מתמטיקה לפיזיקאים 2

תוכן העניינים

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 1 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

חשב: $(u\times v)\times w$.

2) חשב את שטח המשולש שקדקודיו: $A=(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי: $|u|\neq 0 \qquad u\cdot w=0, \qquad u\times v=0$.

הוכח כי: $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי: $|v|=4 \qquad ,|u|=1, \qquad u\perp v$.

חשב: $|(u+v)\times(u-v)|$.

5) נתון $w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

חשב:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

ב. חשב את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

7) חשב את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5), B(1,-1,-4), C(3,3,10), D(8,6,3)$.

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a,b,c}$.
הוכח כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a,a-b,a+b-4c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכח כי $\left[(u+v)\times(v+w)\right](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי: $u\cdot(v\times w)=4$.
חשב:
א. $u\cdot(w\times v)$ ב. $(v\times w)\cdot u$ ג. $w\cdot(u\times v)$ ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a,b,c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a\times b\times c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) שאלת הוכחה.

4) 8

5) א. -3 ב. -3 ג. -3

6) א. 6 ב. 1

7) $9\frac{1}{3}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

11) אין לו נוסחה.

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

1) הוכח שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

2) מצא את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

3) נתונים שני ישרים:

$$L_2:\ x+7=y-5\ ,\ z=3 \qquad L_1:\ \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},$$

א. הוכח שהישרים מצטלבים.
ב. מצא את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) $\sqrt{26}$

3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

1) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z),\ \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכח:

א. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\operatorname{div}(\mathbf{F})+\operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב. $\nabla(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla(\mathbf{F})+\nabla(\mathbf{G})$

2) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.
הוכח כי: $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F})=(\nabla\varphi)\cdot\mathbf{F}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

3) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.

א. הוכח כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$. או בניסוח אחר $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$.

ב. הוכח כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0$. או בניסוח אחר $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$.

4) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z),\ \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כללים
הוכח כי: $\mathbf{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\mathbf{curl}(\mathbf{F})+\mathbf{curl}(\mathbf{G})$.

5) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי.
הוכח כי $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=-\nabla^2\mathbf{F}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x,y,z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\text{grad}\varphi$ מוגדר על ידי $\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

<u>הגדרה **(דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)**</u>

יהי $\mathbf{F} = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$.

מגדירים את **הדיברגנץ של F** המסומן $\text{div}\mathbf{F}$, כך:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} \\ \text{div}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(f,g,h) \\ \text{div}\mathbf{F} = f_x + g_y + h_z \end{array}}.$$

מגדירים את **ה- curl של F** המסומן $\text{curl}\mathbf{F}$, על ידי:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{curlF} = \nabla\times\mathbf{F} \\ \mathbf{curlF} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(f,g,h) \\ \mathbf{curlF} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ \mathbf{curlF} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ \mathbf{curlF} = (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{array}}$$

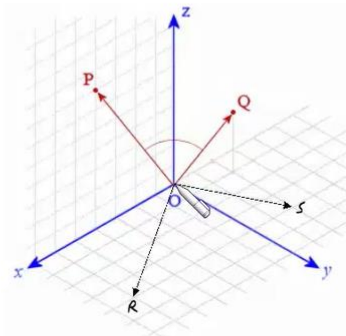
הערה: יש הרושמים $\text{rot}\mathbf{F}$ במקום $\text{curl}\mathbf{F}$.

וקטורים

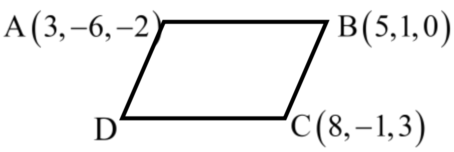
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\mathbf{u}$, $\vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

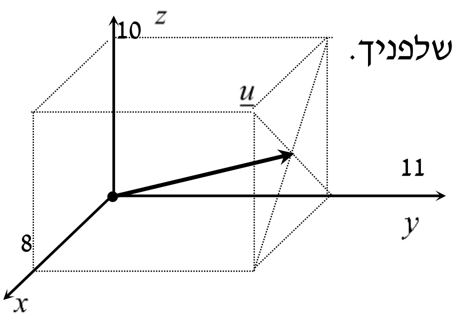
1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



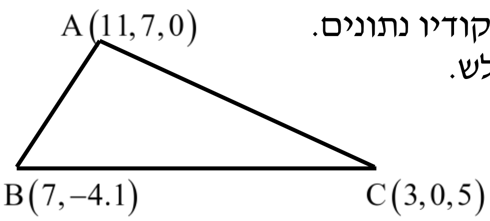
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



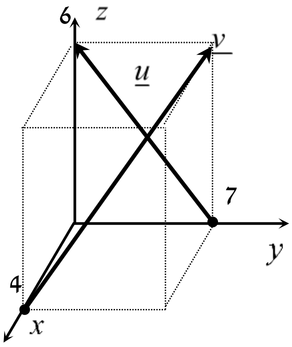
4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.



6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

7) מצא את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:

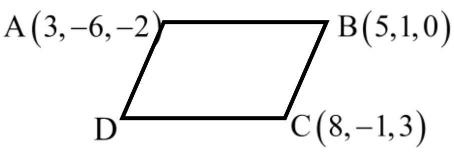
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראה כי $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

9) בשרטוט נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצא את שיעורי הקדקוד D.

* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



בשאלות **16-10** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$ ו- $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, ו-**16** הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשב:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $d(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **19-17** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים:

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$D(-7,-5,2)$, $C(-3,-5,0)$, $B(0,2,-1)$, $A(-4,2,1)$.
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.
א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.
ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:
א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$
ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$
ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) ענה על שני הסעיפים הבאים:
א. הוכח כי $u\perp v \Leftrightarrow |u+v|=|u-v|$.
הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.
ב. הוכח כי $u\perp v \Leftrightarrow |u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.
הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

26) הוכח:
א. $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$
ב. $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$
ג. $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$
ד. $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$
תן פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.
ה. $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$

תשובות סופיות

1) $\vec{S}=(-2,4,0)$, $\vec{R}=(6,4,0)$, $\vec{Q}=(-2,1,3)$, $\vec{P}=(4,0,7)$,

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{v}=(-4,7,6)$, $\underline{u}=(0,-7,6)$

7) א. $x=5$, $y=-2$, $z=6$

8) א. הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}^*$

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) הוכחה.

21) א. הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277^\circ$ ב. $\alpha=90^\circ$ ג. $\alpha=180^\circ$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח״ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) הוכחה.

26) הוכחה.

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,
כאשר $r(t)=\left(\cos\pi t,-\ln t,\sqrt{t-2}\right)$ ו- $t_0=4$.

ב. רשום את המשוואות הפרמטריות $x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\cos^2 t$,
כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשום את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה
הווקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

2) רשום את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א. $9x^2+4y^2=36$ (במישור xy)

ב. $\begin{cases}-x+y-z+1=0\\4x-2y-2z-1=0\end{cases}$

ג. $\begin{cases}y^2=z\\x^2=y\end{cases}$

ד. $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z=y+2\end{cases}$

ה. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\z=x^2\end{cases}$

ו. $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\z=2x\end{cases}$

3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(21t^2,21t^2-1,10e^t\right)$.

בסעיפים א-ג, חשב:

א. $\lim\limits_{t\to1}r(t)$

ב. $r'(t)$

ג. $\int_0^1 r(t)dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

4) נתונה: $r(t)=\left(\cos 4t,\sin 4t,t^4\right)$.

א. חשב: $\frac{d|r'|}{dt}$, $\left|\frac{dr}{dt}\right|$, $\frac{dr}{dt}$.

ב. הוכח שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$.

א. גזור את הפונקציה.

ב. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$ ב-$t=0$.

ג. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2=z \\ x^2=y \end{cases}$, בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצא משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t)=(\sin t,e^{2t},t^2)$, ב-$t=0$.

6) נתונה העקומה $r(t)=\left(t^2,t,5\right)$.

א. מצא נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור $x-6y+4z-3=0$.

ב. מצא משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t)=\left(3\sin t,-2\cos t,t\right)$, ב-$t=0.5\pi$.

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

7) נתון $r(t)=\left(3\sin t,3\cos t,4t\right)$.

חשב את משיק היחידה **(T)**, נורמל היחידה **(N)** והבינורמל **(B)** של r.

8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכח שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t, אז $r(t)\cdot r'(t)=0$.
כלומר, $r(t)$ ו-$r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכח שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

מצא את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק, המתאימים ל-$t=2$.

10) נתון $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$.

על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית, הוכח כי $r'(t)=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$.

11) חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x=t^3+2t,\ y=-3e^{-2t},\ z=2\sin 5t$.

עבור החלקיק, בזמן $t=0$, חשב את:

א. המהירות.

