. $\sqrt[4]{-25^2}$
י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$		

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

א. $8^{\frac{2}{3}}$	ב. $32^{\frac{3}{5}}$	ג. $128^{\frac{2}{7}}$
ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$	ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$	ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{\frac{2}{3}}$
ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{\frac{1}{3}}$	ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$	ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא :  $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[3]{128}}$

21) פשט את הביטויים הבאים :

א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$	ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$	ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$
ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$	ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$	ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$
ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$	ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$	ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

א. $3\sqrt{2}$	ב. $5\sqrt{3}$	ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$
ד. $2\sqrt[3]{3}$	ה. $x\sqrt{x}$	

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

א. $2\sqrt{5}$	ב. $4\sqrt[3]{2}$	ג. $2\sqrt[5]{3}$
ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$	ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$	ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$
ז. $-5\sqrt[3]{2}$	ח. $-5\sqrt[4]{2}$	ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א.  $\sqrt{12}$       ב.  $\sqrt{48}$       ג.  $\sqrt{63}$
- ד.  $\sqrt[3]{54}$       ה.  $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א.  $\sqrt{40}$       ב.  $\sqrt{50}$       ג.  $\sqrt{320}$
- ד.  $\sqrt[3]{108}$       ה.  $\sqrt[3]{56}$       ו.  $\sqrt[3]{160}$
- ז.  $\sqrt[4]{162}$       ח.  $\sqrt[5]{972}$       ט.  $\sqrt[5]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $\sqrt{18} - \sqrt{8}$       ב.  $\sqrt{7} + \sqrt{63}$       ג.  $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד.  $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$       ה.  $\frac{20}{\sqrt{5}}$       ו.  $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז.  $\frac{16}{\sqrt{2}}$       ח.  $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$       ט.  $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$       ב.  $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$       ג.  $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד.  $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$       ה.  $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$       ו.  $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

## תשובות סופיות:

- (17) א.  $\sqrt[4]{3}$     ב.  $\sqrt[5]{2^3}$     ג.  $\sqrt[6]{6^5}$     ד.  $-\sqrt[7]{12^2}$     ה.  $-\sqrt[3]{-4}$     ו.  $\phi$
- ז.  $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$     ח.  $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$  או  $\frac{1}{3}$     ט.  $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$  או  $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7    ב. -5    ג. 2    ד. -2    ה. 4    ו. 16
- ז. -27    ח.  $\phi$     ט.  $\phi$     י. 5
- (19) א. 4    ב.  $\frac{1}{8}$     ג.  $\frac{1}{4}$     ד. 125    ה.  $\frac{32}{243}$     ו.  $\frac{49}{16}$
- ז.  $\frac{27}{4}$     ח.  $\frac{10}{49}$     ט.  $\frac{1}{2}$
- (20)  $\sqrt{2}$
- (21) א. 4    ב. 9    ג. 20    ד. 6    ה. 3    ו. 2
- ז.  $\sqrt{2}$     ח.  $\sqrt{5}$     ט.  $\sqrt{2}$
- (22) א.  $\sqrt{18}$     ב.  $\sqrt{75}$     ג.  $\sqrt{9}$     ד.  $\sqrt[3]{24}$     ה.  $\sqrt{x^3}$
- (23) א.  $\sqrt{20}$     ב.  $\sqrt[3]{128}$     ג.  $\sqrt[5]{96}$     ד.  $\sqrt{6}$     ה.  $\sqrt[3]{3}$
- ו.  $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$     ז.  $\sqrt[3]{-250}$     ח.  $-\sqrt[4]{1250}$     ט.  $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א.  $2\sqrt{3}$     ב.  $4\sqrt{3}$     ג.  $3\sqrt{7}$     ד.  $3\sqrt[3]{2}$     ה.  $x^2\sqrt{x}$
- (25) א.  $2\sqrt{10}$     ב.  $5\sqrt{2}$     ג.  $8\sqrt{5}$     ד.  $3\sqrt[3]{4}$     ה.  $2\sqrt[3]{7}$     ו.  $2\sqrt[5]{5}$
- ז.  $3\sqrt[4]{2}$     ח.  $3\sqrt[5]{4}$     ט.  $2\sqrt[6]{3}$
- (26) א.  $\sqrt{2}$     ב.  $4\sqrt{7}$     ג.  $6\sqrt[3]{2}$     ד.  $\sqrt[4]{5}$     ה.  $4\sqrt{5}$     ו.  $\sqrt{2}$
- ז.  $8\sqrt{2}$     ח.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  או  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$     ט.  $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$  או  $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א.  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$     ב.  $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$     ג.  $\sqrt[6]{5^{11}}$     ד. 27    ה.  $\frac{1}{7}$     ו.  $\sqrt[8]{2^5}$

## כתיבה מדעית של מספרים:

### שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0012)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

### תשובות סופיות:

28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

# מתמטיקה לחשבונאים א

## פרק 3 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

### תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות ..... (ללא ספר)
2. מערכת משוואות מעריכיות ..... 30
3. אי שוויונים מעריכיים ..... 31
4. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך ..... 32
5. משוואות מעריכיות יסודיות ..... 33
6. משוואות עם חיבור וחסור איברים ..... 35
7. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס ..... 37
8. משוואות מסכמות שונות ..... 38
9. משוואות עם קבוע אוילר ..... 39

## מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) <b>(4)</b>	(1,2) <b>(3)</b>	(0,2) , (2,4) <b>(2)</b>	(2,9) <b>(1)</b>
(1,2) , (-1,0) <b>(7)</b>	(-1,-2) <b>(6)</b>	(3,2) <b>(5)</b>	

## אי שוויונים מעריכיים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $a^x > a^y$  הוא:  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} & \text{(2)} & 3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} & \text{(1)} \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} & \text{(4)} & e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} & \text{(3)} \\ e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 & \text{(6)} & 25^x + 5 < 6 \cdot 5^x & \text{(5)} \end{array}$$

### הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ( $\ln$ ) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad \text{(8)} \quad e^x > 3 \quad \text{(7)}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} & \text{(2)} & x < \frac{2}{3} & \text{(1)} \\ x \leq \frac{1}{8} & \text{(4)} & 0 \leq x < 1 & \text{(3)} \\ x = 0 & \text{(6)} & 0 < x < 1 & \text{(5)} \\ x < 0 \text{ או } x > \ln 4 & \text{(8)} & x > \ln 3 & \text{(7)} \end{array}$$

## אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

### סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון:  $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$  נדרוש:  $f(x) > 0$ .

דרך הפתרון: אם  $f(x) > 1$  אז  $g(x) > h(x)$ .

אם  $0 < f(x) < 1$  אז  $g(x) < h(x)$ .

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2 - 2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$.0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$.3 < x < 6 \quad (2)$$

$$.1 < x < 3 \quad (3)$$

$$.0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$.x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$.0 < x < 2 \quad (6)$$

## משוואות מעריכיות יסודיות:

### סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה:  $a^x = a^y$  הוא:  $x = y$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = 1$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^0 = 1 = a^0$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = b^x$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = b^x = 1$  ללא תלות בבסיסים.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א.  $2^x = 16$       ב.  $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג.  $10^{x-2} = 10000^{x+1}$       ד.  $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה.  $(2^x \cdot 32)^3 = 8$       ו.  $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז.  $\frac{7^x}{343^3} = 1$       ח.  $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

(2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א.  $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$       ב.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג.  $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א.  $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$       ב.  $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג.  $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$       ד.  $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה.  $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$       ו.  $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$	ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$
ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$	ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$
ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$	ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$
ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$	

### תשובות סופיות:

א. $x=4$	ב. $x=-\frac{1}{3}$	ג. $x=-2$	ד. $x=2,8$	ה. $x=-4$
ו. $x=1, -\frac{1}{5}$	ז. $x=9$	ח. $x=1$		
א. $x=\frac{1}{5}$	ב. $x=-2$	ג. $x=3, -2$		
א. $x=-\frac{1}{2}$	ב. $x=1$	ג. $x=-8$	ד. $x=2, -\frac{2}{3}$	ו. $x=25$
א. $x=0$	ב. $x=4$	ג. $x=2$	ד. $x=2$	ה. $x=5$
ו. $x=1.5$	ז. $x=\frac{2}{3}$			

## משוואות עם חיבור וחסור איברים:

### סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- $t$ , למשל במשוואה:  $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$  נסמן:  $2^x = t$ .  
 נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות  $t$  ונפתור אותה עבורו.  
 לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- $x$  המתאימים.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב.  $8^x + 3 \cdot 8^x = 256$

א.  $2^x + 6 \cdot 2^x = 56$

ד.  $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

ג.  $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב.  $5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$

א.  $81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$

ד.  $\sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$

ג.  $(2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$

ו.  $5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$

ה.  $6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)} = 186$

ח.  $4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$

ז.  $2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

ב.  $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$

א.  $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$

ד.  $4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$

ג.  $6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$

ו.  $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$

ה.  $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

ב.  $\frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3$

א.  $\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$	ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$
ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$	ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$
ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$	ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$
ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$	ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$

### תשובות סופיות:

א. $x=3$	ב. $x=2$	ג. $x=4$	ד. $x=1$
א. $x=\frac{1}{2}$	ב. $x=0$	ג. $x=\frac{1}{3}$	ד. $x=\frac{1}{4}$
ה. $x=-3$	ו. $x=-2$	ז. $x=-3$	ח. $x=-2$
א. $x=2,3$	ב. $x=1,-2$	ג. $x=0$	ד. $x=0$
ה. $x=0,1$	ו. $x=-6,-9$		
א. $x=1, -\frac{1}{2}$	ב. $x=1$		
א. $x=\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	ב. $x=1,3$	ג. $x=1,2$	ד. $x=1,0$
ה. $x=-2$	ו. $x=1,-1$	ז. $x=0, \frac{1}{2}$	ח. $x=0,2$

## משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

### סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי. יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

### הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- $x$  עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

### תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

$$\text{אין פתרון.} \quad (2)$$

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

## משוואות מסכמות שונות:

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$.5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\cdot \frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\cdot \frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$\cdot 3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\cdot \sqrt{x}{10} = 4 \cdot \sqrt[2x]{10} + 60 \quad (5)$$

$$\cdot \sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}{2})^2 \cdot \sqrt[x-1]{\sqrt{x}{32}} \quad (6)$$

$$\cdot 10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$\cdot x = 1, 2 \quad (1)$$

$$\cdot x = 3 \quad (2)$$

$$\cdot x = 1.5 \quad (3)$$

$$\cdot x = 1, -1 \quad (4)$$

$$\cdot x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\cdot x = -3 \quad (6)$$

$$\cdot x = 1, -2 \quad (7)$$

## משוואות עם קבוע אוילר:

### סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות  $e$  וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא  $e$  זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 4 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

40	1. אי-שוויונים לוגריתמים
(ללא ספר)	2. הגדרת הלוגריתם
(ללא ספר)	3. הוצאת לוג משני אגפי המשוואה
(ללא ספר)	4. חוקי הלוגריתמים ישן
41	5. מערכת משוואות לוגריתמיות
42	6. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות
(ללא ספר)	7. משוואות לוגריתמיות הנפתרות באמצעות הגדרת הלוג
(ללא ספר)	8. משוואות לוגריתמיות הנפתרות באמצעות חוקי הלוגריתמים
(ללא ספר)	9. משוואות לוגריתמיות עם בסיסים שונים
43	10. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות
46	11. חוקי הלוגריתמים
50	12. חישובים עם חזקה לוגריתמית
51	13. מעבר בין בסיסים
53	14. הלוגריתם הטבעי
55	15. משוואות עם בסיסים שונים
56	16. משוואות לוגריתמיות מסכמות
(ללא ספר)	17. אי-שוויונים לוגריתמים עם משתנה בבסיס

## אי-שוויונים לוגריתמים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $\log_a x > \log_a y$  הוא: עבור  $x > y$ : עבור  $a > 1$  ו- עבור  $x < y$ : עבור  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2)	$\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1)
$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4)	$\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3)
$\ln x < 3$ (6)	$\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5)
$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)	$\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)

### תשובות סופיות:

$-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)	$x > 5$ (1)
$-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)	$3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)
$0 < x < e^3$ (6)	$2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)
וגם $x \neq 1$ $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8)	$\frac{1}{e} < x < e^7$ (7)

## מערכת משוואות לוגריתמיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

### תשובות סופיות:

$$(8, -5) \quad (3) \qquad (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) \qquad (8, 3) \quad (1)$$

$$\left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) \qquad (25, 8) \quad (5) \qquad (16, 7) \quad (4)$$

$$(4, 7) \quad (9) \qquad (3, 9), (9, 3) \quad (8) \qquad (25, 4), (625, 2) \quad (7)$$

## מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$(36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) \quad (3) \quad (3, 3) \quad (2) \quad (1, 1) \quad (1)$$

$$(1, 0) \quad (6) \quad (1, 1), (2, 3) \quad (5) \quad \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \quad (4)$$

## הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$  כאשר:  $a, b > 0, a \neq 1$ .

#### הסבר:

לוגריתם על בסיס  $a$  של  $b$  מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את  $a$  על מנת שיהיה שווה ל- $b$ .  
 ערך חזקה זו הוא  $x$ . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים  
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

### כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי:  $\log_a a = 1$  וכן:  $\log_a 1 = 0$  לכל  $a > 0, a \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א.  $\log_2 32$       ב.  $\log 1000$       ג.  $\log_{25} 5$

ד.  $\log_8 4$       ה.  $\log_4 \frac{1}{16}$       ו.  $\log_a a^4$

ז.  $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א.  $\log_{36} 6 = x$       ב.  $\log_2 x = 16$

ג.  $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$       ד.  $\log_x 64 = 3$

ה.  $\log_x 25 = 2$       ו.  $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \log_6(4x-2)=1 \quad \text{ב. } \log_4(4-x)=\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } \log_8(x^4-73)=1 \quad \text{ד. } \log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2$$

$$\text{ה. } \log_x(2x^2+x-12)=2 \quad \text{ו. } \log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$\text{א. } \log_4(\log_3 x)=1 \quad \text{ב. } 3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$$

$$\text{ג. } \log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2} \quad \text{ד. } \log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\text{א. } \log_2(3^x+37)=6 \quad \text{ב. } \log_3(3 \cdot 2^x - 303)=4$$

$$\text{ג. } \log_5(126 \cdot 5^x - 25)=2x+1 \quad \text{ד. } 3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3\right)=12+2x$$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$\text{א. } (\log_2 x)^4 = 10000 \quad \text{ב. } 2(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 10$$

$$\text{ג. } \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ד. } \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 5    ב. 3    ג.  $\frac{1}{2}$     ד.  $\frac{2}{3}$     ה. -2
- ו. -1.5    ז. 4
- (2) א.  $x = \frac{1}{2}$     ב.  $x = 65,536$     ג.  $x = 27$     ד.  $x = 4$
- ה.  $x = 5$     ו.  $x = 4$
- (3) א.  $x = 2$     ב.  $x = 2$     ג.  $x = \pm 3$     ד.  $x = -2$     ה.  $x = 3$     ו.  $x = 2$
- (4) א.  $x = 81$     ב.  $x = 5$     ג.  $x = \pm 4$     ד.  $x = \pm 1$
- (5) א.  $x = 3$     ב.  $x = 7$     ג.  $x = -1, 2$     ד.  $x = -6$
- (6) א.  $x = 1024, \frac{1}{1024}$     ב.  $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
- ג.  $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$     ד.  $x = \frac{1}{3}$

## חוקי הלוגריתמים:

### סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס  $a > 0 \neq 1$  וארגומנטים  $x$  ו- $y$  חיוביים:
- מכפלה לסכום:  $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ .
  - מנה להפרש:  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ .
  - מקדם למעריך:  $\log_a b^n = n \log_a b$  (כאשר  $b > 0$  ו- $n$  מספר ממשי כלשהו).

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$	ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$
ג. $\log_2 200 - \log_2 100$	ד. $\log_3 60 - \log_3 540$
ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$	ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$
ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$	ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$
ט. $\frac{1}{2} \left( \log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$	י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$	ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$
ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 200 - 3}$	ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$

## משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$       ב.  $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג.  $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$       ד.  $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה.  $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו.  $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א.  $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב.  $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א.  $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב.  $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב.  $\log_2 \left( \frac{x}{4} \right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג.  $\log_2 x^2 \log_2 (2x) = -\log_2 (64x)$

ד.  $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה.  $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left( \frac{81}{x} \right) + 2$

ו.  $\frac{\log_2 \left( \frac{x^3}{32} \right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1 \frac{7}{9}$

**שאלות הבעה:**

(7) נתון:  $\log_3 2 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 16$       ב.  $\log_3 6$

ג.  $\log_3 24$       ד.  $\log_3 1.5$

(8) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_2 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 45$       ב.  $\log_2 60$       ג.  $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון:  $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$ .

הבע באמצעות  $a$  את  $\log_{18} 27$  ואת  $\log_{18} 16$ .

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

$$\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64 \quad (10)$$

$$2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2 \quad (11)$$

$$\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2 \quad (12)$$

$$\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2 \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 3    ב. -3    ג. 1    ד. -2    ה. 2  
 ו. -2    ז. 1    ח. 6    ט. 1.5    י. -0.5
- (2) א.  $\frac{4}{3}$     ב. -3    ג. 1.5    ד. 0.5
- (3) א.  $x = \frac{1}{4}, 256$     ב.  $x = 3, \frac{1}{27}$     ג.  $x = 2$     ד.  $x = 4$     ה.  $x = 3$     ו.  $x = 4$
- (4) א.  $x = 2.5$     ב.  $x = 6$
- (5) א.  $x = 1$     ב.  $x = -2$
- (6) א.  $x = 16, \frac{1}{256}$     ב.  $x = 2, \frac{1}{512}$     ג.  $x = 4, 2\sqrt{2}$     ד.  $x = 4, \frac{1}{4}$
- ה.  $x = \frac{1}{9}, \sqrt[3]{3}$     ו.  $x = 8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א.  $4a$     ב.  $a+1$     ג.  $3a+1$     ד.  $1-a$
- (8) א.  $2a+b$     ב.  $2+a+b$     ג.  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9)  $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

## חישובים עם חזקה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא:  $a^{\log_a x} = x$  כאשר  $a > 0 \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א.  $6^{\log_6 8}$       ב.  $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית:  $3 \cdot 4^x$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = \log_4 7$       ב.  $x = \log_4 \sqrt{3}$

ג.  $x = 2 \log_4 0.1$       ד.  $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית:  $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = -1$       ב.  $x = \log_3 5$

ג.  $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א.  $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{56}} 81}$       ב.  $\sqrt[3]{2^{3 - \log_{\sqrt{8}} 5}}$

### תשובות סופיות:

(1) א. 8      ב. 25

(2) א. 21      ב.  $3\sqrt{3}$       ג. 0.03      ד. 15

(3) א.  $\frac{19}{54}$       ב.  $-4\frac{5}{6}$       ג.  $2 - 2\sqrt{6}$

(4) א.  $\frac{1}{81}$       ב.  $\frac{2}{\sqrt[2]{25}}$

## מעבר בין בסיסים:

### סיכום כללי:

מעבר מבסיס  $a$  לבסיס  $m$  (כאשר:  $a > 0 \neq 1$  ו-  $m > 0 \neq 1$ , וכן:  $b > 0$ )

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

יתבצע באופן הבא:

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_4 7 \cdot \log_7 4$

ג.  $\log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9$

ב.  $\log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000$

ד.  $\log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

א.  $\log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1$

ב.  $\log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1$

#### משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

א.  $\log_2 x + \log_{32} x = 6$

ג.  $\log_2 4x \cdot \log_8 16x = -\frac{5}{3}$

ב.  $\log_3 x \cdot \log_{27} x = 3$

ד.  $\log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1$

#### שאלות הבעה:

(4) נתון:  $\log_4 6 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 3$       ב.  $\log_{32} 36$       ג.  $\log_{216} 96$

(5) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו-  $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 50$       ב.  $\log_2 \sqrt{30}$       ג.  $\log_5 22.5$

(6) נתון  $\log_3 7 = a$ ,  $\log 9 = 2b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את:

א.  $\log 21$ .

