מתמטיקה לפיזיקאים 3

תוכן העניינים

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 1 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 2 - טופולוגיה במישור המרוכב

תוכן העניינים

סדרות של מספרים מרוכבים:

שאלות:

1) נתון $z_n=\frac{1}{n}+i\left(\frac{n-2}{n}\right)$. חשב את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

2) נתון $z_n=\frac{n^2+n+1}{3n^2+2}+i\left(\frac{n-1}{2n}\right)$. חשב את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

3) נגדיר $z_n=(i)^{2n}n^3$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$.

4) נגדיר $z_n=\frac{i^n}{n}$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=0$.

5) נתון $z_n=\frac{(1+i)^n}{n}$. חשב את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

6) בדקו את התכנסות הסדרה $z_n=n\cdot z^n$ כאשר $z\in\mathbb{C}$.

א. כאשר $|z|\ge 1$.

ב. כאשר $0<|z|<1$.

7) נאמר כי סדרת מספרים מרוכבים $z_n\xrightarrow{n\to\infty}L$ אם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-L|=0$.

הוכיחו כי אם $z_n\xrightarrow{n\to\infty}z$ ו- $w_n\xrightarrow{n\to\infty}w$ אזי $z_n+w_n\xrightarrow{n\to\infty}z+w$.

8) בדקו האם הסדרות הבאות מתכנסות, אם כן חשבו את גבולן.

א. $z_n=\frac{1+n}{1-2n}+\frac{n-10}{n^2}i$

ב. $z_n=\cos(\pi n)+n\sin\left(\frac{1}{n}\right)i$

ג. $z_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n}+\sqrt[n]{3^n+4^n}\cdot i$

ד. $z_n=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

תשובות סופיות:

1) $\lim_{n\to\infty} z_n = i$

2) $\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{3} + i \cdot \frac{1}{2}$

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) ∞

6) א. ∞ ב. 0

7) הוכחה.

8) ראו סרטון.

מושגים טופולוגיים בסיסיים:

שאלות:

1) שרטטו את הקבוצה $|z-i|+|z+i|<4$.

א. האם היא פתוחה/סגורה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

2) שרטטו את הקבוצה, עבור a ממשי $\operatorname{Re}\left[\frac{z-a}{z+a}\right]=0$.

א. האם היא פתוחה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

3) שרטטו את הקבוצה $\operatorname{Im}\left[\frac{z-1}{z+1}\right]=0$.

א. האם היא פתוחה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

4) שרטטו את הקבוצה $|z+i|=2|z-i|$.

א. האם היא פתוחה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי $|z\pm w|^2=|z|^2\pm 2\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)+|w|^2$.

ב. עבור $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ ו- $\lambda>0$ הראו כי המשוואה $|z-z_1|=\lambda|z-z_2|$ מתארת ישר או מעגל.

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.
2) ראו סרטון.
3) ראו סרטון.
4) ראו סרטון.
5) ראו סרטון.

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 3 - פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

פונקציות מרוכבות:

שאלות:

1) רשמו את הפונקציה $f(z)=z\cdot\mathrm{Re}(z)$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

2) רשמו את הפונקציה $f(z)=|z|^2$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

3) רשמו את הפונקציה $f(z)=2|z|^2+i(\bar{z})^2$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

4) רשמו את הפונקציה $f(z)=\frac{z}{1+|z|^2}$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

5) רשמו את הפונקציה $f(z)=z^2+\bar{z}$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

6) רשמו את הפונקציה $f(x+iy)=\frac{x^3}{3}+i\cdot\left(-\frac{y^3}{3}\right)$, בצורה $f(z)$, כאשר $z=x+iy$.

תשובות סופיות:

1) $f(z)=x^2+i\cdot xy$

2) $f(z)=x^2+y^2+i\cdot 0$

3) $f(z)=2\left[x^2+xy+y^2\right]+i\left(x^2-y^2\right)$

4) $f(z)=\frac{x}{1+x^2+y^2}+i\cdot\frac{y}{1+x^2+y^2}$

5) $f(z)=x^2+x-y^2+i\cdot(2xy-y)$

6) $f=\frac{2z^3+6z(\bar{z})^2}{24}$

גבולות מרוכבים ורציפות:

שאלות:

מצאו את הגבולות הבאים (אם קיימים):

1) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=?$

2) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^4}{|z|^4}=?$

3) $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^2}}=?$

4) $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^4}}=?$

תשובות סופיות:

1) $\frac{1-ik}{1+ik}$

2) $\frac{(1+ik)^4}{(1+k)^2}$

3) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

4) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

נגזרות מרוכבות:

שאלות:

1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=\bar{z}$ גזירה.
הראו עפ"י הגדרת הנגזרת כי $f(z)=\bar{z}$ אינה גזירה ב- z_0 לכל $z_0 \in \mathbb{C}$.

2) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=\mathrm{Re}(z)$ גזירה.

3) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=|z|^2$ גזירה.

4) הוכיחו את משפט לופיטל: $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}$

תשובות סופיות:

1) הפונקציה לא גזירה.
הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.
2) הפונקציה לא גזירה.
3) בראשית הצירים, והנגזרת שלה היא 0.
4) הוכחה.

משוואות קושי-רימן:

שאלות:

1) הראו כי $f(z)=z^2+\text{Im}(z)$ אינה גזירה לכל z.

2) הראו כי $f(z)=xy+i(x^2+y^2)$ אינה גזירה בכל הנקודות בהן $z\neq 0$,
אך כן גזירה בנקודה $z=0$ (לפי הגדרה).

3) מצאו מספרים ממשיים a,b כך שהפונקציה $f(z)=e^{ax}\cos(3y)+i\left(-e^{-3x}\sin(\text{b}\,y)\right)$
תהיה גזירה בכל נקודה.

4) נתון כי $f(z)=\frac{z}{\bar{z}}$ אינה רציפה ב $z=0$.
מצאו את כל הנקודות (אם קיימות) בהן הפונקציה גזירה.

משפט קושי-רימן: הוכחה (הפתרון בסרטון)
אם $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$, גזירה ב- $z_0=x_0+iy_0$,
אז מתקיימות משוואות קושי-רימן בנקודה זו, כלומר: $\begin{matrix} u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0) \end{matrix}$.

5) נניח כי $f(z)$ גזירה בתחום D, ונניח כי $\text{Re}\{f(z)\}=0$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

6) נניח כי $f(z)$ פונקציה גזירה שאינה קבועה בתחום D.
נגדיר $g(z)=\overline{f(z)}$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $g(z)$ אינה גזירה בכל D.

7) נתונה הפונקציה $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ הוכיחו את הטענות הבאות:
א. הפונקציה אינה רציפה בראשית.
ב. משוואות קושי-רימן מתקיימות בראשית.

8) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $H^+=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}(z)>0\}$.
הוכיחו כי $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$ אנליטית בתחום $H^+=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}(z)<0\}$.

9) הוכיחו כי $f(z)=e^{\mathrm{Re}(z)}$ אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב.

10) נתונה הפונקציה $f(z)=cx^2-xy+ixy^2$, כאשר c קבוע מרוכב כלשהו.
נתון כי $f(z)$ גזירה בנקודה $1+i$.
מצאו את הקבוע c ואת כל הנקודות בהן הפונקציה גזירה.

11) נתונה הפונקציה $f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\cdot\arctan(\frac{y}{x})$.
קבעו האם הפונקציה $f(z)$ אנליטית בחצי המישור הימני $H=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)>0\}$.

12) נתונה הפונקציה $f(z)=e^{\frac{x^2-y^2}{2}}\left[\cos(xy)+i\cdot a\sin(xy)\right]$.
עבור אילו ערכי a זוהי פונקציה הולומורפית (אנליטית) בכל המישור?

13) נניח כי $g(z)$ הולומורפית בתחום $\overline{D(0,1)}=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\le 1\}$,
ומקיימת $|g(z)|=1 \quad \forall|z|\le 1$.
הוכיחו כי $g(z)$ קבועה.
הדרכה: ניתן לכתוב את $g(z)$ באופן הבא: $g(z)=e^{i\cdot h(x,y)}$.

14) נניח כי $R>0$ ונתונה הפונקציה $f:D(0,R)\to\mathbb{C}$ גזירה בכל התחום.
נגדיר: $g(z)=\overline{f\left(\frac{R}{\overline{z}}\right)}$.
מצאו תחום בו $g(z)$ מוגדרת, ובדקו אם היא גזירה שם.

תשובות סופיות:

1) $u'_y=-2y+1 \;\;,\;\; v'_x=2y$

2) $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

3) $a=-3 \;,\; b=3$

4) $x=0 \;,\; y=0$

5) הוכחה

6) הוכחה

7) א. הוכחה ב. הוכחה

8) הוכחה

9) הוכחה

10) $c=a+i\cdot b=\frac{3}{2}$,
$y=0\;,\;y=1\;,\;y=0.5$
$x=0\;,\;x=1\;,\;x=0.25$
$z=0\;,\;z=1+i\;,\;z=0.25+0.5\cdot i$

11) $u_y=\frac{y}{x^2+y^2} \;;\; u_x=\frac{x}{x^2+y^2}$.

12) $a=1$

13) הוכחה

14) $A=\{z \;|\; |z|>1\}$

פונקציות הרמוניות:

שאלות:

1) הראו כי הפונקציה x^3-3xy^2 , היא פונקציה הרמונית בכל המישור.

2) הראו כי הפונקציה x^2-y^2 , היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו לה צמודה הרמונית.

3) הראו כי הפונקציה $f(z)=xy+i\left(x^2+y^2\right)$, היא פונקציה גזירה בראשית-
הצירים, אך החלק המדומה שלה אינו פונקציה הרמונית.
האם $f(z)$ הולומורפית בראשית?

4) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\sin(x)\cosh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה $v(x,y)$ המקיימת $v(0,0)=2$.
רמז: $f(z)=\sin(z)$.

5) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\cos(x)\sinh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו פונקציה הלומורפית כך שמתקיים $u(x,y)=\mathrm{Re}\{f\}$.

6) הראו כי הפונקציה $v(x,y)=e^y\sin(x)$, היא פונקציה הרמונית במישור,
מצאו לה פונקציה צמודה הרמונית $u(x,y)$ ופונקציה שלמה $f(z)$,
כך שמתקיים: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

7) הראו כי הפונקציה $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$,
היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
רמז: $u(r,\theta)$ תקרא הרמונית אם היא מקיימת $r^2u_{rr}''+ru_r'+u_{\theta\theta}''=0$.

8) נתון כי $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$ היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
מצאו לה צמודה הרמונית בתחום זה.

9) הוכיחו כי $u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$, היא פונקציה הרמונית ומצאו לה צמודה הרמונית.

10) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=u(x,y)^2-v(x,y)^2$ פונקציה הרמונית.

11) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=\sin\left[u(x,y)\right]\cdot\cosh\left[v(x,y)\right]$ פונקציה הרמונית.

12) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)$
(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

13) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$
(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

14) הראו כי הפונקציה $\sinh(x)\cos(y)$ היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 4 - פונקציות אלמנטריות

תוכן העניינים

סינוס מרוכב:

שאלות:

1) פתרו את המשוואה $\sin(z)=2$.

2) הוכיחו כי $\sin(z)=\sin(x+iy)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$.

3) פתרו את המשוואה $\sin(z)=5$.