ב. גודל המהירות.

ג. התאוצה.

ד. גודל התאוצה.

ה. הזווית בין וקטורֵי המהירות והתאוצה.

12) נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן: $\vec{r}(t)=\vec{v}_0t-\frac{1}{2}gt^2\vec{k}$,

כאשר $\vec{v}_0=\vec{v}(0)=(v_{01},v_{02},v_{03})$ המהירות ההתחלתית.

מצא את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13) חלקיק נע על העקומה $x=2\cos t,\ y=2\sin t$.

א. חשב את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t.

ב. שרטט את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t=0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.

ג. הראה שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14) מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t)=(2,-1,-10t)$.

ברגע $t=0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(0,0,100)$.

מצא את משואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

15) תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t)=\left(18\cos 3t,-18\sin 3t,0\right)$.

ברגע $t=0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(2,0,1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי) ובמהירות $v(0)=(0,2,4)$.

מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

תשובות סופיות

1) א1. $0<t\le 4$ א2. $r(4)=\left(\cos 4\pi,-\ln 4,\sqrt{2}\right)$

ב. $r(t)=\left(\sin t,\ \cos t,\cos^2 t\right)$ ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

2) א. $x=2\cos t\ ,\ y=3\sin t$, $r(t)=\left(2\cos t,3\sin t\right)$

ב. $x=2t-0.5,\ y=3t-1.5,\ z=t$, $r(t)=\left(2t-0.5,3t-1.5,t\right)$

ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^4$, $r(t)=\left(t,t^2,t^4\right)$

ד. $x=t,\ y=\dfrac{t^2}{4}-1,\ z=\dfrac{t^2}{4}+1$, $r(t)=\left(t,\dfrac{t^2}{4}-1,\dfrac{t^2}{4}+1\right)$

ה. $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=9\cos^2 t$, $r(t)=\left(3\cos t,3\sin t,9\cos^2 t\right)$

3) א. $(21,20,10e)$ ב. $\left(42t,42t,10e^t\right)$ ג. $(7,6,10e-10)$ ד. כן. ה. כן.

4) א. $\dfrac{d|r'|}{dt}=\dfrac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}}$, $\left|\dfrac{dr}{dt}\right|=4\sqrt{1+t^6}$, $\dfrac{dr}{dt}=\left(-4\sin 4t,4\cos 4t,4t^3\right)$

ב. שאלת הוכחה.

5) א. $r'(t)=\left(4\cos 4t,e^t+te^t,4t^3\right)$ ב. $(x,y,z)=(0,0,0)+s(4,1,0)$

ג. $(x,y,z)=(1,1,1)+s(1,2,4)$ ד. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$

6) א. $(9,3,5)$ ב. $2y+z=0.5\pi$

7) $B(t)=\dfrac{1}{5}\left(4\cos t,-4\sin t,-3\right)$, $N(t)=(-\sin t,-\cos t,0)$, $T(t)=\dfrac{1}{5}\left(3\cos t,-3\sin t,4\right)$

8) שאלת הוכחה.

9) המישור הניצב $x+4y+12z=114$, מישור הנישוק $24x-12y+2z=16$,
מישור היישור $76x+143y-54z=292$.

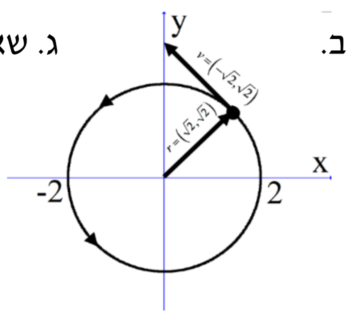
10) שאלת הוכחה.

11) א. $(2,6,10)$ ב. $\sqrt{140}$ ג. $\left(0,-12,0\right)$ ד. 12   ה. 120.46°

12) $v(t)=\left(v_{01},v_{02},v_{03}-gt\right)$, $|v(t)|=\sqrt{(v_{01})^2+(v_{02})^2+(v_{03}-gt)^2}$, $a(t)=\left(0,0,-g\right)$, $|a(t)|=g$

13) א. $v(t)=(-2\sin t,2\cos t)$, $|v(t)|=2$

ב.



ג. שאלת הוכחה.

14) $r(t)=(2t,-t,-5t^2+100)$

15) $r(t)=(-2\cos 3t+4,2\sin 3t-4t,4t+1)$

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 2 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות **1-3**:

1) $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

2) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

3) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

4) D – משולש בעל הקודקודים: $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$.

5) D – משולש בעל הקודקודים: $O(0,0), A(2,1), B(-2,1)$.

6) D – טרפז בעל הקודקודים: $O(0,0), A(1,0), B(1,2), C(0,1)$.

7) D – עיגול $x^2+y^2\le 1$.

8) D – עיגול $x^2+y^2\le y$.

9) $D=\left\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\right\}$

10) $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

חשב את האינטגרלים בשאלות **11-15**:

11) $\iint_D xy^2dxdy$, כאשר D חסום ע״י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

12) $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר D חסום ע״י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

13) $\iint_D |x\,y|dxdy$, כאשר D עיגול בעל הרדיוס a, שמרכזו בראשית.

14) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=x,\ y=x+a,\ y=a, y=3a$ $(a>0)$.

15) $\iint_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2}dA$, כאשר D התחום הכלוא בין $x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}$.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{a^3}{3}\pi$

4) $$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$$

5) $$\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy + \int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$$

6) $$\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$$

7) $$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

8) $$\int_{-1/2}^{1/2} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$$

9) $$\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

10) $$\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx +$$
$$+\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

11) $\frac{32}{21}$

12) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

13) $\frac{a^4}{2}$

14) $14a^4$

15) 0

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החלף סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-6**:

1) $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$

2) $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

3) $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

4) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$

5) $\int_{1}^{2}\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

6) $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} f(x,y)dydx$

חשב את האינטגרלים הבאים (רמז: שנה את סדר האינטגרציה):

7) $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

8) $\int_{0}^{3}\int_{1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

9) $\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy \quad (x,y\geq 0)$

10) $\int_{0}^{4}\int_{x}^{4}\sin(y^2)dydx$

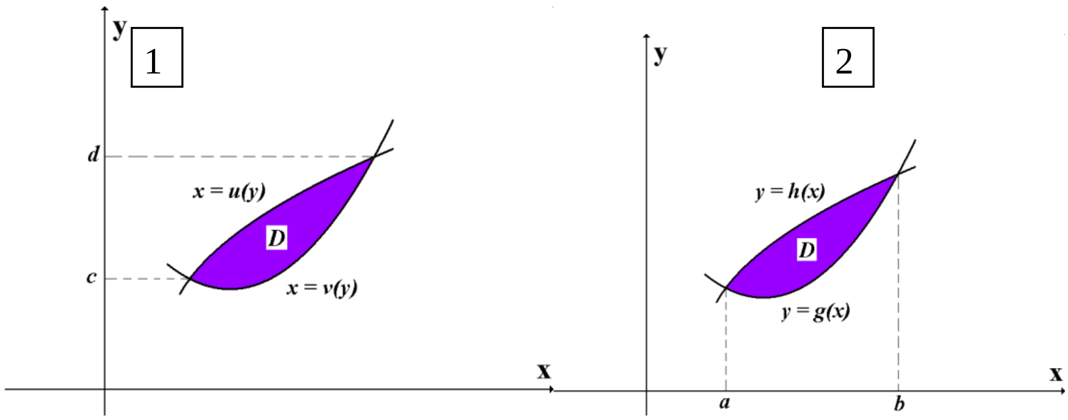
הערות סימון

$\boxed{1}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dydx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

$\boxed{2}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$



לתשומת ליבכם, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך: $\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישומים $dxdy$ ו- $dydx$ זהים.

תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

7) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

8) $\frac{241}{60}$

9) $\frac{1}{4}(e-2)$

10) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 3 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

שימושי האינטגרל הכפול

שאלות

בשאלות **1-4** חשב את **שטחי התחומים** החסומים ע"י העקומים:

1) $x+y=2,\quad x^2-4y=4$

2) $(a>0)\quad xy=a^2,\quad x+y=\frac{5}{2}a$

3) $y^2=9-x,\quad y^2=9-9x$

4) $x+y=3,\quad y^2=4x$

בשאלות **5-10** חשב את **נפחי הגופים** החסומים ע"י המשטחים:

5) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

6) $z=0\,,\ z=x^2+y^2\,,\ y=1,\ y=x^2$

7) $(x>0)\ z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

8) $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

9) $(z\geq 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

10) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

11) ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$,
יש פונקציית צפיפות $\delta(x,y)=xy$.
א. חשב את מסת הלוח.
ב. חשב את מרכז הכובד של הלוח.

