

# מתמטיקה למנהל עסקים



## תוכן העניינים

|      |                                                                    |     |
|------|--------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.   | הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות                                | 1   |
| 27.  | כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים                                | 27  |
| 31.  | פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים                               | 31  |
| 38.  | קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים                                 | 38  |
| 40.  | קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')           | 40  |
| 43.  | קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה             | 43  |
|      | 7. חזרה אלגברית (ללא ספר)                                          |     |
| 44.  | 8. רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים                            | 44  |
| 54.  | 9. חישוב נגזרת של פונקציה                                          | 54  |
| 67.  | 10. כלל לופיטל                                                     | 67  |
| 73.  | 11. חקירת פונקציה                                                  | 73  |
|      | 12. שימושי הנגזרת (ללא ספר)                                        |     |
| 90.  | 13. גבול של פונקציה                                                | 90  |
|      | 14. מטריצות (ללא ספר)                                              |     |
| 101. | 15. פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחים וגופים במרחב | 101 |
| 122. | 16. גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים                      | 122 |
| 129. | 17. נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות                                   | 129 |

# מתמטיקה למנהל עסקים

## פרק 1 - הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות

### תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה ..... 1
9. הרכבת פונקציות ..... 3
10. הפונקציה ההפוכה ..... 6
11. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית ..... 10
12. פונקציה מפוצלת ..... 12
13. תרגילים משולבים ..... 13
14. מבוא לתורת הקבוצות ..... 17

## תחום הגדרה של פונקציה

### שאלות

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$(1) \quad y = x^3 - x^2 - 4x + 1$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$(3) \quad y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x^3 - x}$$

$$(5) \quad y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

$$(6) \quad y = \sqrt{x - 4}$$

$$(7) \quad y = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

$$(8) \quad y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$$

$$(9) \quad y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}}$$

$$(10) \quad y = \ln(x^2 + x - 2)$$

$$(11) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x}$$

$$(12) \quad y = e^{x^2 + x + 1}$$

$$y = \log_x (x + 4) \quad (13)$$

### תשובות סופיות

$$(1) \text{ כל } x.$$

$$(2) \quad x \neq \pm 2$$

$$(3) \text{ כל } x.$$

$$(4) \quad x \neq 0, 1, -1$$

$$(5) \quad x \neq 2, -1$$

$$(6) \quad x \geq 4$$

$$(7) \quad x \leq -2, x \geq 1$$

$$(8) \text{ כל } x.$$

$$(9) \quad -1 < x < 1$$

$$(10) \quad x < -2, x > 1$$

$$(11) \quad x > 0, x \neq 1$$

$$(12) \text{ כל } x.$$

$$(13) \quad x > 0, x \neq 1$$

## הרכבת פונקציות

### שאלות

(1) נתונות הפונקציות  $h(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x - 4$

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות:

א.  $f(g(1))$       ב.  $h(g(f(5)))$       ג.  $f(g(x))$   
 ד.  $h(f(x))$       ה.  $f(f(x))$       ו.  $h(h(x))$

(2) נתון  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשב את  $f(f(x))$  עבור  $x=3$ .

(3) נתון  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשב את  $f(g(x)) + g(f(x))$  עבור  $x=8$ .

(4) נתון  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$

חשב את  $f(g(x))$  עבור  $x=e^2$ .

(5) נתון  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x$

חשב את  $f(g(x))$  עבור  $x=2$ .

(6) נתון  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשב את  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$

### נתונות הפונקציות

(7)  $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$  ו-  $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצא נוסחה עבור ההרכבה  $z(x) = g(f(x))$ .

## 8) נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצא נוסחה עבור ההרכבה  $h(x) = f(g(x))$ .

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$  ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בוודאות?

1.  $n \leq -3$

2.  $n \geq 1$

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

9) נתון  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצא את  $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ Times}}$

## תשובות סופיות

(1) א. -3      ב. 4      ג.  $x^2 - 4$       ד.  $\frac{4}{x-4}$       ה.  $x-8$       ו.  $x$

(2) 3

(3) 69/13

(4) -10

(5) 4

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$n \leq -3 \quad \text{ב.} \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

## הפונקציה ההפוכה

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בשאלות 5-7, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בשאלות 8-10, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצא את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}.$$

האם הפונקציה היא חח"ע?  
מצא את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבע האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3}; \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x}; \quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2}; \quad f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = x^2 - 4; \quad f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ד.}$$

**13** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבע האם הפונקציה הנתונה היא על.

א.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ב.  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ג.  $f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1] \quad h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

**14** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ .

תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.

ב. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע אז  $h$  על.

ג. אם  $f$  ו- $g$  על אז  $h$  על.

ד. אם  $f$  ו- $g$  על אז  $h$  חח"ע.

ה. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על אז  $h$  חח"ע.

ו. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על אז  $h$  על.

ז. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.

ח. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע אז  $h$  על.

**15** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ .

תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . נתון כי  $h$  על.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $f$  חח"ע.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $g$  על.

**16)** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ .

תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ .

נתון כי  $h$  חח"ע.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $g$  על.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $f$  חח"ע.

## תשובות סופיות

- (1)  $f^{-1}(x) = 3x + 1$ , כל  $y$ .
- (2)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $y \neq 1$ .
- (3)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$ ,  $y \neq 3$ .
- (4)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $y \geq -4$ .
- (5) לא חח"ע. תמונה:  $y \leq -2$  או  $y \geq 2$ .
- (6) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq -\frac{1}{4}$ .
- (7) לא חח"ע. תמונה:  $0 \leq y \leq 1$ .
- (8) כן חח"ע. תמונה:  $y > 0$ . פונקציה הפוכה:  $x > 0$ ,  $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .
- (9) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq 2.3$  או  $y \leq -1.3$ .
- (10) כן חח"ע. תמונה:  $y \neq 1$ . פונקציה הפוכה:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$ .
- (11) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ .
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה:  $\mathbb{R}$ ; על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; לא על.  
 ג. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , טווח ותמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; על.  
 ד. תחום הגדרה  $[0, \infty)$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $[-4, \infty)$ ; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח:  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $(0, 1]$ ; לא על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R}$ , טווח ותמונה:  $(0, 1]$ ; על.  
 ג. תחום הגדרה  $(1, \infty]$ , טווח  $(0, 1]$ , תמונה:  $(0, 0.5)$ ; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

## פונקציה זוגית ואי זוגית

### שאלות

מצא איזה מבין הפונקציות בשאלות 1-6 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$(1) \quad y = 4x^3 \quad (2) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (3) \quad y = 1$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x} \quad (5) \quad y = 2^x \quad (6) \quad y = \ln x + x^2$$

(7) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{ונסמן } k(x) = -f(x), \quad z(x) = f(x^2).$$

בדוק, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(8) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{ונסמן } z(x) = -f(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א':  $z(x)$  אי-זוגית.

טענה ב':  $k(x)$  אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{ונסמן } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדוק, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) הוכח כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**תשובות סופיות**

שאלות 1-6: זוגית: 2,3; אי-זוגית: 1,4; כללית: 5,6.

(7)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(8) טענה ב'.

(9)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(10) שאלת הוכחה.

## פונקציה מפוצלת

### שאלות

רשום כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטט את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשב  $f(1)$ ,  $f(4)$ ,  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(7)$ .

ב. שרטט את גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

### תשובות סופיות

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

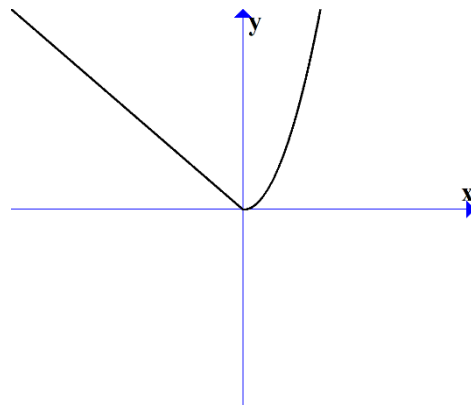
$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{א. } f(1)=1, f(4)=16, f(-4)=4, f(0)=0, f(7)=\text{undefind}$$

ג. הפונקציה כללית.



## תרגילים משולבים

### שאלות

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטט את הפונקציה, וקבע האם היא :

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על  $\mathbb{R}$ .

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבע האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א':  $k(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ב':  $z(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ג':  $h(x) = k(x)z(x)$  זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות,  $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ .

נתון ש- $f$  מונוטונית עולה ממש, ואילו  $g$  מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

איזו טענה נכונה?

א.  $h$  יורדת חלש.

ב.  $h$  עולה ממש.

ג.  $h$  עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד.  $h$  אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

א. מצא את  $h$  בקטע  $[-2,0)$ .

ב. קבע האם  $h$  חח"ע בקטע  $[-2,0)$ .

ג. קבע האם  $h$  חסומה בקטע  $[-2,0)$ .

ד. קבע האם  $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$  היא על.

\* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ .

קבע מי מבין הטענות הבאות נכונה.

$$\text{הפונקציה } h(x) = f(g(x)) \text{ היא:}$$

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = -\lfloor x \rfloor$ .

א. בדוק את מונוטוניות  $z(x) = f(g(x))$ .

ב. בדוק את מונוטוניות  $k(x) = g(f(x))$ .

ג. בדוק האם  $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$  חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב :

אם  $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$  אז הפונקציה  $f$  יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$   
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות :

א. הפונקציה  $f$  עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה  $g$  עולה ממש וחח"ע.

9 מצא את הפונקציה ההפוכה לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,

קבע את תחום הגדרתה והוכח שהפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

הערה : הפונקציה לעיל נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקור את מונוטוניות הפונקציה  $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$ .

הערה : אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכח שהפונקציה חסומה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

## תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.  
 ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א.  $h(x) = x^2$  ב. הפונקציה חח"ע בקטע.  
 ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.  
 ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה  $z(x)$  יורדת חלש. ב. הפונקציה  $k(x)$  יורדת חלש.  
 ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9)  $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  ; תחום הגדרתה: כל  $x$ .
- (10) ראו באתר.
- (11) א.  $-1 \leq x \leq 2$  ב.  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$  ג. שאלת הוכחה.
- ד.  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  עלייה,  $\frac{1}{2} < x \leq 2$  ירידה.

## מבוא לתורת הקבוצות

### סיכום כללי

#### הגדרות יסודיות

- גרירה חד כיוונית  $A \Rightarrow B$  פירושו: אם  $A$  מתקיים אז גם  $B$  מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית  $A \Leftrightarrow B$  (אם ורק אם). פירושו:  $A \Rightarrow B$  וגם  $B \Rightarrow A$ .
- הסימן 'או'  $\vee$ .
- הסימן 'וגם'  $\wedge$ .

#### קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  שייך לקבוצה  $A$  נרשום  $a \in A$ .
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  אינו שייך לקבוצה  $A$  נרשום  $a \notin A$ .

#### שוויון בין קבוצות

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.
- פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא:  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ .

#### הקבוצה ריקה

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב-  $\emptyset$ , כלומר  $\emptyset = \{ \}$ .

#### קבוצה סופית ואינסופית

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

**עוצמה של קבוצה**

מספר האיברים של קבוצה  $A$  נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן  $|A|$ .

**תת-קבוצה**

אם קבוצה  $A$  מוכלת בקבוצה  $B$ , נסמן זאת:  $A \subseteq B$ .

תמיד מתקיים:

$$\bullet A \subseteq A$$

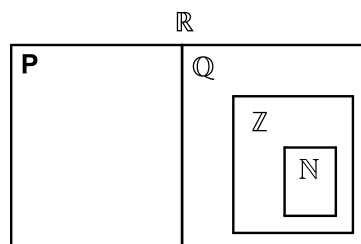
$$\bullet \emptyset \subseteq A$$

עבור שוויון קבוצות נדרוש:  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$  או

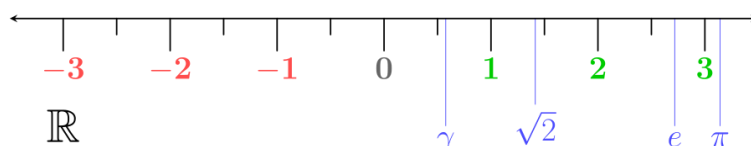
$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

**קבוצות מספרים מיוחדות**

- קבוצת המספרים הטבעיים:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים השלמים:  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים הרציונאליים:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט  $\mathbb{P}$ ).
- קבוצת המספרים הממשיים:  $\mathbb{R}$  (כוללת את  $\mathbb{Q}$  ואת  $\mathbb{P}$ ).