תשובות סופיות:

1) כל הפתרונות הם מהצורה הבאה: $z_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$,
כאשר n מספר שלם.

2) הוכחה.

3) $z_k=\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left(5\pm2\sqrt{6}\right)$

קוסינוס מרוכב:

שאלות:

1) הוכיחו כי $\cos(z)=\cos(x+iy)=\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)$.

2) פתרו את המשוואה $\cos(z)=2$.

3) האם $|\cos(z)|\le 1$ לכל z ?

4) פתרו את המשוואה $\cos(\pi z)+\frac{3}{4}i=0$.

5) הוכיחו כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|\cos(z)|\le\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ כאשר $y=\mathrm{Im}(z)$.

6) פתרו את המשוואה $\tan(z)=\frac{i}{3}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $z_n=2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$

3) לא.

4) $z_k=-\frac{1}{2}+2k-i\frac{1}{\pi}\ln(2)$

5) הוכחה.

6) $z_k=\pi k+i\frac{1}{2}\ln(2)$

אקספוננט מרוכב:

שאלות:

1) פתרו את המשוואה $e^z=-1$.
2) הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $\left|e^{ix}\right|=1$.
3) ענו על הסעיפים הבאים:
   א. הראו כי אם $\operatorname{Im}(z)\ge 0$ אז $\left|e^{iz}\right|\le 1$.
   ב. הראו כי $\left|e^{z}\right|=1$ אם ורק אם $\operatorname{Re}(z)=0$.
4) פתרו את המשוואה $e^z=1$.
5) פתרו את המשוואה $e^z=i$.
6) פתרו את המשוואה $e^z=1+i$.
7) האם הפונקציה $f(z)=e^z$ היא חח"ע?

תשובות סופיות:

1) $z=i\cdot\pi[2n+1]$
2) $\sqrt{\cos^2(x)+\sin^2(x)}=1$
3) א. $\left|e^{iz}\right|=e^{-y}=\frac{1}{e^y}\le\frac{1}{e^0}=1$ ב. הוכחה.
4) $k\in\mathbb{Z}$ $\quad z_k=2\pi ik$
5) $k\in\mathbb{Z}$ $\quad z_k=i\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right)$
6) $k\in\mathbb{Z}$ $\quad z_k=\frac{1}{2}\ln(2)+i\pi\left(2k+\frac{1}{4}\right)$
7) לא.

העתקות אלמנטריות:

שאלות:

1) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$, תחת ההעתקה $f(z)=z+1$.

2) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$, תחת ההעתקה $f(z)=5z$.

3) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,Arg(z)=\frac{\pi}{4}\right\}$, תחת ההעתקה $f(z)=z^3$.

4) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

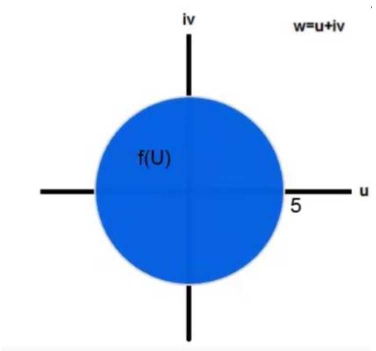
5) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<2\pi\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

6) מהי תמונת התחום $A=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,-\infty<\mathrm{Re}(z)<0,0<\mathrm{Im}(z)<\frac{\pi}{2}\right\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

תשובות סופיות:

1) $|w-1|<1$

2)



3) $\frac{3\pi}{4}\simeq 135°$

4) $0<\alpha<\pi \quad 0<R<\infty \quad f(z)=e^xe^{iy}\equiv \mathrm{R}e^{i\alpha}$

5) $0<\alpha<2\pi \quad 0<R<\infty \quad f(z)=e^xe^{iy}\equiv \mathrm{R}e^{i\alpha}$

6) $0<\alpha<\frac{\pi}{2} \quad 0<R<1 \quad f(z)=e^xe^{iy}\equiv \mathrm{R}e^{i\alpha}$

לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים:

שאלות:

1) חשבון את הגדלים הבאים:

א. $Arg(1+i)$

ב. $Arg\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

2) חשבון את הגדלים הבאים:

א. $Log(1+i)$

ב. $Log\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

3) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\sqrt{i}$.

4) מצאו את כל הערכים האפשריים של i^i.

5) מצאו את כל הערכים האפשריים של $2^{\frac{1}{9}+\frac{i}{50}}$.

6) חשבון את הערך $(2+2i)^{5i}$ עבור 3 ענפים שונים לבחירתכם.
כמה תשובות אפשריות יש לערך זה.

7) מצאו את תמונת התחום $A=\{z=re^{i\theta} \mid R_1<r<R_2\ ,\ -\pi<\theta<\pi\}$ תחת העתקה $Log(z)$ (הענף הראשי של הלוג).

8) מצאו תחום בו הפונקציה $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ אנליטית. כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ $a\neq b$.
הערה: תרגיל זה דורש ידע בהעתקות מוביוס.

9) הראו כי $|a^z|=a^{\text{Re}(z)}$ עבור a ממשי חיובי בתחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$ כאשר פונקציית החזקה מוגדרת ע"י ענף הראשי של הלוג, כלומר: $a^z=e^{z\cdot Log(a)}$.

10) הוכיחו ישירות כי העתקה $\sqrt{z}$ איננה רציפה בתחום $\mathbb{C}$ אם מגדירים את $\sqrt{z}$ באופן הבא: $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ כאשר $z=re^{i\theta}$ | $\theta\in[0,2\pi]$.

11) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\log(\log(-1))$.

12) נניח כי $\log(z)$ זה ענף רציף של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C}\setminus\{z=x+iy\ ,\ x\geq 0\ ,\ y=\sin(x)\}$ ונניח שבענף זה מתקיים $\log(1)=0$, חשבו בענף זה את הערכים: $\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $\log\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, $\log(-i)$, $\log(i)$, $\log(-1)$.

13) נגדיר $\log_\alpha(z)=\ln|z|+i\cdot\arg(z)$ כאשר $\alpha-2\pi<\arg(z)\leq\alpha$.

א. חשבו את הערכים: $\log_0(1)$, $\log_\pi(1)$, $\log_{2\pi}(1)$.

ב. מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ תחת ההעתקה $\log_\pi(z)$.

ג. מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ תחת ההעתקה $\log_0(z)$.

14) יהיו $z_1\ ,\ ...\ ,\ z_n$ מספרים מרוכבים כך ש-$\mathrm{Re}(z_k)>0$ לכל $1\leq k\leq n$ וגם $\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2\cdot ...\cdot z_k)$ לכל $1\leq k\leq n$.
הוכיחו כי $Log(z_1\cdot z_2\cdot ...\cdot z_n)=Log(z_1)+...+Log(z_n)$, כאשר $Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוגריתם.

15) יהי $U=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ויהי $y>0$. חשבו את הגבול $\lim_{y\to 0}[\log(a+iy)-\log(a-iy)]$ עבור $a>0$ ועבור $a<0$.

16) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt{z}$ ב-$\mathbb{C}$. כלומר, הראו שלא קיימת פונקציה אנליטית $h(z)$ ב-$\mathbb{C}$ כך ש-$h^2(z)=z$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

17) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$ ב-$|z|<1$ לכל $n\geq 2$.

18) נניח כי $g(z)$, $f(z)$ הם שני ענפים אנליטיים של הלוג בקבוצה פתוחה וקשירה U. הוכיחו כי קיים קבוע k שלם כך ש-$f(z)-g(z)=2\pi ik$ לכל $z\in U$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{4}$ ב. $-\frac{\pi}{2}$

2) א. $\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\frac{\pi}{4}$ ב. $\ln(2)-\frac{\pi}{2}$

3) $e\frac{5\pi}{4}i\ ,\ k=1\ ;\ e\frac{\pi}{4}i\ ,\ k=0$

4) $\left\{e^{-\pi\frac{4k+1}{2}}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

5) $\left\{2^{\frac{1}{9}}e^{-\frac{2\pi k}{50}}e^{i\left(\frac{\ln(2)}{50}+\frac{2\pi k}{9}\right)}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

6) $\left\{e^{-5\cdot\frac{\pi}{4}}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\ ,\ e^{-5\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\ ,\ e^{-5\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\ ,\ ..\right\}$

7) $\ln(r)+i\cdot\theta$

8) $\frac{z-a}{z-b}\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$

9) $a^{\operatorname{Re}(z)}$

10) הוכחה.

11) $m\in\mathbb{Z}\ ,\ k\geq 0$ $\quad \ln(\pi+2\pi k)+i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$

$m\in\mathbb{Z}$ $\quad \ln(-\pi-2\pi k)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$

12) $-\pi i\ ,\ -\frac{3\pi}{2}i\ ,\ -\frac{\pi}{2}i\ ,\ \ln\left(\frac{5\pi}{2}\right)\ ,\ \ln\left(\frac{3\pi}{2}\right)-2\pi i$

13) א. $2\pi i\ ,\ 0\ ,\ 0$ ב. $\theta<r<\infty\ ,\ -\infty<\ln(r)<\infty\ ,\ \ln(r)+i\theta$

ג. $0<\theta\leq 2\pi\ ,\ -\infty<\ln(r)<\infty\ ,\ \ln(r)+i\theta$

14) הוכחה.

15) $2\pi i$

16) הוכחה.

17) הוכחה.

18) הוכחה.

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 5 - אינטגרציה מרוכבת

תוכן העניינים

אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx$, לכל $\forall m,n\in\mathbb{Z}$.

2) לכל $z\in\mathbb{C}$, המקיים $\mathrm{Re}(z)<0$, פתרו את האינטגרל $\int_{0}^{\infty} e^{zt}dt$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$

2) $-\frac{1}{z}$

אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} z^n dz$, כאשר $n \in \mathbb{Z}$.

2) חשבון את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$, כאשר $\gamma = \left\{ z = 2e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi \right\}$.

3) חשבון את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} (z-1) dz$, כאשר $\gamma = \left\{ z = 1 + e^{i\theta} \mid \pi \le \theta \le 2\pi \right\}$.

4) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma} \pi e^{\pi \bar{z}} dz$, כאשר γ מסילת קווים ישרים, העוברת בנקודות $\gamma : 0 \to 1 \to 1+i \to i \to 0$.

5) חשבון את אורך המסילה $\gamma = [z_1, z_2]$, כאשר $\gamma = [z_1, z_2]$ היא מסילת הקו הישר המחברת בין z_1 ל- z_2.

6) חשבון את אורך המסילה $\gamma(t) = \left\{ (t - \sin t) + i \cdot (1 - \cos t) \mid 0 < t < 1 \right\}$.

7) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \bar{z}\, dz$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases} 0 & n \ne -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$

2) $2\pi i - 4$

3) 0

4) $4e^{\pi} - 4$

5) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

6) ≈ 0.48

7) $2\pi i$

משפט קושי גורסט:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2+\frac{i\pi}{4}} e^z dz$.

2) הוכיחו כי $\int_4^{1+i} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \sqrt[4]{2}\cos(\frac{\pi}{8}) - 2 + i\sqrt[4]{2}\sin(\frac{\pi}{8})$.
כאשר $\sqrt{z}$ הינו הענף העיקרי של פונקציית השורש.

תשובות סופיות:

1) $\frac{e^2[1+i]}{\sqrt{2}} - 1$

2) הוכחה.