12) ללוח דק בצורת מלבן $R=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2},\quad -\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\right\}$,
יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).
חשב את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- z.
בטא את תשובתך באמצעות המסה של הלוח, M.

13) מצא את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2+z^2=4$, הנמצא מעל למלבן
$R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 4\}$, שבמישור xy.

תשובות סופיות

1) $\frac{64}{3}$

2) $a^2\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)$

3) 32

4) $\frac{64}{3}$

5) $\frac{5}{6}$

6) $\frac{88}{105}$

7) $\frac{17}{6}$

8) $16\frac{1}{5}$

9) $\frac{8}{3}$

10) 36

11) א. $\frac{1}{24}$ ב. $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$

12) $\frac{M\left(a^2+b^2\right)}{12}$

13) $\frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)$

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 4 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

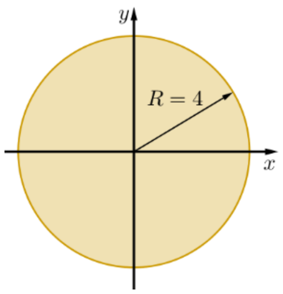
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

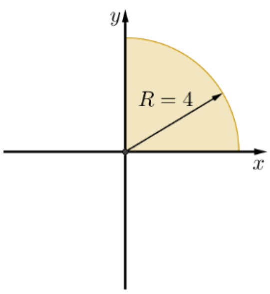
1) חשב $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשב את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

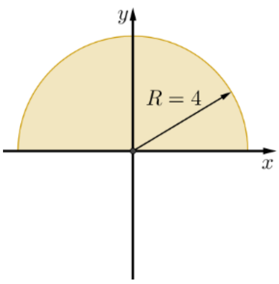
א.



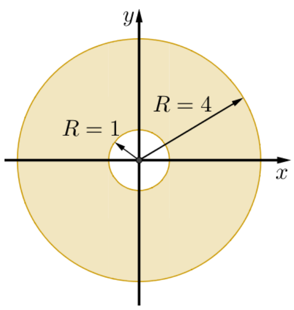
ב.



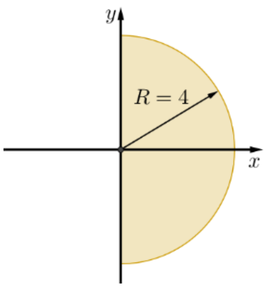
ג.



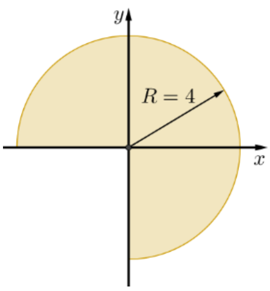
ד.



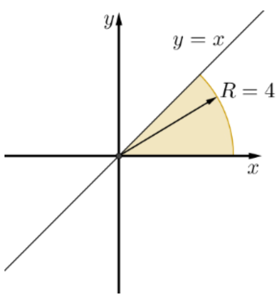
ה.



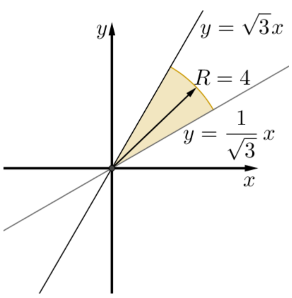
ו.



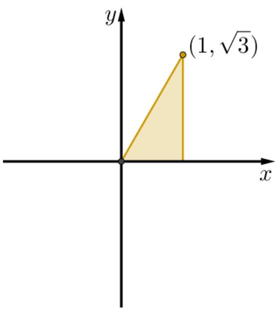
ז.



ח.



ט.



חשב את האינטגרלים בשאלות **2-17**, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

2) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

3) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

4) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

5) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

6) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

7) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

8) $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} xdxdy$

9) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} ydydx$

10) $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

11) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dxdy$

12) $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{\ln^2 2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

13) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$

14) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dydx$

15) $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2dxdy$

16) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy$

17) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}dydx$

בשאלות **20-18** חשב את **נפח הגוף** המתואר:

18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2+y^2+z^2=9$ לבין הגליל $x^2+y^2=1$.

19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=2y$, בין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=x$, בין הפרבולואיד $z=1-x^2-y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

21) חשב את **שטח התחום** החסום על ידי $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $y=x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$

ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$

2) $\frac{\pi}{2}$

3) π

4) $\frac{\pi}{8}$

5) $\frac{\pi}{2}$

6) πa^2

7) 2π

8) 36

9) $\frac{4}{3}$

10) $\pi\ln\frac{e}{2}$

11) $\pi(4-\pi)$

12) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{e}$

13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$

14) $\frac{\pi}{2}+1$

15) $-\frac{4}{5}$

16) $\pi\ln\frac{4}{e}$

17) π

18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$

19) $\frac{32}{9}$

20) $\frac{5\pi}{32}$

21) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 5 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

1) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=x,\ y=x-1,\ y=1-x,\ y=3-x$.

2) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{x},\ y=0.5x,\ y=x$.

3) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $\mathrm{A}(0,0),\ \mathrm{B}(2,0),\ \mathrm{C}(1,1)$.

4) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $\mathrm{A}(-1,3),\ \mathrm{B}(1,-3),\ \mathrm{C}(3,-1),\ \mathrm{D}(1,5)$.

5) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2}dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

6) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $xy^2=2,\ xy^2=1,\ y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{x}$.

7) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y}dA$, כאשר $R=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\le 1\right\}$.

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}\ln 3$

2) $\frac{1}{2}(e^2-e)\ln 2$

3) $1-\frac{1}{2}\sin 2$

4) 192

5) 96π

6) $\frac{3}{4}$

7) $e-\frac{1}{e}$

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 6 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים משולשים ושימושיהם

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות **1-4**:

1) $$\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xzdydxdz$$

2) $$\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dxdzdy$$

3) $$B=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1,-1\le y\le 2,0\le z\le 3\right\}\ ,\ \iiint_B xyz^2dV$$

4) $$B=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le \sqrt{x}\ ,0\le z\le 1+x+y\right\}\ ,\ \iiint_B 6xydV$$

חשב את האינטגרלים בשאלות **5-8**, על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

5) $$\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos\left(x^2\right)}{2\sqrt{z}}dxdydz$$

6) $$\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}dydxdz$$

7) $$\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin \pi y^2}{y^2}dxdydz$$

8) $$\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}dydzdx$$

בשאלות **9-14** חשב את **נפחי הגופים** החסומים על ידי המשטחים:

9) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

10) $z=0\,,\ z=x^2+y^2\,,\ y=1,\ y=x^2$

11) $(x\ge 0)\ \ z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

12) $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

13) $(z\ge 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

14) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

15) חשב את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r.
הנח שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל,
כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x,y,z)=kz\ \ (k>0)$.

16) חשב את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)
$V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le a\,,\ 0\le y\le b\,,\ 0\le z\le c\}$, סביב ציר ה- z.
בטא את תשובתך באמצעות המסה של התיבה, M.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)$

3) $\frac{27}{4}$

4) $\frac{65}{28}$

5) $2\sin 4$

6) $3e-6$

7) 4

8) $\frac{\sin^2 4}{2}$

9) $\frac{5}{6}$

10) $\frac{88}{100}$

11) $\frac{17}{6}$

12) $16\frac{1}{5}$

13) $\frac{8}{3}$

14) 36

15) $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)=\left(0,0,\frac{2h}{3}\right),\quad M=\frac{1}{2}\pi kh^2r^2$

16) $\frac{1}{3}M\left(a^2+b^2\right)$

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 7 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

בשאלות **1-4** חשב את האינטגרלים המשולשים:

1) $$\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\left(x^2+y^2\right)}^{x^2+y^2} 21xy^2dzdydx$$

2) $$\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dzdydx$$

3) $$\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$$

4) $$\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx$$

5) גוף כלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישור xy מלמטה, לבין מחצית פני הכדור $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ מלמעלה.
חשב את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

6) חשב את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ מלמעלה, ועל ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמטה.

7) מצא את הנפח של התחום מעל המישור xy, החסום על ידי הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ והגליל $x^2+y^2=a^2$.

תשובות סופיות

1) 4

2) $\frac{\pi}{3}$

3) $\frac{24\pi-32}{9}$

4) $\frac{32\pi}{5}$

5) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1107/488)\ ,\ V=\frac{122}{3}\pi$

6) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1.5/(2-\sqrt{2}))\ ,\ V=\frac{64}{3}\pi(2-\sqrt{2})$

7) $\frac{\pi}{2}a^4$

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 8 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

שאלות

1) חשב את $\iiint\limits_G (z-y)^2 xydV$, כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים $x=1,\ \ x=3,\ \ z=y,\ \ z=y+1,\ \ xy=2,\ \ xy=4$.