ב.  $\log_3 \left( \frac{10}{7} \right)$ .

ג.  $\log_7 10$ .

ד.  $\log_{30} 63$ .

### שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(7)  $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

(8)  $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

### תשובות סופיות:

(1) א. 1      ב. -1.5      ג.  $2\frac{2}{3}$       ד. 3.

(2) א. שאלת הוכחה.      ב. שאלת הוכחה.

(3) א.  $x = 32$       ב.  $x = 27, \frac{1}{27}$       ג.  $x = 2, \frac{1}{8}$       ד.  $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$ .

(4) א.  $2a - 1$       ב.  $0.8a$       ג.  $\frac{a+2}{3a}$

(5) א.  $2b + \frac{1}{a}$       ב.  $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$       ג.  $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

(6) א.  $b + ab$       ב.  $\frac{1}{b} - a$       ג.  $\frac{1}{ab}$       ד.  $\frac{ab+2b}{b+1}$

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

## הלוגריתם הטבעי:

### סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס  $e$  (קבוע אוילר) מסומן:  $\log_e \Rightarrow \ln$  והוא נקרא הלוגריתם הטבעי. למשל:  $\ln 3 = \log_e 3$  או  $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$ . לוג זה נקרא בשם לן. מהגדרת הלוגריתם מתקיים:  $\ln a = b \rightarrow e^b = a$  כאשר  $a > 0$  ו- $b$  מספרים כלשהם.

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x \\ \text{ב. } 3 \ln^2 x + \ln x = 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2 \ln 3}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 2 \quad \text{ב. } -4 \quad \text{ג. } -1.5$$

$$(2) \quad \text{א. } x = e^2 \quad \text{ב. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0 \quad \text{ב. } x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} \quad \text{ג. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$(4) \quad \text{א. } x = e^3, \frac{1}{e^2} \quad \text{ב. } x = \sqrt{e}, e$$

$$(5) \quad \text{א. } 3 \quad \text{ב. } 9$$

## משוואות עם בסיסים שונים:

### סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון:  $3^x = 4$ . במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך:  $x = \log_3 4$ . את ערך הביטוי  $\log_3 4$  ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10:  $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א.  $3^x = 6$       ב.  $2^x - 9 = 0$

ג.  $49^x - 8 \cdot 7^x - 15 = 0$       ד.  $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א.  $e^{3x} = 3$       ב.  $4 + 3e^x = 9$

ג.  $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$       ד.  $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+\frac{1}{2}}} - 5e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א.  $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{1024}{5^x}$       ב.  $\log_2(4e^{2x} + 6) - 3 = \log_2(128e^x)$

### תשובות סופיות:

(1) א.  $x = \log_3 6 = 1.63$       ב.  $x = \log_2 9 = 3.17$

ג.  $x = \log_7 5 = 0.827$ ,  $x = \log_7 3 = 0.564$       ד. אין פתרון.

(2) א.  $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$       ב.  $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$

ג.  $x = -\ln 3 = -1.09$ ,  $x = 0$       ד.  $x = 2 \ln(2e) = 3.38$ ,  $x = \ln 9 = 2.19$

(3) א.  $x = 1$ ,  $x = \log_5 2 = 0.43$       ב.  $x = \ln \frac{1}{3} = -1.098$ ,  $x_1 = \ln 2 = 0.693$

## משוואות לוגריתמיות מסכמות:

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned}
 (2\log_x \sqrt{2})^2 &= 4\log_x(2\sqrt{2}) - 5 & \text{(2)} & & 6\sqrt{\log_5 \sqrt[4]{x}} - \log_5 x &= 2 & \text{(1)} \\
 \log_4(\log x^2) + \log_4(\log x - 4) &= \log_4 10 & \text{(4)} & & \log_7(10^{\log(x^2+10)}) - 1 &= 2\log_7 \sqrt{x} & \text{(3)} \\
 \log_x(x^2 + 4) - \log_{0.5} 0.5 &= \log_{x^2} 16 & \text{(6)} & & 4\log_{2x} 4 &= (1 + \log_2 x)^2 & \text{(5)} \\
 \sqrt{1 - \log_3 x} \cdot \log_x 27 &= 2 & \text{(8)} & & \log_{4x} 25 + \log_{3x+1} 25 &= 0 & \text{(7)} \\
 \log_2(2^{2x-2} + 1) - \log_2(2^{x+1} - 3) &= x - 2 & \text{(9)} & & \log_2(\log_2(4 \cdot 2^x + 5)) - 1 &= 2\log_2 \sqrt{x} & \text{(10)} \\
 2\log_{x^2} |5x + 2| &= 1 + \log_{x^4} 81 & \text{(11)} & & & & \\
 2^{2+\log_7 x} \cdot x &= 784 & \text{(12)} & & & & \\
 (x^2)^{\log_2 x^2} &= 16 & \text{(13)} & & & & \\
 5^{1+\log_4 x} \cdot \pi^{\log_\pi x} &= 40000 & \text{(14)} & & & &
 \end{aligned}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{aligned}
 2, 5 & \text{(3)} & \sqrt[5]{2}, 2 & \text{(2)} & 625, 5 & \text{(1)} \\
 \frac{1}{6} & \text{(6)} & 2 & \text{(5)} & 10^5 & \text{(4)} \\
 2 & \text{(9)} & \sqrt[4]{27} & \text{(8)} & 2 & \text{(7)} \\
 49 & \text{(12)} & -\frac{1}{4} & \text{(11)} & \log_2 5 & \text{(10)} \\
 & & 64 & \text{(14)} & \pm 0.5, \pm 2 & \text{(13)}
 \end{aligned}$$

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 5 - חילוק פולינומים

תוכן העניינים

57 ..... 1. חילוק פולינומים

## חילוק פולינומים:

### סיכום כללי:

בחילוק פולינום  $p(x)$  בפולינום  $q(x)$  (נכתב:  $q(x) \overline{) p(x)}$ ) יש לבצע 4 שלבים:

- (1) חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של  $q(x)$  באיבר במעלה הגבוהה ביותר של  $p(x)$ .
- (2) רישום תוצאת החילוק בצד והכפלתה בכל הפולינום המחלק  $q(x)$ .
- (3) חיסור של תוצאת ההכפלה בפולינום המחולק  $p(x)$ .
- (4) חזרה לשלב הראשון כאשר מבצעים את חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של  $q(x)$  בתוצאת החיסור.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לחלק עוד. במידה ותוצאת החיסור האחרונה מניבה ביטוי שמעלתו קטנה משל האיבר המחלק ב- $q(x)$  אז נתייחס לביטוי זה כאל שארית החלוקה.

### שאלות:

בצע את חילוק הפולינומים הבאים:

$\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1}$ (2)	$\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2}$ (1)
$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3}$ (4)	$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3}$ (3)
$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$ (6)	$\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5}$ (5)
$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2}$ (8)	$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10}$ (7)

### תשובות סופיות:

$x^2 - x - 3$ (4)	$x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ (3)	$x^2 + 2x + 5$ (2)	$x - 7$ (1)
$4x + 9 + \frac{17}{x - 2}$ (8)	$4x^2 + 10x + 1$ (7)	$x^2 + 1$ (6)	$x^2 - 4$ (5)

# מתמטיקה לחשבונאים א

## פרק 6 - הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות

### תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה ..... 58
9. הרכבת פונקציות ..... 60
10. הפונקציה ההפוכה ..... 63
11. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית ..... 67
12. פונקציה מפוצלת ..... 69
13. תרגילים משולבים ..... 70
14. מבוא לתורת הקבוצות ..... 74

## תחום הגדרה של פונקציה

### שאלות

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt{x - 4} \quad (6)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} \quad (9)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = e^{x^2 + x + 1} \quad (12)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

### תשובות סופיות

- (1) כל  $x$ .
- (2)  $x \neq \pm 2$
- (3) כל  $x$ .
- (4)  $x \neq 0, 1, -1$
- (5)  $x \neq 2, -1$
- (6)  $x \geq 4$
- (7)  $x \leq -2, x \geq 1$
- (8) כל  $x$ .
- (9)  $-1 < x < 1$
- (10)  $x < -2, x > 1$
- (11)  $x > 0, x \neq 1$
- (12) כל  $x$ .
- (13)  $x > 0, x \neq 1$

## הרכבת פונקציות

### שאלות

(1) נתונות הפונקציות  $h(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x - 4$

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות:

א.  $f(g(1))$       ב.  $h(g(f(5)))$       ג.  $f(g(x))$

ד.  $h(f(x))$       ה.  $f(f(x))$       ו.  $h(h(x))$

(2) נתון  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשב את  $f(f(x))$  עבור  $x=3$

(3) נתון  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשב את  $f(g(x)) + g(f(x))$  עבור  $x=8$

(4) נתון  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$

חשב את  $f(g(x))$  עבור  $x=e^2$

(5) נתון  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x$

חשב את  $f(g(x))$  עבור  $x=2$

(6) נתון  $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ x & x = 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשב את  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$

### (7) נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

מצא נוסחה עבור ההרכבה  $z(x) = g(f(x))$

## 8 נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצא נוסחה עבור ההרכבה  $h(x) = f(g(x))$ .

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$  ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בוודאות?

1.  $n \leq -3$

2.  $n \geq 1$

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

9 נתון  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצא את  $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ Times}}$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad 69/13$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{ב. } n \leq -3 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א. } (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

## הפונקציה ההפוכה

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בשאלות 5-7, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בשאלות 8-10, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצא את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$$

האם הפונקציה היא חח"ע?  
מצא את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבע האם היא פונקציה על:

א.  $f(x) = \frac{x-1}{3}$  ;  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ב.  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  ;  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

ג.  $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$  ;  $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$

ד.  $f(x) = x^2 - 4$  ;  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

**13** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבע האם הפונקציה הנתונה היא על.

א.  $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ב.  $g(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (0,1]$

ג.  $h(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad f: (1,\infty) \rightarrow (0,1]$

**14** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ .

תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.

ב. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע אז  $h$  על.

ג. אם  $f$  ו- $g$  על אז  $h$  על.

ד. אם  $f$  ו- $g$  על אז  $h$  חח"ע.

ה. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על אז  $h$  חח"ע.

ו. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על אז  $h$  על.

ז. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.

ח. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע אז  $h$  על.

**15** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ .

תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . נתון כי  $h$  על.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $f$  חח"ע.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $g$  על.

16) תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ .

תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ .

נתון כי  $h$  חח"ע.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $g$  על.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $f$  חח"ע.

### תשובות סופיות

(1)  $f^{-1}(x) = 3x + 1$ , כל  $y$ .

(2)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $y \neq 1$ .

(3)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$ ,  $y \neq 3$ .

(4)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $y \geq -4$ .

(5) לא חח"ע. תמונה:  $y \leq -2$  או  $y \geq 2$ .

(6) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq -\frac{1}{4}$ .

(7) לא חח"ע. תמונה  $0 \leq y \leq 1$ .

(8) כן חח"ע. תמונה:  $y > 0$ . פונקציה הפוכה:  $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ ,  $x > 0$ .

(9) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq 2.3$  או  $y \leq -1.3$ .

(10) כן חח"ע. תמונה:  $y \neq 1$ . פונקציה הפוכה:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$ .

(11) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ .

(12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה:  $\mathbb{R}$ ; על.

ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; לא על.

ג. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , טווח ותמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; על.

ד. תחום הגדרה  $[0, \infty)$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $[-4, \infty)$ ; לא על.

(13) א. תחום הגדרה וטווח:  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $(0, 1]$ ; לא על.

ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R}$ , טווח ותמונה:  $(0, 1]$ ; על.

ג. תחום הגדרה  $(1, \infty]$ , טווח  $(0, 1]$ , תמונה:  $(0, 0.5)$ ; לא על.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

## פונקציה זוגית ואי זוגית

### שאלות

מצא איזה מבין הפונקציות בשאלות 1-6 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$y = 1 \quad (3) \qquad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \qquad y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = \ln x + x^2 \quad (6) \qquad y = 2^x \quad (5) \qquad y = \frac{1}{x} \quad (4)$$

(7) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{ונסמן } k(x) = -f(x), \quad z(x) = f(x^2).$$

בדוק, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(8) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{ונסמן } k(x) = -f(x^3) \text{ ו- } z(x) = -g(x^3).$$

טענה א':  $z(x)$  אי-זוגית.

טענה ב':  $k(x)$  אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{ונסמן } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדוק, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) הוכח כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**תשובות סופיות**

שאלות 1-6: זוגית: 2,3; אי-זוגית: 1,4; כללית: 5,6.

(7)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(8) טענה ב'.

(9)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(10) שאלת הוכחה.

## פונקציה מפוצלת

### שאלות

רשום כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטט את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשב  $f(1)$ ,  $f(4)$ ,  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(7)$ .

ב. שרטט את גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

### תשובות סופיות

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

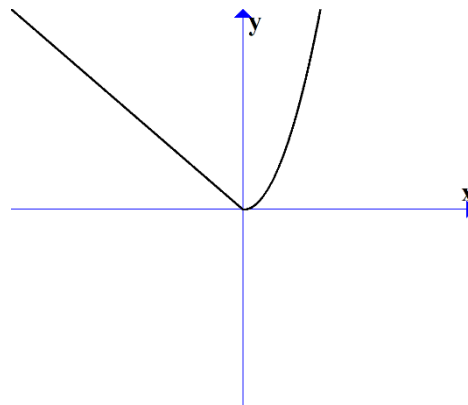
$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{א. } f(1)=1, f(4)=16, f(-4)=4, f(0)=0, f(7) = \text{undefind}$$

ג. הפונקציה כללית.



## תרגילים משולבים

### שאלות

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטט את הפונקציה, וקבע האם היא :

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על  $\mathbb{R}$ .

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבע האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3)$$

טענה א':  $k(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ב':  $z(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ג':  $h(x) = k(x)z(x)$  זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות,  $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ .

נתון ש- $f$  מונוטונית עולה ממש, ואילו  $g$  מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x))$$

איזו טענה נכונה?

א.  $h$  יורדת חלש.

ב.  $h$  עולה ממש.

ג.  $h$  עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד.  $h$  אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

תהי  $h(x) = f(g(x))$ .

א. מצא את  $h$  בקטע  $(-2, 0)$ .

ב. קבע האם  $h$  חח"ע בקטע  $(-2, 0)$ .

ג. קבע האם  $h$  חסומה בקטע  $(-2, 0)$ .

ד. קבע האם  $h: [-2, 0) \rightarrow [0, 4]$  היא על.

\* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ .

קבע מי מבין הטענות הבאות נכונה.

הפונקציה  $h(x) = f(g(x))$  היא:

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = -\lfloor x \rfloor$ .

א. בדוק את מונוטוניות  $z(x) = f(g(x))$ .

ב. בדוק את מונוטוניות  $k(x) = g(f(x))$ .

ג. בדוק האם  $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$  חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם  $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$  אז הפונקציה  $f$  יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$   
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. הפונקציה  $f$  עולה ממש ורח"ע.

ב. הפונקציה  $g$  עולה ממש ורח"ע.

9 מצא את הפונקציה ההפוכה לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,

קבע את תחום הגדרתה והוכח שהפונקציה על  $\mathbb{R}$ .  
 הערה: הפונקציה לעיל נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקור את מונוטוניות הפונקציה  $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכח שהפונקציה חסומה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

## תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.  
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א.  $h(x) = x^2$ . ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
- ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.  
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה  $z(x)$  יורדת חלש. ב. הפונקציה  $k(x)$  יורדת חלש.  
ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9)  $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ; תחום הגדרתה: כל  $x$ .
- (10) ראו באתר.
- (11) א.  $-1 \leq x \leq 2$ . ב.  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ . ג. שאלת הוכחה.  
ד.  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  עלייה,  $\frac{1}{2} < x \leq 2$  ירידה.

## מבוא לתורת הקבוצות

### סיכום כללי

#### הגדרות יסודיות

- גרירה חד כיוונית  $\Rightarrow$ .  $A \Rightarrow B$  פירושו: אם  $A$  מתקיים אז גם  $B$  מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית  $\Leftrightarrow$  (אם ורק אם).  $A \Leftrightarrow B$  פירושו:  $A \Rightarrow B$  וגם  $B \Rightarrow A$ .
- הסימן 'או'  $\vee$ .
- הסימן 'וגם'  $\wedge$ .

#### קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  שייך לקבוצה  $A$  נרשום  $a \in A$ .
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  אינו שייך לקבוצה  $A$  נרשום  $a \notin A$ .

#### שוויון בין קבוצות

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.
- פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא:  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ .

#### הקבוצה ריקה

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- $\emptyset$ , כלומר  $\emptyset = \{ \}$ .

#### קבוצה סופית ואינסופית

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

## עוצמה של קבוצה

מספר האיברים של קבוצה  $A$  נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן  $|A|$ .

### תת-קבוצה

אם קבוצה  $A$  מוכלת בקבוצה  $B$ , נסמן זאת:  $A \subseteq B$ .