נוסחת האינטגרל של קושי:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z}dz$.

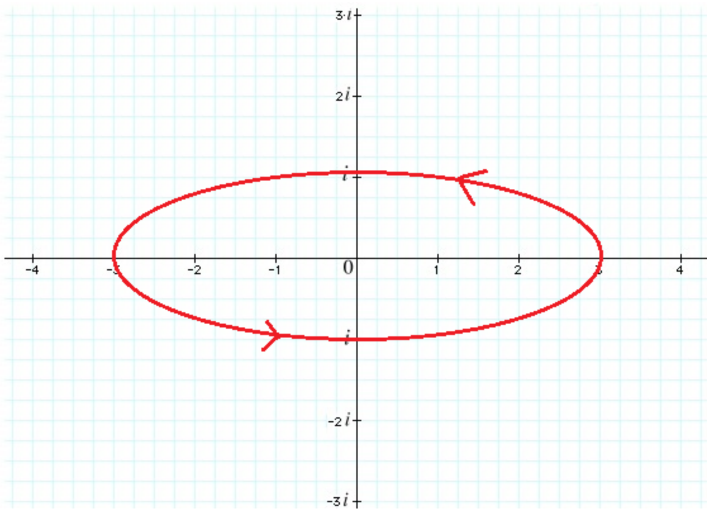
2) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2}dz$.

3) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\sin(z^2)}{z(z-2)}dz$.

4) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z+e^{-z}}{z(z-2)(z-3)}dz$.

5) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1.5} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)}dz$.

6) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z(z-2)(z-4)}dz$, עבור המסילה שבציור:



7) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-e^{z^2}}{z(z^2-1)(z+3)}dz$.

8) תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית בתחום D .
נניח כי $z_0 \in D$ וכי הדיסק $D(z_0,R)=\{|z-z_0|\le R\}$ מוכל כולו ב- D .
הוכיחו כי $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0+R\cdot e^{i\theta}\right)d\theta$.

9) חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{2+\sin(2\theta)}d\theta$.

10) הוכיחו: $n\in\mathbb{N}$ $\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n}(\theta)d\theta=\frac{2\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

11) חשבו את האינטגרל $\int\limits_C \frac{z}{z^2+1}dz$ כאשר $C=\{z\in\mathbb{C} \mid \ |z|=2\ ,\ \operatorname{Im}(z)\ge 0\}$.

12) חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)}$ כאשר $a>b>0$.

13) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1}\frac{Log\left(1+\frac{z}{3}\right)}{z}dz$.

14) תהי $f(z)=u+iv$ הולומורפית בתחום $|z|<1$ כך ש- $u^2(0)=v^2(0)$.
הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\int_0^{2\pi}u^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}v^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta$.

15) תהי $f(z)=u+iv$ הולומורפית בתחום $D=\{z\in\mathbb{C} \mid \ |z|<1\}$.
הוכיחו כי לכל $0<r<1$ ולכל $0<|a|<r$ מתקיים

$$\oint\limits_{|z|=r}\frac{\operatorname{Re}(z)}{z-a}f(z)dz=\pi i\cdot\left(\left[a+\frac{r^2}{a}\right]f(a)-\frac{r^2}{a}\cdot f(0)\right).$$

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$
2) $2\pi e^2 i$
3) $2\pi i\cdot\frac{\sin\left(2^2\right)}{2}$
4) $2\pi i\cdot\frac{1}{3}$
5) $\pi i-2\pi ei$
6) $-\frac{\sin(2)\pi i}{2}$
7) $\pi i\cdot\left(\frac{17}{12}-\frac{3e}{4}\right)$
8) הוכחה.
9) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
10) הוכחה.
11) πi
12) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$
13) 0
14) הוכחה.
15) הוכחה.

נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin(z)}{(z-i)^3}dz$.

2) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}dz$.

3) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2}dz$.

4) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

5) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3}dz$.

6) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=6} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

7) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)^2(z-4)}dz$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

2) $-\pi i$

3) $-2\pi i\cdot\sin(\pi)$

4) $-\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}\pi i$

5) $-2\pi^2 i$

6) $-\frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

7) 0

אי-שיוויונות אינטגרליים (משפט הערכה):

שאלות:

הוכיחו את אי השוויונות הבאים:

1) $\left|\int_C \frac{z^3}{z^2+1}dz\right| \le \frac{81\pi}{8}$, כאשר $C:\{|z|=3\ ,\ \ \mathrm{Re}(z)>0\}$.

2) $\left|\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1}dz\right| \le \frac{6\pi}{8}$

3) $\left|\int_C e^{z^2}dz\right| \le \sqrt{8}$, כאשר C הינה מסילת הקו הישר מ- 0 עד $2+2i$.

4) $\left|\int_C \frac{z^2}{\sin(z)}dz\right| \le \frac{\pi^2}{2}+2$, כאשר C הוא הקטע הישר המתחיל בנקודה $\frac{\pi}{2}+i$ ומסתיים בנקודה $\frac{\pi}{2}-i$.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)dx=\sqrt{\pi}e^{-b^2}$ עבור $b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ו- $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx=\pi$.

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^6(x)}{x^6}dx$.

5) הוכיחו כי $\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a+b\cos\theta)^2}d\theta=2\pi\cdot\frac{a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$ עבור $a>b>0$.

6) תהי $f(z)=\frac{1}{(1+az)^2}+\frac{1}{(1+bz)^2}$ כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ קבועים המקיימים $|a|<1$, $|b|<1$ שונים מאפס. נניח כי $|f(z)|\le 3$ לכל $|z|=1$. הוכיחו כי $|a^n+b^n|\le\frac{3}{n+1}$ לכל $n\ge 0$.
רמז: התבוננו ב- $|f^{(n)}(0)|$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) $\frac{11\pi}{20}$
5) הוכחה.
6) הוכחה.

פונקציות קדומות:

שאלות:

1) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

2) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^n}$ $(n\geq 2)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

3) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$? האם יש לה קדומה שם?

4) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$? האם יש לה קדומה שם?

5) הוכיחו כי לפונקציה $f(z)=\frac{1}{z(z^2-\pi^2)}$ יש קדומה בתחום $D=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|>\pi\}$.

6) נסמן $I=\int_{\Gamma}\frac{2z}{z^2+1}dz$ כאשר $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|=2\ ,\ \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$ בכיוון החיובי.

א. האם לאינטגרנד $\frac{2z}{z^2+1}$ יש פונקציה קדומה בתחום פשוט קשר המכיל את Γ ?

ב. חשבו את I .

7) נניח כי b , a מספרים מרוכבים בחצי המישור השמאלי, כלומר $\mathrm{Re}(a)<0\ ,\ \mathrm{Re}(b)<0$.
הוכיחו כי $|e^a-e^b|<|a-b|$, $(a\neq b)$.

8) נניח כי $g(z)$, $f(z)$ פונקציות שלמות המקיימות $f^2(z)+g^2(z)=1$ לכל $z\in\mathbb{C}$. הוכיחו
כי קיימת פונקציה שלמה $h(z)$ כך שמתקיים: $f(z)=\cos(h[z])$ ו $g(z)=\sin(h[z])$.

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$

2) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור γ המוכל בתחום Ω.

3) π

4) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור בתחום.

5) הוכחה.

6) א. לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור בתחום. ב. $2\pi i$

7) הוכחה.

8) הוכחה.

התכנסות במש של סדרת פונקציות הולומורפיות:

שאלות:

1) יהי $a>0$. הוכיחו כי הפונקציה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-a\cdot n^2 z}$ הולומורפית ב- $\mathrm{Re}(z)>0$.

2) יהי $a>0$. הוכיחו כי הפונקציה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^z}$ הולומורפית ב-$\mathrm{Re}(z)>1$.

הערה: $(a+n)^z$ מוגדרת באופן הבא $(a+n)^z=e^{z\cdot Log(a+n)}$ ו-$Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוג.

3) פונקציית זטא של רימן מוגדרת כך $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$.

הראו כי היא הולומורפית בתחום $\mathrm{Re}(z)>1$.

הערה: n^z מוגדרת באופן הבא: $n^z=e^{z\cdot Log(n)}$ ו-$Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוג.

4) תהי $f(x):(0,\infty)\to R$ רציפה וחסומה. נגדיר $L[f](z)=\int_0^{\infty} f(x)e^{-z\cdot x}dx$.

נתון כי $L[f](z)$ רציפה בתחום $\mathrm{Re}(z)>0$, הוכיחו כי היא הולומורפית שם.

תשובות סופיות:

ראו פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

משפט מוררה:

שאלה:

1) תהי $f_n(z)$ סדרת פונקציות אנליטיות המתכנסת במ"ש לפונקציה $f(z)$ בתחום D פשוט קשר. הוכיחו כי:

א. $f(z)$ אנליטית בתחום D.

ב. מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n'(z)=f'(z) \qquad \forall z\in D$

הערה: תחום זה קבוצה פתוחה וקשירה.

תשובה סופית:

ראו פתרון מלא בסרטון הוידאו.

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 6 - תכונות של פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

משפט ליוביל:

רקע:

משפט:

אם $f(z)$ פונקציה שלמה (אנליטית בכל $\mathbb{C}$) וחסומה ב- $\mathbb{C}$ (כלומר קיים $M>0$ כך ש- $|f(z)|<M$ $\quad \forall z\in\mathbb{C}$) אז $f(z)$ פונקציה קבועה.

שאלות:

1) מצאו פונקציה שלמה, המקיימת את אי-השוויון $|\sin(z)-z\cdot f(z)|<2$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

2) הוכיחו כי קיים $z\in\mathbb{C}$ עבורו $|\cos(z)|>1$ ע״י שימוש במשפט ליוביל.

3) נתונה פונקציה שלמה $f(z)=u+iv$, המקיימת $v\le 0$ (לכל z).
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-i\cdot f(z)}$.

4) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $u\le 0$ (לכל z).
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{f(z)}$.

5) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $u\ge 0$ (לכל z).
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-f(z)}$.

6) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $v\ge 0$ (לכל z).

7) נתונה פונקציה שלמה $f(z)$, המקיימת $|f(z)|\ge 1$ לכל z.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.
רמז: התבוננו בפונקציה $\frac{1}{f(z)}$.

8) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $v\le 0$ (לכל z).
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-i\cdot f(z)}$.

9) הוכיחו כי כל הפונקציות השלמות $f(z)$, המקיימות $|f(z)| \le 4+5|z|^{\frac{4}{5}}$ $\forall z \in \mathbb{C}$
הן פונקציות קבועות.

10) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $|f(z)| \ge e^{\operatorname{Re}(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.
הוכיחו שקיים קבוע C מרוכב, כך ש- $f(z) = C \cdot e^{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

11) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $f(0)=0$ ו- $f(1)=1$.
הוכיחו שקיים C מרוכב, כך ש- $|f(c)|>2$.

12) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $\lim_{z\to\infty} f(z) = 2$.
הוכיחו כי $f(z) \equiv 2$.

13) נתון כי $f(z)=u+iv$ שלמה המקיימת $u \cdot v \ge 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
הוכיחו כי $f(z)$ פונקציה קבועה.

14) נתון כי $f(z)=u+iv$ שלמה המקיימת $u \ge v$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
הוכיחו כי $f(z)$ פונקציה קבועה.