2) חשב את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3) חשב את $\iiint\limits_G x^2 dV$, כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4) חשב את **נפח** התחום המוגבל על ידי המשטחים:
$y=z,\ \ y=2z,\ \ y=4x,\ \ y=4x-12,\ \ y=z^2,\ \ y=4z^2$.

5) חשב את $\iiint\limits_G \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}\,dV$, כאשר G הוא כדור שמרכזו בנקודה $(1,2,4)$ ורדיוסו 1 .

תשובות סופיות

1) $2\ln 3$

2) $\frac{4}{3}\pi abc$

3) $\frac{4}{15}\pi a^3 bc$

4) $\frac{105}{32}$

5) π

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 9 - אינטגרלים קווים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים קוויים ושימושיהם

* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

שאלות

אינטגרל קווי מסוג I

בשאלות **1-4** חשב את האינטגרל $\int_C f(x,y)ds$, כאשר:

1) $f(x,y)=1-x^2$; $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$

2) $f(x,y)=x$; $C:\ x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le \pi$

3) $f(x,y)=x+y$; C קטע של ישר המחבר את $\mathrm{O}(0,0)$ עם $\mathrm{A}(1,2)$.

4) $f(x,y)=x+y^2$; C היקפו של $\Delta\mathrm{OAB}$: $\mathrm{B}(1,0)$, $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{O}(0,0)$.

בשאלות **5-6** חשב את האינטגרל $\int_C f(x,y,z)ds$, כאשר:

5) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$; $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\ \ 0\le t\le \pi$

6) $f(x,y,z)=x^3+3z$; $C:\ x=t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}t^2,\ z=\frac{1}{3}t^3\ \ 0\le t\le 3$

7) חשב את **אורך העקום** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

8) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $(0\le t\le \pi)$ $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t$.
חשב את **מסת** הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x,y,z)=kz$ $(k>0)$.

אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות **9-10** חשב:

9) $\int_C 2xydx+(x^2+y^2)dy \; ; \; C: \; x=\cos t, \; y=\sin t \;\; 0\le t\le\frac{\pi}{2}$

10) $\int_C (2x+y)dx+(x^2-y)dy \; ; \; C: \; x=t, \; y=t^2 \;\; 0\le t\le 1$

11) חשב $\int_C ydx+x^2dy$, כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$, ו- C נתון ע"י המשוואה:

א. $y=2x$

ב. $y=x^2$

12) חשב $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)dx+(y-x)dy$, אם העקום נתון על ידי:

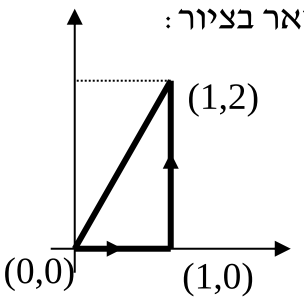
א. הפרבולה $y^2=x$.

ב. קו ישר.

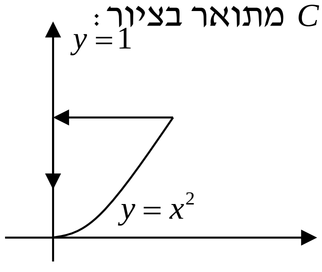
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.

ד. העקום: $y=t^2+1, \quad x=2t^2+t+1$.

13) חשב $\int_C x^2ydx+xdy$, כאשר המסלול C מתואר בציור:



14) חשב $\int_C (x-y^2)dx+dy$, כאשר המסלול C מתואר בציור:



15) אם $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2-6yz\right)\mathbf{i}+\left(2y+3xz\right)\mathbf{j}+\left(1-4xyz^2\right)\mathbf{k}$,

חשב את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$, לאורך המסלולים:

א. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

ב. הקוים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

בשאלות **16-17** חשב את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, כאשר:

16) $F(x,y)=\left(x^2y^3,-y\sqrt{x}\right),\quad r(t)=\left(t^2,-t^3\right),\quad 0\le t\le 1$

17) $F(x,y,z)=\left(\sin x,\cos y,xz\right),\quad r(t)=\left(t^3,-t^2,t\right),\quad 0\le t\le 1$

18) נתון שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=x^3y\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$.

א. חשב את ה**עבודה** שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה $y=x^2$ מ- $(-2,4)$ עד $(1,1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1,1)$ עד $(-2,4)$?

19) חשב את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$,

על חלקיק הנע לאורך העיקום $(0\le t\le 1)$ $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$.

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=\int_C (f,g,h)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C fdx+gdy+hdz$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot dr=\int_C (A_1,A_2,A_3)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C A_1dx+A_2dy+A_3dz$$

תשובות סופיות

1) π

2) $\frac{16}{3}$

3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

4) $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

5) $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$

6) $\frac{567}{2}$

7) 6

8) $\sqrt{5}k\pi^2$

9) $\frac{1}{3}$

10) $\frac{4}{3}$

11) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

12) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$

13) $\frac{1}{2}$

14) $\frac{4}{5}$

15) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$

16) $-\frac{59}{105}$

17) $\frac{6}{5}-\sin 1-\cos 1$

18) א. 3 ב. -3

19) 1

הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

עקום	הצגה פרמטרית	דוגמה
$y=f(x)\ (a\le x\le b)$	$x=t,\ y=f(t)\ (a\le t\le b)$	$y=x^2\ (1\le x\le 2)$ $\Downarrow$ $x=t,\ y=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x=f(y)\ (a\le y\le b)$	$y=t,\ x=f(t)\ (a\le t\le b)$	$x=y^2\ (1\le y\le 2)$ $\Downarrow$ $y=t,\ x=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t, y=r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t, y=2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t, y=-r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t, y=-2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t, y=5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=-b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t, y=-5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
ישר פרמטרי במישור מהנק' (x_0,y_0) לנק' (x_1,y_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מהנק' $(1,2)$ לנק' $(3,4)$ $x=1+2t$ $y=2+2t$ $(0\le t\le 1)$
ישר פרמטרי במרחב מהנק' (x_0,y_0,z_0) לנק' (x_1,y_1,z_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $z=z_0+t(z_1-z_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מ- $(1,2,3)$ ל- $(4,7,9)$ $x=1+3t$ $y=2+5t$ $z=3+6t$ $(0\le t\le 1)$

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 10 - שדות משמרים - אי תלות במסלול

תוכן העניינים

שדות משמרים – אי-תלות במסלול

שאלות

בשאלות **1-6** קבע האם $\mathbf{F}$ הוא שדה משמר;
אם כן, מצא פונקציה ϕ, כך ש- $\nabla\phi=\mathbf{F}$.

1) $\mathbf{F}(x,y)=(6x+5y,5x+4y)$

2) $\mathbf{F}(x,y)=xe^{y}\mathbf{i}+ye^{x}\mathbf{j}$

3) $\mathbf{F}(x,y)=\left(2x\cos y-y\cos x,-x^2\sin y-\sin x\right)$

4) $\mathbf{F}(x,y,z)=z^2\mathbf{i}+e^{-y}\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$

5) $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+\left(xy+3z^2\right)\mathbf{k}$

6) $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(z,2yz,y^2\right)$

7) נתון האינטגרל $\int_{(1,2)}^{(3,4)}\left(6xy^2-y^3\right)dx+\left(6x^2y-3xy^2\right)dy$.

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1,2)$ ו- $(3,4)$.

ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

8) חשב את האינטגרל $\int_{(1,4)}^{(3,1)}2xy^3dx+\left(1+3x^2y^2\right)dy$.

9) חשב את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^4+3\right)dx+\left(x^2-4xy^3\right)dy$.

10) יהי $\mathbf{F}(x,y)=e^{y}\mathbf{i}+xe^{y}\mathbf{j}$. מצא את **העבודה** שמבצע השדה על חלקיק הנע על $y=\sqrt{1-x^2}$, מ- $(1,0)$ ל- $(-1,0)$.

11) חשב את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)}\left(2xz^3+6y\right)dx+\left(6x-2yz\right)dy+\left(3x^2z^2-y^2\right)dz$.
תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

12) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F}=\frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$, ונתונים 3 מסלולים :

$L_1:\ x^2+y^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

$L_2:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ בכיוון השלילי (עם כוון השעון).

$L_3:\ (x-10)^2+(y-7)^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

חשב :

א. $\oint_{L_1}\mathbf{F}dr$ ב. $\oint_{L_2}\mathbf{F}dr$ ג. $\oint_{L_3}\mathbf{F}dr$

13) ענה על הסעיפים הבאים :

א. שרטט את השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, ברביע הראשון.

ב. בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2\mid(x,y)\neq(0,0)\right\}$, נסמן $g=\frac{x}{x^2+y^2},\quad f=\frac{-y}{x^2+y^2}$.

1. הוכח כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכח שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום D (מסעיף ב).