**ציר המספרים**

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



## קטעים על ציר המספרים

| סימון קטעים    | סימון קבוצות                    | תיאור מילולי                                   |
|----------------|---------------------------------|------------------------------------------------|
| $(a, b)$       | $\{x \mid a < x < b\}$          | הקטע הפתוח מ- $a$ ל- $b$ לא כולל נקודות הקצה   |
| $[a, b]$       | $\{x \mid a \leq x \leq b\}$    | הקטע הסגור מ- $a$ ל- $b$ וכולל נקודות קצה      |
| $[a, b)$       | $\{x \mid a \leq x < b\}$       | קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $a$ ולא את $b$ |
| $(a, b]$       | $\{x \mid a < x \leq b\}$       | קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $b$ ולא את $a$ |
| $(a, \infty)$  | $\{x \mid a < x < \infty\}$     | הקרן הפתוחה מ- $a$ עד $\infty$ ללא $a$         |
| $[a, \infty)$  | $\{x \mid a \leq x < \infty\}$  | הקרן הסגורה מ- $a$ עד $\infty$ כולל $a$        |
| $(-\infty, b)$ | $\{x \mid -\infty < x < b\}$    | הקרן הפתוחה מ- $-\infty$ עד $b$ ללא $b$        |
| $(-\infty, b]$ | $\{x \mid -\infty < x \leq b\}$ | הקרן הסגורה מ- $-\infty$ עד $b$ כולל $b$       |

## קבוצת החזקה של קבוצה נתונה

קבוצת כל התת-קבוצות של קבוצה נתונה נקראת קבוצת החזקה של  $A$  ומסומנת  $P(A)$ .

## איחוד וחיתוך קבוצות

- איחוד קבוצות  $A$  ו- $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת  $A \cup B$ .
- חיתוך קבוצות  $A$  ו- $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת  $A \cap B$ .

| תכונות החיתוך                           | תכונות האיחוד                           |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
| $A \cap B = B \cap A$                   | $A \cup B = B \cup A$                   |
| $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| $A \cap A = A$                          | $A \cup A = A$                          |
| $A \cap \emptyset = \emptyset$          | $A \cup \emptyset = A$                  |
|                                         | $A \subseteq A \cup B$                  |

הדיסטריביוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### הפרש קבוצות

ההפרש של שתי קבוצות  $A$  ו- $B$ , המסומן  $A - B$ , הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי  $A$  שאינם איברי  $B$ , כלומר  $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ .

### משלים של קבוצה

ההפרש  $U - A$  מסומן ב- $A^c$  או ב- $A'$  ונקרא **המשלים** של  $A$ , כאשר  $U$  היא הקבוצה האוניברסלית.

### כללי דה-מורגן

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \bullet$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \bullet$$

### דיאגרמת וון

תיאור גרפי של קבוצות ויחסים ביניהם.

## שאלות

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $k$  ו- $n$  טבעיים).

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:  $A = \{x \mid \dots\}$  מקיים תכונה מסוימת

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו :

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ .

מי מבין הטענות הבאות נכונה :

א.  $5 \in A$       ב.  $2 \in A$       ג.  $\{2\} \in A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$       ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$       ו.  $\emptyset \in A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$       ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

י.  $\{2, 4\} \in A$       יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$       יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$       יד.  $\{1, 4\} \in A$

7) מצא שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות :

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות :

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{4, 6, 8, 10\}$ ,  $C = \{3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{6, 7, 8\}$ ,  $E = \{7, 8\}$

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$  :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$

9) הוכח:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

**10** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשום את :

א.  $A \cup B$       ב.  $A \cap B$       ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$       ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**11** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשום את :

א.  $A \cup B$       ב.  $A \cap B$       ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$       ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**12** נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשב את  $(A - B) - C$ .

ב. חשב את  $A - (B - C)$ .

**13** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ ,  $A = \{12, 15, 18\}$ ,  $B = \{13, 15, 17\}$ 

הדגם את כלל דה מורגן  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**14** הוכח את כלל דה מורגן הראשון  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**15** מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 2 \vee x > 4\}$

**16** הצג באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות :

|                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$                    | ב. $A \cup B$                    |
| ג. $A^c$                         | ד. $A \cap B^c$                  |
| ה. $A^c \cap B$                  | ו. $A \cup B^c$                  |
| ז. $A^c \cup B$                  | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ |                                  |

**17** ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח כי  $A \setminus B = A \cap B^c$ .  
 הראה זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.  
 ב. נסמן:  $X = C \setminus (A \cap B)$ ,  $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .  
 הוכח כי  $X = Y$ .  
 ג. נסמן:  $X = A \setminus (B \cup C)$ ,  $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .  
 הוכח כי  $X = Y$ .

**18** תהיינה  $X, Y, Z$  קבוצות כלשהן.

טענה א':  $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ .  
 טענה ב':  $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$ .  
 טענה ג':  $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup Z$ .  
 איזו טענה נכונה לכל בחירה של  $X, Y, Z$ ?

**19** נתונה הקבוצה  $A = \{\emptyset, 4, \{4\}\}$ .

רשמו את  $P(A)$ .

**20** הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית :

א. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \subseteq P(A)$ .  
 ב. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \not\subseteq P(A)$ .

**21** הוכיחו כי:  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש-  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש-  $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$  ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$   
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$  ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים.  
 ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$  ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$   
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות  $A, B$  ו-  $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו-  $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$  ב.  $E, D$  ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) הוכחה.

$$A \cap B = \{4, 6, 8\} \quad \text{ב.} \quad A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{א. (10)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\} \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\} \quad \text{ה.}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{ב.} \quad A \cup B = (-2, 4) \quad \text{א. (11)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1) \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = (0, 4) \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1) \quad \text{ה.}$$

$$\{4, 5, 6\} \quad \text{ב.} \quad \emptyset \quad \text{א. (12)}$$

(13) ללא פתרון.

(14) הוכחה.

$$C^c = [1, 4] \quad \text{ג.} \quad B^c = [1, 4] \quad \text{ב.} \quad A^c = (-\infty, 1) \quad \text{א. (15)}$$

$$D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4] \quad \text{ד.}$$

(16) ראו סרטון.

(17) שאלת הוכחה.

(18) טענה ב.

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\} \quad \text{(19)}$$

(20) הוכחה.

(21) הוכחה.

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 2 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים ..... 27

## כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

### שאלות

(1) נתון:  $x = 2u - v$ ,  $y = u^2 + v^2$ ,  $z = \ln(x^2 - y^2)$   
חשב:  $z_u$ ,  $z_v$

(2) נתון:  $v = 4t + k$ ,  $u = t^2 + 4m$ ,  $z = e^{u-v}$   
חשב:  $z_t$ ,  $z_m$ ,  $z_k$

(3) נתון:  $z = f(x^2 - y^2)$   
הוכח:  $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$

(4) נתון:  $z = f(xy)$   
הוכח:  $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$

(5) נתון:  $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$   
הוכח:  $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$

(6) נתון:  $z = f(x - y, y - x)$   
הוכח:  $z_x + z_y = 0$

(7) נתון:  $w = f(x - y, y - z, z - x)$   
הוכח:  $w_x + w_y + w_z = 0$

(8) נתון:  $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$   
הוכח:  $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$

(9) נתון:  $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$

הוכח:  $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$

(10) נתון:  $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$

הוכח:  $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$

(11) נתון:  $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

הוכח:  $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$

(12) נתון:  $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$

הוכח:  $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$

(13) נתון:  $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$  הוכח:

א.  $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$

ב.  $u_{xy} = u_{yx}$

ג. חשב:  $u_{xy}(1, \pi)$ , אם ידוע ש- $g'(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$ .

(14) נתון:  $y = r \sin \theta$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $u = f(x, y)$

א. הוכח:  $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$

ב. הוכח:  $u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$

ג. הוכח:  $f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$

**15** נתון  $z = h(u, v)$ , ונתון כי  $u = f(x, y)$ ,  $v = g(x, y)$  מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ . הוכח כי:

א.  $u, v$  מקיימות את משוואת לפלס.  
 כלומר,  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  וכן  $v_{xx} + v_{yy} = 0$ .  
 ב. 
$$h_{xx} + h_{yy} = \left( (u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

**16** נתון:  $y = r \sinh s$ ,  $x = r \cosh s$ ,  $u = f(x, y)$ . הוכח כי:

$$(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

**17** פונקציה  $f(x, y)$  תיקרא הומוגנית מסדר  $n$ , אם  $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$ . הוכח כי אם  $f$  הומוגנית, אז:

א.  $x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$   
 ב.  $x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$

**18** נתונה הפונקציה

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה  $(0, 0)$ .  
 ב. נתון  $x = 2t, y = t$ . חשב את  $z'(0)$  באופן ישיר.  
 ג. נתון  $x = 2t, y = t$ . חשב את  $z'(0)$  לפי כלל השרשרת.  
 ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבע האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

## תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

$$-e \quad \text{ג.} \quad (13)$$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad \text{א.} \quad (18) \quad \text{ב.} \quad \frac{4}{5} \quad \text{ג.} \quad 0 \quad \text{ד.} \quad \text{לא דיפרנציאבילית.}$$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 3 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

- 1. פונקציות סתומות - הפן הטכני ..... 31
- 2. שימושים גאומטריים ..... 34

## פונקציות סתומות – הפן הטכני

### שאלות

- (1) מצא את  $y'$ , כאשר  $x^2 + y^5 = xy + 1$ , וחשב את  $y'(0)$ .
- (2) מצא את  $y'(1)$ , כאשר  $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$ .
- (3) מצא את  $y'(e)$ ,  $y''(e)$ , כאשר  $2\ln x + \ln y = 1$ .
- (4) נתון  $(z = z(x, y) \geq 0)$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$  חשב את  $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ .
- (5) נתון  $(y = y(x, z) \geq 0)$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$  חשב את  $y_x(0,0)$ ,  $y_z(0,0)$ .
- (6) נתונה המשוואה  $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$  הוכח כי  $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$ .
- (7) נתון  $(z = z(x, y) \geq 0)$   $z^3 - 2xz + y = 0$  מצא  $z_{xx}(1,1)$ .
- (8) נתונה משוואה  $z^3 - 3xyz = 4$  ונקודה  $(2,1,-2)$ . מצא :
  - א.  $z_{xx}(2,1)$
  - ב.  $z_{xy}(2,1)$
  - ג.  $z_{yy}(2,1)$

$$(9) \quad \begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשב את  $u_x, v_x, u_y, v_y$ .

ב. הראה כי  $u_{xy} = u_{yx}$ .

\*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

$$(10) \quad \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשב את  $w_x, w_y$ .

ב. חשב  $y_x, y_w$ .

$$(11) \quad \begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

הוכח כי  $z''(x) + y''(x) = 0$ .

$$(12) \quad \begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = f(u) \\ -x \sin u + y \cos u = f'(u) \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

הוכח כי:

$$a. \quad (z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$$

$$b. \quad z_{xy} = z_{yx}$$

\*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

## תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

שאלת הוכחה. (6)

$$z_x(1,1) = -16 \quad (7)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, z_{yy}(2,1) = 4 \quad (8)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left( uv \neq \frac{1}{8} \right) \quad (9)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3uv, \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2}(v+u) \quad (u \neq v) \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2uv}{v+u}, \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{2}{3(v+u)} \quad (u \neq \pm v) \quad (11)$$

שאלת הוכחה. (11)

שאלת הוכחה. (12)

## שימושים גאומטריים

### שאלות

- (1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה  $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$  ( $z < 0$ ).  
מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה  $x = -2, y = 1$ .
- (2) מצא משוואה של מישור משיק למשטח  $xyz = 8$  בנקודה  $(-2, 2, -2)$ ,  
וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.
- (3) מצא מישור המשיק למשטח  $x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2$ ,  
המקביל למישור  $x + 8y + 18z = 0$ .
- (4) למשטח  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.  
מישור זה חותך את הצירים  $x, y, z$  בנקודות A, B, C, בהתאמה.  
נסמן:  $O = (0, 0, 0)$ .  
הוכח:  $OA + OB + OC = a$ .  
(למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)
- (5) נתון המשטח  $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$ , ונתונה הנקודה  $(1, 2, -1)$ .  
הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור  $x + 3y - 2z = 10$ .  
בנקודה Q.  
מצא את הנקודה Q.
- (6) הראה שהמשטח  $x^2 - 2yz + y^3 = 4$  מאונך לכל אחד מחברי משפחת  
המשטחים  $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$ , בנקודת החיתוך  $(1, -1, 2)$ .
- (7) מצא משוואת הישר המשיק לעקום  $C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$ ,  
בנקודה בה  $t = \frac{1}{4}\pi$ .