15) האם קיימת פונקציה אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ כך ש-

$$|f(z)| \ge \frac{1}{\sqrt{|z|}} \qquad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \text{ ?}$$

הערה: ניתן להשתמש במשפט רימן אם $g(z)$ אנליטית בסביבה נקובה של z_0
וחסומה שם אז היא אנליטית גם ב- z_0.
(הכוונה שניתן להגדיר אותה ב- z_0 כך שתהיה אנליטית שם).

16) הוכח או הפרך: אם $f(z)$ שלמה שאינה קבועה אז קיים $z \in \mathbb{C}$ כך
ש- $\operatorname{Re} f(z) > |f(z)|^2$.

17) הוכיחו כי אם $f(z)$ שלמה שאינה קבועה התמונה $f[\mathbb{C}]$ צפופה ב- $\mathbb{C}$.
הגדרה: קבוצה $A \subseteq \mathbb{C}$ תקרא צפופה ב- $\mathbb{C}$ אם ורק אם לכל $z_0 \in \mathbb{C}$ ולכל $R>0$
מתקיים $D(z_0,R) \cap A \ne \varnothing$.

18) ידוע כי קיימת פונקציה $D(0,1) \to T(z):\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ אנליטית המקיימת $T'(z)\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.
הוכיחו כי כל פונקציה שלמה $f(z)$ המקיימת $f(z)\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ לכל $z\in\mathbb{C}$ הינה פונקציה קבועה.

19) נניח כי $f(z)$ שלמה ומקיימת $f(z)=f(z+1)=f(z+i)$ לכל $z\in\mathbb{C}$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

תשובות סופיות

1) $$f(z)=\begin{cases}\frac{\sin(z)}{z} & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) ראו וידאו.

5) ראו וידאו.

6) ראו וידאו.

7) הוכחה.

8) ראו וידאו.

9) הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

14) הוכחה.

15) לא קיימת.

16) הוכחה.

17) הוכחה.

18) הוכחה.

19) הוכחה.

עקרון היחידות:

שאלות:

1) הוכיחו כי אם $f(z)$ שלמה ומקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, אז $f(z)\equiv z$.

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $D=\{z \mid |z|<1\}$ ומקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
מצאו את $f(z)$.

3) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $D=\{z \mid |z|<1.5\}$,
ומקיימת $f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{nz}{nz-0.5}dz$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
מצאו את $f(z)$.

4) כמה פונקציות אנליטיות $f(z)$ ב- $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$,
מקיימות $f\left(\frac{1}{3n-1}\right)=\frac{2}{n}$ $\forall n\geq 2$?

5) מצאו את כל הפונקציות האנליטיות $f(z)$ ב- $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$,
המקיימות $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sin(\pi n)$ $\forall n\geq 4$.

6) מצאו (אם ישנן) את כל הפונקציות האנליטיות $f(z)$ ב- $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$
המקיימות
$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}\frac{1}{n+1} & n=2k\\ \frac{1}{n+2} & n=2k+1\end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

7) הוכח או הפרך:
לא קיימת פונקציה אנליטית $f(z)$ בעיגול היחידה הפתוח D,
בעלת אינסוף אפסים ב- D, שאינה פונקציית האפס.

8) הוכח או הפרך:
קיימת פונקציה אנליטית בתחום $1<|z|<3$ כך שלכל x ממשי המקיים $1<|x|<3$ מתקיים $f(x)=|x|^3$.

9) נתונות $f(z),g(z)$ אנליטיות בתחום D ויהיו $a,b\in D$.
הוכיחו כי אם $\left(f(z)-a\right)\left(g(z)-b\right)=0$ לכל $z\in D$ אז בהכרח $f(z)\equiv a$ או $g(z)\equiv b$.

10) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $D(z_0,R)$ עבור $z_0\in\mathbb{C}$ ו-$R>0$.
נניח בנוסף כי $f'(z_0)\neq 0$.
הוכיחו כי קיים $r>0$ כך ש- $\oint\limits_{|z-z_0|=r}\frac{1}{f(z)-f(z_0)}dz=\frac{2\pi i}{f'(z_0)}$.
הערה: תרגיל זה דורש שימוש במשפט השארית.

11) הוכח או הפרך:
נסמן $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<|z|<1\}$.
נניח כי $f(z)$ אנליטית ב-D כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)=n$ לכל $n>1$ וכי $f(z)$ בעלת קוטב ב- $z=0$ אז בהכרח $f(z)=\frac{1}{z}$ לכל $z\in D$.
הערה: תרגיל זה דורש ידע על נקודות סינגולריות.

12) הוכח או הפרך:
נתונה $f(z)$ אנליטית בתחום $|z|>1$ ונתון כי לכל $z\in(1,\infty)$ מתקיים ש-$f(z)$ ממשי.
אז בהכרח גם לכל $z\in(-\infty,-1)$ מתקיים ש- $f(z)$ ממשי.

13) נניח כי $f(z)$ רציפה ב-$|z|<1$ ומקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$ ו-$f\left(\frac{i}{2}\right)=0$.
הוכיחו כי $f(z)$ אינה אנליטית ב-$|z|<1$.

14) (אתגר)
נניח כי $f(z)$ רציפה ב-$\overline{D(0,1)}$ ואנליטית ב-$D(0,1)$ המקיימת $|f(z)|=1 \quad \forall|z|=1$ הוכיחו כי יש מספר סופי בלבד של נקודות ב-$D(0,1)$ בהן $f(z)$ מתאפסת.
רמז: היעזרו במשפט בולצאנו וייארשטראס.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f\left(z\right)=\frac{z}{1+z}$

3) $f\left(z\right)=z$

4) $f\left(z\right)=6\frac{z}{z+1}$

5) ראו בווידאו.

6) לא קיימות כאלו פונקציות.

7) הפרכה. דוגמא נגדית: $f\left(z\right)=\sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$

8) לא קיימת כזו פונקציה.

9) הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

14) הוכחה.

עקרון המקסימום והמינימום:

שאלות:

1) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $|f(z)|$, כאשר $f(z)=e^{-z^2}$ בתחום $D=\{z \mid |z|<1\}$.

2) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $|f(z)|$, כאשר $f(z)=e^{-z^2}$ בתחום $D=\{z \mid |z|\le 3\}$.

3) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $|f(z)|$, כאשר $f(z)=\cos(z)$ בתחום $D=\{z \mid 0\le \operatorname{Re}\{z\}\le 2\pi \ ,\ 0\le \operatorname{Im}\{z\}\le 2\pi\}$.

4) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $|f(z)|$, כאשר $f(z)=e^{z^2}$ בתחום $D=\{z \mid |z|\le 1\}$ ואת כל הנקודות בהן הוא מתקבל.

5) תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול $|z|\le R$ ומקיימת $|f(z)|>a \qquad \forall |z|=R$
הוכיחו כי אם $|f(0)|<a$ אז בעיגול $|z|<R$ יש לפחות אפס אחד של $f(z)$.

6) (עקרון המינימום)
תהי $f(z)$ אנליטית בתחום (קבוצה פתוחה וקשירה) U ומקיימת $|f(z)|>0$.
הוכיחו:
א. אם $f(z)$ אינה קבועה אז לא קיימת נקודה $z_0\in U$ כך שהפונקציה $|f(z)|$ מקבלת מינימום ב- z_0.
ב. אם $|f(z)|$ מקבלת מינימום ב- U אז היא קבועה.
ג. הערך המינימלי של $|f(z)|$ בתחום קומפקטי Ω מתקבל על השפה בהנחה כי $f(z)$ אנליטית ולא מתאפסת ב- Ω.

7) תהי $f(z)$ אנליטית ב- $|z|\le 1$ ונניח שאינה מתאפסת שם.
נניח גם כי לכל $|z|=1$ מתקיים $|f(z)|=1$.
א. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.
ב. האם סעיף א' נכון גם ללא הנחה ש- $f(z)$ אינה מתאפסת ב- $|z|\le 1$?

8) (עקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות).
נניח כי $f(z)=u+iv$ אנליטית בתחום קומפקטי Ω.
הוכיחו כי $u(x,y)$ מקבלת ערך מקסימלי על השפה $\partial\Omega$.

9) (עקרון המינימום לפונקציות הרמוניות).
נניח כי $f(z)=u+iv$ אנליטית בתחום קומפקטי Ω.
הוכיחו כי $u(x,y)$ מקבלת ערך מינימלי על השפה $\partial\Omega$.

10) נניח גם כי $g(z)$, $f(z)$ אנליטיות ב- $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\le 1\}$.
נניח כי לכל $|z|=1$ מתקיים $\mathrm{Re}[f(z)]=\mathrm{Re}[g(z)]$.
הוכיחו כי קיים קבוע $c\in\mathbb{C}$ כך ש- $f(z)=g(z)+c$ לכל $z\in D$.

11) יהי $p(z)=\sum_{k=0}^{k=n}a_k z^k$ פולינום ממעלה n $(a_n\neq 0)$.
נתון כי לכל $|z|=1$ מתקיים $|p(z)|\le 1$.
הראו כי לכל $|z|\ge 1$ מתקיים $|p(z)|\le |z|^n$.
רמז: הראו כי הפונקציה $f(z)=z^n p\left(\frac{1}{z}\right)$ היא פונקציה שלמה ומצאו לה חסם בדיסק היחידה.
הערה: ניתן להשתמש בעובדה: אם $f(z)$ אנליטית בסביבה נקובה של z_0 והגבול $\lim_{z\to z_0} f(z)$ קיים וסופי אזי $f(z)$ אנליטית גם ב- z_0.
(הכוונה שניתן להגדיר אותה ב- z_0 כך שתהיה אנליטית שם).

12) יהי $R>0$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום:
$A=\{z=x+iy\,|\,-R\le x\le R,-R\le y\le R\}$.
נסמן את שפות התחום כך:

$$l_3=\{z=-R+iy\,|\,-R\le y\le R\} \qquad l_1=\{z=R+iy\,|\,-R\le y\le R\}$$
$$l_4=\{z=x-iR\,|\,-R\le x\le R\} \qquad l_2=\{z=x+iR\,|\,-R\le x\le R\}$$

הוכיחו כי $|f(0)|\le\frac{1}{4}\left(\max_{l_1}|f(z)|+\max_{l_2}|f(z)|+\max_{l_3}|f(z)|+\max_{l_4}|f(z)|\right)$.
רמז: התבוננו בפונקציה $g(z)=\frac{1}{4}\left(f(z)+f(-z)+f(iz)+f(-iz)\right)$.

13) (אתגר)
הוכיחו כי משפט ההעתקה הפתוחה: אם $A\subset\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה ו- $f(z)$ אנליטית ולא קבועה ב- A אז התמונה $f[A]$ פתוחה.

14) נסמן $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$ ונניח כי:
- $f(z)$ הולומורפית ב- $D(0,1)$.
- לכל $z\in D(0,1)$ מתקיים $|f(z)|\le 1$.
- $f(0)=0$.

הוכיחו כי $|f(z)|\le|z|$ לכל $z\in D(0,1)$ וכי $|f'(0)|\le 1$ ואת ההערה הבאה.
הערה: אם בנוסף ידוע כי קיימת נקודה $z_0\in D(0,1)$ (שאינה אפס) כך ש- $|f(z_0)|=|z_0|$ אז קיים קבוע $c\in\mathbb{C}$ כך ש- $f(z)=c\cdot z$.