תמיד מתקיים:

- $A \subseteq A$

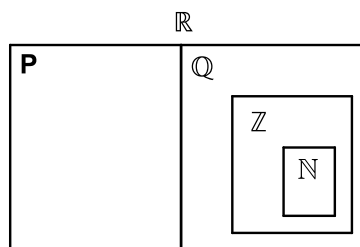
- $\emptyset \subseteq A$

עבור שוויון קבוצות נדרוש:  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$  או

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

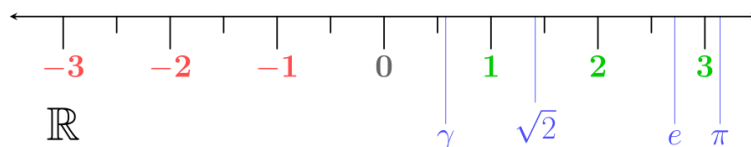
### קבוצות מספרים מיוחדות

- קבוצת המספרים הטבעיים:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים השלמים:  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים הרציונאליים:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט  $\mathbb{P}$ ).
- קבוצת המספרים הממשיים:  $\mathbb{R}$  (כוללת את  $\mathbb{Q}$  ואת  $\mathbb{P}$ ).



### ציר המספרים

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



## קטעים על ציר המספרים

סימון קטעים	סימון קבוצות	תיאור מילולי
$(a, b)$	$\{x \mid a < x < b\}$	הקטע הפתוח מ- $a$ ל- $b$ לא כולל נקודות הקצה
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	הקטע הסגור מ- $a$ ל- $b$ וכולל נקודות קצה
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $a$ ולא את $b$
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $b$ ולא את $a$
$(a, \infty)$	$\{x \mid a < x < \infty\}$	הקרו הפתוחה מ- $a$ עד $\infty$ ללא $a$
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	הקרו הסגורה מ- $a$ עד $\infty$ כולל $a$
$(-\infty, b)$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	הקרו הפתוחה מ- $-\infty$ עד $b$ ללא $b$
$(-\infty, b]$	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	הקרו הסגורה מ- $-\infty$ עד $b$ כולל $b$

## קבוצת החזקה של קבוצה נתונה

קבוצת כל התת-קבוצות של קבוצה נתונה נקראת קבוצת החזקה של  $A$  ומסומנת  $P(A)$ .

## איחוד וחיתוך קבוצות

- איחוד קבוצות  $A$  ו- $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת  $A \cup B$ .
- חיתוך קבוצות  $A$  ו- $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת  $A \cap B$ .

תכונות החיתוך	תכונות האיחוד
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
	$A \subseteq A \cup B$

הדיסטריבוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### הפרש קבוצות

ההפרש של שתי קבוצות  $A$  ו- $B$ , המסומן  $A - B$ , הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי  $A$  שאינם איברי  $B$ , כלומר  $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ .

### משלים של קבוצה

ההפרש  $U - A$  מסומן ב- $A^c$  או ב- $A'$  ונקרא המשלים של  $A$ , כאשר  $U$  היא הקבוצה האוניברסלית.

### כללי דה-מורגן

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \bullet$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \bullet$$

### דיאגרמת וון

תיאור גרפי של קבוצות ויחסים ביניהם.

## שאלות

(1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $n$  ו- $k$  טבעיים).

(2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

(3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

(4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ .

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א.  $5 \in A$       ב.  $2 \in A$       ג.  $\{2\} \in A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$       ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$       ו.  $\emptyset \in A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$       ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

י.  $\{2, 4\} \in A$       יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$       יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$       יד.  $\{1, 4\} \in A$

(7) מצא שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות:

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{4, 6, 8, 10\}$ ,  $C = \{3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{6, 7, 8\}$ ,  $E = \{7, 8\}$

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$ :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$

(9) הוכח:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

**10** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשום את :

א.  $A \cup B$       ב.  $A \cap B$       ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$       ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**11** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשום את :

א.  $A \cup B$       ב.  $A \cap B$       ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$       ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**12** נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשב את  $(A - B) - C$ .

ב. חשב את  $A - (B - C)$ .

**13** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ ,  $A = \{12, 15, 18\}$ ,  $B = \{13, 15, 17\}$

הדגם את כלל דה מורגן  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**14** הוכח את כלל דה מורגן הראשון  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**15** מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

**16** הצג באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות:

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$                    | ב. $A \cup B$                    |
| ג. $A^c$                         | ד. $A \cap B^c$                  |
| ה. $A^c \cap B$                  | ו. $A \cup B^c$                  |
| ז. $A^c \cup B$                  | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ |                                  |

**17** ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח כי  $A \setminus B = A \cap B^c$ .  
 הראה זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
- ב. נסמן:  $X = C \setminus (A \cap B)$ ,  $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .  
 הוכח כי  $X = Y$ .
- ג. נסמן:  $X = A \setminus (B \cup C)$ ,  $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .  
 הוכח כי  $X = Y$ .

**18** תהיינה  $X, Y, Z$  קבוצות כלשהן.

- טענה א':  $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ .
- טענה ב':  $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$ .
- טענה ג':  $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \setminus Z$ .
- איזו טענה נכונה לכל בחירה של  $X, Y, Z$ ?

**19** נתונה הקבוצה  $A = \{\emptyset, 4, \{4\}\}$ .

רשמו את  $P(A)$ .

**20** הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

- א. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \subseteq P(A)$ .
- ב. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \not\subseteq P(A)$ .

**21** הוכיחו כי:  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$  ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$   
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$  ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים.  
 ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$  ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$   
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות  $A, B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$  ב.  $E, D$  ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) הוכחה.

$$A \cap B = \{4, 6, 8\} \quad \text{ב.} \quad A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{א. (10)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\} \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\} \quad \text{ה.}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{ב.} \quad A \cup B = (-2, 4) \quad \text{א. (11)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1) \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = (0, 4) \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1) \quad \text{ה.}$$

$$\{4, 5, 6\} \quad \text{ב.} \quad \emptyset \quad \text{א. (12)}$$

(13) ללא פתרון.

(14) הוכחה.

$$C^c = [1, 4] \quad \text{ג.} \quad B^c = [1, 4] \quad \text{ב.} \quad A^c = (-\infty, 1) \quad \text{א. (15)}$$

$$D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4] \quad \text{ד.}$$

(16) ראו סרטון.

(17) שאלת הוכחה.

(18) טענה ב.

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\} \quad \text{(19)}$$

(20) הוכחה.

(21) הוכחה.

# מתמטיקה לחשבונאים א

## פרק 7 - גבול של פונקציה

### תוכן העניינים

1. הסבר כללי	(ללא ספר)
2. הצבה	84
3. צמצום	85
4. הכפלה בצמוד	86
5. גבולות טריגונומטריים	87
6. פונקציה שואפת לאינסוף	88
7. איקס שואף לאינסוף	89
8. הגבול של אוילר	91
9. כלל הסנדויץ	92
10. גבול של פונקציה מפוצלת	93
11. גבול לפי הגדרה	94

## הצבה

### שאלה

חשב את הגבולות בסעיפים א-ד:

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad \text{א.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad \text{ד.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad \text{ג.}$$

### תשובה

ד. 20

ג. 2

ב.  $\frac{11}{12}$

א. 21

## צמצום

### שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-9:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

### תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

## הכפלה בצמוד

### שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-8 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x - 6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x - 4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \quad (8)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

## גבולות טריגונומטריים

## שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-9 (היעזר בגבול הטריגונומטרי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

## תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (9)$$

$$4 \quad (8)$$

$$\frac{1}{8} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \quad (6)$$

## פונקציה שואפת לאינסוף

### שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-12 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

### תשובות סופיות

$\phi$ (4)	$-\infty$ (3)	$\phi$ (2)	$\phi$ (1)
$\phi$ (8)	$\infty$ (7)	$\infty$ (6)	$-\infty$ (5)
$-\infty$ (12)	$\phi$ (11)	1 (10)	0 (9)

$x$  שואף לאינסוף

## שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-26:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax + 1}{bx + 2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left( \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

## תשובות סופיות

- (1) 0      (2)  $-\frac{\pi}{2}$       (3) 4      (4)  $-\infty$
- (5) 0      (6) -5      (7) 1      (8) -1
- (9) -3      (10) 1.5      (11)  $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$       (12)  $\frac{1}{4}$
- (13) 0      (14) 4      (15)  $\frac{1}{9}$       (16) 2
- (17)  $\ln 3$       (18)  $e^{\frac{1}{3}}$       (19) 0
- (20) אם  $b \neq 0$  :  $\lim = \sqrt[b]{\frac{a}{b}}$  . אם  $b = 0, a > 0$  :  $\infty$  . אם  $b = 0, a < 0$  :  $-\infty$  .
- (21) 2.5      (22)  $\frac{k}{2}$       (23)  $\frac{1}{2}$       (24)  $-\frac{1}{2}$
- (25)  $\frac{1}{2}$       (26)  $\frac{a-b}{2}$

## הגבול של אוילר

### שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 9-1:

(היעזר בגבול של אוילר:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  :  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$e^3 \quad (5) \qquad e^{-1} \quad (4) \qquad e^2 \quad (3) \qquad 1 \quad (2) \qquad e^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$e \quad (9) \qquad e^{30} \quad (8) \qquad e^{-12} \quad (7) \qquad e \quad (6)$$

## כלל הסנדוויץ'

### שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 10-1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

(11) נתונה פונקציה  $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $\lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4$ ,

ונתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$  לכל  $x$ .

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

### תשובות סופיות

$$0 \quad (5) \qquad 3 \quad (4) \qquad \frac{3}{4} \quad (3) \qquad 0 \quad (2) \qquad 0 \quad (1)$$

$$0 \quad (10) \qquad 1 \quad (9) \qquad 4 \quad (8) \qquad \frac{3}{4} \quad (7) \qquad 0 \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2 \qquad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$$

## גבול של פונקציה מפוצלת

### שאלות

חשב את הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  של הפונקציות בשאלות 1-6:

$$(a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^x & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{ב.}$$

### תשובות סופיות

(1) 4      (2)  $\phi$       (3)  $\phi$       (4) 1      (5) -1

(6) א. אין גבול.      ב.  $\frac{1}{6}$

## גבול לפי הגדרה

### שאלות

בשאלות 1-6, על פי הגדרת הגבול, הוכח:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(7) \text{ חשב, על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכח, על פי הגדרת הגבול, את המקרים 8-11:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (10)$$

$$(12) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכח כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f(x) < -4$ .

$$(13) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכח כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f^2(x) > 16$ .

$$(14) \text{ נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכח שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(15) \text{ נתון הגבול הבא: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1$$

מצא ערך של  $M > 0$ , עבורו לכל  $x > M$  הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצא  $M$ , כך ש- $|f(x) - L| < 0.1$   $\forall x > M$ ).

$$(16) \text{ מגדירים את הפונקציה הבאה: } f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכח את תשובותיך בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(17) \text{ בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2} \text{ מצא } \delta > 0 \text{ , כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta \text{ , אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \text{ מתקיים.}$$

(18) הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

$$\text{א. אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0 \text{ , אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0 \text{ , אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L \text{ , אז: הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L$$

$$\text{ד. אם הגבולות } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

$$(19) \text{ רוצים להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(20) \text{ רוצים להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x+10} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(21) \text{ הוכח שאם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \text{ , אז קיימת סביבה נקובה של } 0 \text{ שבה } f(x) > 2$$

(22) הוכח שאם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > L$ , אז קיימת סביבה נקובה של  $x_0$  שבה  $f(x) > L$ .

## תשובות סופיות

(7)  $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: [GOOL.co.il](http://GOOL.co.il)

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 8 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

97	1. רציפות של פונקציה
103	2. משפט ערך הביניים
107	3. תכונות נוספות של פונקציות רציפות
109	4. שיטת החצייה

## רציפות של פונקציה

### שאלות

בשאלות 1-6: בדוק את רציפות הפונקציות בנקודת התפר<sup>1</sup> שלהן, ובשאלות 1 ו-2, שרטט גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

(7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6: רשום עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. בנוסף, הדגם פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של  $k$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל  $x$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק לאחר שלומדים את כלל לופיטל.

<sup>1</sup> נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^x - 2}{2^x + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק לאחר שלומדים את כלל לופיטל.

(16) הוכח או הפרך:

- סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

**(17)** ידוע ש- $f$  רציפה ו- $g$  לא רציפה. האם  $f+g$  רציפה? הוכח את טענתך.

$$(18) \text{ תהי } f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ , ותהי  $f(x)$  מוגדרת וחיובית לכל  $x$ .

האם ההרכבה  $g(f(x))$  בהכרח רציפה לכל  $x$ ?

**(19)** תהי  $f$  פונקציה חסומה בקטע  $(0,1)$ .

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \text{ על ידי } (0,2) \text{ בקטע}$$

א. האם יתכן שהנקודה  $x_0 = 1$  היא נקודת אי-רציפות סליקה של  $g$ ? נמק.

ב. האם  $g$  חסומה בקטע  $(0,2)$ ? נמק.

**(20)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  פונקציה שמקיימת  $f(x+y) = f(x)f(y)$ , לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .

נניח ש- $f$  רציפה ב- $x=0$ .

הוכח ש- $f$  רציפה לכל  $x$ .

**(21)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  פונקציה שמקיימת  $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$ , לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .

נניח ש- $f$  רציפה ב- $x=0$ .

הוכח ש- $f$  רציפה לכל  $x$ .

**(22)** יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות המקיימות  $f(a) \neq g(a)$ ,

עבור  $a$  ממשי מסוים.

הראה שקיימת סביבה של  $a$ , שבה  $f(x) \neq g(x)$ .

### הערה

תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:

תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $f(a) \neq 0$ , עבור  $a$  ממשי מסוים.

הראה שקיימת סביבה של  $a$ , שבה  $f(x) \neq 0$ .

פשוט לקחנו  $g(x) = 0$ .

בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

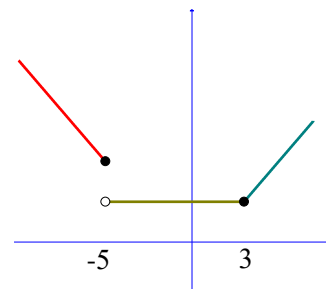
**(23)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$ .

הוכח או הפרך :

- א. הפונקציה  $f$  חסומה לכל  $x$ .
- ב. הפונקציה  $f$  רציפה לכל  $x$ .
- ג. הפונקציה  $f$  מונוטונית לכל  $x$ .
- ד. הפונקציה  $f$  זוגית או אי-זוגית לכל  $x$ .

### תשובות סופיות

- (1) רציפה.  
 (2) רציפה.  
 (3) רציפה בנקודה  $x=1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ .  
 (4) רציפה בנקודות  $x=0,1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ .  
 (5) לא רציפה.  
 (6) לא רציפה.  
 (7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.  
 (8)  $k=1$   
 (9)  $k=4$   
 (10)  $k=\frac{2}{3}$   
 (11)  $k=-1$   
 (12)  $a=0, b=\frac{1}{2}$   
 (13)  $a=2, b=1$  או  $a=1, b=2$   
 (14)  $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$   
 (15)  $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$   
 (16) הוכחה.  
 (17) הוכחה.  
 (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל  $x \neq -5$ . ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.  
 (19) א. לא. ב. כן.

(20) הוכחה.

(21) הוכחה.

(22) הוכחה.

(23) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

## משפט ערך הביניים

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכח שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x - 0.25 \sin x = 7$$

$$(4) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 5-6 הוכח שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

$$(5) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(6) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה לכל  $x$ , המקיימת:  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ .

הוכח שלמשוואה  $f(x) + \sin x = 4x$  יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-4, 4]$  פונקציה רציפה.

הוכח שלמשוואה  $2x + f(x) = 1$  יש לפחות פתרון אחד.

(8) מצא קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה  $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$  יש פתרון.

$$(9) \quad \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשב את  $f(0)$ ,  $f(2)$ .

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה  $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע  $(0, 2)$ ?

**10** תהיינה  $f, g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$  המקיימות  $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$   
 הוכח שקיימת נקודה  $a < c < b$  שבה  $f(c) = g(c)$ .

**11** נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור  $[a, b]$  שהוא חלקי לתחום הגדרתה.  
 נניח ש- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$   
 הוכח כי קיימת נקודה  $c \in [a, b]$  כך ש- $f(c) = c$   
 נקודה  $c$  כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.

**12** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$   
 הוכח כי קיימת נקודה  $c \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = c^{1.5}$ .

**13** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = f(1)$   
 א. הוכח כי קיימת נקודה  $c \in [0, 0.5]$  כך ש- $f(c) = f(c + 0.5)$   
 ב. הוכח כי קיימות נקודות  $c, d \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = f(d)$ .

**14** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) < f(2) < f(1)$   
 הוכח כי קיימים  $c_1, c_2 \in [0, 2]$  כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$ .

**15** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = f(8)$   
 הוכח כי קיימות נקודות  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$  כך ש-  
 $f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$

**16** הוכח שהפונקציה  $f(x) = x + \sin x$  היא על  $\mathbb{R}$ .

**17** הוכח שהפונקציה  $f(x) = x \cdot \sin x$  היא על  $\mathbb{R}$ .

**18** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור  $2\pi$   
 הוכח שקיים  $x_0 \in \mathbb{R}$  כך ש- $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$ .

**19** יהיו  $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$  קבועים המקיימים  $a_1 + \dots + a_n = 1$   
 הוכיחו כי למשוואה  $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$  יש לפחות פתרון אחד.

(20) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חח"ע ורציפה. הוכח כי  $f$  עולה ממש או יורדת ממש.
- ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  פונקציה חח"ע ועל. הוכח כי  $f$  לא רציפה ב- $\mathbb{R}$ .

(21) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  פונקציה רציפה.

הוכח כי קיימים אינסוף ערכים של  $x$ , שעבורם  $f(x) = \sin x$ .

(22) יהי  $P$  פולינום ממעלה זוגית, מהצורה  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ ,

ונניח כי  $a_0 < 0$ .

הוכח כי ל- $P$  ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

(23) יהיו  $f, g$  פונקציות רציפות המקיימות :

$0 < k \in \mathbb{R}$  כאשר  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$

הוכח כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה  $f(x) = g(x)$ .

(24) ענה על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ , ותהיינה  $x_1, \dots, x_n$  (כאשר  $n > 1$ )

נקודות כלשהן ב- $(a, b)$ .

הוכח שקיימת נקודה  $c$  בקטע  $(a, b)$ , כך ש- $f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$ .

ב. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ .

האם לכל  $c \in (a, b)$ , ניתן למצוא נקודות  $x_1, \dots, x_n$ , שונות זו מזו,

כאשר  $n > 1$ , כך ש- $f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$ ?