(8) ענה על הסעיפים הבאים :

א. נתון עקום  $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ ,

ונתונה נקודה  $P(x_0, y_0, z_0)$ , המתקבלת מהצבת  $t = t_0$  במשוואת העקום.

הוכח כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

ב. מצא את משוואת המישור הנורמל לעקום

$$C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$$

בנקודה בה  $t = 0.25\pi$ .

(9) נתונות שתי העקומות :

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

נתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח  $S$ , וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור  $xy$ .

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצא את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

(10) נתונות שלוש עקומות :

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

$$C_3: x = u + 2, y = u, z = u^2 - 1$$

נתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח  $S$ , וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור  $xy$ .

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח  $S$ ? נמק!

(11) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח שמשוואת הישר המשיק לעקום :

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה  $P$  שעליו, היא  $\ell: P + t \cdot \nabla F(P) \times \nabla G(P)$ .

ב. בנקודה  $(1, -1, 1)$ , מצא את משוואת הישר המשיק לעקום :

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

12) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח שמשוואת המישור הנורמלי לעקום  $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

בנקודה  $P$  שעליו, היא  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ ,

כאשר  $(a, b, c) = \overrightarrow{\nabla F}(P) \times \overrightarrow{\nabla G}(P)$ .

ב. בנקודה  $(1, -1, 1)$ , מצא את משוואת המישור הנורמלי לעקום :

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , על ידי  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2 + v^2$ .

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה  $(u, v) = (1, 0)$ .

14) מצא ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u$$

$$u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi]$$

באיזה משטח מדובר?

## תשובות סופיות

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (1)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (2)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (3)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (4)$$

$$Q(7, -9, -15) \quad (5)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (6)$$

$$\ell: (x, y, z) = (3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + s(3\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \quad (7)$$

$$3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad (8)$$

$$x - 2z = 1 \quad \text{א.} \quad P(1, -1, 0) \quad \text{ב.} \quad (9)$$

$$\text{א. נקבל שנקודת החיתוך היא } P(1, -1, 0) \quad \text{ב. לא.} \quad (10)$$

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(3, 16, 2) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad (11)$$

$$3x + 16y + 2z = -11 \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad (12)$$

$$-2x + z = -1 \quad \text{כל נקודה, למעט } (0, 0, 0). \quad (13)$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1,} \quad (14)$$

$$\text{שנוסחתו: } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 4 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים ..... 38

## קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

### שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-8,

מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \quad \text{נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4.$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה  $(1, 2, 3)$  למישור  $-2x - 2y + z = 0$ , וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

- 12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק אומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ, ואת הביקוש  $Q_2$  למחשבון בסין, על ידי:  $Q_1 = 144 + 16P_1 - 24P_2$ ,  $Q_2 = 116 - 30P_1 + 20P_2$ . כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים,  $P_1$  ו-  $P_2$ , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

- 13) נתונה הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$ .  
 א. הוכח שהנקודה  $(0, 0)$  היא נק' קריטית.  
 ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבע עבור אילו ערכים של  $a$  הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכל, או שלא ניתן לדעת.

14) מצא שני מספרים,  $b > a$ , כך ש-  $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$  יהיה מקסימלי.

### תשובות סופיות

- 1)  $(-0.5, 1)$  אוכל;  $(1.5, -3)$  מינימום.
- 2)  $(1, 2)$  מינימום;  $(-1, -2)$  מקסימום;  $(-1, 2)$ ,  $(1, -2)$  אוכל.
- 3)  $(0, 0)$  אוכל;  $(1, 1)$  מינימום.
- 4)  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  מינימום;  $(1, 0)$  מקסימום;  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 0)$  אוכל.
- 5)  $(0, 2)$  מקסימום.
- 6)  $(4, 4)$  מקסימום.
- 7)  $(-0.5, 4)$  מקסימום.
- 8) אין נקודות קריטיות.
- 9)  $z = 4$ ,  $z = 3$
- 10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- 11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(1/3, 4/3, 10/3)$ .
- 12)  $P_1 = 10\$$ ,  $P_2 = 12\$$  רווח מקסימלי 288\$.
- 13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור  $a = 2$ ,  $a = -2$ , לא ניתן לדעת;  $a > 2$ ,  $a < -2$  אוכל;  $-2 < a < 2$  מינימום.
- 14)  $a = -6$ ,  $b = 4$

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 5 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ.....40

## קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

### שאלות

בשאלות 1-4 מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$$

$$(2) \quad f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(3) \quad f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$(4) \quad f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$$

$$(5) \quad \text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12, \text{ כאשר } x, y > 0.$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \quad \text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \text{ כאשר } x, y \geq 0.$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12,$$

מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$(8) \quad \text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצא את הנקודות}$$

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית

הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \quad \text{מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0,$$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax + by + c = 0, \text{ הוא } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- 10** מוישליה קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל,  $(x, y)$ , נתונה על ידי  $u(x, y) = \ln x + \ln y$ . מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח. מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$ , והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישליה.
- 11** דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל  $(x, y)$  נתונה על ידי  $u(x, y) = xy$ . מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח. לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.
- 12** עקומת התמורה בין מנגו,  $(x)$ , ואננס,  $(y)$ , היא  $x^2 + y^2 = 13$ . לדני תועלת  $f(x, y) = 4x + 6y$ . דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$ , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.
- 13** ליצרן פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ . המחירים ליחידת  $K$  ו- $L$  הם  $P_K = 2$ ,  $P_L = 1$ . היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף  $(K^*, L^*)$ , המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).
- 14** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ  $\max\{u(x, y)\} \text{ s.t. } p_1x + p_2y = I$ . תהי  $(x^*, y^*)$  נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה. הוכיחו כי כופל לגראנז'  $\lambda$  מקיים  $\lambda = \frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$  בנקודת הפתרון של הבעיה.

### תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$(6, 2) \quad (7)$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (8)$$

$$7 / \sqrt{45} \quad (9)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (10)$$

$$\max(6, 2) \quad (11)$$

$$\max(2, 3) \quad (12)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13)$$

$$(14) \text{ שאלת הוכחה.}$$

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 6 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה. .... 43

**קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה****שאלות**

- (1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם  $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$ .
- (2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם  $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$ .
- (3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא העיגול  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
- (4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור  $R = \{(x, y) | x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$ .
- (5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור  $R = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$ .

**תשובות סופיות**

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט  $\frac{33}{4}$ . מינימום מוחלט  $-\frac{1}{4}$ .
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט  $1 + 6\sqrt{10}$ . מינימום מוחלט  $1 - 6\sqrt{10}$ .

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 7 - חזרה אלגברית

תוכן העניינים

1. חזקות ומשוואות מעריכיות ..... (ללא ספר)
2. לוגריתמים ..... (ללא ספר)
3. פתרון משוואות ממעלה שלישית ומעלה ..... (ללא ספר)
4. חילוק פולינומים ..... (ללא ספר)
5. אי-שוויונים ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 8 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

|    |                                                  |
|----|--------------------------------------------------|
| 44 | 1. רציפות של פונקציה                             |
| 48 | 2. משפט ערך הביניים                              |
| 51 | 3. שיטת החצייה                                   |
| 52 | 4. תכונות נוספות של פונקציות רציפות – רמה מתקדמת |

## רציפות של פונקציה

### שאלות

בשאלות 1-2 בדוק את רציפות הפונקציות בנקודות התפר"י שלהן, ושרטט גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3) \quad \text{נתונה הפונקציה:}$$

א. בדוק את רציפות הפונקציה בנקודות התפר שלה.

ב. עבור כל נקודת אי רציפות, קבע מאיזה סוג היא.

בשאלות 4-7: מה צריך להיות הערך הקבוע של  $k$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל  $x$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (5) \quad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (6)$$

הערה: שאלה 7 ניתן לפתור רק לאחר שלומדים את כלל לופיטל.

<sup>1</sup> נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

מה צריכים להיות הערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$  בשאלות 8-10, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלות 9-10 ניתן לפתור רק לאחר שלומדים את כלל לופיטל.

(11) הוכח או הפרך:

- סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

(12) ידוע ש- $f$  רציפה ו- $g$  לא רציפה.

האם  $f+g$  רציפה? הוכח את טענתך.

**(13)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$ .

הוכח או הפרך :

- א. הפונקציה  $f$  חסומה לכל  $x$ .
- ב. הפונקציה  $f$  רציפה לכל  $x$ .
- ג. הפונקציה  $f$  מונוטונית לכל  $x$ .
- ד. הפונקציה  $f$  זוגית או אי-זוגית לכל  $x$ .

**(14)** תהי  $f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$ .

- א. שרטטו את גרף הפונקציה.
- ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).
- ג. תהי  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ , ותהי  $f(x)$  מוגדרת וחיובית לכל  $x$ .
- האם ההרכבה  $g(f(x))$  בהכרח רציפה לכל  $x$ ?

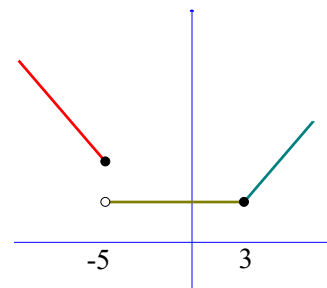
**(15)** תהי  $f$  פונקציה חסומה בקטע  $(0,1)$ .

תהי  $g$  הפונקציה המוגדרת בקטע  $(0,2)$ , על ידי  $g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ .

- א. האם יתכן שהנקודה  $x_0 = 1$  היא נקודת אי-רציפות סליקה של  $g$ ? נמק.
- ב. האם  $g$  חסומה בקטע  $(0,2)$ ? נמק.

## תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) א. רציפה בנקודה  $x=1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ . ב. סליקה.
- (4)  $k=1$
- (5)  $k=4$
- (6)  $k=\frac{2}{3}$
- (7)  $k=-1$
- (8)  $a=2, b=1$  או  $a=1, b=2$
- (9)  $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (10)  $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.
- (14) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל  $x \neq -5$ . ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (15) א. לא. ב. כן.

## משפט ערך הביניים

### שאלות

בשאלות 1-3 הוכח שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד :

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 4-5 הוכח שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות :

$$(4) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(5) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(6) מצא קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה  $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$  יש פתרון.

$$(7) \quad \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}.$$

א. חשב את  $f(0)$  ,  $f(2)$  .

ב. האם ניתן להסיק, לפי משפט ערך הביניים, שלמשוואה  $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע  $(0, 2)$  ?

(8) תהיינה  $f, g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$ , המקיימות :

$$f(a) < g(a), f(b) > g(b).$$

הוכח שקיימת נקודה  $a < c < b$ , שבה  $f(c) = g(c)$  .

9) נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור  $[a, b]$ , שהוא חלקי לתחום הגדרתה. נניח ש-  $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ .

הוכח כי קיימת נקודה  $c \in [a, b]$ , כך ש-  $f(c) = c$ .  
נקודה  $c$  כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.

10) נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .  
הוכח כי קיימת נקודה  $c \in [0, 1]$ , כך ש-  $f(c) = c^{1.5}$ .

11) נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $f(0) = f(1)$ .  
א. הוכח כי קיימת נקודה  $c \in [0, 0.5]$ , כך ש-  $f(c) = f(c + 0.5)$ .  
ב. הוכח כי קיימות נקודות  $c, d \in [0, 1]$ , כך ש-  $f(c) = f(d)$ .

12) נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $f(0) < f(2) < f(1)$ .  
הוכח כי קיימים  $c_1, c_2 \in [0, 2]$ , כך ש-  $f(c_1) = f(c_2)$ .

13) נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $f(0) = f(8)$ .  
הוכח כי קיימות נקודות  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$ , כך ש-  
 $f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$ .

14) יהיו  $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$  קבועים המקיימים  $a_1 + \dots + a_n = 1$ .  
הוכיחו כי למשוואה  $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$  יש לפחות פתרון אחד.

15) יהי  $P$  פולינום ממעלה זוגית, מהצורה  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ ,  
ונניח כי  $a_0 < 0$ .

הוכח כי ל-  $P$  ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

16) יהיו  $f, g$  פונקציות רציפות המקיימות:  
 $0 < k \in \mathbb{R}$  כאשר  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$ .  
הוכח כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה  $f(x) = g(x)$ .

**17) ענה על הסעיפים הבאים :**

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ , ותהיינה  $x_1, \dots, x_n$  (כאשר  $n > 1$ )

נקודות כלשהן ב- $(a, b)$ .

הוכח שקיימת נקודה  $c$  בקטע  $(a, b)$ ,

$$\text{כך ש-} f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n)).$$

ב. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ .

האם לכל  $c \in (a, b)$ , ניתן למצוא נקודות  $x_1, \dots, x_n$ , שונות זו מזו,

$$\text{כאשר } n > 1, \text{ כך ש-} f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n)) ?$$

הוכח את תשובתך.

### תשובות סופיות

$$[0, 1] \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{א. } f(0) = -1, f(2) = 5. \quad \text{ב. לא.}$$

שאלות 1-5 ושאלות 8-17 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## שיטת החצייה

### שאלות

- (1) נתונה המשוואה  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ .  
 בעזרת שיטת החצייה בקטע  $[-2, 3]$ , מצא שורש מקורב של המשוואה על ידי  
 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?
- (2) נתונה המשוואה  $x^3 - x - 2 = 0$ .  
 א. מצא קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.  
 ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של  
 השורש בדיוק של 0.001?  
 ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.  
 הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

### תשובות סופיות

- (1) 0.07  
 (2) א.  $[1, 2]$  ב. 10 ג.  $x = 1.520$

## תכונות נוספות של פונקציות רציפות – רמה מתקדמת

### שאלות

- 1) קבע בכל סעיף, האם הטענה נכונה או לא נכונה. הוכח את תשובתך.  
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע  $[0,1]$ , שהיא :
  - א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
  - ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
  - ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
  - ד. חסומה, אבל לא רציפה.
  - ה. רציפה, אבל לא חסומה.
  - ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
  - ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
  - ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
  - ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
  - י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
  - יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע  $[0,1]$ , על ידי  $f$ , היא קטע.
- 1) תהי  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(x) > 0$ , לכל  $x \in [a,b]$ . הוכח שקיים  $\alpha > 0$ , כך ש-  $f(x) \geq \alpha$ , לכל  $x \in [a,b]$ .
- 2) תהי  $f:[0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה. נניח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  קיים. הוכח ש-  $f$  חסומה.
- 3) תהי  $f:[0,1] \rightarrow (0,1)$  פונקציה על. הוכח ש-  $f$  לא רציפה ב-  $[0,1]$ .

(4) תהי  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בקטע  $(a, b)$ , ונניח שקיים קבוע ממשי  $K$ , כך שלכל שתי נקודות,  $x_1$  ו- $x_2$ , בקטע  $(a, b)$ , מתקיים **תנאי ליפשיץ**:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$$

הוכח כי  $f(x)$  רציפה בקטע  $(a, b)$ .  
\* נסה להוכיח בשתי דרכים שונות.

(5) הוכח או הפרך:

א. אם  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ .

ב. אם  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ .

(6) הוכח: אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , בה  $f$  חסומה.

## תשובות סופיות

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 9 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| 1. כללי הגזירה              | (ללא ספר) |
| 2. תרגול בכללי הגזירה       | 54        |
| 3. תרגילים נוספים לפי סוגים | 57        |
| 4. גזירה סתומה              | 60        |
| 5. כלל השרשרת               | 62        |
| 6. גזירה לוגריתמית          | 65        |
| 7. נגזרת הפונקציה ההפוכה    | 66        |

## תרגול בכללי הגזירה

## שאלות

גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 22-24 מצא רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$y = x^{\sqrt{x}} \quad (21) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (24) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (23) \quad y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (22)$$

## תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} (\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (20)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right) \quad (21)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (22)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x\right) \quad (23)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (24)$$

## תרגול נוסף בכללי הגזירה

### שאלות

#### הנגזרת של פונקציית חזקה

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

|                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$             | ב. $f(x) = x^7$             | ג. $f(x) = x^2$             |
| ד. $f(x) = x^1$             | ה. $f(x) = x^{-3}$          | ו. $f(x) = x^{-1}$          |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

#### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

|                           |                              |                                       |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$          | ב. $f(x) = 3x^7$             | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$            |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x^1$             | ו. $f(x) = 3x^{-2}$                   |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$   | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

#### הנגזרת של קבוע

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

|                |                         |
|----------------|-------------------------|
| א. $f(x) = 12$ | ב. $f(x) = \frac{7}{8}$ |
|----------------|-------------------------|

#### הנגזרת של סכום והפרש

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

|                                 |                                                                         |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|

## הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = (5x-2)^3$     ב.  $f(x) = (x^3+6)^5$     ג.  $f(x) = 3(x-x^2)^2$

ד.  $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$     ה.  $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

## הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \frac{3}{x}$     ב.  $f(x) = \frac{2}{x}$     ג.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$     ד.  $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה.  $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$     ו.  $f(x) = \frac{2}{3-x}$     ז.  $f(x) = \frac{6}{x+5}$

## הנגזרת של מכפלה

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = (5x+1)(x-3)$

ב.  $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג.  $f(x) = x^3(6-x)^4$

## הנגזרת של מנה

(8) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$     ב.  $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$     ג.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד.  $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$     ה.  $f(x) = \frac{1}{x}$     ו.  $f(x) = \frac{3}{x^3}$

## הנגזרת של שורש

(9) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sqrt{x}$     ב.  $f(x) = 4\sqrt{x+1}$     ג.  $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד.  $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$     ה.  $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$     ו.  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

## תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 3x^2 & \text{ב. } f'(x) = 7x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x \\ \text{ד. } f'(x) = 1 & \text{ה. } f'(x) = 3x^{-4} & \text{ו. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \text{ז. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ח. } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

(1)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 6x^2 & \text{ב. } f'(x) = 21x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x^3 \\ \text{ד. } f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ה. } f'(x) = 8 & \text{ו. } f'(x) = -\frac{6}{x^3} \\ \text{ז. } f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ח. } f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \end{array}$$

0. ב.

0. א. (2)

$$\text{א. } f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{ב. } f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{א. } f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{ב. } f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = 6(x - x^2)(1 - 2x) \quad \text{ד. } f'(x) = -\frac{3}{4}(5 - x)^2 \quad \text{ה. } f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3}$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ד. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2}$$

$$\text{א. } f'(x) = 10x - 14 \quad \text{ב. } f'(x) = (5x+1)^2(20x-44)$$

$$\text{ג. } f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x)$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

## גזירה סתומה

### שאלות

- 1) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^2 + y^5 - 1 = 1$ .
- 2) גזור את הפונקציה הסתומה:  $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$ .
- 3) גזור את הפונקציה הסתומה:  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ .
- 4) מצא את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , בנקודה  $(3, 4)$ .
- 5) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$ , דרך הנקודה  $(1, 1)$ .
- 6) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$  – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 7) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$  – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 8) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$ , דרך הנקודה  $(0, 2)$  – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 9) נתונה הפונקציה הסתומה  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$ .  
 א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן  $y = 0$ .  
 ב. מצא את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שמצאת בסעיף א.
- 10) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^y - xy = 10$ .
- 11) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^y - y^x = 1$ .
- 12) נתונה פונקציה סתומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ . מצא את ערך  $y^n$  בנקודה בה  $y = 1$ .

**(13)** נתון כי המשוואה  $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$

מגדירה את  $y = y(x)$  כפונקציה סתומה של  $x$ .

נתון כי  $h(y)$  גזירה ברציפות ויורדת.

הוכיחו כי  $y(x)$  יורדת חזק.

### תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

**(9)** א.  $(0,0), (1,0)$  ב. בראשית הצירים:  $y = -x$ , המשוואה השנייה:  $y = x - 1$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

$$-1 \quad (12)$$

**(13)** הוכחה.

## כלל השרשרת

## שאלות

- (1) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(4) = 10$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f(x^2)$ .  
חשב את  $g'(2)$ .

- (2) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(2) = 4$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
א. חשב את  $g'(0.5)$ .

ב. נתון בנוסף כי  $f$  עולה. הוכח כי  $g$  יורדת.

- (3) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(1) = e$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = x^2 + f(\ln x)$ .  
א. חשב את  $g'(e)$ .

ב. הוכח שהפונקציה  $g$  עולה בנקודה  $x = e$ .

ג. חשב את הגבול  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$ .

- (4) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(1) = e$ ,  $f(1) = -2$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f^2(\ln x)$ .  
א. חשב את  $g'(e)$ .

ב. האם  $g$  עולה או יורדת, בנקודה  $x = e$ ?

ג. נתון כי  $f$  שלילית ועולה. מה ניתן לומר על  $g$ ?

(5) נתונה פונקציה,  $f(x)$ , יורדת וחיובית.

נגדיר פונקציה חדשה  $g(x) = \sqrt{f(x^2 + 4)}$

מי מהבאים נכון?

א.  $g$  עולה לכל  $x$ .

ב.  $g$  יורדת לכל  $x$ .

ג.  $g$  עולה לכל  $x > 0$ .

ד.  $g$  יורדת לכל  $x > 0$ .

(6) נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$

ידוע כי  $f(10) = f'(10) = 4$ . חשב  $g'(100)$ .

(7) נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

ידוע כי  $f'(1) = 4$ ,  $f(1) = 1$ . חשב  $g'(1)$ .

(8) נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$

ידוע כי  $f'(0) = 1$ ,  $f(0) = 2$ . חשב  $g'(1)$ .

(9) נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$

ידוע כי  $f'(4) = 2$ ,  $f(4) = 1$ . חשב  $g'(1)$ .

(10) נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$

ידוע כי  $f'(1) = 4$ ,  $f(1) = 1$ . חשב  $g'(1)$ .

## תשובות סופיות

- |                |                 |               |
|----------------|-----------------|---------------|
|                |                 | 40 (1)        |
|                | א. -16          | ב. הוכחה. (1) |
| ג. $2e+1$      | א. $2e+1$       | ב. הוכחה. (2) |
| ג. $g'(x) < 0$ | א. -4           | ב. יורדת. (3) |
|                | ד               | (4)           |
|                | $\frac{17}{80}$ | (5)           |
|                | 36              | (6)           |
|                | $\frac{8}{9}$   | (7)           |
|                | 44              | (8)           |
|                | -2              | (9)           |

## גזירה לוגריתמית

### שאלות

גזור את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt[10]{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left( \sqrt[4]{10x+1} \right)^{2x} \quad (1)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (2)$$

### תשובות סופיות

$$y' = y \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left( (10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[ 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[ 3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

## נגזרת הפונקציה ההפוכה

### שאלה

הוכח, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 10 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף ..... 67
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף ..... 69
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף ..... 70
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף ..... 71
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל ..... 72

## גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

### שאלות

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ ו- } \frac{0}{0} \text{ גבולות מהצורה}$$

חשב את הגבולות בשאלות 1-3 (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשב את הגבולות בשאלות 4-8 (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשב את הגבולות בשאלות 9-12 (פונקציות חזקות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשב את הגבולות בשאלות 13-15 (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשב את הגבולות בשאלות 16-20 (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (20)$$

### תשובות סופיות

|                        |        |                     |                     |                    |
|------------------------|--------|---------------------|---------------------|--------------------|
| $\frac{1}{6}$ (5)      | 4 (4)  | $n-1$ (3)           | $\frac{20}{17}$ (2) | $\frac{5}{6}$ (1)  |
| $\ln \frac{a}{b}$ (10) | 1 (9)  | $-\frac{3}{2}$ (8)  | $\frac{5}{6}$ (7)   | $\frac{3}{2}$ (6)  |
| 1 (15)                 | 2 (14) | $-\frac{1}{2}$ (13) | $\frac{1}{6}$ (12)  | $\frac{1}{2}$ (11) |
| 0 (20)                 | 0 (19) | $\infty$ (18)       | $\frac{1}{2}$ (17)  | $\frac{1}{2}$ (16) |

## גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה  $\infty \cdot 0$

חשב את הגבולות בשאלות 1-7:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( \frac{x+3}{x-3} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (7)$$

### תשובות סופיות

|       |                   |       |              |
|-------|-------------------|-------|--------------|
| 0 (4) | 0 (3)             | 0 (2) | $\infty$ (1) |
|       | $\frac{5}{2}$ (7) | 6 (6) | 0 (5)        |

## גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה  $\infty - \infty$

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (4)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

## גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה:  $1^{\pm\infty}$ ,  $0^{\pm\infty}$ ,  $\infty^0$

חשב את הגבולות בשאלות 1-4:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, \quad (a > 0) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} \quad (4)$$

### תשובות סופיות

$$e \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

## מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

### שאלות

הגבולות בשאלות 1 ו-2 הם מן הסוג  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ .

הראה זאת והסבר מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים. לבסוף, חשב את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

### תשובות סופיות

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

# מתמטיקה למנהל עסקים

## פרק 11 - חקירת פונקציה

### תוכן העניינים

|                                             |           |
|---------------------------------------------|-----------|
| 1. מושגי יסוד                               | (ללא ספר) |
| 2. חקירת פולינום                            | 73        |
| 3. חקירת פונקציה רציונלית                   | 75        |
| 4. חקירת פונקציה מעריכית                    | 79        |
| 5. חקירת פונקציה לוגריתמית                  | 82        |
| 6. חקירת פונקציה עם שורשים                  | 86        |
| 7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט | 87        |

## הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים :
  - תחום הגדרה ורציפות.
  - נקודות חיתוך עם הצירים.
  - זוגיות ואי-זוגיות.
  - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
  - תחומי עלייה וירידה.
  - נקודות קיצון.
  - תחומי קמירות וקעירות.
  - נקודות פיתול.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קמורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

## חקירת פולינום

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

## תשובות סופיות

(1) תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  ו- $9$ .

נקודות קיצון: מינימום:  $(9, 0)$ , מקסימום:  $(3, 108)$ .

תחום עלייה:  $x < 3$  or  $x > 9$ , ירידה:  $3 < x < 9$ .

תחום קמירות:  $x > 6$ , קעירות:  $x < 6$ .

נקודת פיתול:  $(6, 54)$ .

(2) תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  ו- $2$ .

נקודות קיצון: מינימום:  $\left(1.5, \frac{-27}{16}\right)$ .

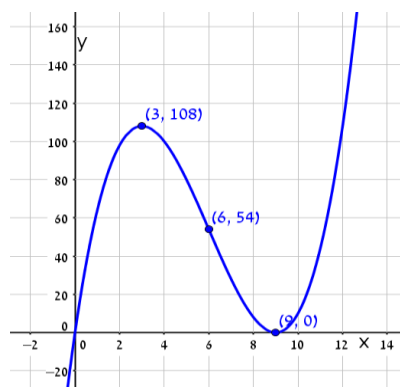
תחום עלייה:  $x > 1.5$ , ירידה:  $x < 1.5$ .

תחום קמירות:  $x > 1$  or  $x < 0$ , קעירות:  $0 < x < 1$ .

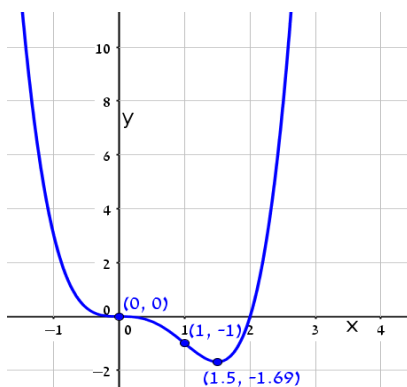
נקודות פיתול:  $(1, -1)$ ,  $(0, 0)$ .

## גרפים

(1)



(2)



## חקירת פונקציה רציונלית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

### הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת  $y = x - 1$ .

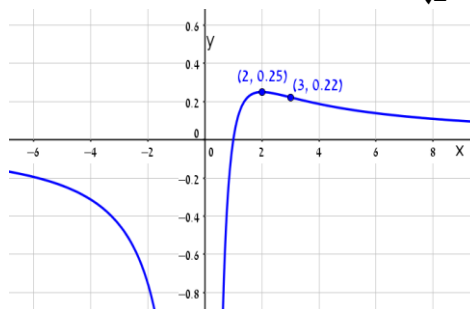
## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(2, 0.25)$ . נקודת פיתול:  $\left(3, \frac{2}{9}\right)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 2$ , ירידה:  $x > 2$  or  $x < 0$ .  
תחום קמירות:  $x > 3$ , קעירות:  $0 < x < 3$  or  $x < 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq -1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = -1$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 2$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מינימום:  $(0, 0)$ . נקודת פיתול:  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$ .  
תחום עלייה:  $x < -1$  or  $x > 0$ , ירידה:  $-1 < x < 0$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < \frac{1}{2}$  or  $x < -1$ , קעירות:  $x > \frac{1}{2}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq \pm 2$ . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x = 2$ ,  $x = -2$ , משופעת: הישר  $y = x$  ב- $\pm\infty$ ,  
אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$ , מקסימום:  $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$ .  
תחום עלייה:  $x < -\sqrt{12}$  or  $x > \sqrt{12}$ , ירידה:  $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$ ,  $x \neq \pm 2$ .  
נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-2 < x < 0$  or  $x > 2$ , קעירות:  $0 < x < 2$  or  $x < -2$ .
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq -1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = -1$ , משופעת: הישר  $y = x - 2$  ב- $\pm\infty$ ,  
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$ .  
תחום עלייה:  $x < -3$  or  $x > -1$ , ירידה:  $-3 < x < -1$ .  
נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$ , קעירות:  $-1 < x < 0$  or  $x < -1$ .

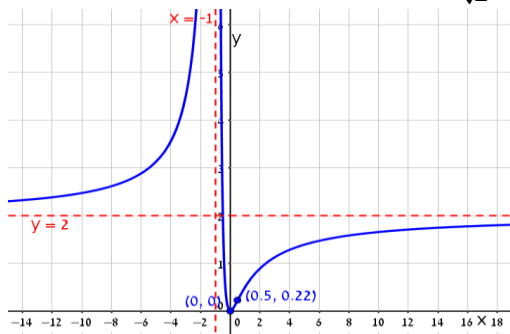
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ :  $-1$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=1$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.  
נקודות פיתול:  $(-1, 0)$ ,  $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$ .  
תחום קמירות:  $-3 < x < -1$  &  $x > 1$ , קעירות:  $-1 < x < 1$  or  $x < -3$ .  
(6) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 2$ ,  $x \neq 5$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{1}{10}$ , עם ציר ה- $x$ :  $\pm 1$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=5$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(2.78, -3.88)$ , מינימום:  $(0.36, -0.11)$ .  
תחום עלייה:  $0.36 < x < 2$  or  $2 < x < 2.78$ ,  
ירידה:  $x < 0.36$  or  $2.78 < x < 5$  or  $x > 5$ . נקודת פיתול:  $(-1, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < 2$  or  $x > 5$ , קעירות:  $2 < x < 5$  or  $x < -1$ .  
(7) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq \pm 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{3}{4}$ , עם ציר ה- $x$ :  $x=1$ ,  $x=3$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=-2$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.  
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.  
נקודת פיתול:  $(0.85, -0.09)$ .  
תחום קמירות:  $0.85 < x < 2$  or  $x < -2$ , קעירות:  $-2 < x < 0.85$  or  $x > 2$ .  
(8) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$ .  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$ .  
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר  $x=-1$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(-2, -4)$ , מינימום:  $(0, 0)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $-2 < x < -1$  or  $-1 < x < 0$ .  
נקודת פיתול: אין.  
תחום קמירות:  $-1 < x < 1$  or  $x > 1$ , קעירות:  $x < -1$ .

## גרפים

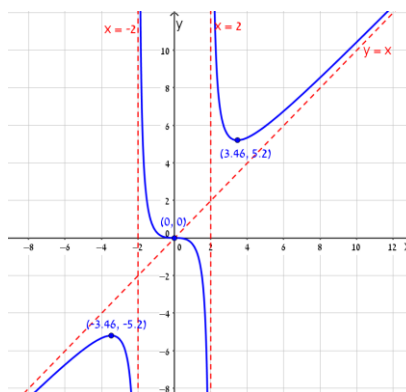
(1



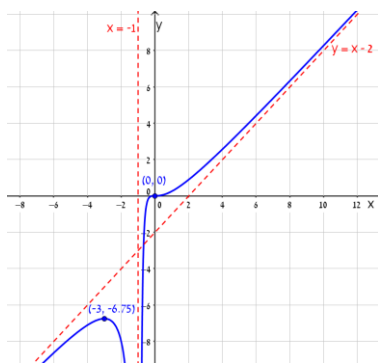
(2



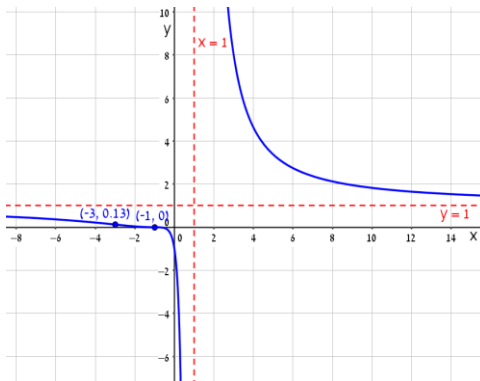
(3



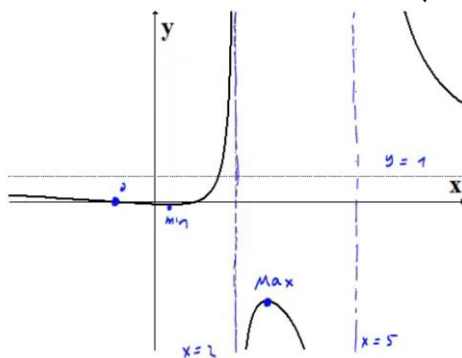
(4



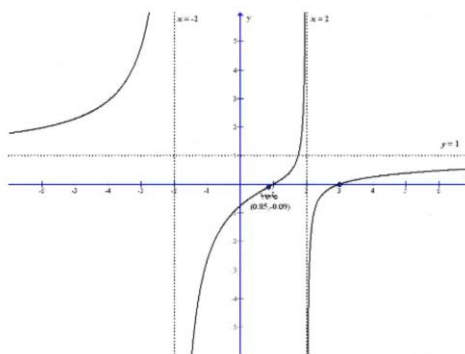
(5



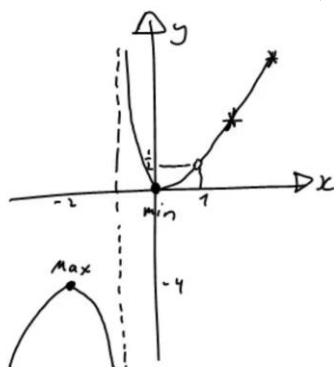
(6



(7



(8



## חקירת פונקציה מעריכית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

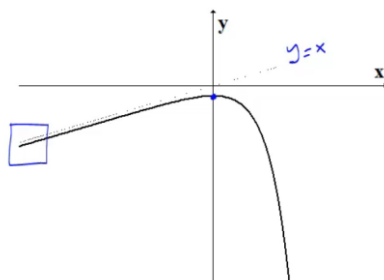
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

## תשובות סופיות

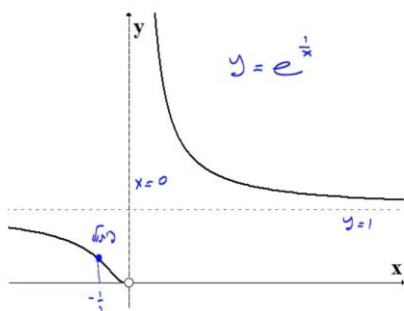
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ : אין (ראו בהרחבה בסרטון).  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר  $y = x$  ב- $-\infty$  בלבד.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, -1)$ . תחום עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .  
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל  $x$ .  
(2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : אין.  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית):  $x = 0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין.  
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.  
נקודת פיתול:  $(-0.5, e^{-2})$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$  or  $-0.5 < x < 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.5$ .  
(3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $-2$ .  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית):  $x = 0$ , משופעת: הישר  $y = x + 3$  ב- $\pm\infty$ .  
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום:  $(-1, e^{-1})$ , מינימום:  $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$ .  
תחום עלייה:  $x > 2$  or  $x < -1$ , ירידה:  $-1 < x < 0$  or  $0 < x < 2$ .  
נקודת פיתול:  $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$  or  $-0.4 < x < 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.4$ .  
(4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר  $y = 0$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ , מינימום:  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ .  
תחום עלייה:  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ , ירידה:  $x > \frac{1}{2}$  or  $x < -\frac{1}{2}$ .  
נקודות פיתול:  $(0, 0)$ ,  $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$ ,  $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$ .  
תחום קמירות:  $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$  or  $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ , תחום קעירות:  $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$  or  $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$ .