15) נניח כי $f(z)$ הולומורפית בתחום $\overline{D(0,1)}=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\le 1\}$ ומקיימת $|f(z)|=1$ לכל $|z|=1$.
נניח בנוסף כי $f(z)=0$ אם ורק אם $z=0$.
הוכיחו כי קיימים קבועים c ו- k כך ש- $f(z)=c\cdot z^k$.
הערה: ניתן להשתמש בעקרון המינימום.

16) (נכון או לא נכון)
נגדיר $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,1<|z|<2\}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית ב- A ורציפה ב- $\overline{A}$.
נתון כי:
$$|f(z)|=1 \qquad \forall|z|=1$$
$$|f(z)|=8 \qquad \forall|z|=2$$
אזי בהכרח $|f(z)|\le|z|^3$ לכל $z\in A$.

17) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $|z|\le 1$ ומקיימת:
- $|f(z)|\le 1 \qquad \forall z\in\{\operatorname{Im}(z)\ge 0,|z|=1\}$
- $|f(z)|\le 3 \qquad \forall z\in\{\operatorname{Im}(z)\ge 0,|z|=2\}$

הוכיחו כי $|f(0)|\le\sqrt{6}$.
רמז: התבוננו בביטוי $f(z)f(-z)$.

18) יהי $r>0$.
נגדיר $C_r=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=r\}$ ויהיו $z_1,\dots,z_n\in C_r$.
הוכיחו כי קיים $z\in C_r$ כך ש- $\prod_{k=1}^{k=n}|z-z_k|>r^n$.

תשובות סופיות:

1) לא קיים.
2) e^9
3) 268
4) $|f(1)|=|f(-1)|=e$
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) א. הוכחה. ב. לא.
8) הוכחה.
9) הוכחה.
10) הוכחה.
11) הוכחה.
12) הוכחה.
13) הוכחה.
14) הוכחה.
15) הוכחה.
16) נכון.
17) הוכחה.
18) הוכחה.

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 7 - טורים

תוכן העניינים

טורי טיילור ומקלורן:

שאלות:

1) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\sin(z+1)$ סביב $z=0$ ומצאו תחום התכנסות.

2) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\frac{1}{z}$ סביב $z=i$ וציינו את רדיוס ההתכנסות.

3) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{2i}{2+i+z}$ סביב $z_0\neq-(2+i)$ בתחום $|z-z_0|<|2+i+z_0|$.

4) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(1-z)^3}$ לטור חזקות סביב $z_0\neq 1$ בתחום $|z-z_0|<|1-z_0|$.

5) נניח כי $f(z)$ שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ ומתקיים $f'(0)=1$.
חשבו את $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos(z)}{f(z)}dz$.

תשובות סופיות:

1) $z\in\mathbb{C}$ $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos(1)\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\sin(1)\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right)$.

2) $|z-i|<1$ $f(z)=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{i}\right)^n(z-i)^n$.

3) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i(-1)^n}{(2+i+z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$.

4) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(n+1)(n+2)}{(1-z_0)^{n+3}}(z-z_0)^n$.

5) $2\pi i$.

טורי לורן:

שאלות:

1) פתחו את הפונקציה לטור לורן סביב $z_0=0$ בכל התחומים האפשריים $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

2) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<2$ ובתחום $|z|>2$.

3) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=-1$ בתחומים הבאים: $0<|z+1|<2$ ו- $|z+1|>2$.

4) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+2)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=-3$ בכל התחומים האפשריים.

5) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $1<|z|<3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

6) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|>3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

7) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<1$.

8) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<1$ ומצאו את המקדם a_{-1}.

9) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=i$ בתחום $0<|z-i|<2$ ומצאו את המקדם a_{-1}.

10) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=i$ בתחום $|z-i|>2$.

11) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-4)}$ לטור לורן סביב $z_0=1$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $z=5$.

12) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $1-3i$.

13) נניח כי $|a|<1$ ונגדיר את הפונקציה $f(z)=\frac{a}{z-a}$ (כאשר a מספר ממשי).

א. פתחו פונקציה זו לטור לורן בטבעת $|a|<|z|<\infty$.

ב. הוכיחו את הזהות $\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(n\theta)=\frac{a\cos(\theta)-a^2}{1-2a\cos(\theta)+a^2}$.

14) תהי $a\in\mathbb{C}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ ונניח כי מתקיים $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$.

הוכיחו כי לכל $r>0$ מתקיים $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz$.

15) נסמן $\sum_{-\infty}^{\infty}a_nz^n$ פיתוח לטור לורן של $f(z)=\frac{z}{e^{z^2}-1}$ סביב $z_0=0$ בתחום $0<|z|<r$.

א. מצאו מהו ה- r המקסימלי.

ב. מצאו את a_n לכל $n\le 4$.

הערה: תרגיל זה דורש ידע בסיווג של נקודות סינגולריות.

16) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1}z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)dz$.

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

17) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1}e^{\frac{1}{z}}dz$.

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

תשובות סופיות:

1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $\quad |z|<1$

$f(z)=-\left(\frac{1}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$ $\quad |z|>1$

2) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$ $\quad |z|<2$

$f(z)=-\left(\frac{2}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$ $\quad |z|>2$

3) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1}$ $\quad 0<|z+1|<2$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z+1)^{n+2}}$ $\quad |z+1|>2$

4) $f(z)=-\frac{1}{(z+3)}\sum_{n=0}^{\infty}(z+3)^n$ $\quad 0<|z+3|<1$

$f(z)=\frac{1}{(z+3)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+3)^n}$ $\quad |z+3|>1$

5) $f(z)=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n}$ $\quad 1<|z|<3$

6) $f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}}$ $\quad |z|>3$

7) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6\cdot 3^n}\right]z^n$ $\quad |z|<1$

8) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ $\quad |z|<1$

$a_{-1}=0$

9) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}(z-i)^{n-1}$ $\quad 0<|z-i|<2$

$a_{-1}=\frac{1}{2i}$

10) $f(z)=\frac{1}{(2-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n$ $\quad 2<|z-i|$

11) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+2}}$ $\quad |z-1|>3$

12) $|z|>3$ $\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$

13) א. $|a|<|z|<\infty$ $\quad f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}$ $\quad$ ב. הוכחה.

14) הוכחה.

15) א. $r=\sqrt{2\pi}$

ב. $a_n=0 \ \ \forall n\le -2$, $a_{-1}=1$, $a_0=0$, $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{12}$, $a_4=0$.

16) $\frac{\pi i}{12}$

17) $2\pi i$

טורים כלליים:

שאלות:

1) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$.

2) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(1-i)^n}$.

3) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (z-1)^n}$.

4) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$.

5) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$.

תשובות סופיות:

1) $|z|>1$

2) $|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$

4) $2<|z|<4$

5) $\mathrm{Re}(z)<0$

טורים מספריים:

שאלות:

1) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}$.

2) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin(in)}{3^n}$.

3) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^n$.

4) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2+i^n}$.

5) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+i^n}$.

תשובות סופיות:

1) מתבדר.
2) מתכנס.
3) מתבדר.
4) מתבדר.
5) מתכנס.

מבחן ויירשטראס להתכנסות במידה שווה:

שאלות:

1) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ מתכנס במידה שווה ב- $U=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<r\}$ כאשר $0<r<1$.

2) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ מתכנס במידה שווה ב- $U=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 1\}$.

3) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(z^2-1\right)^n}$ מתכנס במידה שווה ב- $U=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\ge 2\}$.

4) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{z^n+1}$ מתכנס במידה שווה ב- $U=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le r\}$ כאשר $0<r<1$.

5) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ מתכנס במידה שווה ב- $U=\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)\ge 2\}$,
(כאשר n^{-z} מוגדרת על ידי הענף הראשי של הלוג).

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.

קריטריון קושי – הדמרד:

שאלות:

1) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$.

2) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n$.

3) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(2n+1)}(z-3n)^n$.

תשובות סופיות:

1) $R=1$

2) $R=\infty$

3) $R=3$

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 8 - נקודות סינגולריות

תוכן העניינים

אפסים של פונקציות אנליטיות:

שאלות:

1) קבעו את סדר האפס של הפונקציה $f(z)=z\sin(z)$ בנקודה $z=0$.

2) קבעו את סדר האפס של הפונקציה $f(z)=z\sin(z^3)$ בנקודה $z=0$.

3) נניח כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר n.
נניח כי הפונקציה $g(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר m.
הוכיחו כי הפונקציה $h(z)=f(z)g(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר $n+m$.

4) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $h(z)=z^{20}\sin(z)$ בנקודה $z_0=0$.

5) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $f(z)=e^{\sin(z)}-\sin^2(z)-1$ בנקודה $z_0=0$.

6) נניח כי לפונקציה $f(z)$ יש אפס מסדר 7 בנקודה $z_0=0$.
נניח כי לפונקציה $g(z)$ יש אפס מסדר 3 בנקודה $z_0=0$.
מצאו את סדר האפס של הפונקציה $h(z)=f(z)+g(z)$.

7) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $h(z)=6\sin(z^3)+z^{12}(z^6-6)$ בנקודה $z_0=0$.

8) הוכיחו כי לא קיימת $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

תשובות סופיות:

1) $N=2$
2) $N=2$
3) הוכחה.
4) $N=21$
5) $N=1$
6) $N=3$
7) $N=3$
8) הוכחה.

מיון נקודות סינגולריות:

שאלות:

1) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

2) נניח כי $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו-$g(z)$ אנליטיות בסביבת $z=0$.
נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 7 של $f(z)$.
נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 11 של $g(z)$.
מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב-$z=0$?

3) נניח כי $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו-$g(z)$ אנליטיות בסביבת z_0.
נניח כי z_0 זה אפס מסדר n של $f(z)$.
נניח כי z_0 זה אפס מסדר m של $g(z)$.
מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב-z_0? חלקו למקרים $n\geq m$ ו-$n<m$.

א. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1-\cos(z)}{z^2}$.

ב. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

4) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$.

5) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$.

6) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1}{e^{-z}-1}+\frac{1}{z}$.

7) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

8) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1}{z^2-1}\cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right)$.

9) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=e^{\frac{z}{z-2}}$.

10) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$. האם הן מבודדות?

11) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\cot(z)$.

12) נתון כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
נניח כי 0 זה קוטב מסדר m של $f(z)$ ובנוסף נניח כי $-1\notin f\left[\mathbb{C}\setminus\{0\}\right]$.
מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות של $g(z)=\frac{f(z)-1}{f(z)+1}$.

13) מצאו את הקטבים והאפסים בתחום $|z|<4$ של הפונקציה $f(z)=\frac{(z-2)^2}{\left(e^{2z}-1\right)^2 z^3}$.

14) מיינו את הנקודות $z=0$ ו- $z=\frac{\pi}{4}$ עבור $f(z)=\frac{\tan(z)}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$.

15) תהיינה $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציות שלמות שאינן קבועות.
נניח כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)|\le|g(z)|$.

א. הוכיחו שכל נקודה סינגולרית של $\frac{f(z)}{g(z)}$ הינה סליקה.

ב. הוכיחו כי $f(z)=c\cdot g(z)$ כאשר c קבוע המקיים $|c|\le 1$.

16) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{\left(z^2-\frac{1}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$.