הוכח את תשובתך.

(25) תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע פתוח  $(a, b)$ .

נניח כי:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$

הראה כי תמונת הקטע  $(a, b)$  היא  $\mathbb{R}$ .

**(26)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = 4$ .

תהי  $S = \{x \in [0,1] \mid f(x) = 0\}$ .

א. הוכח ש- $S$  לא ריקה.

ב. הוכח שלקבוצה  $S$  יש חסם עליון, שנסמנו  $\alpha$ .

ג. הוכח כי  $\alpha \in (0,1]$ .

ד. הוכח כי  $f(\alpha) = 0$ .

**(27)** תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, כך ש- $f(a) = f(b)$ .

הוכח שקיימים  $a < x_1 < x_2 < b$ , כך ש- $f(x_1) = f(x_2)$ .

## תשובות סופיות

(8)  $[0.1,1]$

(9) א.  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 5$ . ב. לא.

שאלות 1-7 ושאלות 10-27 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## תכונות נוספות של פונקציות רציפות

### שאלות

- (1) קבע בכל סעיף, האם הטענה נכונה או לא נכונה. הוכח את תשובתך.  
 קיימת פונקציה המוגדרת בקטע  $[0,1]$ , שהיא:
- א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
  - ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
  - ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
  - ד. חסומה, אבל לא רציפה.
  - ה. רציפה, אבל לא חסומה.
  - ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
  - ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
  - ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
  - ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
  - י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
- יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע  $[0,1]$ , על ידי  $f$ , היא קטע.
- (2) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(x) > 0$  לכל  $x \in [a,b]$ . הוכח שקיים  $\alpha > 0$ , כך ש-  $f(x) \geq \alpha$  לכל  $x \in [a,b]$ .
- (3) תהי  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, ונניח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  קיים. הוכח ש-  $f$  חסומה.
- (4) יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות  $x_1, x_2$ , המקיימות  $x_1 < x_2$ , קיימת נקודה  $x_3$  כך ש-  $x_1 < x_3 < x_2$ , שעבורה  $f(x_3) = g(x_3)$ . הוכח כי  $f(x) = g(x)$  לכל  $x$ .
- (5) תהי  $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$  פונקציה על. הוכח ש-  $f$  לא רציפה ב-  $[0,1]$ .
- (6) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, שמקיימת  $f(x) = f(x^2)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ . הוכח ש-  $f$  פונקציה קבועה.

**(7)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, שמקיימת  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  
 לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .  
 הוכח כי  $f(x) = f(1)x$ , לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(8)** תהי  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בקטע  $(a, b)$ , ונניח שקיים קבוע ממשי  $K$ ,  
 כך שלכל שתי נקודות,  $x_1$  ו- $x_2$ , בקטע  $(a, b)$ , מתקיים **תנאי ליפשיץ**:  
 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$   
 הוכח כי  $f(x)$  רציפה בקטע  $(a, b)$ .  
 \* נסה להוכיח בשתי דרכים שונות.

**(9)** הוכח שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט.  
 באריכות:  
 הוכח שאם  $f$  פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  
 כך ש- $f(x) \geq f(x_0)$ , לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(10)** בסעיפים א ו-ב הוכח:

- א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.  
 ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.  
 ג. תהי  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ . הוכח שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה  $x \in \mathbb{R}$ .  
 הערה: הפונקציה הנ"ל נקראת פונקציית דיריכלה.

**(11)** הוכח או הפרך:

- א. אם  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ .  
 ב. אם  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ .

בשאלות **12-13** הוכח:

- (12)** אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , בה  $f$  חסומה.  
**(13)** אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , ואם  $f(x_0) > 0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , שבה  $f(x) > 0$ .

## תשובות סופיות

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## שיטת החצייה

### שאלות

(1) נתונה המשוואה  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ . בעזרת שיטת החצייה בקטע  $[-2, 3]$ , מצא שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?

(2) נתונה המשוואה:  $x^3 - x - 2 = 0$ .  
 א. מצא קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.  
 ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?  
 ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

### תשובות סופיות

(1) 0.07  
 (2) א.  $[1, 2]$  ב. 10 ג.  $x = 1.520$

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 9 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

110	1. כללי הגזירה
113	2. תרגול בכללי הגזירה
116	3. תרגילים נוספים לפי סוגים
118	4. גזירה סתומה
121	5. כלל השרשרת
122	6. גזירה לוגריתמית
	7. נגזרת הפונקציה ההפוכה

## תרגול בכללי הגזירה

### שאלות

גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 22-24 מצא רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$y = x^{\sqrt{x}} \quad (21) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (24) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (23) \quad y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (22)$$

## תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} (\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1-4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3-4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1-\ln x) \quad (20)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right) \quad (21)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \left[ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{x} \right] \quad (22)$$

$$y' = (x^2+1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \cdot x\right) \quad (23)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (24)$$

## תרגול נוסף בכללי הגזירה

### שאלות

#### הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$             | ב. $f(x) = x^7$             | ג. $f(x) = x^2$             |
| ד. $f(x) = x^1$             | ה. $f(x) = x^{-3}$          | ו. $f(x) = x^{-1}$          |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

#### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                           |                              |                                       |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$          | ב. $f(x) = 3x^7$             | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$            |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x^1$             | ו. $f(x) = 3x^{-2}$                   |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$   | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

#### הנגזרת של קבוע

3) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                |                         |
|----------------|-------------------------|
| א. $f(x) = 12$ | ב. $f(x) = \frac{7}{8}$ |
|----------------|-------------------------|

#### הנגזרת של סכום והפרש

4) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------|---|

## הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x-2)^3 \\ \text{ב.} & f(x) = (x^3+6)^5 \\ \text{ג.} & f(x) = 3(x-x^2)^2 \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \end{array}$$

## הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3}{x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{2}{x} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \\ \text{ז.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \end{array}$$

## הנגזרת של מכפלה

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x+1)(x-3) \\ \text{ב.} & f(x) = (5x+1)^3(x-3) \\ \text{ג.} & f(x) = x^3(6-x)^4 \end{array}$$

## הנגזרת של מנה

(8) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \end{array}$$

## הנגזרת של שורש

(9) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} \\ \text{ב.} & f(x) = 4\sqrt{x+1} \\ \text{ג.} & f(x) = \sqrt{x^3-1} \\ \text{ד.} & f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \\ \text{ה.} & f(x) = x^2\sqrt{x+3} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

## תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = 2x & \text{ג.} & f'(x) = 7x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 3x^2 & \text{א.} \\
 f'(x) = -\frac{1}{x^2} & \text{ו.} & f'(x) = 3x^{-4} & \text{ה.} & f'(x) = 1 & \text{ד.} \\
 f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ז.}
 \end{array}$$

(1)

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = 2x^3 & \text{ג.} & f'(x) = 21x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 6x^2 & \text{א.} \\
 f'(x) = -\frac{6}{x^3} & \text{ו.} & f'(x) = 8 & \text{ה.} & f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ד.} \\
 f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ח.} & f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ז.}
 \end{array}$$

0 ב. 0 א. (2)

$$f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} \text{ ב.} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \text{ א. (3)}$$

$$f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4 \text{ ב.} \quad f'(x) = 15(5x - x)^2 \text{ א. (4)}$$

$$f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \text{ ה.} \quad f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \text{ ד.} \quad f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x) \text{ ג.}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \text{ ז.} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \text{ ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{x^2} \text{ ב.} \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \text{ א. (5)}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \text{ ז.} \quad f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \text{ ו.} \quad f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \text{ ה.}$$

$$f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \text{ ב.} \quad f'(x) = 10x-14 \text{ א. (6)}$$

$$f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \text{ ג.}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \text{ ג.} \quad f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \text{ ב.} \quad f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \text{ א. (7)}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \text{ ו.} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ ה.} \quad f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \text{ ד.}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \text{ ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \text{ ב.} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ א. (8)}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \text{ ו.} \quad f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \text{ ה.} \quad f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \text{ ד.}$$

## גזירה סתומה

### שאלות

- (1) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^2 + y^5 - 1 = 1$ .
- (2) גזור את הפונקציה הסתומה:  $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$ .
- (3) גזור את הפונקציה הסתומה:  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ .
- (4) מצא את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , בנקודה (3,4).
- (5) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$ , דרך הנקודה (1,1).
- (6) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$ , דרך הנקודה (1,2) – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (7) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$ , דרך הנקודה (1,2) – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (8) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$ , דרך הנקודה (0,2) – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (9) נתונה הפונקציה הסתומה  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$ .  
 א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן  $y = 0$ .  
 ב. מצא את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שמצאת בסעיף א.
- (10) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^y - xy = 10$ .
- (11) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^y - y^x = 1$ .
- (12) נתונה פונקציה סתומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ . מצא את ערך  $y^n$  בנקודה בה  $y = 1$ .

**13** נתון כי המשוואה  $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$ ,  
 מגדירה את  $y = y(x)$  כפונקציה סתומה של  $x$ .  
 נתון כי  $h(y)$  גזירה ברציפות ויורדת.  
 הוכיחו כי  $y(x)$  יורדת חזק.

### תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

**9** א.  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  ב. בראשית הצירים:  $y = -x$ , המשוואה השנייה:  
 $y = x - 1$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

**(12)** -1

**(13)** הוכחה.

## כלל השרשרת

### שאלות

- (1) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(4) = 10$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f(x^2)$ .  
חשב את  $g'(2)$ .

- (2) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(2) = 4$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
א. חשב את  $g'(0.5)$ .

ב. נתון בנוסף כי  $f$  עולה. הוכח כי  $g$  יורדת.

- (3) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(1) = e$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = x^2 + f(\ln x)$ .  
א. חשב את  $g'(e)$ .

ב. הוכח שהפונקציה  $g$  עולה בנקודה  $x = e$ .

ג. חשב את הגבול  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$ .

- (4) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f(1) = -2$ ,  $f'(1) = e$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f^2(\ln x)$ .  
א. חשב את  $g'(e)$ .

ב. האם  $g$  עולה או יורדת, בנקודה  $x = e$ ?

ג. נתון כי  $f$  שלילית ועולה. מה ניתן לומר על  $g$ ?

(5) נתונה פונקציה,  $f(x)$ , יורדת וחיובית.

$$g(x) = \sqrt{f(x^2 + 4)}$$

מי מהבאים נכון?

א.  $g$  עולה לכל  $x$ .

ב.  $g$  יורדת לכל  $x$ .

ג.  $g$  עולה לכל  $x > 0$ .

ד.  $g$  יורדת לכל  $x > 0$ .

$$(6) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי  $f(10) = f'(10) = 4$ . חשב  $g'(100)$ .

$$(7) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 4$ . חשב  $g'(1)$ .

$$(8) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי  $f(0) = 2$ ,  $f'(0) = 1$ . חשב  $g'(1)$ .

$$(9) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי  $f(4) = 2$ ,  $f'(4) = 1$ . חשב  $g'(1)$ .

$$(10) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 4$ . חשב  $g'(1)$ .

## תשובות סופיות

		40 (1)
	ב. הוכחה.	א. -16 (1)
ג. $2e+1$	ב. הוכחה.	א. $2e+1$ (2)
ג. $g'(x) < 0$	ב. יורדת.	א. -4 (3)
		ד (4)
		$\frac{17}{80}$ (5)
		36 (6)
		$\frac{8}{9}$ (7)
		44 (8)
		-2 (9)

## גזירה לוגריתמית

### שאלות

גזור את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x} \quad (1)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (2)$$

### תשובות סופיות

$$y' = y \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left( (10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[ 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[ 3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

## נגזרת הפונקציה ההפוכה

### שאלה

הוכח, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 10 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

- 123 .....גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף.
- 126 .....גבול מהצורה אפס כפול אינסוף.
- 127 .....גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף.
- 128 .....גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף.
- 129 .....מקרים בהם כלל לופיטל נכשל.

## גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה  $\frac{0}{0}$  ו-  $\frac{\infty}{\infty}$

חשב את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשב את הגבולות הבאים (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x} - 2 - 1} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x - 4} \quad (5) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשב את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשב את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (15) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשב את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

חשב את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

## תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\ln \frac{a}{b}$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)	$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)
1 (15)	2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)
$\frac{1}{2}$ (20)	$\frac{1}{6}$ (19)	$\frac{a}{b}$ (18)	$\frac{a}{b}$ (17)	1 (16)
$-\frac{1}{2}$ (25)	$-\frac{1}{3}$ (24)	$\frac{1}{3}$ (23)	$\frac{1}{8}$ (22)	$\frac{1}{2}$ (21)
$\frac{1}{2}$ (30)	$\frac{2}{3}$ (29)	1 (28)	1 (27)	$-\frac{3}{4}$ (26)
0 (35)	$\infty$ (34)	0 (33)	$\infty$ (32)	$\frac{1}{2}$ (31)

## גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה  $\infty \cdot 0$

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( \frac{x+3}{x-3} \right) \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x-3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (9)$$

תשובות סופיות

0 (5)	0 (4)	0 (3)	0 (2)	$\infty$ (1)
	$\frac{5}{2}$ (9)	6 (8)	0 (7)	0 (6)

## גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה  $\infty - \infty$

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (6)$$

### תשובות סופיות

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\ln \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \quad (6)$$

## גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה:  $1^{\pm\infty}$ ,  $0^{\pm\infty}$ ,  $\infty^0$

חשב את הגבולות הבאים:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2}$ (3)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, (a > 0)$ (2)	$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ (1)
$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}}$ (6)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ (5)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$ (4)
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$ (9)	$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$ (8)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (7)
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$ (12)	$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x}$ (11)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x}$ (10)
	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (14)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\cot^2 x}$ (13)

### תשובות סופיות

$e^2$ (5)	1 (4)	1 (3)	1 (2)	$e$ (1)
1 (10)	$e^{-1/2}$ (9)	$e^{1/3}$ (8)	$e^3$ (7)	1 (6)
	$e$ (14)	1 (13)	$e$ (12)	1 (11)

## מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

### שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ .

הראה זאת והסבר מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים. לבסוף, חשב את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

# מתמטיקה לחשבונאים א

## פרק 11 - חקירת פונקציה

### תוכן העניינים

130	1. מושגי יסוד
131	2. חקירת פולינום
132	3. חקירת פונקציה רציונלית
136	4. חקירת פונקציה מעריכית
139	5. חקירת פונקציה לוגריתמית
143	6. חקירת פונקציה עם שורשים
144	7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט
147	8. חקירת פונקציה טריגונומטרית
151	9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

## הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
  - תחום הגדרה ורציפות.
  - נקודות חיתוך עם הצירים.
  - זוגיות ואי-זוגיות.
  - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
  - תחומי עלייה וירידה.
  - נקודות קיצון.
  - תחומי קמירות וקעירות.
  - נקודות פיתול.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

## חקירת פולינום

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

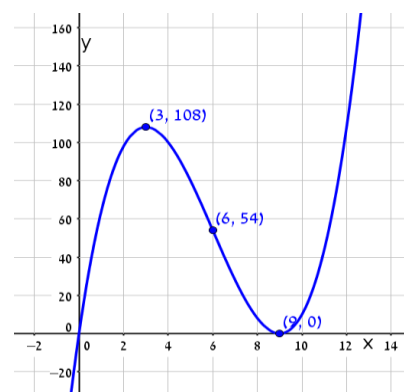
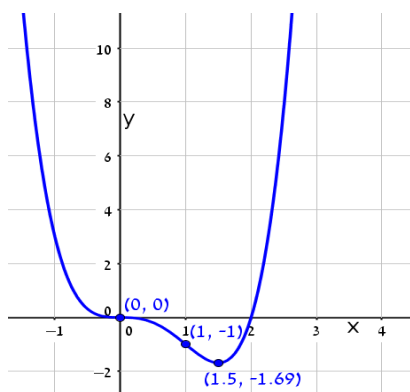
$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  ו- $9$ .  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(9, 0)$ , מקסימום:  $(3, 108)$ .  
 תחום עלייה:  $x < 3$  or  $x > 9$ , ירידה:  $3 < x < 9$ .  
 תחום קמירות:  $x > 6$ , קעירות:  $x < 6$ .  
 נקודת פיתול:  $(6, 54)$ .
- (2) תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  ו- $1$ .  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(1.5, \frac{-27}{16})$ .  
 תחום עלייה:  $x > 1.5$ , ירידה:  $x < 1.5$ .  
 תחום קמירות:  $x < 0$  or  $x > 1$ , קעירות:  $0 < x < 1$ .  
 נקודות פיתול:  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ .

## גרפים



## חקירת פונקציה רציונלית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

### הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת  $y = x - 1$ .

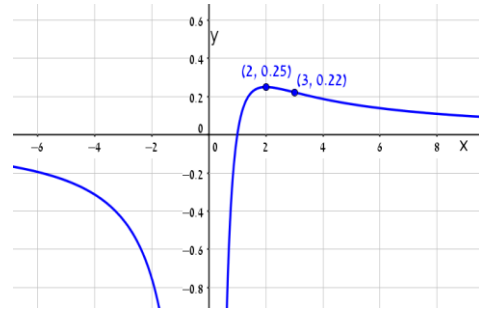
## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=0$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(2, 0.25)$ . נקודת פיתול:  $\left(3, \frac{2}{9}\right)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 2$ , ירידה:  $x > 2$  or  $x < 0$ .  
תחום קמירות:  $x > 3$ , קעירות:  $0 < x < 3$  or  $x < 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq -1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=-1$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=2$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מינימום:  $(0, 0)$ . נקודת פיתול:  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$ .  
תחום עלייה:  $x < -1$  or  $x > 0$ , ירידה:  $-1 < x < 0$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < \frac{1}{2}$  or  $x < -1$ , קעירות:  $x > \frac{1}{2}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq \pm 2$ . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=-2$ , משופעת: הישר  $y=x$  ב- $\pm\infty$ ,  
אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$ , מקסימום:  $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$ .  
תחום עלייה:  $x < -\sqrt{12}$  or  $x > \sqrt{12}$ , ירידה:  $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$ ,  $x \neq \pm 2$ .  
נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-2 < x < 0$  or  $x > 2$ , קעירות:  $x < -2$  or  $0 < x < 2$ .
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq -1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=-1$ , משופעת: הישר  $y=x-2$  ב- $\pm\infty$ ,  
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$ .  
תחום עלייה:  $x < -3$  or  $x > -1$ , ירידה:  $-3 < x < -1$ .  
נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$ , קעירות:  $-1 < x < 0$  or  $x < -1$ .