ד. הוכח שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני $D=\left\{(x,y)\in R^2\mid x>0\right\}$, ומצא את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2\mid(x,y)\neq(0,0)\right\}$, חשב $\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר C עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה $(0,0)$.

14) נתון השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$,

בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\right\}$.

א. שרטט את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

ב. נסמן $g=\frac{y}{x^2+y^2}$, $f=\frac{x}{x^2+y^2}$.

1. הוכח כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכח שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$

$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\right)$

$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\hat{x}+g(x,y,z)\hat{y}+h(x,y,z)\hat{z}$

$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$

תשובות סופיות

1) $\phi(x,y)=3x^2+5xy+2y^2$

2) השדה אינו משמר.

3) $\phi(x,y)=x^2\cos y-y\sin x$

4) $\phi(x,y,z)=xz^2-e^{-y}$

5) $\phi(x,y,z)=xyz+z^3$

6) השדה אינו משמר.

7) א. שאלת הוכחה. ב. 236

8) -58

9) 5

10) -2

11) $15=$ עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- $(1,-1,1)$ ל- $(2,1,-1)$, לאורך C.

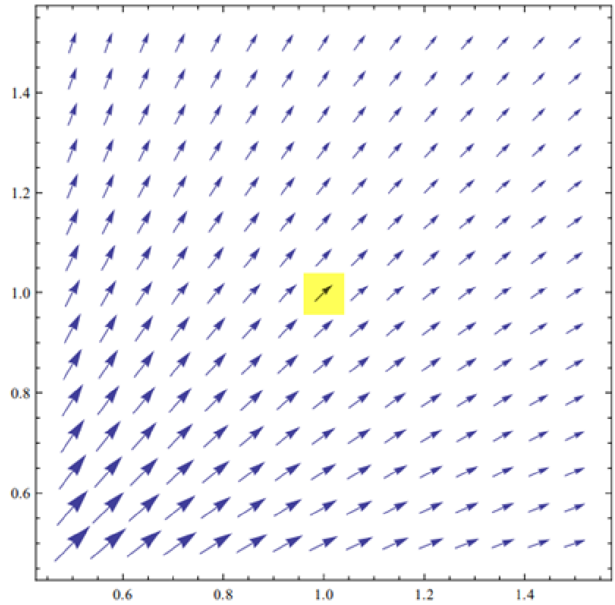
12) א. 2π ב. -2π ג. 0

13) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. שאלת הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.
ג. שאלת הוכחה. ד. שאלת הוכחה; $\phi=\arctan\frac{y}{x}+k$ ה. 2π

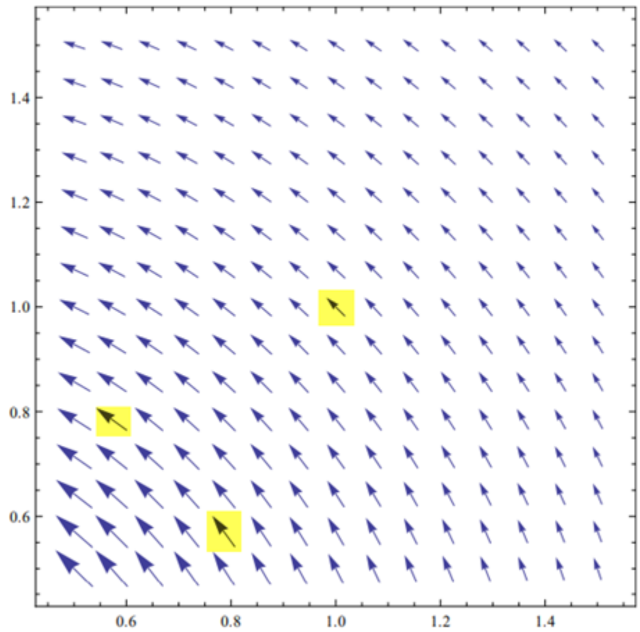
14) א. ראו בעמוד הבא. ב. 1. שאלת הוכחה. 2. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.
ג. שאלת הוכחה.

שרטוטים

שאלה 13 סעיף א :



שאלה 14 סעיף א :



מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 11 - משפט גרין

תוכן העניינים

משפט גרין

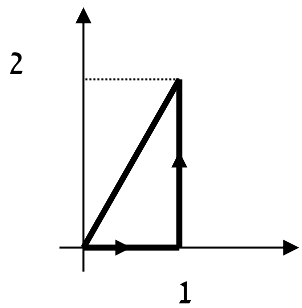
שאלות

בשאלות **1-3** אשר את משפט גרין.

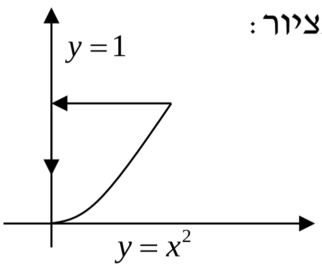
כלומר, חשב את האינטגרל $\oint_C fdx+gdy$ ואת האינטגרל $\iint_R \left(g_x-f_y\right)dA$,

והראה שהם שווים זה לזה.

1) $\oint_C x^2ydx+xdy$; המסלול C מתואר בציור:



2) $\oint_C (x-y^2)dx+dy$; המסלול C מתואר בציור:



3) $\oint_C (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$, C הוא ריבוע שקדקודיו:

$(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$ בכיוון החיובי.

4) חשב את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=\left(e^x-y^3\right)\mathbf{i}+\left(\cos y+x^3\right)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2+y^2=1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון,

ומשלים הקפה אחת.

5) חשב את האינטגרל $\int_C \left(e^y-\tan\frac{x}{2}\right)dx+\left(xe^y+y\cos y^2\right)dy$, כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y=8-x^2,\ y=x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

6) חשב את האינטגרל $\int\limits_C -2e^{2x-y}\cos y dx+\left(e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2xy\right)dy$,

כאשר C הוא חצי האליפסה $\left\{x^2+4y^2=4,\ y\geq 0\right\}$ מהנקודה $(2,0)$

לנקודה $(-2,0)$.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C,

נתון על ידי $\frac{1}{2}\oint\limits_C xdy-ydx$.

ב. חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

8) נתון האינטגרל הקווי $\oint\limits_C \left(x^3+3x^2y+3xy^2y^3\right)dx+\left(3x^2y+3x-\sin y\right)dy$,

כאשר C מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון.

מהו הערך המקסימלי של האינטגרל?

עבור איזו מסילה C הוא מתקבל?

9) הוכח שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין C,

החוסמת שטח במישור, והמקיימת $\oint\limits_C -y^3dx+x^3dy=0$.

10) חשב: $\oint\limits_C \frac{4x-y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dx+\frac{x-4y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dy$, כאשר:

א. C הוא המעגל $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

ב. C הוא המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=144$.

ג. C היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 0.5.
2) הערך המשותף הוא 0.8.
3) הערך המשותף הוא 8.
4) 1.5π
5) $0.5\sin 64$
6) $\frac{8}{3}+e^4-\frac{1}{e^4}$
7) א. הוכחה. ב. πab
8) הערך המקסימלי הוא $\frac{6\pi}{4}$, עבור המסילה $C: x^2+y^2=1$.
9) הוכחה.
10) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{\pi}{2}$

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 12 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים משטחיים מסוג I

שאלות

בשאלות **1-5** חשב את האינטגרל המשטחי:

1) $\iint_S x^2yzdS$, כאשר S הוא המישור $z=1+2x+3y$, מעל המלבן $R=[0,3]\times[0,2]$.

2) $\iint_S xdS$, כאשר S הוא המשטח $y=x^2+4z$, $0\le z\le 2$, $0\le x\le 2$.

3) $\iint_S yzdS$, כאשר S הוא המישור $z=y+3$, שכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$.

4) $\iint_S \left(x^2z+y^2z\right)dS$, כאשר S הוא חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$.

5) $\iint_S xyzdS$, כאשר S הוא חלק החרוט $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+3u\mathbf{k}$, המקיים $0\le v\le \frac{\pi}{2}$, $1\le u\le 2$.

6) חשב את **שטח הפנים** של כדור בעל רדיוס R.

7) היריעה הדקה S היא חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$, שמתחת למישור $z=1$, וצפיפותה $\delta(x,y,z)=\delta_0$, קבועה.
חשב את **מסת** היריעה.

תשובות סופיות

1) $171\sqrt{14}$

2) $\dfrac{33\sqrt{33}-17\sqrt{17}}{6}$

3) $\pi\sqrt{2}/4$

4) 16π

5) $93/\sqrt{10}$

6) $4\pi R^2$

7) $\dfrac{\pi\delta_0}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

אינטגרל משטחי מסוג II

שאלות

בשאלות הבאות חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

בניסוח אחר: חשב את השטף של שדה הזרימה $\mathbf{F}$ דרך S.