17) הוכיחו כי הנקודה $z_0=i$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)=\cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$.

18) תהי $f(z):D\to\mathbb{C}$ אנליטית כאשר $D=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<|z-z_0|<1\right\}$.
נניח כי מתקיים $|z-z_0|^a\,|f(z)|\le 1$ לכל $z\in D$ עבור $0\le a<1$.
הוכיחו כי z_0 נקודה סינגולרית סליקה של $f(z)$.

19) (אתגר)

נתונה $f(z)$ אנליטית בתחום $0<|z|<1$ המקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n!}$.

הוכיחו כי $z=0$ זו נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$.

20) (אתגר)

הוכיחו כי אם z_0 זה קוטב של $f(z)$ אז היא בהכרח עיקרית של $g(z)=e^{f(z)}$.

רמז: רשמו את $f(z)$ באופן הבא $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ כאשר $\varphi(z_0)=r_0e^{i\alpha}$.

התבוננו בסדרות הבאות: $w_n=z_0+\frac{1}{n}e^{i\frac{\pi+\alpha}{m}}$, $z_n=z_0+\frac{1}{n}e^{i\frac{\alpha}{m}}$.

תשובות סופיות:

1) $z=1$ קוטב מסדר 1.

2) $z=0$ קוטב מסדר 4.

3) אם $n\ge m$ אז z_0 נקודה סינגולרית מסוג סליקה של $h(z)$.
ואם $n<m$ אז z_0 קוטב מסדר $m-n$ של $h(z)$.

4) $z=0$ עיקרית.

5) $z=0$ עיקרית.

6) $z_k=2\pi ik$ קטבים מסדר 1.

7) $z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$ קטבים מסדר 1.

8) $z=-1$ עיקרית ו- $z=1$ קוטב מסדר 1.

9) $z=2$ עיקרית.

10) $z=0$ לא מבודדת ו- $z_k=\frac{1}{\pi k}$ קטבים מסדר 1.

11) $z=0$ סליקה ו- $z_k=\pi k\ne 0$ קטבים מסדר 1.

12) $z=0$ סליקה.

13) $z=2$ אפס מסדר 2, $z=0$ קוטב מסדר 5, $z=\pm\pi i$ קטבים מסדר 2.

14) $z=0$ סליקה, $z=\frac{\pi}{4}$ קוטב מסדר 1.

15) א) הוכחה
ב) הוכחה

16) $z=0$ לא מבודדת.
$(k\ne 0,2,-2)$ $z_k=\frac{1}{k}$ קטבים מסדר 1.
$z=\pm\frac{1}{2}$ סליקות.

17) הוכחה.

18) הוכחה.

19) הוכחה.

20) הוכחה.

מיון נקודות סינגולריות באינסוף:

שאלות:

1) מיינו את הנקודה הסינגולרית ∞ של הפונקציה $f(z)=\frac{z^2}{1+z}$.

2) מיינו את הנקודה הסינגולרית ∞ של הפונקציה $f(z)=e^z$.

תשובות סופיות:

1) ∞ זה קוטב מסדר 1 של $f(z)$.

2) ∞ זאת נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$.

משפט קסורטי – וייארשטרס:

שאלות:

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הנקודה $z_0=i$ היא נקי' סינגולרית עיקרית של $f(z)=\cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$.

ב. הסיקו כי קיים מספר $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$\left|\cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right)-100\tan^2(z)+e^{-z^2}-5i\right|<1$.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה.
ב. הוכחה.

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 9 - משפט השארית

תוכן העניינים

מציאת שארית:

שאלות:

חשבו את השאריות של הפונקציות בנקודות הבאות:

1) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+3}{z+2}, z=-2\right)$

2) $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+9}, z=3i\right)$

3) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=1\right)$

4) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=-1\right)$

5) נניח כי לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ יש קוטב פשוט ב- z_0 כאשר ונניח כי $g'(z_0)\neq 0$.
הוכיחו כי $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right)=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

6) $\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z}, 0\right)$

7) $\operatorname{Res}\left(\frac{\sin(z+1)}{z}, 0\right)$

8) חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה $f(z)=\frac{\tan(z)}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$

9) חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה $f(z)=\frac{1-\cos(z)}{z^3(z-\pi)}$.

10) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה בעלת n אפסים בדיוק.
הוכיחו שכל הנקודות הסינגולריות של $\frac{f'(z)}{f(z)}$ הן קטבים פשוטים וחשבו את השאריות בנקודות אלו.

תשובות סופיות:

1) 1

2) $\frac{1}{6i}$

3) $\frac{3}{8}$

4) $-\frac{3}{8}$

5) הוכחה.

6) 1

7) $\sin(1)$

8) $\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{\pi}{2}+\pi k\right]=-\frac{1}{\left[\frac{\pi}{2}+\pi k\right]\left[\frac{\pi}{4}+\pi k\right]}$

9) $\operatorname{Res}\left[f(z),\pi\right]=\frac{2}{\pi^3}$ $\qquad$ $\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=-\frac{1}{2\pi}$

10) $\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_k\right]=m_k$ כאשר z_k אפס מסדר m_k של $f(z)$.

אינטגרלים מרוכבים :

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים :

1) $\oint\limits_{|z|=1} z\tan(\pi z)\,dz$

2) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)}\,dz$

3) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}\,dz$

4) $\oint\limits_{|z|=1} z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$

5) $\oint\limits_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)+e^{z^2}\cos(z)\,dz$

6) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי לכל מסלול C פשוט וסגור שאינו חותך את הראשית, מתקיים $\oint\limits_C f\left(\frac{1}{z^2}\right)dz=0$.

7) $(a>1)$ $\quad \oint\limits_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}\,dz$

8) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{(1+z)^5\sinh(z)}{z^6}\,dz$

9) $\oint\limits_{|z|=5} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2}\,dz$

10) $\oint\limits_{|z|=6} \cot(z)\,dz$

11) $\oint\limits_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{3}{z}\right)\cos\left(e^{z^2+\pi}+\ln(2)\right)\,dz$

12) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ שם יש לה אפס מסדר 2 ומתקיים $f''(0)=7$.

חשבו $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{f(z)}\,dz$.

13) $\oint\limits_{|z|=1} z^4 \sin(\bar{z})\,dz$

14) $\oint\limits_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$

15) חשבו את המקדמים של החזקות השליליות בפיתוח של $f(z)=\frac{1}{\cos(z)-1}$

לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $0<|z|<2\pi$.

הערה: אם $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ טור לורן של $f(z)$ בתחום $R_1<|z-z_0|<R_2$ אז ניתן

לקבל את המקדמים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ כאשר $R_1<r<R_2$.

16) הוכיחו את עקרון הארגומנט:

אם $f(z)$ אנליטית בתחום D פרט למספר סופי של קטבים ורציפה על

השפה γ ואינה מתאפסת שם על השפה אזי $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$ כאשר

N - מספר האפסים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D.

P - מספר הקטבים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D.

17) אם $n\in\mathbb{N}$ ו-$r>0$ כך ש-$n<r^2<n+1$ חשבו את האינטגרל $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}\frac{z}{e^{2\pi i z^2}-1}dz$.

18) חשבו $\int_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty}\frac{e^z}{(z+1)^4}dz$.

הערה: $\int_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty}\frac{e^z}{(z+1)^4}dz \overset{definition}{=} \lim_{R\to\infty}\int_{-iR}^{iR}\frac{e^z}{(z+1)^4}dz$ כאשר המסילה באינטגרל הימני היא מסילת הקו הישר מ- $-iR$ ל- iR.

תשובות סופיות:

1) $\oint_{|z|=1} z\tan(\pi z)dz=0$

2) $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z^3(z+1)}dz=2\pi i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$

3) $\oint_{|z-i|=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz=2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)$

4) $\oint_{|z|=1} z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz=-\frac{\pi i}{3}$

5) $\oint_{|z|=1}\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)+e^{z^2}\cos(z)dz=0$

6) הוכחה.

7) $\oint_{|z-a|=a}\frac{z}{z^4-1}dz=\frac{\pi i}{2}$

8) $\oint_{|z|=1}\frac{(1+z)^5\sinh(z)}{z^6}dz=\frac{267}{20}\pi i$

9) $\oint_{|z|=5}\frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2}dz=\pi\left[-3i\cdot e^i+2i-e\right]$

10) $\oint_{|z|=6}\cot(z)\,dz=6\pi i$

11) $\oint_{|z|=1}\sin(z)\sin\left(\frac{3}{z}\right)\cos\left(e^{z^2+\pi}+\ln(2)\right)dz=0$

12) $\oint_{|z|=1}\frac{\sin(z)}{f(z)}dz=\frac{4\pi i}{7}$

13) $\oint\limits_{|z|=1} z^4 \sin\left(\bar{z}\right) dz = \frac{2\pi i}{5!}$

14) $\oint\limits_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0$

15) $a_{-1} = -2 \;\;,\;\; a_{-2} = -2 \;\;,\;\; a_n = 0 \;\text{ for }\; n \le -3$

16) הוכחה.

17) $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r} \frac{z}{e^{2\pi i z^2} - 1} dz = 2n+1$

18) $\int\limits_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz = \frac{\pi i}{3e}$

מסילת חצי קשת מעגלית:

שאלות:

בכל התרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$$C_R=\{z=\mathrm{Re}^{i\theta}\,|\,0\le\theta\le\pi\}$$

$$\gamma=\{z=x\,|-R\le x\le R\}$$

1) חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma}\frac{1}{1+z^2}dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{1+z^2}dz=0$

ג. הסיקו מהסעיף הקודם כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R+\gamma}\frac{1}{1+z^2}dz$

2) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma}\frac{1}{1+z^4}dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{1+z^4}dz=0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

3) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2}$

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2}$

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3} dx$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1} dx$.

6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2} dx$

7) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2} dx$

8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2} dx$

9) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)}$

תשובות סופיות:

1) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2}dz=\pi$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

2) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4}dz=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

3) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz=\pi\sqrt{2}$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}dx=\frac{3\pi}{8}$

5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1}dx=\frac{14\pi}{3}$

6) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{\pi}{4}$

7) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx=-\frac{\pi}{27}$

8) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}dx=\frac{\pi}{6}$

9) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)}=\frac{5}{96}\pi$

מסילת מעגל היחידה:

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(2+\cos(\theta)\right)^2} d\theta$

2) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(3x)} dx$

3) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos(x)+b\sin(x)+c} dx$ עבור הפרמטרים הממשיים a,b,c המקיימים $c>\sqrt{a^2+b^2}=1$.