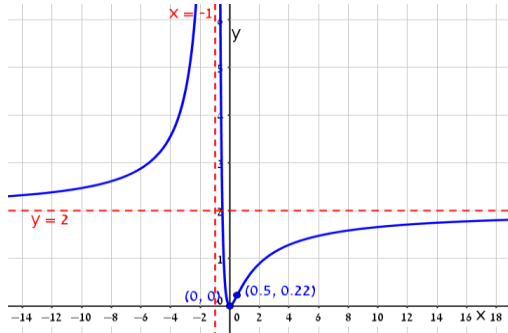
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ :  $-1$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=1$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.  
נקודות פיתול:  $(-1,0)$ ,  $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$ .
- תחום קמירות:  $-3 < x < -1$  &  $x > 1$ , קעירות:  $-1 < x < 1$  or  $x < -3$ .
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 2$ ,  $x \neq 5$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{1}{10}$ , עם ציר ה- $x$ :  $\pm 1$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=5$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(2.78, -3.88)$ , מינימום:  $(0.36, -0.11)$ .  
תחום עלייה:  $0.36 < x < 2$  or  $2 < x < 2.78$ ,  
ירידה:  $x < 0.36$  or  $2.78 < x < 5$  or  $x > 5$ . נקודת פיתול:  $(-1,0)$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < 2$  or  $x > 5$ , קעירות:  $2 < x < 5$  or  $x < -1$ .
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq \pm 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{3}{4}$ , עם ציר ה- $x$ :  $x=1$ ,  $x=3$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=-2$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.  
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.  
נקודת פיתול:  $(0.85, -0.09)$ .
- תחום קמירות:  $0.85 < x < 2$  or  $x < -2$ , קעירות:  $-2 < x < 0.85$  or  $x > 2$ .
- (8) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$ .  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$ .  
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר  $x=-1$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(-2, -4)$ , מינימום:  $(0,0)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 1$  or  $x < -2$  or  $x > 1$ , ירידה:  $-1 < x < 0$  or  $-2 < x < -1$ .  
נקודת פיתול: אין.  
תחום קמירות:  $-1 < x < 1$  or  $x > 1$ , קעירות:  $x < -1$ .

גרפים

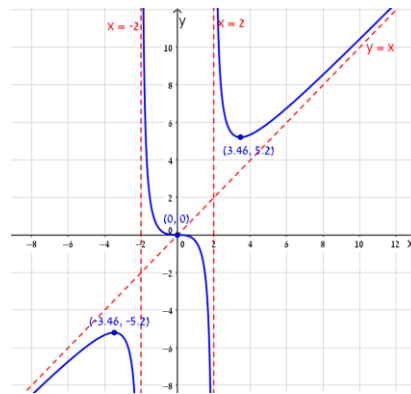
(1)



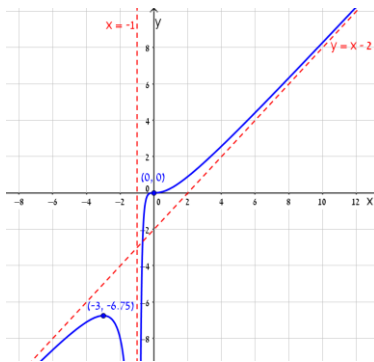
(2)



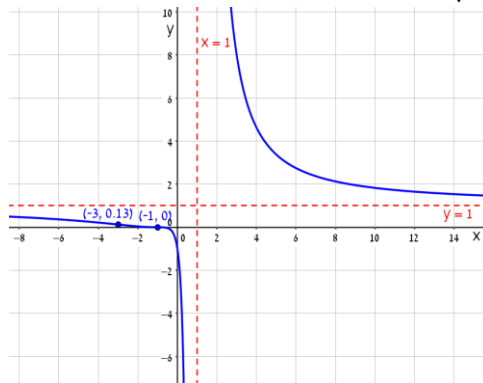
(3)



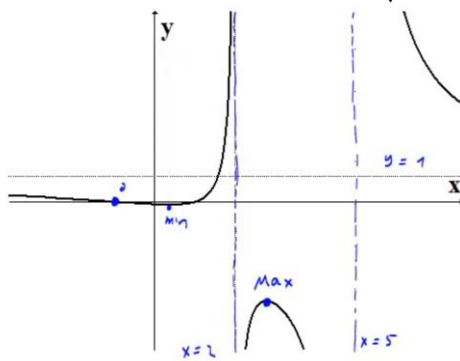
(4)



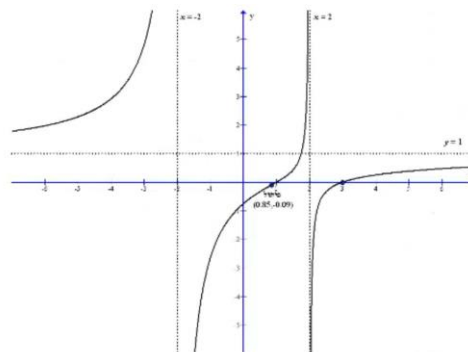
(5)



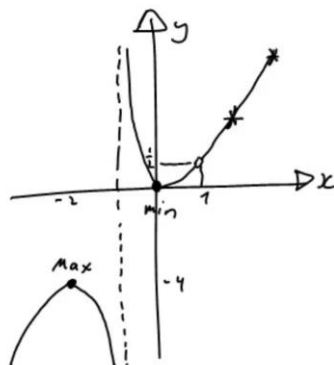
(6)



(7)



(8)



## חקירת פונקציה מעריכית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

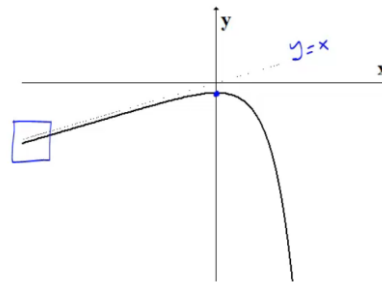
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

## תשובות סופיות

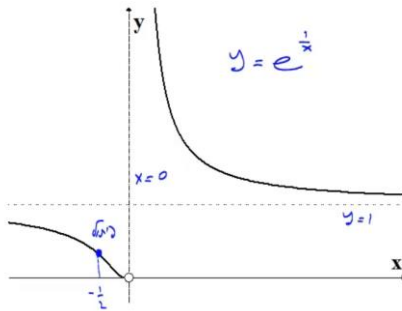
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ : אין (ראו בהרחבה בסרטון).  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר  $y=x$  ב- $-\infty$  בלבד.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, -1)$ . תחום עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .  
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל  $x$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : אין.  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית):  $x=0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין.  
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.  
נקודת פיתול:  $(-0.5, e^{-2})$ .  
תחום קמירות:  $-0.5 < x < 0$  or  $x > 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.5$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $-2$ .  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית):  $x=0$ , משופעת: הישר  $y=x+3$  ב- $\pm\infty$ .  
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום:  $(-1, e^{-1})$ , מינימום:  $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$ .  
תחום עלייה:  $x > 2$  or  $x < -1$ , ירידה:  $-1 < x < 0$  or  $0 < x < 2$ .  
נקודת פיתול:  $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$ .  
תחום קמירות:  $-0.4 < x < 0$  or  $x > 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.4$ .
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר  $y=0$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ , מינימום:  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ .  
תחום עלייה:  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ , ירידה:  $x > \frac{1}{2}$  or  $x < -\frac{1}{2}$ .  
נקודות פיתול:  $(0, 0)$ ,  $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$ ,  $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$ .  
תחום קמירות:  $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$  or  $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ , תחום קעירות:  
 $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$  or  $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$ .

## גרפים

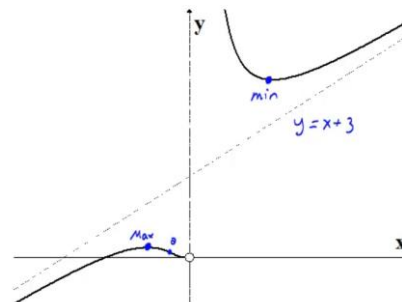
(1)



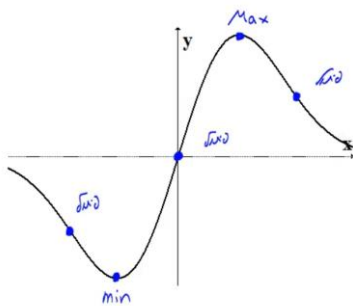
(2)



(3)



(4)



## חקירת פונקציה לוגריתמית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

### הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

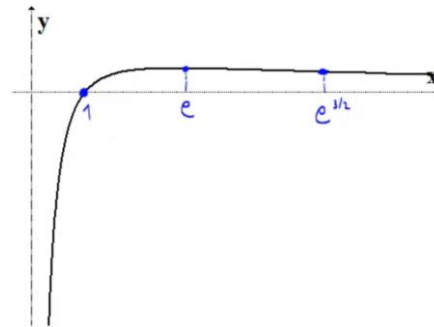
## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < e$ , ירידה:  $x > e$ .  
נקודת פיתול:  $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$ .  
תחום קמירות:  $x > e^{1.5}$ , קעירות:  $0 < x < e^{1.5}$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר  $x = 0$ ,  
משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < e^2$ , ירידה:  $x > e^2$ .  
נקודת פיתול:  $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$ .  
תחום קמירות:  $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$ , קעירות:  $x > e^{\frac{8}{3}}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x < 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{1}{2} \ln 2$ , עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 2$ , משופעת: אין.  
נקודות קיצון: אין.  
תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.  
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, -e^{-1})$ .  
תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .  
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

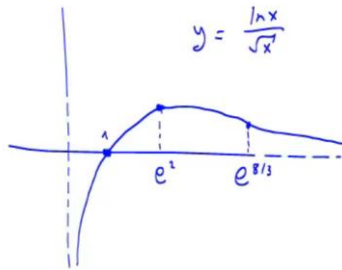
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $x = e^1$ ,  $x = e^{-3}$ .  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, -4)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול:  $(1, -3)$ . תחום קמירות:  $x > 1$ , קעירות:  $0 < x < 1$ .
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $x = e^{1.5}$ ,  $x = e^{-0.5}$ .  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{\frac{1}{2}}, -4)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{\frac{1}{2}}$ , ירידה:  $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$ .  
 נקודת פיתול:  $(e^{1.5}, 0)$ . תחום קמירות:  $0 < x < 1.5$ , קעירות:  $x > 1.5$ .
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : אין.  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 1$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, 2)$ ,  $(e, 2)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e$  or  $e^{-1} < x < 1$ , ירידה:  $1 < x < e$  or  $x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול:  $(5.15, 3.06)$ .  
 תחום קמירות:  $1 < x < 5.15$  or  $0 < x < 1$ , קעירות:  $x > 5.15$ .

## גרפים

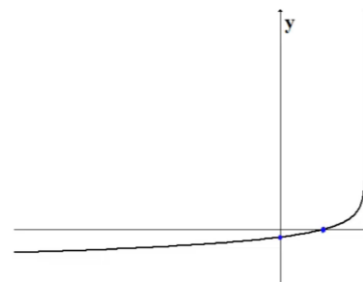
(1)



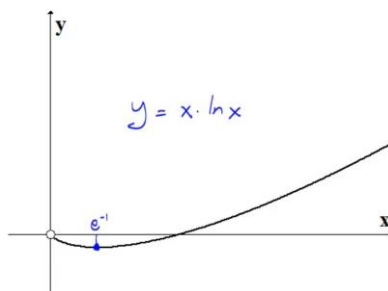
(2)



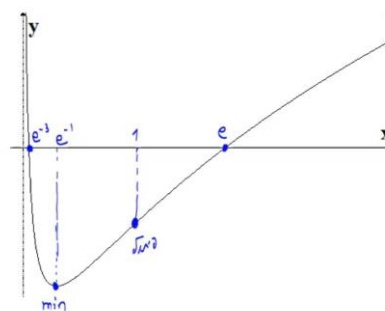
(3)



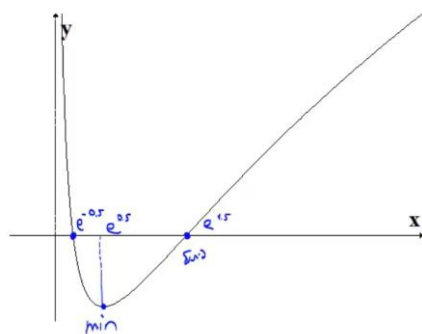
(4)



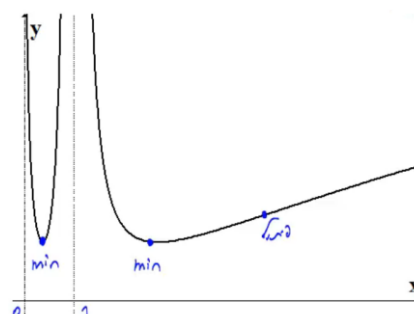
(5)



(6)



(7)



## חקירת פונקציה עם שורשים

### שאלה

(1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ .

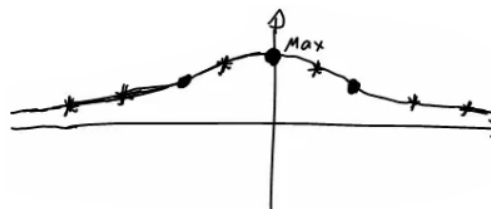
### תשובה

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ .  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = 1$ , עם ציר ה- $x$ : אין.  
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית:  $y = 0$ .  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(0,1)$ . תחום עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .

נקודות פיתול:  $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$

תחום קמירות:  $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$  or  $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$ , קעירות:  $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$

גרף:



## חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (3)$$

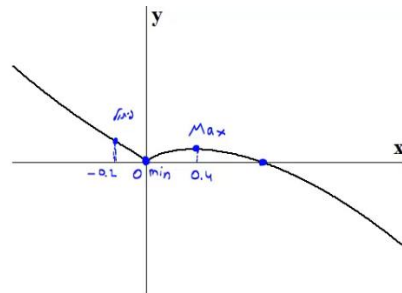
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

## תשובות סופיות

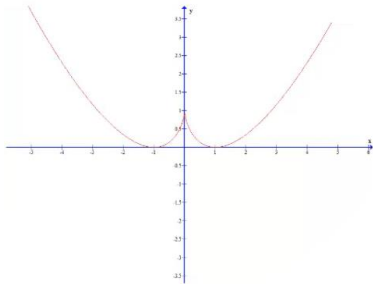
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  או  $1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$ , מינימום:  $(0, 0)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < \frac{2}{5}$ , ירידה:  $x < 0$  or  $x > \frac{2}{5}$ .  
נקודות פיתול:  $(-0.2, 0.41)$ .  
תחום קמירות:  $x < -0.2$ , קעירות:  $-0.2 < x < 0$  or  $x > 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ .  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $1$ , עם ציר ה- $x$ :  $-1$  או  $1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, 1)$ , מינימום:  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ .  
תחום עלייה:  $-1 < x < 0$  or  $x > 1$ , ירידה:  $x < -1$  or  $0 < x < 1$ .  
נקודות פיתול: אין.  
תחום קמירות: קמורה לכל  $x$ .  
תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: זוגית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ :  $\pm 1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(0, -1)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $x < -1$  or  $-1 < x < 0$ .  
נקודות פיתול:  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < 1$ , קעירות:  $x > 1$  or  $x < -1$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1.5$ , עם ציר ה- $x$ :  $3$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 2$ ,  
משופעת ואופקית: הישר  $y = 1$  ב- $\infty$ , ו- $y = -1$  ב- $-\infty$ .  
נקודות קיצון: מינימום:  $(3, 0)$ .  
תחום עלייה:  $x > 3$ , ירידה:  $2 < x < 3$  or  $x < 2$ .  
נקודות פיתול:  $(3, 0)$ .  
תחום קמירות:  $2 < x < 3$ , קעירות:  $x > 3$  or  $x < 2$ .

## גרפים

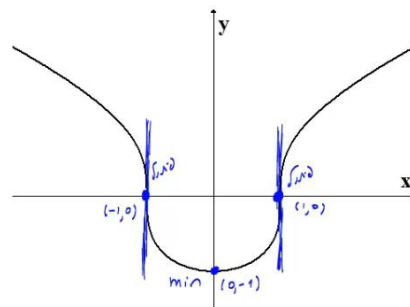
(1)



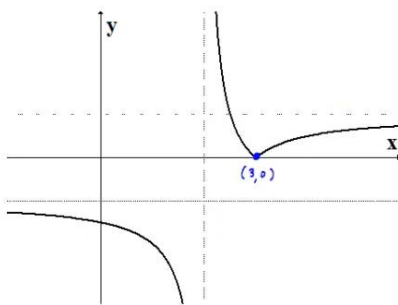
(2)



(3)



(4)



## חקירת פונקציה טריגונומטרית

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2\cos x$  בתחום  $[0, 2\pi]$ .  
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x - 3\tan x$  בתחום  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ .

- חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
  - תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
  - מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
  - מציאת אסימפטוטות אנכיות.
  - מציאת נקודות פיתול.
  - מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$  בתחום  $[0, \pi]$ .  
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$  בתחום:  $0 \leq x \leq 1.5\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה:  $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$  בתחום הנתון?

(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ .

- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום  $[0, \pi]$ .
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום  $[-\pi, \pi]$ .

(7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$  בתחום:  $-0.25\pi < x < 0.25\pi$ .

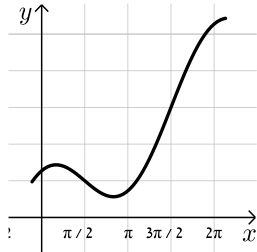
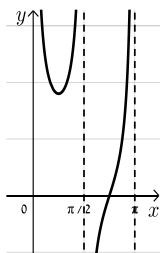
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

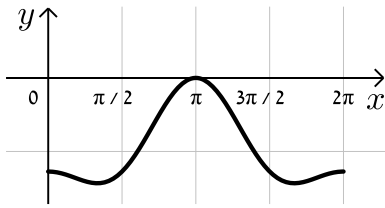
חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$[0, 2\pi], \quad f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3 \quad (8)$$

$$[0, \pi], \quad f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x \quad (9)$$

## תשובות סופיות

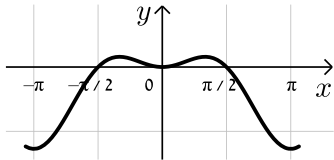
(1) א.  $0 < x < 2\pi$ .ב.  $\max(2\pi, 2\pi + 2)$  קצה,  $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ ,  $\min(0, 2)$  קצה.ג. תחומי עלייה:  $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$  או  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ .ד.  $(0, 2)$ . ה. אין. ו.  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .ז. קעירות כלפי מעלה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ,קעירות כלפי מטה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  או  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ .(2) א.  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{2}$ .ב.  $\min\left(\frac{2}{3}\pi, 13.57\right)$  קצה,  $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$ ,  $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$  קצה.ג. תחומי עלייה:  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{2}$ .ד.  $(0, 0)$ . ה. אנכית:  $x = \frac{\pi}{2}$ . ו.  $(0, 0)$ .ז. קעירות כלפי מעלה:  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  או  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0$ ,קעירות כלפי מטה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .(3) א.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . ב.  $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ .ג. תחומי עלייה:  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ,  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ , תחומי ירידה:  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ .ד.  $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ . ה. אנכית:  $x = \pi$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$ .(4) א.  $(\pi, 0), (0, -2)$ .ב.  $\max\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$ ,  $\max(2\pi, -2)$ ,  $\max(0, -2)$ ,  $\min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$ ,  $\max(\pi, 0)$ .ג. עולה:  $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ ,  $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$ ; יורדת:  $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{3}$ . גרף:



5 א.  $(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{3\pi}{2}, 0), (0, 1)$

ב.  $(0, 1), (\frac{\pi}{6}, 1.29), (\frac{5\pi}{6}, -1.29), (1.5\pi, 0)$

ד. 2 פתרונות.