## גרפים

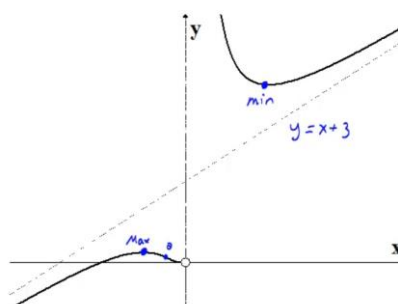
(1)



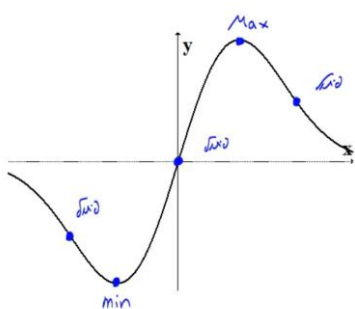
(2)



(3)



(4)



## חקירת פונקציה לוגריתמית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

### הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

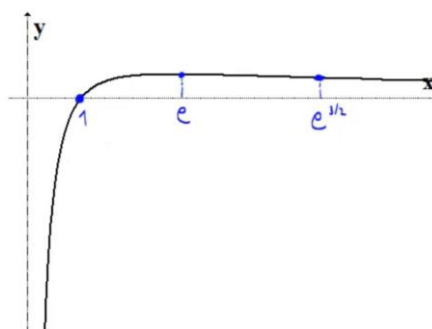
## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\infty$ .  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ .  
 תחום עלייה:  $0 < x < e$ , ירידה:  $x > e$ .  
 נקודת פיתול:  $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$ .  
 תחום קמירות:  $x > e^{1.5}$ , קעירות:  $0 < x < e^{1.5}$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר  $x = 0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\infty$ .  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$ .  
 תחום עלייה:  $0 < x < e^2$ , ירידה:  $x > e^2$ .  
 נקודת פיתול:  $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt[8]{e^3}}\right)$ . תחום קמירות:  $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$ , קעירות:  $x > e^{\frac{8}{3}}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x < 2$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{1}{2} \ln 2$ , עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 2$ , משופעת: אין.  
 נקודות קיצון: אין.  
 תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.  
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, -e^{-1})$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

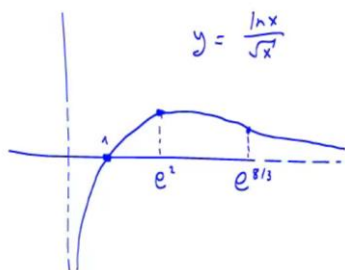
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $x = e^1$ ,  $x = e^{-3}$ .  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, -4)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול:  $(1, -3)$ . תחום קמירות:  $x > 1$ , קעירות:  $0 < x < 1$ .
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $x = e^{1.5}$ ,  $x = e^{-0.5}$ .  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $\left(e^{\frac{1}{2}}, -4\right)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{\frac{1}{2}}$ , ירידה:  $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$ .  
 נקודת פיתול:  $(e^{1.5}, 0)$ . תחום קמירות:  $0 < x < 1.5$ , קעירות:  $x > 1.5$ .
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : אין.  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 1$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, 2)$ ,  $(e, 2)$ .  
 תחום עלייה:  $e^{-1} < x < 1$  or  $x > e$ , ירידה:  $1 < x < e$  or  $x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול:  $(5.15, 3.06)$ .  
 תחום קמירות:  $0 < x < 1$  or  $1 < x < 5.15$ , קעירות:  $x > 5.15$ .

## גרפים

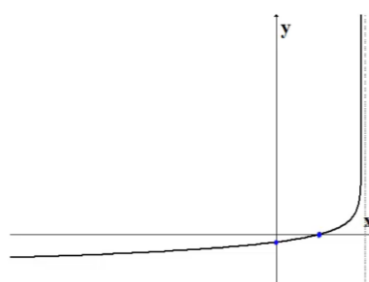
(1)



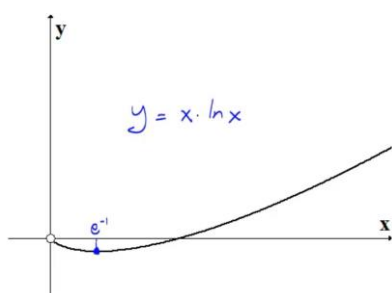
(2)



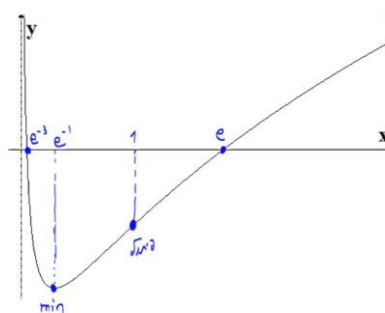
(3)



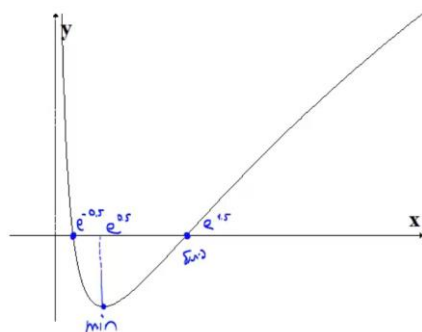
(4)



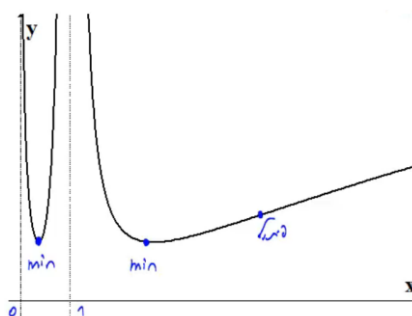
(5)



(6)



(7)



## חקירת פונקציה עם שורשים

### שאלה

1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ .

### תשובה

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ .  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = 1$ , עם ציר ה- $x$ : אין.  
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית:  $y = 0$ .  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, 1)$ . תחום עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .

נקודות פיתול:  $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$ .

תחום קמירות:  $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$  or  $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$ , קעירות:  $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$ .

גרף:



## חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1 \quad (3)$$

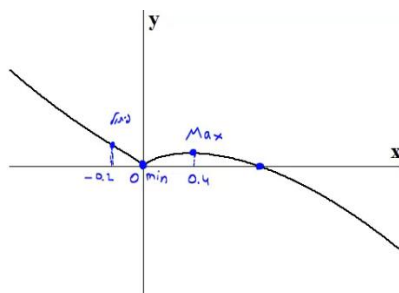
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

## תשובות סופיות

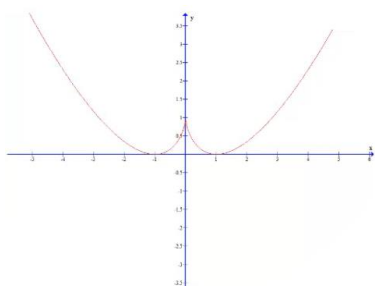
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  או  $1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$ , מינימום:  $(0, 0)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < \frac{2}{5}$ , ירידה:  $x < 0$  or  $x > \frac{2}{5}$ .  
נקודות פיתול:  $(-0.2, 0.41)$ .  
תחום קמירות:  $x < -0.2$ , קעירות:  $-0.2 < x < 0$  or  $x > 0$ .  
(2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ .  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $1$ , עם ציר ה- $x$ :  $-1$  או  $1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, 1)$ , מינימום:  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ .  
תחום עלייה:  $-1 < x < 0$  or  $x > 1$ , ירידה:  $0 < x < 1$  or  $x < -1$ .  
נקודות פיתול: אין.  
תחום קמירות: קמורה לכל  $x$ .  
(3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: זוגית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ :  $\pm 1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(0, -1)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $-1 < x < 0$  or  $x < -1$ .  
נקודות פיתול:  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < 1$ , קעירות:  $x > 1$  or  $x < -1$ .  
(4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1.5$ , עם ציר ה- $x$ :  $3$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 2$ ,  
משופעת ואופקית: הישר  $y = 1$  ב- $\infty$ , ו- $y = -1$  ב- $-\infty$ .  
נקודות קיצון: מינימום:  $(3, 0)$ .  
תחום עלייה:  $x > 3$ , ירידה:  $2 < x < 3$  or  $x < 2$ .  
נקודות פיתול:  $(3, 0)$ .  
תחום קמירות:  $2 < x < 3$ , קעירות:  $x > 3$  or  $x < 2$ .

## גרפים

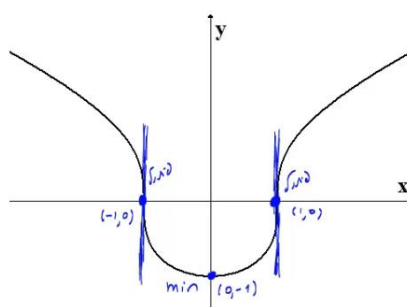
(1)



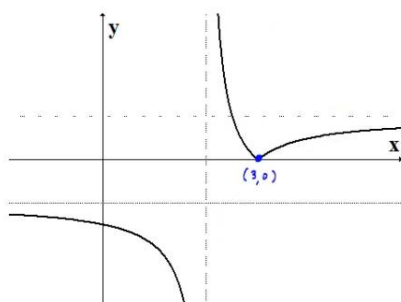
(2)



(3)



(4)



# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 12 - שימושי הנגזרת

תוכן העניינים

1. נוסחת הקירוב הלינארי ..... (ללא ספר)
2. גמישות הביקוש ..... (ללא ספר)
3. בעיות קיצון כלכליות ..... (ללא ספר)
4. בעיות קיצון מסוגים שונים ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 13 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

|           |                                |
|-----------|--------------------------------|
| 90        | 1. הצבה.....                   |
| 91        | 2. צמצום.....                  |
| 92        | 3. הכפלה בצמוד.....            |
| 93        | 4. פונקציה שואפת לאינסוף.....  |
| 94        | 5. $x$ שואף לאינסוף.....       |
| 96        | 6. הגבול של אוילר.....         |
| 97        | 7. כלל הסנדוויץ'.....          |
| 98        | 8. גבול של פונקציה מפוצלת..... |
| 99        | 9. גבול לפי הגדרה.....         |
| (ללא ספר) | 10. הסבר כללי.....             |

## הצבה

### שאלה

חשב את הגבולות בסעיפים א-ד :

א.  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד.  $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

### תשובה

א. 21      ב.  $\frac{11}{12}$       ג. 2      ד. 20

## צמצום

## שאלות

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

## תשובות סופיות

|        |                    |        |                      |                   |
|--------|--------------------|--------|----------------------|-------------------|
| (5) -3 | (4) $n-1$          | (3) 6  | (2) $\frac{10}{8.5}$ | (1) $\frac{5}{6}$ |
|        | (9) $\frac{8}{17}$ | (8) 27 | (7) 3                | (6) 32            |

## הכפלה בצמוד

### שאלות

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

## פונקציה שואפת לאינסוף

## שאלות

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

## תשובות סופיות

|            |               |              |               |
|------------|---------------|--------------|---------------|
| $\phi$ (4) | $-\infty$ (3) | $\phi$ (2)   | $\phi$ (1)    |
| $\phi$ (8) | $\infty$ (7)  | $\infty$ (6) | $-\infty$ (5) |
|            | $\phi$ (11)   | 1 (10)       | 0 (9)         |

## x שואף לאינסוף

### שאלות

חשב את הגבולות הבאים :

- |                                                                                                     |                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (2)$                                | $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$                                                  |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (4)$                           | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (3)$                                |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (6)$                                    | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (5)$         |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (8)$                    | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$                                         |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (10)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (9)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$       | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (11)$                        |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$         | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (13)$                |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (16)$    | $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (15)$                              |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (18)$                                | $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (17)$                            |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (20)$                                      | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (19)$                                            |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (22)$                                  | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (21)$                                         |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (24)$                        | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (23)$                                     |

## תשובות סופיות

- (1) 0 (2) 4 (3)  $-\infty$  (4) 0  
 (5) -5 (6) 1 (7) -1 (8) -3  
 (9) 1.5 (10)  $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$  (11)  $\frac{1}{4}$  (12) 0  
 (13) 4 (14)  $\frac{1}{9}$  (15) 2 (16)  $\ln 3$   
 (17)  $e^{\frac{1}{3}}$  (18) 0  
 (19) אם  $b \neq 0$  :  $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$  אם  $b=0, a>0$  :  $\infty$  אם  $b=0, a<0$  :  $-\infty$   
 (20) 2.5 (21)  $\frac{k}{2}$  (22)  $\frac{1}{2}$  (23)  $-\frac{1}{2}$   
 (24)  $\frac{1}{2}$

## הגבול של אוילר

### שאלות

חשב את הגבולות הבאים :

(היעזר בגבול של אוילר :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

|              |              |               |                       |
|--------------|--------------|---------------|-----------------------|
| $e^{-1}$ (4) | $e^2$ (3)    | 1 (2)         | $e^{\frac{1}{2}}$ (1) |
|              | $e^{30}$ (7) | $e^{-12}$ (6) | $e^3$ (5)             |

## כלל הסנדוויץ'

### שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{נתונה פונקציה } z: R \rightarrow R, \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4,$$

ונתונה פונקציה  $f: R \rightarrow R$ , המקיימת  $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$ , לכל  $x$ .

$$\text{חשב את הגבולות } \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2)$$

### תשובות סופיות

(3) 0

(2) 1

(1) 4

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16 \quad (4)$$

## גבול של פונקציה מפוצלת

### שאלות

חשב את הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  של הפונקציות הבאות:

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (2)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{ב.}$$