<u>הערה:</u> ניתן להשתמש בעובדה כי $\left|\sqrt{c^2-1}-c\right|<1$

4) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{\left(a+b\cos\varphi\right)^2} d\varphi$ עבור $a>b>0$

5) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x} dx$ עבור $|a|>1$

6) חשבו לכל $n\in\mathbb{N}$ את $\int_0^{2\pi} \left(1+2\cos\theta\right)^n \cos(n\theta) d\theta$

תשובות סופיות:

1) $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(2+\cos(\theta)\right)^2} d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

2) $$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(3x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

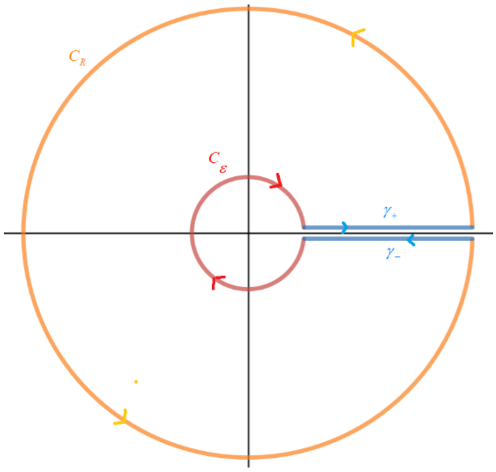
3) $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos(x)+\mathrm{bsin}(x)+\mathrm{c}} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2-1}}$$

4) $$\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+b\cos\varphi)^2} d\varphi = \frac{\pi ab}{\left(a^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

5) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+a}}$$

6) $$\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta)^n \cos(n\theta)\, d\theta = 2\pi$$

מסילת חור מנעול:



שאלות:

1) הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\pi$.

הדרכה:

נגדיר את המסלולים (כאשר $R>1$ ו- $0<\varepsilon<1$).

$C_\varepsilon=\{z=\varepsilon e^{i\theta}\mid 0+<\theta<2\pi-\}$ $\qquad$ $C_R=\{z=\mathrm{R}\,e^{i\theta}\mid 0+<\theta<2\pi-\}$

$\gamma_-=\{z=xe^{2\pi i}\mid x:R\to\varepsilon\}$ $\qquad$ $\gamma_+=\{z=xe^{0\cdot i}\mid x:\varepsilon\to R\}$

א. הוכיחו כי $\oint\limits_{\gamma_++C_R+\gamma_-+C_\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}dz=2\pi$ כאשר $\sqrt{z}$ מוגדר בתחום $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}dz=0$.

ג. הוכיחו כי $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}dz=0$.

ד. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\pi$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

הלמה של ז'ורדן:

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים על ידי שימוש בהלמה של ז׳ורדן:

1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$

הדרכה:

א. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{1+x^2}dx=\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx\right\}$

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{e}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9}dx$

הדרכה:

א. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9}dx=\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)e^{ix}}{x^4+10x^2+9}dx\right\}$

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)e^{ix}}{x^4+10x^2+9}dx=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^3}\right)\cdot i$

3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^4+1}dx$

4) $\int_{0}^{\infty}\frac{x^2\cos(ax)}{(x^2+1)^2}dx$

תשובות סופיות:

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}$$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9}dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^3}\right)$$

3) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^4+1}dx = 0$$

4) $$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2\cos(ax)}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{4}(1-a)e^{-a}$$

מסילת משולש פיצה:

שאלה:

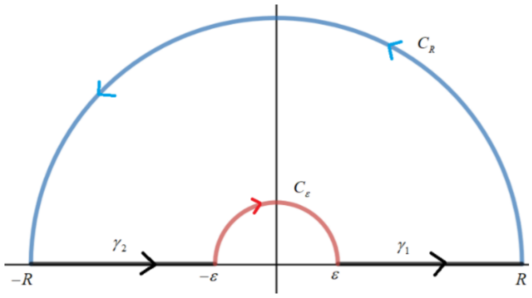
1) הוכיחו כי $\frac{\pi}{2016} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2016}\right)} = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2016}}\,dx$.

רמז: התבוננו בפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+x^{2016}}$ ובגזרת מעגל בזווית $\frac{2\pi}{2016}$.

תשובה סופית:

1) הוכחה.

מסילת חצי מעגל מנוקב:



בתרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$\gamma_1 = \{z = x \mid \varepsilon \le x \le R\}$ $\qquad C_R = \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$

$\gamma_2 = \{z = x \mid -R \le x \le -\varepsilon\}$ $\qquad C_\varepsilon = \{z = \varepsilon e^{i\theta} \mid \theta : \pi \to 0\}$

$\gamma = \gamma_1 + C_R + \gamma_2 + C_\varepsilon$

שאלות:

1) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi$.

הדרכה:

א. הוכיחו כי $\frac{\sin^2(x)}{x^2} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1-e^{i2x}}{2x^2}\right\}$.

ב. הגדירו $f(z) = \frac{1-e^{i2z}}{2z^2}$ והסבירו מדוע $\oint_\gamma f(z)dz = 0$.

ג. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$ ו- $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = -\pi$.

2) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6(x)}{x^6} dx$.

3) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3 + \pi^2 x} dx$.

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx$.

5) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2\left(x^2+\beta^2\right)} dx$ לכל $\alpha, \beta > 0$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6(x)}{x^6} dx = \frac{88}{5\cdot 2^5}\pi$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3+\pi^2 x} dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{e^{-\pi}}{\pi}$

4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx = \pi$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2\left(x^2+\beta^2\right)} dx = \frac{\pi}{\beta^2}\left(\alpha - \frac{1-e^{-\alpha\beta}}{\beta}\right)$

שימושים של משפט השארית בהתמרות אינטגרליות:

שאלות:

1) נתונה $F(s)=\frac{p(s)}{q(s)}$ מנת פולינומים כאשר $\deg(q)\geq\deg(p)+1$.

הוכיחו כי $L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}e^{st}F(s)\,ds=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[e^{st}F(s),s_k\right]$

כאשר s_k אלו הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $F(s)$ והקו $\mathrm{Re}(s)=\sigma$ נמצא מצד ימין לכל הנקודות הסינגולריות.

2) חשבו התמרת לפלס הפוכה של $F(s)=\frac{1}{\left(s^2+2s+5\right)^2}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f(t)=\frac{e^{-t}}{16}\left(\sin(2t)-2t\cos(2t)\right)$.

שארית באינסוף:

שאלות:

1) נניח כי ∞ הינה נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$.

הוכיחו כי $\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$.

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית במישור המרוכב פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$.

הוכיחו כי:

$$\mathrm{Res}\left[f(z),z_1\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),z_2\right]+\dots+\mathrm{Res}\left[f(z),z_n\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]=0$$

3) חשבו $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=10}\frac{e^{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)}\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2-1}dz$.

4) חשבו $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2-4}dz$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=10}\frac{e^{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)}\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2-1}dz=0$

4) $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^4-1}dz=-\frac{\sin\left(\frac{1}{2i}\right)}{2i}$

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 10 - התמרת לפלס

תוכן העניינים

התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות להתמרת לפלס.

שאלות

חשב את התמרות לפלס בשאלות **1-12** בעזרת טבלת התמרות לפלס:

1) $L\left(t^2+4t-2\right)$

2) $L\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}+1\right)$

3) $L\left(e^{-4t}+10e^{2t}\right)$

4) $L\left(\cosh 4t\right)$

5) $L\left(\sinh 10t\right)$

6) $L\left(\sin 2t\cos 2t\right)$

7) $L\left(\sin 2t\cos 3t\right)$

8) $L\left(\sin^2 t\right)$

9) $L\left(\cos^2 4t\right)$

10) $L\left(t^2\sin 4t\right)$

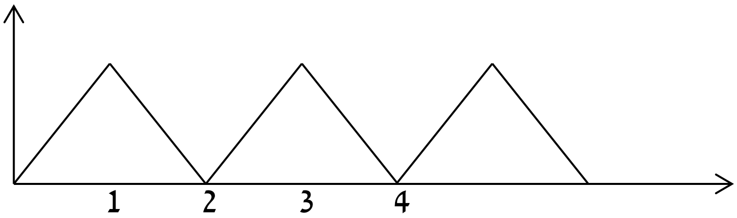
11) $L\left(t^4e^{2t}\right)$

12) $L\left(e^{2t}\sin 4t\right)$

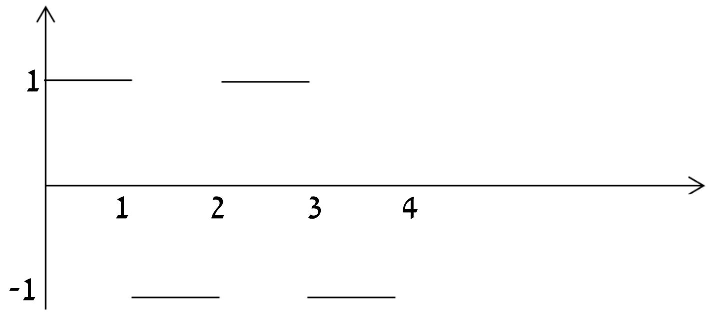
13) מצא את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 1 & t>1 \end{cases}$.

14) מצא את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 2-t & 1<t \end{cases}$.

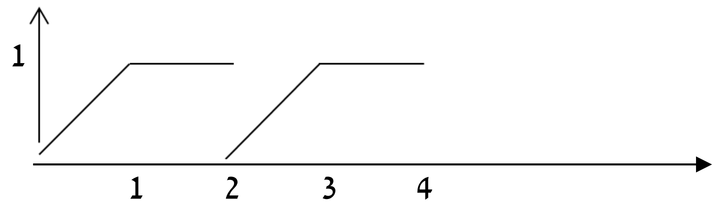
15) מצא את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



16) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



17) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



18) הגדר ושרטט את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

19) שרטט את הפונקציה $f(t)=u(t-2)-u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

20) רשום את הפונקציה $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$, בעזרת פונקציית המדרגה.

21) רשום את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$,
של הפונקציה $u(t-k)$, ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

22) חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ (t-4)^2 & t\ge 4\end{cases}$.

23) חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ t^2 & t\ge 4\end{cases}$.

24) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הגדר ושרטט את פונקציית הדלתא $\delta(t)$.

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה $\delta(t-a)$?

תשובות סופיות

1) $\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}$

2) $\frac{12}{s^5}+s^{-3/2}+\frac{1}{s}$

3) $\frac{1}{s+4}+10\frac{1}{s-2}$

4) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-4}+\frac{1}{s+4}\right]$

5) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-10}-\frac{1}{s+10}\right]$

6) $\frac{1}{2}\frac{4}{s^2+16}$

7) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{s^2+25}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$

8) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}$

9) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+64}$

10) $\frac{8\left(3s^2-16\right)}{\left(s^2+16\right)^3}$

11) $\frac{24}{\left(s-2\right)^5}$

12) $\frac{4}{\left(s-2\right)^2+16}$

13) $\frac{1-e^{-s}}{s^2}$

14) $\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$

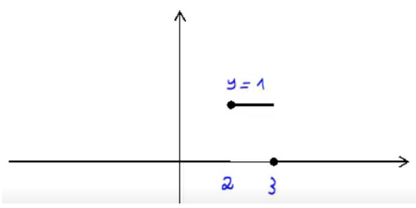
15) $\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}$

16) $\frac{1-e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)}$

17) $\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

18) $u\left(t-k\right)=\begin{cases}0 & t<k\\ 1 & t\ge k\end{cases}$

19)



20) $f\left(t\right)=\begin{cases}0 & t\le\\ 1 & t>4\end{cases}=u\left(t-4\right)$

21) $L=\left(u\left(t-k\right)f\left(t-k\right)\right)=e^{-ks}L\left(f\left(t\right)\right)$

22) א. $L\left(\left(t-4\right)^2\cdot u\left(t-4\right)\right)=\frac{2e^{-4s}}{s^3}$

23) $e^{-4s}L\left(t^2\right)+8e^{-4t}L\left(t\right)+16\frac{e^{-4s}}{s}$

24) $L\left[\delta\left(t-2\pi\right)\right]=e^{-2\pi s}$

התמרת לפלס ההפוכה

שאלות

חשב את ההתמרות בשאלות **1-29**:

1) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)$

3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right)$

4) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$

5) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

6) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right)$

7) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right)$

8) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)$

9) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)$

10) $L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$

11) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)$

12) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right)$

13) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right)$

14) $L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right)$

15) $L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right)$

16) $L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right)$

17) $L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right)$

18) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right)$

19) $L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right)$

20) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right)$

21) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right)$

22) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)$

23) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right)$

24) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right)$

25) $L^{-1}\left(\dfrac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$

26) $L^{-1}\left(\dfrac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right)$

27) $L^{-1}\left(\dfrac{3}{s}-\dfrac{4e^{-s}}{s^2}+\dfrac{4e^{-3s}}{s^2}\right)$

28) $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-4s}}{s+1}+\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$

29) $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right)$

*בשאלה **27** כתוב את התוצאה בצורה מפורטת ושרטט אותה.