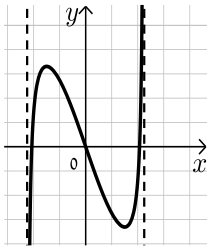


6 א. חיתוך:  $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 0)$ , קיצון:  $\min(\pi, -2)$  קצה,

$\max(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4})$  קצה.

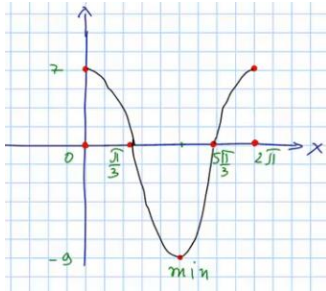
7 א.  $(0, 0), (\pm 0.23\pi, 0)$  ב.  $x = \pm 0.25\pi$

ג.  $\min(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}), \max(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27})$



8 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 7, עם ציר ה-x:  $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}, x = 7$

נקודות קיצון: מינימום:  $(\pi, -9)$ , מקסימום:  $(0, 7), (2\pi, 7)$



נקודות פיתול:  $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

תחום קמירות:  $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

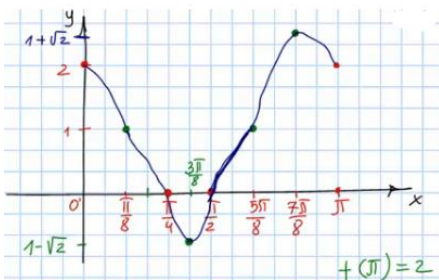
קעירות:  $0 < x < \frac{\pi}{3}$  or  $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

תחום עלייה:  $x > 3$ , ירידה:  $x < 2$  or  $2 < x < 3$

9 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 2, עם ציר ה-x:  $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}$

נקודות קיצון: מינימום:  $(\frac{3\pi}{8}, 1 - \sqrt{2})$ , מקסימום:  $(\frac{7\pi}{8}, 1 + \sqrt{2})$

תחום עלייה:  $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$ , ירידה:  $0 < x < \frac{3\pi}{8}$  or  $\frac{7\pi}{8} < x < \pi$



נקודות פיתול:  $(\frac{\pi}{8}, 1), (\frac{5\pi}{8}, 1)$

תחום קמירות:  $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$

קעירות:  $0 < x < \frac{\pi}{8}$  or  $\frac{5\pi}{8} < x < \pi$

## חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

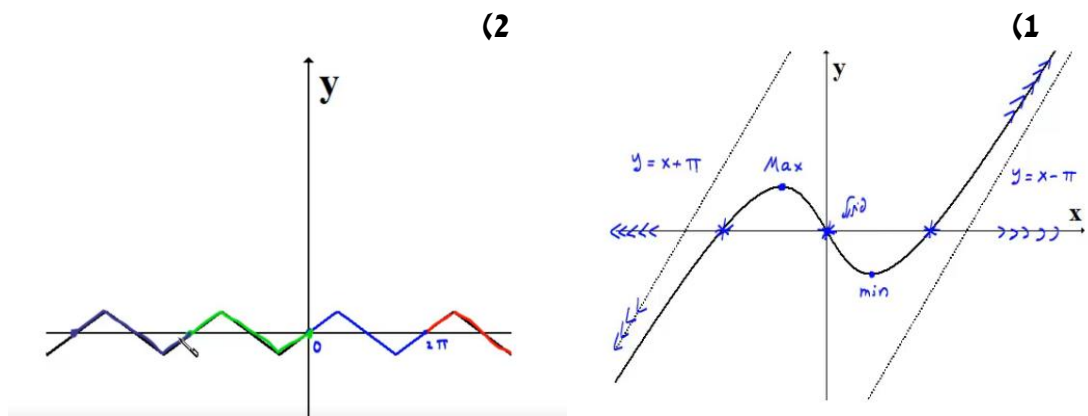
$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (2)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (1)$$

**תשובות סופיות**

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ .  
 אסימפטוטה אנכית: אין,  
 משופעת: הישר  $y = x + \pi$  ב- $-\infty$ , אופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(-1, 0.575)$ , מינימום:  $(1, -0.575)$ .  
 תחום עלייה:  $x < -1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $-1 < x < 1$ .  
 נקודות פיתול:  $(0, 0)$ .  
 תחום קמירות:  $x > 0$ , קעירות:  $x < 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית.  
 מחזוריות: כן, ממחזור  $2\pi$ .  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $x = 0, \pi, 2\pi$ .  
 אסימפטוטה אנכית: אין,  
 משופעת: הישר  $y = x + \pi$  ב- $-\infty$ , אופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , מינימום:  $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ .  
 תחום עלייה:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  or  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , ירידה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ .  
 נקודות פיתול: אין.

**גרפים**



# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 12 - הנגזרת של פונקציות יסודיות ושימושיה

תוכן העניינים

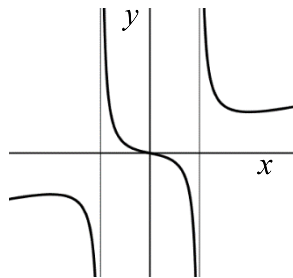
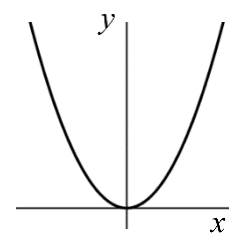
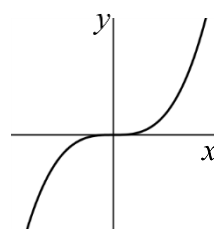
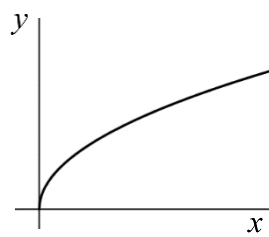
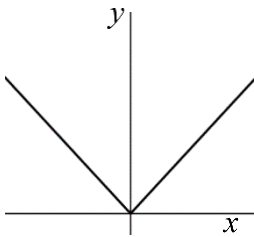
153	1. הקדמה כללית
154	2. גזירת פונקציות
160	3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
161	4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה
164	5. שאלות עם פרמטרים
166	6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית

## הקדמה כללית:

### סיכום כללי:

### פונקציות נפוצות:

הפונקציה  $f(x) = x^2$  : הפונקציה  $f(x) = x^3$  : הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$  : הפונקציה  $f(x) = |x|$  :



פונקציה עם מכנה, למשל:  $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$  :

### שיפוע של פונקציה:

- השיפוע  $m$  של פונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה  $A(x_1, y_1)$ , כלומר:  $m = f'(x_1)$ .
- השיפוע של המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה  $A(x_1, y_1)$ .
- משוואת המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

### הנגזרת:

לכל פונקציה  $f(x)$  קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת  $f'(x)$ , המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

## גזירת פונקציות:

### סיכום כללי:

#### כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1:  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע):  $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע):  $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש):  $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת):  $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של  $\frac{1}{x}$ ):  $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה):  $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה):  $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש):  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

### שאלות:

#### (1) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$             | ב. $f(x) = x^7$             | ג. $f(x) = x^2$             |
| ד. $f(x) = x$               | ה. $f(x) = x^{-3}$          | ו. $f(x) = x^{-1}$          |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

#### (2) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                           |                              |                                       |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$          | ב. $f(x) = 3x^7$             | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$            |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x$               | ו. $f(x) = 3x^{-2}$                   |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$   | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 12 \quad \text{א.} \quad f(x) = \frac{7}{8} \quad \text{ב.}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{א.} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = 7x^2 + 23x - 6 \quad \text{ג.} \quad f(x) = 6x^2 + 8x + 4 \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 \quad \text{ה.} \quad f(x) = \frac{x^4}{8} + 67 \quad \text{ו.}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{א.} \quad f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ב.} \quad f(x) = 3(x - x^2)^2 \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \quad \text{ה.}$$

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{א.} \quad f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ה.} \quad f(x) = \frac{2}{3-x} \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{6}{x+5} \quad \text{ז.}$$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{א.} \quad f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ג.} \quad f(x) = 3x^2 \cdot x \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^2 \cdot x^3 \quad \text{ה.} \quad f(x) = x(3x+7) \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = 3x^3(3x-1) \quad \text{ז.} \quad f(x) = (x-2)(2x^2+3) \quad \text{ח.}$$

$$f(x) = (3x-2)(x^2+10x) \quad \text{ט.} \quad f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2) \quad \text{י.}$$

$$f(x) = x(x-2)(3x-4) \quad \text{יא.}$$

8) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (x^2 - 4)^2 \\ \text{ב.} & f(x) = 2x^3(3x+5)^2 \\ \text{ג.} & f(x) = (x^3 + 2)^2(x-1)^3 \\ \text{ד.} & f(x) = (x^2 + 1)^3(2x-1)^2 \end{array}$$

9) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} & \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} & \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} & \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x} & \text{ו.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \\ \text{ז.} & f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} & \text{ח.} & f(x) = \frac{(x^2+3)^2}{x^2-2} & \text{ט.} & f(x) = \frac{x^3-x^2}{2(1-x)} \\ \text{י.} & f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} & & & & \end{array}$$

10) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} & \text{ב.} & f(x) = 4\sqrt{x+1} & \text{ג.} & f(x) = \sqrt{x^3-1} \\ \text{ד.} & f(x) = (3x+1)\sqrt{x} & \text{ה.} & f(x) = x^2\sqrt{x+3} & \text{ו.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

11) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x+1} \\ \text{ב.} & f(x) = \sqrt{2x} \\ \text{ג.} & f(x) = \sqrt{3x^2+1} \\ \text{ד.} & f(x) = \sqrt{10-3x} \\ \text{ה.} & f(x) = \sqrt{2x^2+7x} \\ \text{ו.} & f(x) = x^2\sqrt{1-2x} \\ \text{ז.} & f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2} \\ \text{ח.} & f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} \\ \text{ט.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{י.} & f(x) = \frac{2x^3-x^2+x-5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \\ \text{יא.} & f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x}} \\ \text{יב.} & f(x) = \sqrt{\frac{x^2+7}{x^2-5}} \\ \text{יג.} & f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \quad \text{ט.ז.}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad \text{ט.ו.}$$

**(12)** גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \quad \text{ג.} \quad f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = ax^4 - bx \quad \text{א.}$$

$$f(x) = a\sqrt{bx^2 + c} \quad \text{ד.}$$

**(13)** גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ה.}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $3x^2$     ב.  $7x^6$     ג.  $2x$     ד. 1    ה.  $-\frac{3}{x^4}$     ו.  $-\frac{1}{x^2}$
- ז.  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$     ח.  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$     ט.  $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
- (2) א.  $6x^2$     ב.  $21x^6$     ג.  $2x^3$     ד.  $\frac{6x^5}{7}$     ה. 8
- ו.  $-\frac{6}{x^3}$     ז.  $-\frac{4}{x^2}$     ח.  $\frac{3}{\sqrt{x}}$     ט.  $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$
- (3) א. 0    ב. 0
- (4) א.  $3x^2 + 4x - 3$     ב.  $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$     ג.  $14x + 23$     ד.  $12x + 8$     ה.  $x - 3x^2$     ו.  $0.5x^3$
- (5) א.  $15(5x - 2)^2$     ב.  $15x^2(x^3 + 6)^4$     ג.  $6(x - x^2)(1 - 2x)$
- ד.  $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$     ה.  $\frac{8(x + 1)^3}{3}$
- (6) א.  $-\frac{3}{x^2}$     ב.  $\frac{2}{x^2}$     ג.  $-\frac{2}{x^3}$     ד.  $-\frac{9}{x^4}$     ה.  $-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$
- ו.  $\frac{2}{(3 - x)^2}$     ז.  $-\frac{6}{(x + 5)^2}$
- (7) א.  $10x - 14$     ב.  $(5x + 1)^2(20x - 44)$     ג.  $x^2(6 - x)^3(18 - 7x)$
- ד.  $9x^2$     ה.  $5x^4$     ו.  $6x + 7$     ז.  $36x^3 - 9x^2$     ח.  $6x^2 - 8x + 3$
- ט.  $9x^2 + 56x - 20$     י.  $36x^5 + 75x^4 + 24x^3 - 24x^2 - 40x - 8$     יא.  $9x^2 - 20x + 8$
- (8) א.  $4x(x^2 - 4)$     ב.  $30x^2(x + 1)(3x + 5)$     ג.  $3(x - 1)^2(x^3 + 2)(3x^3 - 2x^2 + 2)$
- ד.  $2(2x - 1)(x^2 + 1)^2(8x^2 - 3x + 2)$
- (9) א.  $\frac{5}{(1 + 2x)^2}$     ב.  $\frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x - 12)^2}$     ג.  $\frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$     ד.  $\frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 1)^2}$
- ה.  $-\frac{1}{x^2}$     ו.  $-\frac{9}{x^4}$     ז.  $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$
- ח.  $\frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{(x^2 - 2)^2}$     ט.  $-x$     י.  $-\frac{1}{(x + 2)^2}$

$$\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \cdot \text{ה} \quad \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \cdot \text{ז} \quad \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \cdot \text{ג} \quad \frac{2}{\sqrt{x+1}} \cdot \text{ב} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \text{א} \quad (10)$$

$$\frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \cdot \text{ו}$$

$$\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}} \cdot \text{ה} \quad -\frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \cdot \text{ז} \quad \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \cdot \text{ג} \quad \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \text{ב} \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \text{א} \quad (11)$$

$$\frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}} \cdot \text{ו} \quad \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} \cdot \text{ט} \quad -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \cdot \text{ה} \quad \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \cdot \text{ז} \quad 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot \text{ו}$$

$$\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}} \cdot \text{יג} \quad -\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}} \cdot \text{יב} \quad 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} \cdot \text{יא}$$

$$-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}} \cdot \text{יז} \quad -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \cdot \text{יט} \quad \frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}} \cdot \text{יד}$$

$$\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}} \cdot \text{ז} \quad \frac{-2a}{(x-4a)^2} \cdot \text{ג} \quad \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \cdot \text{ב} \quad 4ax^3 - b \cdot \text{א} \quad (12)$$

$$\cdot f'(x) = \frac{2x^2-8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3} \cdot \text{א} \quad (13)$$

$$\cdot f'(x) = \frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \cdot \text{ב}$$

$$\cdot f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \cdot \text{ג}$$

$$\cdot f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} \cdot \text{ד}$$

$$\cdot f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \cdot \text{ה}$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = \frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \cdot \text{ו}$$

## מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה  $f(x) = 2x^3 - 7x$  בנקודה  $(2, 2)$ .

(15) מצא את שיפוע הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$  בנקודה בה  $x = -2$ .

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = 4\sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 1$ .

תשובות סופיות:

$$m = 17 \quad (14)$$

$$m = 4 \quad (15)$$

$$m = 2 \quad (16)$$

## מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  בנקודה בה  $x = -1$ .

(18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{8}{x+1}$  בנקודה בה  $y = 2$ .

(19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = x^2 - 2x - 8$  בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

(20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  ששיפועו 2.

(21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$  בנקודה שבה  $x = 1$ .

(22) נתון כי הישר  $2y - 3x = 3$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = 3\sqrt{x}$ . מצא את נקודת ההשקה.

(23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 1$ .

(24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 4$ .

(25) נתונה הפונקציה הבאה  $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר  $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

(26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$  ששיפועו -2.

(27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$  בנקודה שבה  $x=2$ .

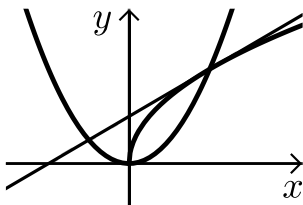
(28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$  היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  זווית של  $135^\circ$ .

(29) מצא את משוואות המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:  $y = x^2$ ,  $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$ .

(30) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$  ונתון הישר:  $y = 2x$ .

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x^2$ .



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה  $g(x)$ .

**תשובות סופיות:**

$$y = 24x + 22 \quad (17)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \quad (18)$$

$$y = 6x - 24, y = -6x - 12 \quad (19)$$

$$y = 2x - 3 \quad (20)$$

$$y = -12x + 9 \quad (21)$$

$$(1, 3) \quad (22)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \quad (23)$$

$$y = 22x - 56 \quad (24)$$

$$\left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ ב. } y = 3x - 1 \text{ א. } (25)$$

$$y = -2x + 8 \quad (26)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8} \quad (27)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (28)$$

$$y = 2x - 1, y = -2x - 1 \quad (29)$$

$$.S = 4\frac{1}{12} \text{ ג.}$$

$$y = -1.5x + 3.5 \text{ ב. } (1, 2) \text{ א. } (30)$$

$$.(-0.5, 0.25) \text{ ג.}$$

$$y = 0.5x + 0.5 \text{ ב. } (0, 0), (1, 1) \text{ א. } (31)$$

## שאלות עם פרמטרים:

### שאלות:

**(32)** שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = ax^2 - 4x$  בנקודה שבה  $x = 3$  הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

**(33)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax}$ ,  $(a > 0)$ .

המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$  הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

**(34)** נתונה הפונקציה:  $y = x^3 + a\sqrt{x}$  ( $a$  פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 5. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

**(35)** נתונה הפונקציה:  $y = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$  ( $A$  פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 2. מצא את ערך הפרמטר  $A$ .

**(36)** הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ .

מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

**(37)** שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  בנקודה שבה  $y = 2$  הוא -4.

מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

**(38)** הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $c$ .

**(39)** הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ .

מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

**(40)** שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  בנקודה  $(1, 6)$  הוא  $-6$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת משוואת המשיק.