### תשובות סופיות

- (1)  $\emptyset$       (2)  $\emptyset$       (3) 1      (4) -1
- (5) א. אין גבול.      ב.  $\frac{1}{6}$

## גבול לפי הגדרה

## שאלות

בשאלות 1-5, על פי הגדרת הגבול, הוכח:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(6) \quad \text{חשב, על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכח, על פי הגדרת הגבול, את המקרים 7-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (9)$$

$$(11) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכח כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו כך שעבור כל  $x > M$ , מתקיים  $f(x) < -4$ .

$$(12) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכח כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו כך שעבור כל  $x > M$ , מתקיים  $f^2(x) > 16$ .

$$(13) \quad \text{נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכח שמתקיים: } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 : \text{נתון הגבול הבא:}$$

מצא ערך של  $M > 0$  עבורו לכל  $x > M$  הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול

עד כדי 0.1. במילים אחרות, מצא  $M$ , כך ש- $|f(x) - L| < 0.1$  :  $\forall x > M$ .

$$(15) \quad \text{מגדירים את הפונקציה הבאה: } f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכח את תשובותיך בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(16) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצא } \delta > 0 \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R} \text{ המקיים: } |x-1| < \delta,$$

$$\text{מתקיים אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}$$

(17) הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

$$\text{א. אם: } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם: } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L, \text{ אז: הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

## תשובות סופיות

$$(6) \quad \pm \infty$$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר [GOOL.co.il](http://GOOL.co.il)

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 14 - מטריצות

תוכן העניינים

1. הגדרות ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 15 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחים וגופים במרחב

## תוכן העניינים

|     |                                       |
|-----|---------------------------------------|
| 101 | 1. קווים נפוצים במישור                |
| 105 | 2. מבוא לפונקציה של שני משתנים        |
| 107 | 3. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים   |
| 109 | 4. משטחים נפוצים במרחב                |
| 111 | 5. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים |
| 112 | 6. גופים במרחב                        |
| 115 | 7. הצגה פרמטרית של עקום               |
| 117 | 8. הצגה פולרית של עקום                |
| 119 | 9. הצגה פרמטרית של משטח               |

## קווים נפוצים במישור

## שאלות

1) שרטט במישור את התחומים הבאים :

א.  $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

2) שרטט במישור את התחומים הבאים :

א.  $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצא את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים :

א.  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב.  $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג.  $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטט אותו.

א.  $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב.  $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג.  $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד.  $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה.  $0 \leq x \leq 1, y = \sqrt{1 - x^2}$

ו.  $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}, y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטט אותו.

א.  $y = 2 + \sqrt{1 - (x - 3)^2}$

ב.  $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג.  $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

ה.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\}$

ז.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ח.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

8) שרטט את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9) שרטט את התחומים הבאים במישור :

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

ה.  $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו.  $S = \{(x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\}$

10) נתונה המשוואה  $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$ .

א. הוכח שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטט אותה.

ב. רשום את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.

ג. רשום את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.

ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?

ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשוני שלה?

11) שרטט את התחומים הבאים במישור :

א.  $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2\}$

**12** שרטט את התחומים הבאים במישור :

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

**13** שרטט את התחומים הבאים במישור :

א.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

## תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצא את תחום ההגדרה  $D$  של הפונקציה.

ב. שרטט סקיצה של הקבוצה  $D$ .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left( \frac{x-4y}{x+4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y-4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

$$f(x, y) = \tan \frac{y}{x} \quad (12)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

$$f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)} \quad (13)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

### תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x+1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x+1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

## קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו, ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטט מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2\ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטט את קו הגובה  $k$ :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

א. שרטט את קו הגובה  $f(x, y) = 0$ .

ב. לאילו ערכי  $C$  קו הגובה  $f(x, y) = C$  הוא קו רציף?  
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

## הערות

\* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.  
\*\* קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

## תשובות סופיות

(1)  $x \neq 0$ , המישור ללא ציר ה- $y$ .

(2)  $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור.

(4)  $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה.

(5)  $y < x^2$

(6)  $y \geq 0$ , חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## משטחים נפוצים במרחב

### שאלות

זהה ושרטט את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהה ושרטט את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהה כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

מצא את החיתוך בין המשטח  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$  לבין המשטח  $z = 12$ .  
הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$  :

א. זהה את המשטח.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר  $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$ .

מצא את החיתוך בין המשטחים  $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$  ו-  $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ .  
הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח  $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$  :

א. זהה את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשום הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

- בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

### תשובות סופיות

- (1) אליפסואיד.
- (2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- (3) היפרבולואיד חד יריעתי.
- (4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0,0,1)$  ונפתח כלפי מעלה.  
 ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0,0,3)$  ונפתח כלפי מטה.
- (5) א. אליפסואיד.  
 ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(1,2,0)$  ונפתח כלפי מעלה.  
 ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה  $(0,0,10)$ .
- (6) החיתוך הוא מעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , שמרכזו בנקודה  $(0,0,12)$ .
- (7) א. ספירה שמרכזה  $(4,1,-10)$  ורדיוסה  $\sqrt{14}$ .  
 נקודות החיתוך הן  $A(7,0,-12)$ ,  $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$ .
- (8) החיתוך הוא המעגל  $x^2 + y^2 = 15$ , שמרכזו בנקודה  $(0,0,7)$ .
- (9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- $y$ .  
 ב.  $\ell_1 : (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$   $\ell_2 : (x, y, z) = (3, 2t, t)$

## משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

### שאלות

- (1) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - z$ . מצא את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטט אותו.
- (2) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$ . מצא את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטט אותו.
- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא את משטחי הרמה:
  - א.  $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$
  - ב.  $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$
- (4) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$ . מצא את משטחי הרמה של הפונקציה.
- (5) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$ . מצא את משטחי הרמה של הפונקציה.

### תשובות סופיות

- (1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה  $(0, 0, -2)$  ורדיוסה 2.
- (2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 4)$  ונפתח כלפי מטה.
- (3) א. מישורים.  
ב. משטח רמה  $k$  הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה  $(0, 0, k)$  ונפתח כלפי מעלה.
- (4) עבור  $k < 0$  לא קיים משטח רמה  $k$ .  
עבור  $k = 0$  נקודה  $(0, 0, 0)$ . עבור  $k = 1$  מישורים.  
עבור  $k > 1$  חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $y$ .  
עבור  $0 < k < 1$  חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $z$ .
- (5) עבור  $k < 0$  היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור  $k = 0$  חרוט אליפטי.  
עבור  $k < 0$  היפרבולואיד דו-יריעתי.

## גופים במרחב

## שאלות

1) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו.  $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד.  $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה.  $V = \{(x, y, z) \mid 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\}$

3) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2+y^2 \leq 1\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2+z^2 \leq 4\}$

ה.  $V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$

4) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5) שרטט את התחומים הבאים במרחב ותאר במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב.  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

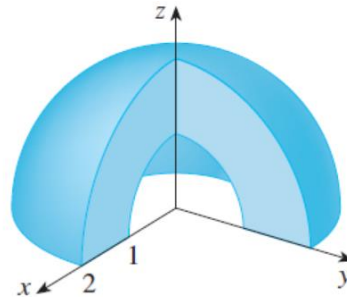
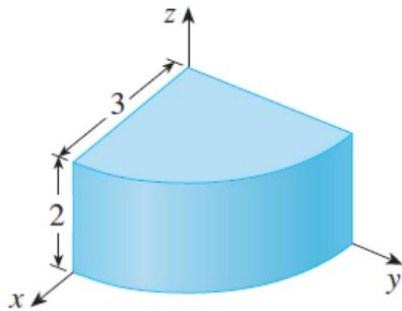
ה.  $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף  $V$  במרחב.

תאר במילים את הגוף וכתוב אותו לפי התבנית  $V = \{(x, y, z) \mid \dots\}$ .

א.

ב.



7) נתונים המשטחים  $z = x^2 + y^2$  ו-  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

א. זהה כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטט את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצא את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

8 נתונים שני משטחים:  $z = x^2 + y^2 + z^2$  ו-  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

א. זהה כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטט את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצא את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

## תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## הצגה פרמטרית של עקום

### שאלות

1) עבור מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א.  $x = t^2 + 1, y = t^2, t \geq 0$

ב.  $x = \sin t, y = \cos^2 t, 0 \leq t \leq \pi$

ג.  $x = \cos t, y = 4 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$

2) עבור מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א.  $y = x^4 + 1, 1 \leq x \leq 4$

ב.  $y = -\sqrt{4 - x^2}, -2 \leq x \leq 2$

ג.  $y = +\sqrt{4 - x^2}, -2 \leq x \leq 2$

3) לפניך תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.

על ידי חילוץ של הפרמטר  $t$ , מצא משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים  $x$  ו- $y$  בלבד:

א.  $x = t - 4, y = t^2$

ב.  $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג.  $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד.  $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה.  $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו.  $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$  ( $k$  קבוע).

4) חשב את אורך העקום  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

5) חשב את אורך העקום  $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}, -\pi \leq t \leq 2\pi$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad \text{ב. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{ג. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$$

$$(3) \quad \text{א. } y = (x + 4)^2 \quad \text{ב. } (x + 4)^2 + \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

$$(4) \quad 8$$

$$(5) \quad 6\pi\sqrt{29}$$

## הצגה פולרית של עקום

### שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את הנקודה הקוטבית  $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$  לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית  $(-1, -1)$  לנקודה קוטבית.

(2) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את הנקודה הקוטבית  $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$  לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית  $(0, -4)$  לנקודה קוטבית.

ג. המר את הנקודה הקרטזית  $(-2, 2)$  לנקודה קוטבית.

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה  $4x - x^2 = 1 + xy$  לקואורדינטות קוטביות.

ב. המר את המשוואה  $r = -4\cos\theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה  $x^2 + y^2 = 4y$  לקואורדינטות פולריות.

ב. המר את המשוואה  $x = 10$  לקואורדינטות פולריות.

ג. המר את המשוואה  $y = 4$  לקואורדינטות פולריות.

(5) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה  $r = 4$  לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המר את המשוואה  $\theta = \pi/4$  לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המר את המשוואה  $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המר את המשוואה  $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

## תשובות סופיות

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \quad \text{א.} \quad (r, \theta) = \left( \sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \quad \text{ב.}$$

$$(2) \quad (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \quad \text{א.} \quad (r, \theta) = \left( 4, \frac{3\pi}{2} \right) \quad \text{ב.} \quad (r, \theta) = \left( \sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \quad \text{ג.}$$

$$(3) \quad 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \quad \text{א.} \quad (x+2)^2 + y^2 = 2^2 \quad \text{ב.}$$

$$(4) \quad r = 4 \sin \theta \quad \text{א.} \quad r \cos \theta = 10 \quad \text{ב.} \quad r \sin \theta = 4 \quad \text{ג.}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 4^2 \quad \text{א.} \quad y = x \quad \text{ב.} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \quad \text{ג.}$$

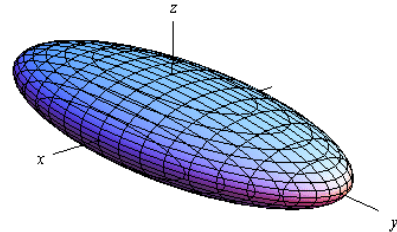
$$6 \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \cdot y = 4 \sqrt{x^2 + y^2} - x \quad \text{ד.}$$

## נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

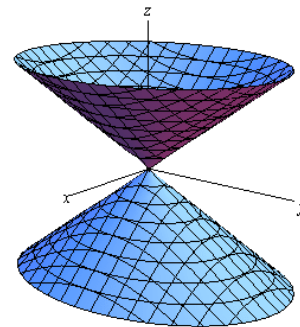
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;  
כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם  $a = b = c$ ,  
נקבל כדור עם רדיוס  $a$  והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

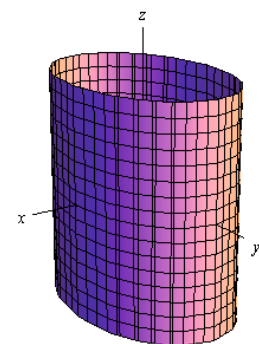
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} : \text{משוואה}$$

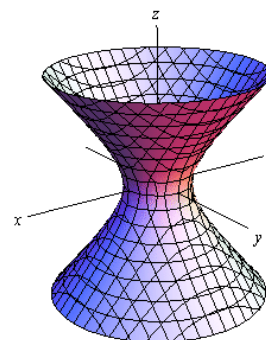
תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית);  
החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם אליפסות.  
החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים הנחתכים  
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו  
הם היפרבולות.  
\* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע  
לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים  
במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  
 $yz$  הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים  
מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא  
 $x^2 + y^2 = r^2$ , החתכים הנ"ל הם מעגלים.  
\* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע  
במשוואת הגליל.