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) $\mathbf{F}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$.

5) $\mathbf{F}=0\mathbf{i}-2z\mathbf{j}+\left(-3y-1\right)\mathbf{k}$, S הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

תשובות סופיות

1) $\frac{11}{6}$

2) $\frac{8\pi}{3}$

3) 27

4) 12π

5) -16π

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 13 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

תוכן העניינים

משפט הדיברגנץ (גאוס)

שאלות

בשאלות **1-3** אשר את משפט הדיברגנץ.
כלומר, חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, ואת האינטגרל $\iiint_G div\mathbf{F}dV$,
והראה שהם שווים זה לזה ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).
(ראה הערת סימון בעמוד הבא)

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G,
הנקבעת ע"י המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G, $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G,
הנקבעת ע"י המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישורים $z=0$ ו-$z=2$.
חשב את **השטף** של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ דרך S.
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

5) חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.
$\mathbf{F}=\left(z^2-x\right)\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:
$x=0,\ x=3,\ z=4-y^2,\ z=0$.

6) חשב את $\iint_S xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$,
כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ z=0$.

7) יהי S משטח <u>פתוח</u> $x^2+z^2=16$, $0\le y\le 4$ (גליל ללא הבסיסים).
חשב את **השטף** דרך S של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+x^5\mathbf{k}$.
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

8) חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

$\mathbf{F}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2\right)\mathbf{i}+2x\arctan y\mathbf{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\mathbf{k}$;

S הוא חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$,

מתקיים: $\iiint_G div\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$.

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla\cdot\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S fdydz+gdzdx+hdxdy$$

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$.

2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$.

3) הערך המשותף הוא 27.

4) 279π

5) 16

6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

7) 0

8) -4π

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 14 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

משפט סטוקס

שאלות

בשאלות **1-3** בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים.

כלומר, חשב את האינטגרל $\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}ds$, ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$,

והראה שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בעמוד הבא).

1) $\mathbf{F}=2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+5y\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$.

2) $\mathbf{F}=\left(x^2+y-4\right)\mathbf{i}+\left(-3xy\right)\mathbf{j}+\left(2xz+z^2\right)\mathbf{k}$; S הוא שפת חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

3) $\mathbf{F}=(y+z)\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה, החסום על ידי המישורים $2x+z=6,\ y=2$, ושאינו כלול

א. במישור xy.

ב. במישור $y=2$.

ג. במישור $2x+z=6$.

4) חשב את האינטגרל $\oint_C x^2dx+4xy^3dy+y^2xdz$, כאשר C עקומה בצורת מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

5) חשב את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר $\mathbf{F}=\left(x+y^2\right)\mathbf{i}+\left(y+z^2\right)\mathbf{j}+\left(z+x^2\right)\mathbf{k}$; ו- C היא שפת המשולש, שקדקודיו הם $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$, וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

6) חשב את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$, כאשר $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$; ו- S הוא החלק של הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$, ומעל למישור xy.

7) חשב את $\iint\limits_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$, כאשר $\mathbf{F}=(x-z)\mathbf{i}+(x^3+yz)\mathbf{j}-3xy^2\mathbf{k}$;
ו- S הוא משטח החרוט $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, מעל למישור- xy.

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$,

מתקיים: $\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint\limits_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$.

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint\limits_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint\limits_S (\text{Rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint\limits_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint\limits_C fdx+gdy+hdz=\iint\limits_S \left((h_y-g_z)\mathbf{i}+(f_z-h_x)\mathbf{j}+(g_x-f_y)\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{n}dS$$

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 12π.
2) הערך המשותף הוא -16π.
3) הערך המשותף הוא: א. -6 ב. -9 ג. -18
4) -90
5) -1
6) 0
7) 12π

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 15 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

הפרדת משתנים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y} \qquad (y\neq 0)$

2) $(1-x)y'=y^2$

3) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

4) $(x-1)\frac{dy}{dx}=4y \quad ; \quad y(2)=1$

5) $\frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9 \quad ; \quad y(1)=-1$

6) $(x^2y-2+2x^2-y)dx-(xy^2-4-4x+y^2)dy=0$

7) $dy=2t(y^2+4)dt$

8) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

9) $y'+y^2\sin x=0 \quad ; \quad y(\pi)=1$

10) $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x \quad ; \quad y(0)=5 \qquad (\cos x\neq 0)$

11) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad y(0)=1$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$

2) $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c},\quad y=0$

3) $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$

4) $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$

5) $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

6) $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2+k}$

7) $y=2\tan\left(2t^2+k\right)$

8) $x=1+\tan(t+c)$

9) $y=-\frac{1}{\cos x}$

10) $\ln|y|=\tan x+\ln 5$

11) $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

משוואה הומוגנית

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות **1-8**:

1) $\left(y^3+x^3\right)dx+xy^2dy=0$

2) $y'=\dfrac{4y-3x}{2x-y}$

3) $y^2+x^2y'=xyy'$

4) $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

5) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$

6) $y'=\dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0\ \ ;\ \ y(1)=0$

8) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

9) נתונה המשוואה: $\left(y^2+x^2\right)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n, על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות

1) $-\ln|x|=\frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right|+c\ ,\qquad y=-\frac{x}{2^{1/3}}$

2) $\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|(y/x)-1\right|-\frac{5}{4}\ln\left|(y/x)+3\right|+c\ ,\quad y=x,\ \ y=-3x$

3) $-\ln|x|=\ln\left|(y/x)\right|-(y/x)+c,\quad y=0$

4) $-\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right|+c,\quad y=0,\quad y=-2x$

5) $\ln|x|=-\sin(y/x)+c$

6) $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right)=\ln|y|+c,\qquad y=0$

7) $\ln x=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c$

8) $\ln|t|=-\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right|+c,\quad x(t)=0,\quad x(t)=t$

9) $n=1,\quad \ln|x|=-\frac{1}{4}\ln\left(1+2(y/x)^2\right)+c$

משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y+2}$

2) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

4) $\frac{dx}{dy}=\frac{3+x+2y}{1+x+y}$

5) $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

תשובות סופיות

1) $x=\frac{1}{2}(x+y+1)+\frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1)+\frac{1}{4}+c, \quad y=-x-1.5$

2) $\ln|x-1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right|+c \quad ,y=x-3 \quad , \quad y=-x-1$

3) $0=14y-(x+2y+3)^2+k$

4) $\ln|x-1|=\frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right|+(-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right]+c$

$y=\sqrt{0.5}x-2-\sqrt{0.5} \ , \ y=-\sqrt{0.5}x-2+\sqrt{0.5}$

5) $\ln|x-2|=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right)+c$

משוואה מדויקת

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות **1-6**:

1) $\left(2x^3+3y\right)dx+\left(3x+y-1\right)dy=0$

2) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

3) $\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy=0$

4) $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 xdy=0$

5) $\left(y^2-\dfrac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\dfrac{1}{x+y}+2y(x+1)\right)dy=0$

6) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

7) נתונה המשוואה $\left(3x^2+ye^{xy}\right)dx+\left(2y^3+kxe^{xy}\right)dy=0$, כאשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k, על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות

1) $0.5x^4+3yx+0.5y^2-y=c$

2) $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$

3) $y\sin x+x^2e^y-y=c$

4) $x-\dfrac{y^2\cos 2x}{2}-\dfrac{y^2}{2}=c$

5) $\ln|x+y|+(x+1)y^2+2x-\ln|x|=c$

6) $x^2t^2-2x^3t+x^4=c$

7) $k=1,\ \ x^3+e^{xy}+\dfrac{y^4}{2}=c$

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראה שהמשוואה $x^2y^3+x\left(1+y^2\right)y'=0$ אינה מדויקת,
ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$
אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x.

3) הראה שהמשוואה $\left(x+2\right)\sin ydx+x\cos ydy=0$ אינה מדויקת,
ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x.

פתור את המשוואות בשאלות **4-9**:

4) $\left(x^2+y^2+x\right)dx+\left(xy\right)dy=0$

5) $\left(x-x^2-y^2\right)dx+ydy=0$

6) $\left(2xy^3+y^4\right)dx+\left(xy^3-2\right)dy=0$

7) $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$

8) $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$

9) $y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}\quad;\quad y\left(1\right)=-1$

10) נתונה מד"ר לא מדויקת $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. הוכח: אם $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכח: אם $\frac{M_y-N_x}{M}=g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(y^4-4xy)dx+(2xy^3-3x^2)dy=0$.
מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.
כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

12) נתונה המשוואה $(5x^2+3y^3+2xy)dx+(3x^2+3xy^2+6y^3)dy=0$.
מצא את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
מצא תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(x^2y^3)dx+(x+xy^2)dy=0$.
מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.
כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. מצא תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזר בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $(y-xy^2\ln x)dx+xdy=0$.