**(41)** לאילו ערכי  $k$  ישיק הישר  $y = -5x + 6$  לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$ ?  
 לכל ערך כזה של  $k$  מצא את נקודת ההשקה.

**(42)** הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו.

מצא את  $k$  ואת נקודת ההשקה.

### תשובות סופיות:

**(32)**  $a = 2, y = 8x - 18$

**(33)**  $a = 2$

**(34)**  $a = 4$

**(35)**  $A = 1$

**(36)**  $(-1, 5), y = 4x + 9$

**(37)**  $a = 2, y = -4x - 2$

**(38)**  $a = -\frac{1}{8}, c = 4$

**(39)**  $b = 4, (4, 12)$

**(40)**  $b = 2, a = 6, y = -6x + 12$

**(41)**  $k = 6 : (1, 1)$  או  $k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$

**(42)**  $(1, 1), k = 1.5$

## שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

### שאלות:

43) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. בטא באמצעות  $t$  את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^2 + 1$  בנקודה שבה  $x = t$ .
- ב. מצא את ערכיו של  $t$  אם נתון שהמשיק עובר בנקודה  $(-1, 1)$ .

44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = 5x - x^2$  העוברים דרך הנקודה  $(3, 7)$ .

45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = x^2 + 5x - 6$  העוברים דרך הנקודה  $(0, -10)$ .

46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = 12x - x^3$  העוברים דרך הנקודה  $(2, 24)$ .

47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  העובר בנקודה  $(3, 0)$ .

48) מצא משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$  העוברים דרך הנקודה  $(2, 3)$ .

**תשובות סופיות:**ב.  $t = 0, -2$ .

**(43)**  $y = 2tx - t^2 + 1$  א.

**(44)**  $y = x + 4$  ,  $y = -3x + 16$

**(45)**  $y = 9x - 10$  ,  $y = x - 10$

**(46)**  $y = 12x$  ,  $y = -15x + 54$

**(47)**  $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

**(48)**  $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

**(49)**  $y = -x + 5$

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 13 - הנגזרת של פונקציה מעריכית ושימושיה

תוכן העניינים

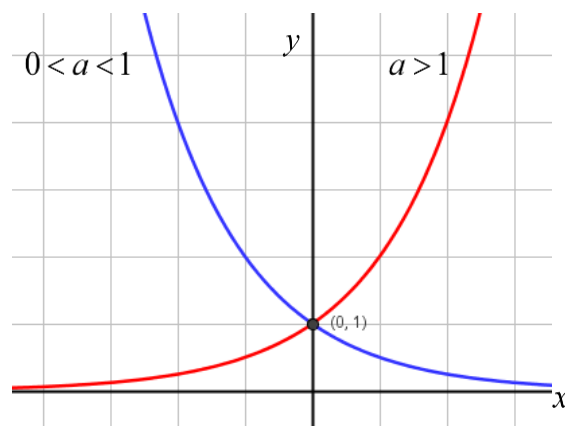
168 .....	1. הנגזרת של פונקציה מעריכית
172 .....	2. שימושי הנגזרת

## הנגזרת של פונקציה מעריכית:

**סיכום כללי:**

**הגדרות כלליות:**

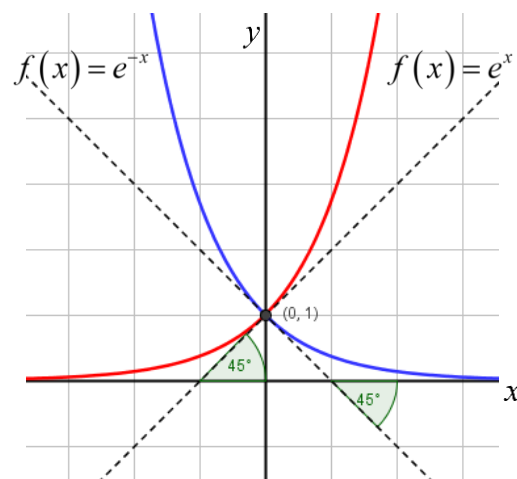
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה:  $f(x) = a^x$   
 עבור:  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :



**תכונות כלליות:**

1. הפונקציות מוגדרות לכל  $x$ .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $y$  בנקודה:  $(0, 1)$ .
4. עבור:  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור:  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות  $f(x) = e^x$  ו-  $f(x) = e^{-x}$  נקבל:



**תכונות נוספות:**

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^{-x}$  בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  הוא -1.

**נגזרות של פונקציות מעריכיות:**

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

**תזכורת - כללי הגזירה:**

מספר כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
1.	$y = a \cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y' = a \cdot f'(x)$
2.	$y = f(x) + g(x)$	סכום פונקציות	$y' = f'(x) + g'(x)$
3.	$y = f(x) \cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4.	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5.	$y = f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

## שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 & \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex \\ \text{ג. } f(x) = 2^{3x} & \text{ד. } f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x} \end{array}$$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = x \cdot e^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = e^{2x} & \text{ב. } f(x) = e^x + 1 \\ \text{ג. } f(x) = e^{\frac{1}{x}} & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)e^x \\ \text{ה. } f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1) & \text{ו. } f(x) = e^{3x-2} \\ \text{ז. } f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x} & \text{ח. } f(x) = x^3 e^{2x} \\ \text{ט. } f(x) = e^{-2x}(x+4) & \text{י. } f(x) = e^{2x+1}(1-x) \\ \text{יא. } f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} & \text{יב. } f(x) = \frac{x^3}{e^{3x}} \\ \text{יג. } f(x) = \frac{2+x^2}{e^{x^2}} & \text{יד. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \\ \text{טו. } f(x) = \frac{x^2+1}{e^{-x}} & \text{טז. } f(x) = \frac{e^x}{1-e^{x+1}} \end{array}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2 \quad \text{ב. } (2x-3)e^{x^2-3x} + e \quad \text{ג. } 3\ln 2 \cdot 2^{3x} \quad \text{ד. } 2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$$

$$(2) \quad \text{א. } (1+x)e^x \quad \text{ב. } 2xe^{4x}(1+2x) \quad \text{ג. } 2^x(1+x\ln 2 + \ln 2)$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{x(2-x)}{e^x} \quad \text{ב. } \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$(4) \quad \text{א. } 30e^{2x}(e^{2x}-1)^2 \quad \text{ב. } \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}} \quad \text{ג. } \frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$$

$$(5) \quad \text{א. } 2e^{2x} \quad \text{ב. } e^x \quad \text{ג. } -\frac{e^{1/x}}{x^2} \quad \text{ד. } (x+1)^2 e^x$$

$$\text{ה. } e^{-x}(-x^2-2x+3) \quad \text{ו. } 3e^{3x-2}$$

$$\text{ז. } \frac{e^x(x-1)}{x^2} \quad \text{ח. } x^2 e^{2x}(3+2x) \quad \text{ט. } -e^{-2x}(2x+7)$$

$$\text{י. } e^{2x+1}(1-2x)$$

$$\text{יא. } \frac{e^{-1/x}}{x^2} \quad \text{יב. } \frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}} \quad \text{יג. } \frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$$

$$\text{יד. } \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} \quad \text{טו. } \frac{(x+1)^2}{e^{-x}} \quad \text{טז. } \frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודה  $A(1, e)$ .
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$  בנקודה שבה  $x = 0$ .
- (8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .
- (9) נתונה הפונקציה:  $y = e^{2x} + 3ex$ .  
 לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה:  $x = 2$ .  
 מצא את משוואת המשיק.
- (10) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$  בנקודה  $(1, 15)$  הוא  $21 \ln 3$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

### תשובות סופיות:

- (6)  $y = ex$
- (7)  $y = 3x + 1$
- (8)  $y = (-e^2 + e)x + e^2$ ,  $y = (e-1)x + e$
- (9)  $y = 2e^4x + 3ex - 3e^4$
- (10)  $b = -1$ ,  $a = 2$

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 14 - הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ושימושיה

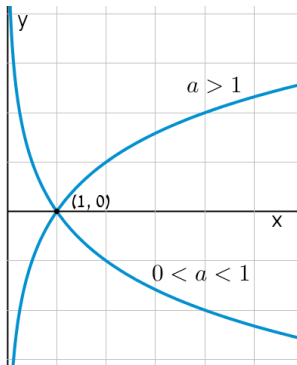
תוכן העניינים

- 173 ..... 1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית
- 178 ..... 2. שימושי הנגזרת

## הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

**סיכום כללי:**

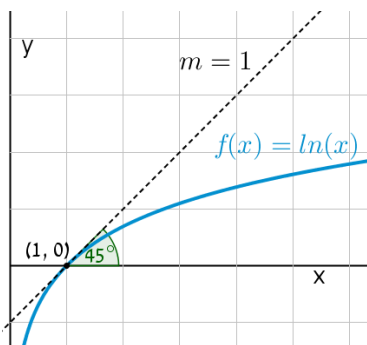
**הגדרות כלליות:**



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה:  $f(x) = \log_a x$  עבור  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :

**תכונות כלליות:**

- לפונקציות תחום הגדרה  $x > 0$ .
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $x$  בנקודה  $(1, 0)$ .
- עבור  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות  $f(x) = \ln x = \log_e x$  נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  הוא 1:

**תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:**

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה:  $y = \log(f(x))$  הוא:  $f(x) > 0$ .

## נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

## שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א.  $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$     ב.  $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג.  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$     ד.  $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה.  $f(x) = \ln(\cos x)$     ו.  $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א.  $f(x) = x \ln x$     ב.  $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$     ג.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד.  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$     ה.  $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א.  $f(x) = \ln^3 x$     ב.  $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג.  $f(x) = x^2 \ln^2 x$     ד.  $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

- |                                  |                                     |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| א. $f(x) = \ln(x+2)$             | ב. $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$   |
| ג. $f(x) = x^2 \ln x$            | ד. $f(x) = x^3 \ln x$               |
| ה. $f(x) = \ln e^{2x}$           | ו. $f(x) = e^x \ln x$               |
| ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$       | ח. $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$        |
| ט. $f(x) = \ln(x^2)$             | י. $f(x) = \ln(x^4)$                |
| יא. $f(x) = (\ln x)^4$           | יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$      |
| יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ | יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$           |
| טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$        | טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ |

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

- |  |  |
|--|--|
| א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$          | ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$          |
| ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$        | ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$  |
| ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$         | ו. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$    |
| ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$           | ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$     |
| ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | י. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$ |
| יא. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$ | יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$         |
| יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$        | יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$ |
| טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$         |  |

## תשובות סופיות:

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \cdot \lambda \quad f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \cdot \text{א.} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3} \cdot \text{ו.} \quad f'(x) = -\tan x \cdot \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \cdot \text{ז.}$$

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \cdot \lambda \quad f'(x) = (3x+1) \left( 6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \cdot \text{ב.} \quad f'(x) = \ln x + 1 \cdot \text{א.} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}} \cdot \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2} \cdot \text{ז.}$$

$$f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1) \cdot \lambda \quad f'(x) = \frac{6 \ln x}{x} \cdot \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} \cdot \text{א.} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3} \cdot \text{ז.}$$

$$x(2 \ln x + 1) \cdot \lambda \quad \frac{2 \ln x + 2}{x} \cdot \text{ב.} \quad \frac{1}{x+2} \cdot \text{א.} \quad (4)$$

$$e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right) \cdot \text{ו.} \quad 2 \cdot \text{ה.} \quad x^2(3 \ln x + 1) \cdot \text{ז.}$$

$$\frac{4}{x} \cdot \text{ד.} \quad \frac{2}{x} \cdot \text{ט.} \quad 4x \ln x \cdot \text{ח.} \quad e^{-x^2} \left( \frac{1}{x} - 2x \ln x \right) \cdot \text{ז.}$$

$$\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} \cdot \text{ג.} \quad \ln x + 1 - \frac{2}{x} \cdot \text{ב.} \quad \frac{4(\ln x)^3}{x} \cdot \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \cdot \text{ז.} \quad \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot \text{ט.} \quad \frac{1}{2x} \cdot \text{ד.}$$

$$\frac{6}{x^2-9} \cdot \text{ג.} \quad \frac{2}{x^2-1} \cdot \text{ב.} \quad -\frac{2}{x(x+2)} \cdot \text{א.}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2} \cdot \text{ו.} \quad \frac{x}{x^2-1} \cdot \text{ה.} \quad \frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1} \cdot \text{ז.}$$

$$\frac{1}{x^2-1} \cdot \text{ט.} \quad \frac{1}{4-2x} \cdot \text{ח.} \quad \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot \text{ז.}$$

$$\frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2} \quad \text{י.ב.}$$

$$\frac{\ln x - 4}{\ln^5 x} \quad \text{ט.ו.}$$

$$\frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2} \quad \text{י.א.}$$

$$\frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x} \quad \text{י.ד.}$$

$$\frac{5}{1 - 25x^2} \quad \text{י.י.}$$

$$\frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)} \quad \text{י.ג.}$$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $A(e, 1)$ .
- (7) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$  בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$  הוא  $\frac{e}{3}$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (8) הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - \ln x$  נחתכים בנקודה  $A$  ברביע הראשון. בנקודה  $A$  העבירו משיק ל- $f(x)$ . מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.
- (9) לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ . מצא את משוואת המשיק.
- (10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \ln(x^2 + 1)$  בנקודה שבה  $x = 1$ .

### תשובות סופיות:

- (6)  $y = \frac{1}{e}x$
- (7)  $a = 2, b = -2$
- (8)  $y = \frac{1}{e}x$
- (9)  $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$
- (10)  $y = \ln 2 \cdot x + x - 1$

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 15 - מספר הפתרונות של משוואה

תוכן העניינים

1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה ..... 179

## מציאת מספר הפתרונות של משוואה

### שאלות

הוכח שלמשוואות בשאלות הבאות יש בדיוק פתרון אחד :

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 = -\ln x \quad (2)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (3)$$

### תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 16 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים.....180

## אינטגרלים מידיים

### שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ):

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4 dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$ ):

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$ ):

$$\int \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \qquad \int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \qquad \int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$\left( \int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

$$\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשב את האינטגרל} \quad (30)$$

$$\left( \int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3) \qquad \frac{x^5}{5} + c \quad (2) \qquad 4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \qquad -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) \qquad \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \qquad -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) \qquad \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \qquad -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) \qquad \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \qquad \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) \qquad \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \qquad \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19) \qquad -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \qquad \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) \qquad \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25) \qquad \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) \qquad x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) \qquad \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) \qquad 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30) \qquad 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33) \qquad \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32) \qquad \frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 17 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 183

## אינטגרלים בשיטת ההצבה

### שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left( \frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left( x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 18 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

- 184 ..... 1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית.
- 185 ..... 2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית.

## אינטגרלים של פונקציה רציונלית

### שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5} |x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

## חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

### שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (5)$$

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 19 - האינטגרל המסוים

תוכן העניינים

186 .....1. האינטגרל המסוים

## האינטגרל המסוים

## שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר, } \int_0^4 f(x) dx \quad (6)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4 + |x-1|} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx \quad (9)$$

(10) נתונה פונקציה רציפה  $f$ . הוכח:

א. אם  $f$  זוגית, אזי  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

ב. אם  $f$  אי-זוגית, אזי  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (11)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (12)$$

### תשובות סופיות

(1) -6

(2)  $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3)  $-2e^{-1} + 1$

(4)  $\frac{1}{5}$

(5)  $\arctan 6 - \arctan 3$

(6)  $\frac{17}{12}$

(7)  $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(8)  $\frac{\pi^2}{4}$

(9)  $\frac{\pi}{4}$

(10) שאלת הוכחה.

(11) 0

(12)  $2 \arctan 4$

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 20 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

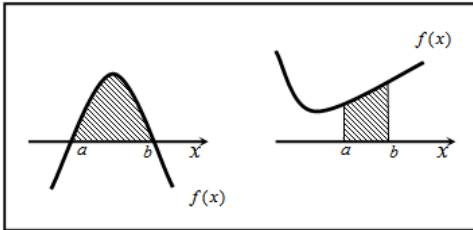
תוכן העניינים

188 ..... 1. חישוב שטחים

## חישוב שטחים

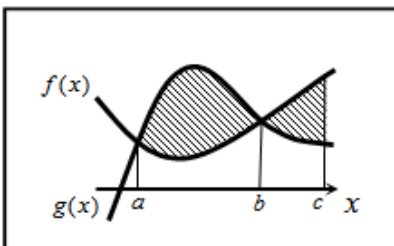
### חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$  :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

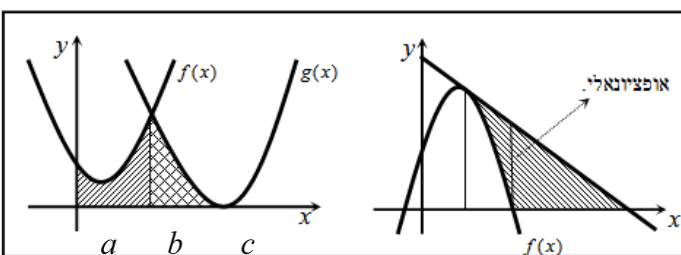


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

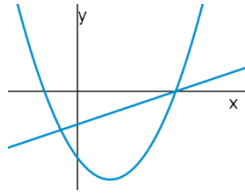
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$  :

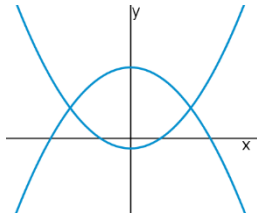


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

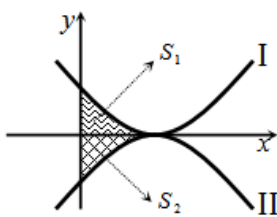
## שאלות



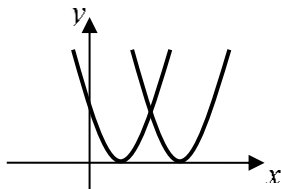
- (1) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 4x - 12$  ו-  $g(x) = x - 6$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .



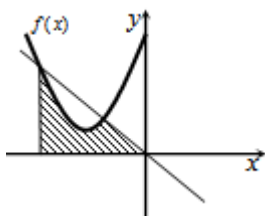
- (2) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = 7 - x^2$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .



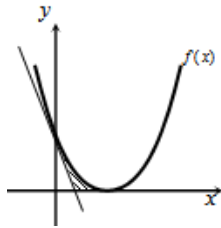
- (3) נתונות הפונקציות  $f(x) = (x-2)^2$  ו-  $g(x) = -(x-2)^2$ ,  
 כמתואר באיור.  
 א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.  
 ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים  
 ב-  $S_1$  ו-  $S_2$ , כמתואר באיור.  
 הראה כי השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$  שווים זה לזה.