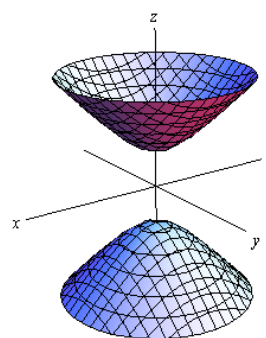


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

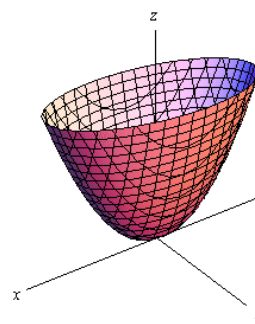
\* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

**תיאור:** למשטח זה אין חתך במישור  $xy$ ; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

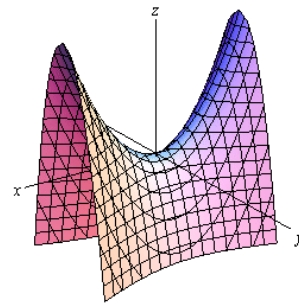
פרבולואיד אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

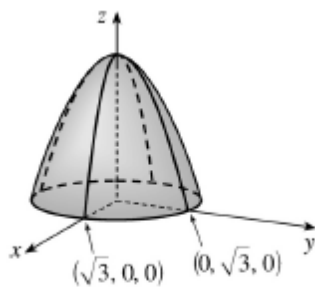
פרבולואיד היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

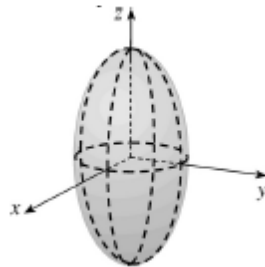
**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם היפרבולות; אלו שמעל למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $x$  ואלו שמתחת למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ . החתכים במישור  $xz$  ו- $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

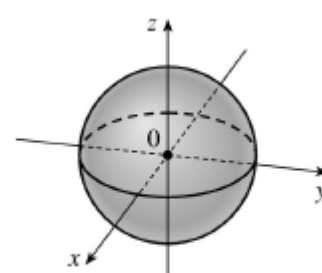
\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

דוגמאות שונות

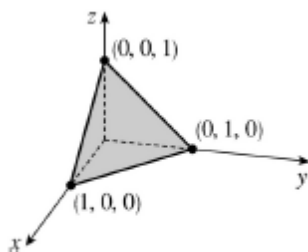
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



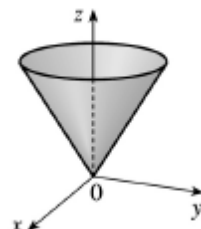
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



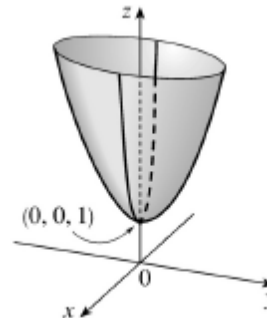
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 16 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

- 1. גבול של פונקציה של שני משתנים ..... 122
- 2. רציפות של פונקציה של שני משתנים ..... 125

## גבול של פונקציה של שני משתנים

### שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-9 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin\left(x(y^2 + z^2)\right)}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (9)$$

חשב את הגבולות בשאלות 10-17 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשב את הגבולות בשאלות 18-25 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

\* בשאלות 18, 20-23 ו-25 מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

(26) ענה על הסעיפים הבאים :

א. חשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$

ב. העזר בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ , וחשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$

ג. העזר בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ , וחשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$

ד. העזר בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$ , וחשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$

\* קחו בחשבון שייתכן שכותב השאלה לא ייתן את הגבול הידוע בגוף השאלה.

(27) הוכח לפי ההגדרה כי  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$ .

(28) הוכח לפי ההגדרה כי  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$ .

(29) הוכח לפי ההגדרה כי  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$ .

### תשובות סופיות

(1) 1

(2)  $\frac{1}{12}$

(3) 1

(4) 0

(5) אינסוף

(6)  $\frac{1}{2}$

(7) 2

(8) 5

(9) 0

(10) – (17) אין לפונקציה גבול.

(18) 0

(19) 0

(20) 0

(21) 0

(22) 3

(23) 0

(24) 0

(25) 0

(26) א-ד. 0

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

## רציפות של פונקציה של שני משתנים

### שאלות

בשאלות 1-3 בדוק את רציפות הפונקציות בנקודה  $(0,0)$ .  
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,  
האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלות 4-5 בדוק את רציפות הפונקציות בנקודה  $(1,4)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון}$$

כאשר  $m$  קבוע.

עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?

7) נתונה פונקציה ממשית רציפה  $f = f(x)$ , שאינה פונקציה קבועה,

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הפונקציה  $g$  רציפה בנקודה  $(0, 0)$ ?

8) הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y) \quad \text{לכל } y$$

$$\text{וגם } \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0) \quad \text{לכל } x$$

$$\text{אז } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$$

9) פונקציה  $f(x, y)$  מקיימת  $|f(x, y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$ , לכל  $(x, y)$ .

הוכח שהפונקציה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .

10) מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$  (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ k & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל המרחב?

11) נתון כי:

לכל  $x$  מתקיים  $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|$  (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה  $y$ ).

לכל  $y$  מתקיים  $|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq |x_2 - x_1|$  (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה  $x$ ).

הוכח כי  $f(x, y)$  רציפה בכל המישור.

12) הוכח או הפרך:

נתון כי  $f(x, y)$  רציפה בכל המישור.

$$z(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ידוע כי  $z(1, 14) < 0$ ,  $z(14, 1) > 0$ .

אז בתחום ההגדרה של  $z$  קיימת נקודה  $(c_1, c_2)$ , כך ש-  $z(c_1, c_2) = 0$ .

## תשובות סופיות

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר  $f(0,0)=1$ , הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור  $m > 1$  הפונקציה רציפה, ועבור  $m \leq 1$  הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10)  $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

## נוסחאות – גבולות

|                                      | $x \rightarrow -\infty$             | $x \rightarrow 0$                                 | $x \rightarrow \infty$            |
|--------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------|-----------------------------------|
| $y = \frac{1}{x}$                    | $\frac{1}{-\infty} = 0$             | $\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$ | $\frac{1}{\infty} = 0$            |
| $y = e^x$                            | $e^{-\infty} = 0$                   | $e^0 = 1$                                         | $e^\infty = \infty$               |
| $y = \ln x$                          | ---                                 | $\ln(0^+) = -\infty$                              | $\ln(\infty) = \infty$            |
| $y = \arctan x$                      | $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ | $\arctan(0) = 0$                                  | $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$ |
| $y = a^x, a > 1$                     | $a^{-\infty} = 0$                   | $a^0 = 1$                                         | $a^\infty = \infty$               |
| $y = a^x, 0 < a < 1$                 | $a^{-\infty} = \infty$              | $a^0 = 1$                                         | $a^\infty = 0$                    |
| $y = \sin x$                         | ---                                 | $\sin 0 = 0$                                      | ---                               |
| $y = \cos x$                         | ---                                 | $\cos 0 = 1$                                      | ---                               |
| $y = \frac{\sin x}{x}$               | 0                                   | 1                                                 | 0                                 |
| $y = \frac{\tan x}{x}$               | ---                                 | 1                                                 | ---                               |
| $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ | $e$                                 | (from right) 1                                    | $e$                               |
| $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$            | ---                                 | $e$                                               | 1                                 |
| $y = \sqrt{x}$                       | ---                                 | $\sqrt{0^+} = 0$                                  | $\sqrt{\infty} = \infty$          |
| $y = \sqrt[3]{x}$                    | $-\infty$                           | $\sqrt[3]{0} = 0$                                 | $\sqrt[3]{\infty} = \infty$       |

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

# מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 17 - נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות

תוכן העניינים

|     |                             |
|-----|-----------------------------|
| 129 | 1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון |
| 131 | 2. נגזרות חלקיות מסדר שני   |
| 135 | 3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה  |
| 137 | 4. דיפרנציאביליות           |

## נגזרות חלקיות מסדר ראשון

## שאלות

בשאלות 1-10 חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \quad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \quad (רק f_x)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \quad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \quad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \quad f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$(11) \text{ נתון } z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$\text{הוכח כי } x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$$

$$(12) \text{ נתון } f(x, y, z) = e^x \left( y^2 - \frac{1}{z} \right)$$

$$\text{חשב } \frac{\partial f}{\partial x} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

## הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

## תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

(11) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (12)$$

## הערת סימון

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f &= f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{aligned}$$

## נגזרות חלקיות מסדר שני

### שאלות

בשאלות 1-14 חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשב  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x,y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$ .

16) חשב  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ .

17) חשב  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

18) נתון  $f(x,y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$ .

חשב  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e)$ .

### הערת סימון

$$\begin{aligned}
 f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x,y) \Rightarrow f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{aligned}$$

## תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll}
 f_y = -2x^2y + 10 & f_{xx} = 8 - 2y^2 & f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \\
 f_{yx} = -4xy & f_{xy} = -4xy & f_{yy} = -2x^2 \\
 f_y = \frac{x^4}{y} & f_{xx} = 12x^2 \ln y & f_x = 4x^3 \ln y \quad (2) \\
 f_{yx} = \frac{4x^3}{y} & f_{xy} = \frac{4x^3}{y} & f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \\
 f_y = 3y^2 - 6x & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 - 6y \quad (3) \\
 f_{yx} = -6 & f_{xy} = 6 & f_{yy} = 6y \\
 f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4) \\
 & f_{xy} = -3 & f_{yy} = 6y - 6 \\
 f_y = x^2 - 2xy & f_{xx} = 2y & f_x = 2xy - y^2 \quad (5) \\
 & f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y & f_{yy} = -2x \\
 & f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] & (6) \\
 & f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0] \\
 & f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] & f_{xx} = 2[8y - 0 - 24] \\
 & & f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0] \\
 & f_y = e^{xy}(x^2 + xy + 1) & f_x = e^{xy}(xy + y^2 + 1) \quad (7) \\
 f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} & f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy} \\
 & f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy} \\
 f_y = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) & f_x = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) \quad (8) \\
 & , f_{xx} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y} \\
 & f_{yy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y} \\
 & f_{xy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y} \\
 f_y = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) & f_x = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9) \\
 & f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}
 \end{array}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \quad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \quad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y) \quad f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y) \quad f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x+4y) \quad f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x \quad f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right)}{16} \quad (18)$$

## נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

### שאלות

$$(1) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה  $(0, 0)$ .  
 ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ ?  
 ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$(2) \quad \text{מצא את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה  $(0, 0)$ .

$$(3) \quad \text{מצא את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y + x^2)^2}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה  $(0, 0)$ .

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכח שהפונקציה לא רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .  
 ב. הוכח שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה  $(0, 0)$  וחשב אותן.

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.  
 ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה  $(0, 0)$ ?

$$(6) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. בדוק האם  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ , על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה  $(0, 0)$ ?

ג. האם  $f_{xyxy}(1, 4) = f_{xyxy}(1, 4)$ .

### הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

### תשובות סופיות

(1) א.  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ . ב. לא רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(2)  $f_x(0, 0) = 1$ ,  $f_y(0, 0) = 0$

(3)  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$

(4) א. שאלת הוכחה. ב.  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$

(5) א.  $f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$   
ב. לא רציפות.

$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(6) א.  $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה  $(0, 0)$ . ג. כן.

## דיפרנציאביליות

## שאלות

בשאלות 1-4 בדוק האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x + y}{y + 4x} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (5) \quad \text{בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון } m, \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה גזירה חלקית בראשית?  
 ג. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$(7) \quad \text{נתון} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad m, f(x, y) \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה גזירה חלקית בראשית?  
 ג. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

(8) תהי  $f$  פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה חדשה}$$

$$\text{נתון} \quad f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f(0, 0) = 0$$

הוכח ש- $\phi$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

$$(9) \quad \text{בדוק דיפרנציאביליות} \quad f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

בנקודה  $(0, 0, 0)$ .

$$(10) \quad \text{נתונה } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ המוגדרת על ידי} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases}$$

האם  $f$  דיפרנציאבילית בנקודה  $x = 0$ ?

### תשובות סופיות

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
- (6) א.  $m > 1$       ב.  $m > 0$       ג.  $m > 2$
- (7) א.  $m < 1$       ב. לכל  $m$       ג.  $m < 0.5$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.