16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
מצא תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

תשובות סופיות

1) $0.5x^2+\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=c$

2) $e^x\sin y+2y\cos x=c$

3) $\sin y\cdot e^x\cdot x^2=c$

4) $0.25x^4+0.5x^2y^2+\frac{x^3}{3}=c$

5) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-x=c$

6) $x^2+xy+\frac{1}{y^2}=c$

7) $x-\frac{x}{y}=c$

8) $-\ln x-\frac{1}{xy}+y=c$

9) $-\frac{x^3}{y}+\frac{2y^3}{3}=\frac{1}{3}$

10) שאלת הוכחה.

11) $\mu(xy)=(xy)^2$

12) $\mu(x+y)=(x+y)^2$

13) $\text{if: } \frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}=h\left(x/y\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu=e^{\int\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}}$

14) $\mu=\frac{1}{xy^3}$

15) א. $\text{if: } \frac{M_y-N_x}{yN-xM}=h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}}$ ב. $\mu=\frac{1}{x^2y^2}$

16) $\text{if: } \frac{M_y-N_x}{N-M}=h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N-M}}$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

2) $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

3) $(x-2)y'=y+2(x-2)^3 \quad (x>2)$

4) $x^3y'+(2-3x^2)y=x^3 \quad (x>0)$

5) $\frac{dy}{dt}+y=2+2t \quad ; \quad y(0)=1$

6) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x} \quad (\sin x>0)$

7) $y'-2y\cot x=1 \quad (\sin x>0)$

8) $x^2z'+2xz=\cos x \quad ; \quad z(\pi)=0$

9) $ydx=(2x+y^3)dy$

תשובות סופיות

1) $y = 2 + C \cdot e^{-x^2}$

2) $y = x\left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x + C\right]$

3) $y = (x-2)\left[x^2 - 4x + C\right]$

4) $y = \frac{1}{2}x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$

5) $y = 2t + e^{-t}$

6) $y = \frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x} + C\right]$

7) $y = \sin^2 x\left[-\cot x + C\right]$

8) $z = \frac{\sin x}{x^2}$

9) $x(y) = y^2(y+c)$

משוואת ברנולי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x^2y'+2xy-y^3=0$

2) $\left(x^2+1\right)y'-2xy-y^2=0$

3) $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^2y^{1/2}$

4) $y'-\left(\dfrac{1}{x}+5x^4\right)y=-x^3y^2 \quad ; \quad y(1)=2.5$

5) $z'-\cot x\cdot z=\dfrac{1}{\sin x}z^3 \qquad (\sin x\neq 0)$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{5x}+c\cdot x^4}}$

2) $y=\dfrac{x^2+1}{-x+C}$

3) $y=x^2\left(\dfrac{x}{2}+C\right)^2$

4) $y=\dfrac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

5) $z=\pm\sqrt{\dfrac{\sin^2 x}{\cos x+C}}$

משוואת ריקטי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^{x}\right)y + y^2$$

2) $$y' = 1 + (x-y)^2$$

3) $$y' = 1 + x + 2x^2\cos x - (1 + 4x\cos x)y + 2y^2\cos x$$

תשובות סופיות

1) $$y(x) = -0.5e^{x} + \frac{e^{x}}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}}$$

2) $$y(x) = x + \frac{1}{-x + C}$$

3) $$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^{x}}$$

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדוק עם מרצה הקורס אם אתה נדרש אליו.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $4x^2p^2 - 4x^2p - 2xy - y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

2) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

3) $xyp^2 + \left(x^2 + xy + y^2\right)p + x^2 + xy = 0$ $\quad (p = y')$

4) $y = 2px + p^4x^2$ $\quad (p = y')$

5) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$ $\quad (p = y')$

6) $6p^2y^2 + 3px - y = 0$ $\quad (y > 0)$ $\quad (p = y')$

תשובות סופיות

1) $\left(y-2x-\sqrt{x}\cdot c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|x|-c_2\right)=0$

2) $\left(\ln|y|-2\ln|x|-c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+3\ln|x|-c_2\right)=0$

3) $\left(y+0.5x-\frac{c_1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-c_2\right)=0,\quad x>0$

4) $y=\pm2\sqrt{cx}+c^2$

5) $y=\frac{1}{2}cx^2+\frac{2}{c}$

6) $6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2y^2+3\left(\frac{c}{y^2}\right)x-y=0$

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הבעיה $y'=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y}$, $y(2)=-1$.

א. הוכח ש- $y_1(x)=-x+1,\quad y_2(x)=-\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.
קבע באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבר מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה $y'=\sqrt[3]{y}+4$, $y(0)=0$.

א. הוכח שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכח שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכח שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצא אותו.

3) פתור את הבעיה $y'=\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+x^2\sin y$, $y(4)=0$.

4) נתונה הבעיה $y'=(y-1)\left(x^2+y\right)^5$, $y(0)=4$.

א. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר $ydx=\left(2x+y^3\right)dy$.

א. הראו שעבור $x=x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,
ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,
מהן נקודות ההתחלה (x_0,y_0), כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,
העובר דרך (x_0,y_0).
צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0,y_0)?

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו 3 קרובי פיקארד לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \to \infty$.

7) כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = \frac{1}{x}|\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases}$ $(x > 0)$?

8) נתונה בעיית התחלה: $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלה: $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

3) $y(x)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.
ב. כל נקודת התחלה (x_0,y_0), שעבורה $y_0\neq 0$.
הקטע הארוך ביותר: $(0,\infty)$ או $(-\infty,0)$.

6) א. $y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+x^2,\quad y_2(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!},\quad y_3(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}$
ב. $y_n(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+...+\frac{x^{2n}}{n!}$ ג. הוכחה.

7) אחד.

8) א. $[-0.08,0.08]$ ב. $[-0.1,0.1]$ ג. הוכחה.

9) א. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5,0.5]$ ג. הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

הצבות שונות ומשונות

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y'=\cos(y-x)$

2) $y'=\frac{2y}{x}+\cos\left(\frac{y}{x^2}\right);\ y(1)=0$

3) $y'-x^2y+y^2=x-\frac{x^4}{4},\ \ y(0)=1$

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{\sin z}+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right)$

3) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}$

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

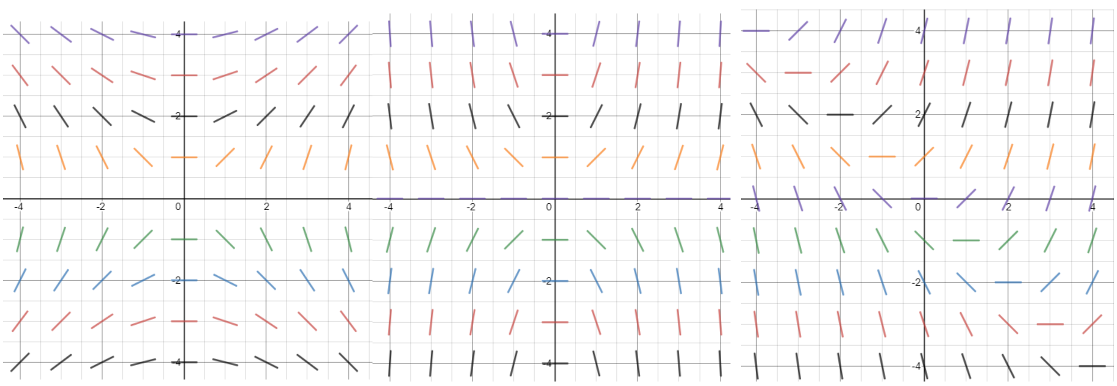
1) שרטט שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y'=2y-x$.

2) התאם כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א׳-ג׳ לשדה הכיוונים שלה:

א. $y'=\frac{x}{y}$

ב. $y'=xy$

ג. $y'=x+y$



איור 3   איור 2   איור 1

3) נתונה המד״ר: $y'=y-x\ ,\ y(0)=2$.

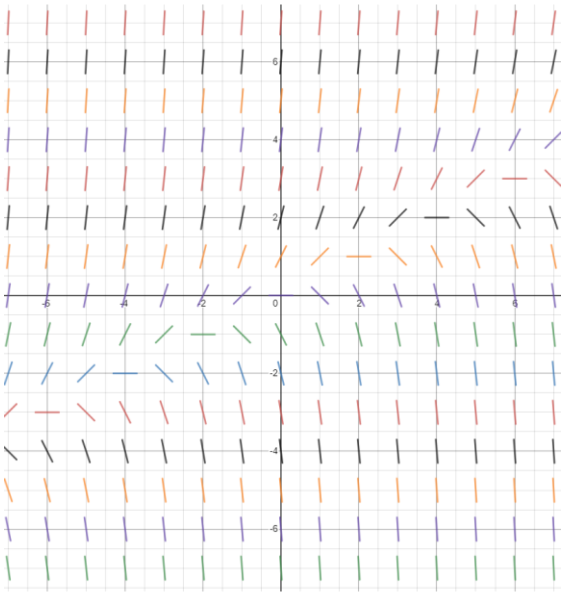
מצא בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.1$.