- (4) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$ .



- (5) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 + 6x + 12$ .  
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה  
 בנקודה שבה  $x = -4$ , כמתואר באיור.  
 א. מצא את משוואת הישר.  
 ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.  
 ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x = -4$ .



6 נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-2)^2$ .

בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  מעבירים משיק.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$  (השטח המסומן).

### תשובות סופיות

1  $57\frac{1}{6}$  יח"ש.

2  $21\frac{1}{3}$  יח"ש.

3 א.  $f(x) = I$ ,  $g(x) = II$  ב. שאלת הוכחה.

4  $\frac{2}{3}$  יח"ש.

5 א.  $y = -x$  ב.  $(-3, 3)$  ג.  $7\frac{5}{6}$  יח"ש.

6 א.  $y = -4x + 4$  ב.  $(1, 0)$  ג.  $\frac{2}{3}$  יח"ש.

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 21 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים ..... 191

## אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

---

### שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

(24) מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int x^n e^x dx$  באשר  $n$  טבעי.

(25) חשב את  $\int x^4 e^x dx$ .

(26) מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \cos^n x dx$  באשר  $n$  טבעי.

(27) חשב את  $\int \cos^4 x dx$ .

(28) מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \sin^n x dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(29) חשב את  $\int \sin^4 x dx$ .

(30) מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(31) חשב את  $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$ .

(32) חשב את האינטגרלים  $\int e^{ax} \cos bxdx$ ,  $\int e^{ax} \sin bxdx$ .

## תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left( \ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left( -\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left( -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left( \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 22 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

תוכן העניינים

195	1. משפט רול
199	2. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע $[a, b]$
201	3. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע $[0, x]$
202	4. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים עם מספרים
203	5. משפט לגראנז' - שאלות כלליות
206	6. משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי
208	7. משפט דרבו

## משפט רול

### שאלות

- (1) בדוק האם הפונקציה הנתונה,  $f(x)$  בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצא את כל ערכי  $c$  המקיימים את מסקנת משפט רול:
- א.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$   $[0, 2]$
- ב.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$   $[-1, 1]$
- (2) נתון ש-  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ .
- הראה ש-  $f(1) = f(5)$ , אך אין נקודה  $c$ , כך ש-  $f'(c) = 0$ .  
האם הדבר סותר את משפט רול? נמק.
- (3) תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים ב-  $\mathbb{R}$ , ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות,  $x_0, x_1, x_2$ , עבורן  $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$ .  
הוכח שקיים  $c$  ממשי, כך ש-  $f''(c) = 0$ .
- (4) תהי  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה 3 פעמים.  
נניח שלכל  $n$  טבעי מתקיים  $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ .  
הוכח שקיימת  $x_0 \in (0, 1)$ , כך ש-  $f'''(x_0) = 0$ .
- (5) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה 3 פעמים.  
נניח שמתקיים  $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$ .  
הראה שלמשוואה  $f'''(x) = 0$  יש פתרון.
- (6) נתון כי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים.  
נתון בנוסף כי  $f$  פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב-  $x_0 = 2$ .  
הוכח כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

- (7) נתונה פונקציה  $f$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ .  
 תהי  $g$  מוגדרת על ידי  $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ .  
 הראה כי  $g$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ , והוכח כי הנגזרת,  $g'$ , מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע  $(-1, 1)$ .
- (8) הוכח:  
 אם  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$  ו- $f(1) = 0$ , אז הפונקציה  $g(x)$ , המוגדרת על ידי  $g(x) = xf(x)$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ , וישנו פתרון ממשי למשוואה  $g'(x) = 0$ .
- (9) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$  ו- $f(x) > 0$  לכל  $0 < x \leq 1$ .  
 הוכח שקיים  $c \in (0, 1)$ , כך ש- $\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = 2 \frac{f'(c)}{f(c)}$ .
- (10) אם  $(c_i \in \mathbb{R})$   $c_0 + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0$   
 הוכח שלמשוואה  $c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0$  יש לפחות אחד בקטע  $(0, 1)$ .
- (11) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0, f(1) = 1$ .  
 הראה שלמשוואה  $f'(x) = 2x$  קיים פתרון בקטע  $(0, 1)$ .
- (12) תהיינה  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות.  
 נניח שלכל  $x$  ממשי מתקיים  $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$ .  
 הראה שבין כל שני שורשים של  $f$  קיים לפחות שורש אחד של  $g$ .
- (13) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה,  
 כך ש- $f(0) = f(1) = 0$  ו- $f'(0) > 0, f'(1) > 0$ .  
 א. הוכח שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.  
 ב. הוכח שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.  
 ג. הוכח שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע  $(0, 1)$ .

**(14)** ענה על הסעיפים הבאים :א. תהי  $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n$$

חשב את  $f''(0)$ .ב. תהי  $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0) > 0$ .

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq 1 \text{ טבעי } n$$

**(15)** תהי  $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים.

$$f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n$$

חשב את  $f''(1)$ .**(16)** נתון כי  $f, g$  גזירות לכל  $x$  וכי  $f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \neq 0$  ב- $\mathbb{R}$ .הוכח שלמשוואה  $f(x)g(x) = A$  יש לכל היותר פתרון אחד. $A$  קבוע כלשהו.**(17)** נתון כי  $f$  גזירה לכל  $x$  וכי  $f'(x)$  חד-חד ערכית ב- $\mathbb{R}$ .תהי  $x_0$  נקודה כלשהי.הוכח כי לגרף של  $y = f(x)$  ולישר המשיק בנקודה  $x_0$  יש נקודה משותפתאחת ויחידה -  $x_0$ .במילים אחרות: הוכח כי הגרף של  $y = f(x)$  נמצא כולו מעל המשיק או

מתחתיו.

**(18)** נתון כי  $f$  גזירה פעמיים בקטע  $(a, b)$ , ולכל  $x \in (a, b)$  מתקיים

$$(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$$

נתון שלמשוואה  $f'(x) = 0$  יש שלושה פתרונות בקטע.הוכח שלמשוואה  $f(x) = 0$  יש לפחות שני פתרונות בקטע.תן דוגמה לפונקציה  $f$  המקיימת  $(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$ .

**תשובות סופיות**

- (1) א. כן,  $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$       ב. כן,  $2 - \sqrt{3}$
- (2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה  $x = 3$ .
- (14) א. 0      ב. הוכחה.
- (15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a, b]$

---

### שאלות

הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (1)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (2)$$

$$(a < b) \quad (a-b)e^{-a} < e^{-b} - e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (3)$$

$$\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad (4)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (5)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (6)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \frac{\operatorname{arcsinh}(b) - \operatorname{arcsinh}(a)}{b-a} < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (7)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{1-a^2} < \operatorname{arctanh}(b) - \operatorname{arctanh}(a) < \frac{b-a}{1-b^2} \quad (8)$$

$$(0 < a < b) \quad \sqrt[n]{b} \cdot \frac{b-a}{n \cdot b} < \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} \cdot \frac{b-a}{n \cdot a} \quad (9)$$

$$(1 < a < b) \quad \frac{2b(b-a)}{b^2+1} < \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) < \frac{2a(b-a)}{a^2+1} \quad (10)$$

$$(1 < a < b < 3) \quad \ln b - \ln a + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \leq \frac{1}{4}(b-a) \quad (11)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (12)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (13)$$

$$(x < y) \quad |\arctan y - \arctan x| \leq |y - x| \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0, x]$

---

### שאלות

הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) x < \tan x < \frac{x}{\cos^2 x} \quad (1)$$

$$(x > 0) \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (2)$$

$$(0 < x < 1) x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3)$$

$$(x > 0) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{arcsinh}(x) < x \quad (4)$$

$$(0 < x < 1) x < \operatorname{arctanh}(x) < \frac{x}{1-x^2} \quad (5)$$

$$(x > 0) \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (6)$$

$$(x > 0) 1+x < e^x < 1+xe^x \quad (7)$$

$$(x > 0) \sin x \leq x \quad (8)$$

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right) \tan x < 4x \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

---

### שאלות

הוכח את אי-השוויונים הבאים :

$$\frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5 \quad (2)$$

$$\frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט לגראנז' – שאלות כלליות

---

### שאלות

- (1) תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה לכל  $x$ , המקיימת  $|f'(x)| \leq 5$ .  
 ידוע כי  $f(1) = 3$ ,  $f(4) = 18$ .  
 הוכח כי  $f(2) = 8$ .
- (2) תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה לכל  $x$ , המקיימת  $|f'(x)| \leq 7$ .  
 ידוע כי  $f(1) = 3$ ,  $f(4) = 18$ .  
 הוכח כי  $4 \leq f(2) \leq 10$ .
- (3) תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[a, b]$ , ונניח ש- $f(a) = f(b) = 0$ .  
 וכן שקיימת נקודה  $c$ , כאשר  $c \in (a, b)$ , כך ש- $f(c) > 0$ .  
 הוכח שקיימת נקודה  $m$  בקטע  $(a, b)$ , כך ש- $f''(m) < 0$ .
- (4) תהי  $f$  פונקציה גזירה בקטע  $(a, b)$ , כך ש- $f'$  חסומה בקטע  $(a, b)$ .  
 א. הוכח שקיים  $M > 0$ , כך שלכל  $x$  ו- $y$  ב- $(a, b)$  מתקיים:  
 $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$   
 ב. הוכח ש- $f$  רציפה במידה שווה ב- $(a, b)$ .  
 כלומר, הוכח שלכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$ , כך שלכל  $x$  ו- $y$  ב- $(a, b)$ ,  
 המקיימים  $|x - y| < \delta$ , מתקיים  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .
- (5) נניח כי  $f$  רציפה ב- $[0, \infty)$  וגזירה ב- $(0, \infty)$ .  
 כמו כן,  $f(0) = 0$ , ו- $f'$  מונוטונית עולה.  
 א. הוכח כי  $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$  ב- $(0, \infty)$ .  
 ב. הוכח כי  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  מונוטונית עולה ב- $(0, \infty)$ .

**(6)** תהיינה  $f, g$  פונקציות רציפות ב- $[a, \infty)$  וגזירות ב- $(a, \infty)$ .  
נתון כי:  $f(a) = g(a)$  ו- $f'(x) \leq g'(x)$  לכל  $x > a$ .  
הוכח כי:  $f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \geq a$ .

**(7)** נניח כי  $f$  גזירה ב- $(0, \infty)$ .

א. נתון כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ .

הוכח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$ .

ב. נתון כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) > 0$ .

הוכח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

**(8)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתון:  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ ,  $K$  קבוע ממשי.

הוכח:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = K \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = K$ .

ב. ללא שימוש בכלל לופיטל, חשב את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ .

**(9)** נניח כי  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ .

האם נכון לומר כי מתקיים  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ ?

הוכח או הפרך את תשובתך.

הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז', הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

**(10)** תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)| < 1$  לכל  $0 \leq x \leq 1$ .

הוכח שקיים לכל היותר  $c$  אחד ב- $[0, 1]$ , כך ש- $f(c) = c$ .

**(11)** תהי  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x) < 0$  לכל  $0 \leq x \leq 1$ .

הוכח שקיים בדיוק  $c$  אחד ב- $[0, 1]$ , כך ש- $f(c) = c^2$ .

**(12)** תהי  $f$  פונקציה גזירה ב- $[a, b]$ .

הוכח שקיימים  $c_1, c_2, c_3 \in (a, b)$ , כך ש- $c_2 \neq c_3$  ו- $f'(c_1) = \frac{f'(c_2) + f'(c_3)}{2}$ .

**(13)** תהי  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים. נניח שהישר, המחבר את הנקודות  $(0, f(0))$  ו- $(1, f(1))$ , חותך את הגרף של  $f$  בנקודה  $(a, f(a))$ , כאשר  $0 < a < 1$ . הוכח שקיים  $x_0 \in [0,1]$ , כך ש- $f''(x_0) = 0$ .

**(14)** תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה. נניח ש- $f$  גזירה ב- $(a,b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L$ , כאשר  $L \in \mathbb{R}$ . הוכח כי  $f'_+(a) = L$  קיים וש- $f'_+(a) = L$ .

**(15)** תהי  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה שמקיימת  $f(0) = 0$ . נניח שלכל  $x \in [0,1]$  מתקיים  $|f'(x)| \leq |f(x)|$ . הוכח כי  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [0,1]$ .

**(16)** נתון כי  $f$  רציפה בקטע  $[a,b]$  וגזירה בקטע  $(a,b)$ .  
 א. ידוע כי  $f'(x) = 0$  לכל  $x \in (a,b)$ . הוכח כי  $f$  קבועה ב- $[a,b]$ .  
 ב. ידוע כי  $f'(x) = m$  לכל  $x \in (a,b)$ . הוכח כי  $f$  לינארית ב- $[a,b]$ .

**(17)** ענה על הסעיפים הבאים:  
 א. נתון כי  $f, g$  רציפות בקטע  $[a,b]$  וגזירות בקטע  $(a,b)$ . ידוע כי  $f'(x) = g'(x)$  לכל  $x \in (a,b)$ . הוכח כי  $f(x) = g(x) + c$  ב- $[a,b]$ .  
 ב. הוכח כי  $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ .

**(18)** נתון כי  $f$  גזירה בקטע  $(a,b)$ , ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ . הוכח כי  $f'$  לא חסומה בקטע.

## תשובות סופיות

8. ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי

---

### שאלות

(1) הוכח שלכל  $1 \leq a < b$  מתקיים  $n(\ln b - \ln a) < b^n - a^n$ , כאשר  $n \in \mathbb{N}$ .

(2) הוכח, כי עבור כל  $a, b$ , המקיימים  $0 < a < b < 1$ ,

$$\frac{a}{1+a^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\ln b - \ln a} < \frac{b}{1+b^2}$$

מתקיים

(3) הוכח, כי עבור כל  $a, b$ , המקיימים  $1 < a < b$ ,

$$\frac{2\sqrt{b}}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} < \frac{2\sqrt{a}}{1+a^2}$$

מתקיים

(4) הוכח כי  $|\tan y - \tan x| \leq 8|\sin x - \sin y|$  לכל  $x, y \in [0, \frac{\pi}{3}]$ .

(5) הוכח כי  $\arctan x > \ln(1+x)$  לכל  $x \in (0,1)$ .

(6) הוכח שלכל  $x \neq 0$  מתקיים  $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x$ .

(7) תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $[0,1]$  וגזירה ב- $(0,1)$ .

הוכח שבקטע  $(0,1)$  קיים פתרון למשוואה  $f(1) - f(0) = \frac{f'(x)}{2x}$ .

(8) תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $[0,1]$  וגזירה ב- $(0,1)$ , ויהי  $n$  מספר טבעי כלשהו.

הוכח שקיים  $0 < c < 1$ , המקיים  $f(1) - f(0) = \frac{f'(c)}{nc^{n-1}}$ .

(9) יהיו  $a$  ו- $b$  מספרים חיוביים כלשהם.

הוכח שקיים פתרון למשוואה  $(a^3 - b^3)\cos x = 3x^2(\sin a - \sin b)$ .

**(10)** תהי  $f$  פונקציה גזירה ב- $[a, b]$ , כאשר  $a \geq 0$ .

הוכח שקיימים  $c_1, c_2 \in [a, b]$ , כך ש- $\frac{f'(c_1)}{a+b} = \frac{f'(c_2)}{2c_2}$ .

**(11)** תהי  $f$  פונקציה גזירה בקטע  $[a, b]$ , כאשר  $ab > 0$ .

הוכח שלמשוואה  $f'(x) \cdot x - f(x) = \frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}$  קיים פתרון בקטע  $[a, b]$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט דרבו

---

### שאלות

(1) האם קיימת פונקציה גזירה  $f$ , שמקיימת  $f'(x) = \begin{cases} 4x & x < 1 \\ x-1 & x \geq 1 \end{cases}$  ?

(2) האם קיימת פונקציה גזירה  $f$ , שמקיימת  $f'(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$  ?

(3) האם קיימת פונקציה גזירה  $f$ , שמקיימת  $f'(x) = \begin{cases} 4 & x = 0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$  ?

(4) האם קיימת פונקציה גזירה  $f$ , שמקיימת  $f'(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases}$  ?

(5) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, ותהי  $x_0 \in (a, b)$ . הוכח :  
 אם  $f'$  לא רציפה ב- $x_0$ , אז  $x_0$  היא לא נקודת אי-רציפות סליקה.  
 ב. האם קיימת פונקציה  $f$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ ,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי  $f'(x) = \begin{cases} 4 & x = 0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$  ?

(6) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, ותהי  $x_0 \in (a, b)$ . הוכח :  
 אם  $f'$  לא רציפה ב- $x_0$ , אז  $x_0$  היא לא נקודת אי-רציפות מסוג I.  
 ב. האם קיימת פונקציה  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ ,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי  $f'(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 4x & x < 1 \end{cases}$  ?

(7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, ותהי  $x_0 \in (a, b)$ . הוכח:

אם  $f'$  לא רציפה ב- $x_0$ , אז  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \neq \pm\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \neq \pm\infty$ .

כלומר,  $x_0$  היא לא נקודת אי-רציפות מסוג שני, שבה אחד הגבולות החד-צדדיים אינסופי.

ב. האם קיימת פונקציה  $f$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{שהנגזרת שלה נתונה על ידי}$$

(8) האם קיימת פונקציה  $f$ , גזירה ב- $[0, 1]$ ,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{שהנגזרת שלה ב-} [0, 1] \text{ נתונה על ידי}$$

(9) תהי  $f$  פונקציה גזירה ב- $\mathbb{R}$ , ונניח כי  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = f(2) = 1$ .

הוכח שקיים  $x \in (0, 2)$ , שעבורו  $f'(x) = \frac{1}{4}$ .

(10) תהי  $f$  פונקציה גזירה בקטע  $(a, b)$ , ומקיימת  $f'(x) \neq 0$  לכל  $x \in (a, b)$ .

הוכח כי  $f$  מונוטונית בקטע  $(a, b)$ .

(11) ממשפט דרבו נובע, שהנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת את תכונת ערך הביניים (למרות שהנגזרת לא בהכרח רציפה).

האם הנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת גם את משפטי וירשטראס?

הוכח או הפרך את תשובתך.

**תשובות סופיות**

- (1) לא.
- (2) לא.
- (3) לא.
- (4) לא.
- (5) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
- (6) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
- (7) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
- (8) לא.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)