4) נתונה המד״ר: $y'=x+y\ ,\ y(1)=2$.

מצא בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.2$.

תשובות סופיות

1)



2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

3) $y(1)=4.593$

4) $y(2)=6.95328$

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 16 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\left(x\neq 0\right)\ \ x^2y''+xy'=\dfrac{1}{x}$

2) $\left(\cos x\neq 0\right)\ \ y''\tan x-1=y'$

3) $2xy'y''-\left(y'\right)^2+1=0$

4) $y''x\ln x=y'$

5) $xy''=x^2e^x+y'$

6) $yy''+\left(y'\right)^2=0$

7) $2y''y-\left(y'\right)^2=1$

8) $\left(\cos y\neq 0\right)\ \ y''\tan y=2\left(y'\right)^2$

תשובות סופיות

1) $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$

2) $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

3) $y=\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{3/2}+C_2; y=\pm x+C_3$

4) $y=C_1\left(x\ln x-x\right)+C_2; y=C_3$

5) $y=e^x\left(x-1\right)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

6) $\frac{y^2}{2}=cx+k \quad ; \quad y=c$

7) $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2\left(x+k\right)^1}{4}+1\right]$

8) $\cot y=-\left(cx+k\right) \quad ; \quad y=c$

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות **1-11**:

1) $y''-100y=0$

2) $y''-4y'=0$

3) $y''-8y'+7y=0$

4) $z(0)=1\,,\ z'(0)=1,\ 4z''+z'-5z=0$

5) $y''-2y'+y=0$

6) $4\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\dfrac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

7) $y''+4y=0$

8) $y''+10y'+125y=0$

9) $y(0)=0,\ \ y'(0)=3\,;\ y''-2y'+10y=0$

10) $5y''+8y'+4y=0$

11)
$$\begin{cases} y''(x)-\dfrac{1}{a^2}y(x)=0 \qquad (a>0) \\ y(0)=4 \\ y(\infty)=y(-\infty)=0 \end{cases}$$

12) נתונה המד"ר: $yy''+(y')^2=0$.

א. הראה כי $y_1=4$ ו- $y_2=\sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראה כי הפתרון $z(x)=y_1(x)+y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.
האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$

2) $y=c_1+c_2e^{4x}$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$

4) $z=e^{x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

6) $x(t)=c_1e^{\frac{-t}{2}}+c_2te^{\frac{-t}{2}}$

7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

8) $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

9) $y=e^{2}\sin 3x$

10) $y=e^{\frac{-4x}{5}}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

11) $y=4e^{-\frac{|x|}{a}}$

12) שאלת הוכחה.

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ y'(0)=7;\ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''-3y'+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

8) $y''+3y'=9x$

9) $y''-3y'+2y=e^x$

10) $y''-2y'=6x^2-2x$

11) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$

2) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

5) $y=c_1e^{-x}+c_2e^x+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^x-3xe^x+2e^{3x}$

8) $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

9) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$

10) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

11) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$

12) $y=e^{-x}\sin 2x$

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$

2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

3) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

4) $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}\quad;\quad y(1)=0\,,\; y'(1)=0$

5) $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

6) $y''+4y=\sec 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln\left|\sin x\right|$

2) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\dfrac{x^2}{2}\left[\ln x-\dfrac{1}{2}\right]+x^2e^{-2x}\left[\ln x-1\right]$

3) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\dfrac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-\dfrac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2\left(x+1\right)^{3/2}\right]$

4) $y=e^{x}-xe^{x}+xe^{x}\ln x\quad\left(x>0\right)$

5) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

6) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln\left|\cos 2x\right|+\sin 2x\cdot x$

משוואה לינארית לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – השיטה האופרטורית

שאלות

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדוק עם מרצה הקורס אם אתה נדרש אליו.

בשאלות אלו הסימון הוא: $ay''+by'+cy=Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad (aD^2+bD+c)y=Q(x)$.

פתור את המשוואות הבאות:

1) $(D^2-D-2)y=4e^{-2x}+10e^{x}+11$

2) $(D^2-2D+1)y=10e^{4x}+e^{x}-1$

3) $(D^2+D-2)y=4e^{x}+e^{10x}+14$

4) $(D^2+4)y=\sin 5x$

5) $(D^2-4)y=\sin x\cos x\cos 2x$

6) $(D^2+D-2)y=\cos x-3\sin x$

7) $(D^2+2D-3)y=2\cos x\cos 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+e^{-2x}-5e^{x}-5.5$

2) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+\frac{10}{9}e^{4x}+x^2e^{x}-1$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-4xe^{x}+\frac{1}{72}e^{10x}+7$

4) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{21}\sin 5x$

5) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{80}\sin 4x$

6) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+\sin x$

7) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}+\frac{1}{10}\sin x-\frac{1}{5}\cos x+\frac{1}{30}\sin 3x-\frac{1}{15}\cos 3x$

משוואה לינארית, כללית – שיטת ד'אלמבר – שיטת הפתרון השני – שיטת אבל

שאלות

1) פתור $y''+\tan x\cdot y'-\left(2\tan x+4\right)y=0$,
כאשר ידוע $y_1\left(x\right)=e^{2x}$.

2) פתור $\left(1-x^2\right)y''+2xy'-2y=0$.

3) הסבר את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגם על המד"ר:
$$\left(1-x\right)y''+x\cdot y'-y=2\left(1-x\right)^2e^{-x},\quad \left(0<x<1\right),$$
כאשר ידוע ש- $y_1\left(x\right)=e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}\left(\sin x-4\cos x\right)$

2) $y=c_1x+c_2\left(x^2+1\right)$

3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

(1 האם ייתכן כי $y_1(x)=e^x,\ \ y_2(x)=\sin x$, הם שני פתרונות של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, עם מקדמים רציפים בקטע $[0,\pi]$?

(2 הראו כי הפונקציות $y_1(x)=\sin x^2,\ \ y_2(x)=\cos x^2$ הן פתרונות בת״ל של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$, בקטע $(-4,\infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x=0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

(3 בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x)=xe^x,\ \ y_2(x)=e^{-x}$,
הן פתרונות של המשוואה $y''-\frac{2}{1+2x}y'-\frac{2x+3}{1+2x}y=0$, בקטע $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת״ל בקטע?

(4 נתונות שתי פונקציות $y_2=\left|x^3\right|$, $y_1=x^3$, בקטע $[-4,4]$.

א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד״ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד״ר $xy''-2y'=0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג׳?

(5 ענה על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $y_1(x)\ ,\ \ y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I,
ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I.
הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)\ ,\ \ y_2(x)$ הם פתרונות שלה.

ב. רשום משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x>0$, שהפונקציות $y_1(x)=x^2\ ,\ \ y_2(x)=x^4$, הן פתרונות שלה.

6) נתון כי $y_1(x),\ y_2(x)$, הם פתרונות של המד״ר $y''(x)+p(x)y'+q(x)=0$,
בקטע I , כאשר p, q רציפות בקטע I .
הראו, כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c)=y_2(c)=0$,
אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד״ר הנתונה.

תשובות סופיות

1) לא.

2) $W=-2x$

3) כן.

4) א. $W=0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

5) א. שאלת הוכחה . ב. $y''-\frac{5}{x}y'+\frac{8}{x^2}y=0$

6) שאלת הוכחה.

משפט הקיום והיחידות למדר ליניארית מסדר שני

שאלות

1) נתונה המשוואה $y''-4y=12x$.

א. פתור את המשוואה.

ב. מצא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=11 \end{cases}$.

ג. נסה למצוא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=1 \end{cases}$.

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תן דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0)=1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

2) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''-2xy'+2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

הראה כי $y_1(x)=0$ ו- $y_2(x)=x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x=0$, כך שהפונקציות $y=4x$ ו- $y=\sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

1) א. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-3x$ ב. $y=4e^{2x}-3e^{-2x}-3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו ל: www.GooL.co.il.

2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ \ y'(0)=7;\ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''+3y'=9x$

8) $y''-3y'+2y=e^{x}$

9) $y''-2y'=6x^2-2x$

10) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

11) $y''-3y'+2y=2x^2+e^{x}+2xe^{x}+4e^{3x}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$

2) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

5) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7) $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

8) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-xe^{x}$

9) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

10) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$

11) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^x-3xe^x+2e^{3x}$

12) $y=e^{-x}\sin 2x$