30) נתון $F(s)=\dfrac{e^{-s}+2}{s}$.

חשב את $f(0)$ ו-$f(\infty)$, כאשר $f(t)=L^{-1}(F(s))$.

פתור בשתי דרכים שונות.

הערה: $f(0)=\lim\limits_{t\to 0} f(t)$, $f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

31) הסבר והדגם את משפט הקונוולוציה.

השתמש במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

32) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^3(s-1)}\right)$

33) $L^{-1}\left(\dfrac{2}{s^2(s^2+4)}\right)$

34) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s-4)^2}\right)$

35) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s^2+1)^2}\right)$

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{t^3}{3!}$

3) e^{10t}

4) $\frac{1}{3}\sin 2t$

5) $\cos 2t$

6) $e^{10t}\frac{1}{2}\sin 2t$

7) $e^{2t}\left\{\cos 2t+2\frac{1}{2}\sin 2t\right\}$

8) $\frac{1}{4}t\sin 2t$

9) $\frac{1}{4}t\sin 2t$

10) $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$

11) $\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$

12) $1-2e^{-5t}$

13) $3e^{-3t}-2e^{-2t}$

14) $1+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$

15) $e^{-t}+2e^{-2t}+3e^{3t}$

16) $e^{-3t}+e^{3t}-e^{-2t}-e^{2t}$

17) $e^{2t}+4te^{2t}-e^{-2t}$

18) $-6+5t+6e^{-2t}$

19) $4-4e^{-3t}-3te^{-3t}$

20) $2e^{t}+te^{t}-2e^{2t}+te^{2t}$

21) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$

22) $\frac{1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5t}\sin\sqrt{0.75}t$

23) $\sin t+2e^{3t}$

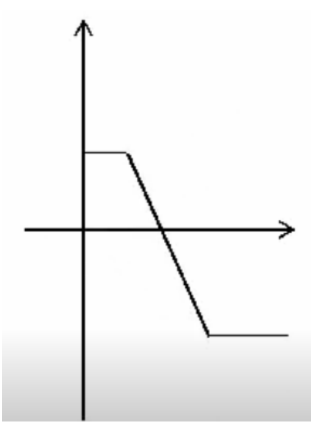
24) $\cos t+e^{-2t}$

25) $\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t$

26) $e^{t}-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+5t\sin 2t+\frac{5}{4}(\sin 2t-2t\cos 2t)$

27) א. $3-4u(t-1)\cdot(t-1)+4u(t-3)\cdot(t-3)$

ב. $\begin{cases}3 & t<1\\ 7-4t & 1<t<3\\ -5 & t\geq 3\end{cases}$; שרטוט:



28) $u(t-4)e^{-(t-4)}+u(t+2)\sin(t+2)$

29) $u(t-10)\left(e^{t-10}-e^{2(t-10)}\right)$

30) $f(0)=2 \quad f(\infty)=3$

31) שאלת הסבר.

32) $-\frac{1}{2}\left(t^2+2t+2\right)+e^t$

33) $0.5t-\frac{1}{4}\sin 2t$

34) $\frac{1}{4}e^{4t}(t-1)+\frac{1}{4}$

35) $\frac{1}{2}(-2\cos t+2-t\sin t)$

פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס

שאלות

פתור את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

1) $y(0)=0\ ;\ y'+4y=e^{-3t}$

2) $y(0)=-1\ ,\ y'(0)=4\ ;\ y''+4y'+4y=10e^{-2t}$

3) $y(0)=-1,\ y'(0)=-4\ ;\ y''-4y'=16$

4) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+4y'=8t+2$

5) $y(0)=y'(0)=\frac{1}{4}\ ;\ 4y''-4y'=te^{t}+e^{t}$

6) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''-3y'+2y=u(t-4)$,
כאשר $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$ היא פונקציית המדרגה.

7) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+y'=f(t)$, כאשר $f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2 & t\geq 1\end{cases}$.

8) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+5y'+6y=h(t)$, כאשר $h(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ 0 & t\geq 2\end{cases}$.

9) $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=3\ ;\ y'''+4y''+5y'+2y=10\cos t$

10) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ y''+2y'+2y=\delta(t-\pi)$

11) $y(0)=2,\ y'(0)=-3\ ;\ y''+3y'-10y=4\delta(t-2)$

12) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ -y''+4y=\delta(t-2\pi)-\delta(t-\pi)$

תשובות סופיות

1) $y(t)=e^{-3t}-e^{-4t}$

2) $y(t)=e^{-2t}(5t^2+2t-1)$

3) $y(t)=-4t-1$

4) $y(t)=t^2$

5) $y(t)=\frac{1}{8}e^t(t^2+2)$

6) $y(t)=u(t-4)\left(0.5-e^{t-4}+e^{2(t-4)}\right)$

7) $y(t)=2u(t-1)\cdot\left(-1+(t-1)+e^{-(t-1)}\right)$

8) $y(t)=\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\right]-u(t-2)\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2(t-2)}+2e^{-3(t-2)}\right]$

9) $y(t)=-\cos t+2\sin t+2e^{-t}-2te^{-t}-e^{-2t}$

10) $y(t)=-u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin(t)$

11) $y(t)=\frac{4}{7}u(t-2)\left[e^{2(t-2)}-e^{-5(t-2)}\right]+e^{2t}+e^{-5t}$

12) $y(t)=-\frac{1}{2}u(t-2\pi)\left[\sinh\left(2(t-2\pi)\right)\right]+\frac{1}{2}u(t-\pi)\left[\sinh\left(2(t-\pi)\right)\right]$

נוסחאות – התמרת לפלס

$g(t)$	$G(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \quad (\text{for } n=1,2,3,\dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\text{for } n=1,2,3,\dots)$	$\frac{1}{s^n}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$t^{n-1}e^{at}$	$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\frac{t}{2a}\sin(at)$	$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$
$\frac{1}{2a}(\sin(at)+at\cos(at))$	$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$
$e^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$

$\dfrac{s+b}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\cos at$
$\dfrac{2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\sin at$
$\dfrac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\cos at$
$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\dfrac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}\left(\sin(at)-at\cos(at)\right)$
$\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-\frac{3}{2}}$	$\sqrt{t}$
$\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$
$\dfrac{1}{s}$	$u(t)$
$\dfrac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks}\cdot F(s)$	$u(t-k)f(t-k)$
$(-1)^n(F(s))^{(n)}$	$t^n g(t)$

תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$, של פונקציה $f(t)$,
ורוצים את $f(0)$ ו-$f(\infty)$.
אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

- קונוולציה:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$\boxed{L\left(f(t)*g(t)\right)=F(s)\cdot G(s)}$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=f(t)*g(t)$$

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 11 - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

תוכן העניינים

מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים:

שאלות:

1) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b |f(x)|dx$ מהווה נורמה במרחב זה.

2) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב זה.

3) יהי $V=R_{\le 2}[x]$ המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה / שווה מ-2 מעל הממשיים.

לכל שני פולינומים $p(x),q(x)$ ב- V נגדיר:

$\langle p(x),q(x)\rangle = p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1)$.

הוכיחו כי $\langle \cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

4) נגדיר את המרחב $V=C^1[-1,1]$ (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$).

נגדיר: $\langle f(x),g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx+\int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}dx$.

הוכיחו כי $\langle \cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

5) הוכיחו כי בכל מרחב מכפלה פנימית E מתקיים לכל $f,g\in E$:

א. $\langle u,f+g\rangle=\langle u,f\rangle+\langle u,g\rangle$ $\forall u\in E$.

ב. $\mathrm{Re}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2\right)$.

ג. $\mathrm{Im}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+ig\|^2-\|f-ig\|^2\right)$.

ד. $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left\{\|f\|^2+\|g\|^2\right\}$ (שוויון המקבילית).

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית.

נסמן $w=u+v$ וקטורים במרחב.

הוכיחו כי אם $\langle u,v\rangle=0$ אזי $\|w\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

7) נגדיר את המרחב V להיות מרחב הפונקציות $f(x)$ הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע $[a,b]$ (כלומר $f''(x)$ רציפה ב- $[a,b]$).

בדקו האם $\langle f,g\rangle=\int_a^b f''(x)g''(x)dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

8) נגדיר את המרחב V להיות מרחב של פונקציות $f(x)$ ממשיות וגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$ (כלומר הנגזרת $f'(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$) כך ש- $f(-1)=0$.

נגדיר $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx$.

הוכיחו כי $\langle f,g\rangle$ מהווה מכפלה פנימית במרחב V.

9) יהי V מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b|f(x)|dx+\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב V.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) $f(x)=1$
8) הוכחה.
9) הוכחה.

התכנסויות במרחבים נורמיים:

שאלות:

1) הוכיחו:

א. הוכיחו כי לכל $f \in C[a,b]$ מתקיים $\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \le \sqrt{x-a} \cdot \|f\|_{L_2[a,b]}$.

תזכורת: $\|f\|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}$ ו- $\langle f,g\rangle_{L_2[a,b]} = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

ב. הוכיחו כי אם $f_n \to f$ בנורמה $\|\cdot\|_{L_2[a,b]}$ במרחב $C[a,b]$

אזי גם $f_n \to f$ בנורמה $\|\cdot\|_{L_1[a,b]}$.

תזכורת: $\|f\|_{L_1[a,b]} = \int_a^b |f(t)|\,dt$.

ג. האם ההיפך נכון? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

2) יהי V מרחב נורמי.

א. הוכיחו כי לכל $u,v \in V$ מתקיים $\|u-v\| \ge \big|\|u\|-\|v\|\big|$ (אי שיוויון המשולש ההפוך).

ב. הוכיחו כי אם $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ בנורמה של V אזי $\|f_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|f\|$.

3) נתונה סדרת הפונקציות הבאה:

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{n}\cdot x & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2\sqrt{n} - n\sqrt{n}\cdot x & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \le x \end{cases}$$

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,10]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,10]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת ב- $L^1[0,10]$?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת ב- $L^2[0,10]$?

4) נתונה סדרת פונקציות $f_n(x)=n(1-x)x^n$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב-$[0,1]$? אם כן, מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב-$[0,1]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1[0,1]$?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[0,1]$?

5) נתונה
$$f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & else\end{cases}$$

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1(-\infty,\infty)$?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2(-\infty,\infty)$?

6) יהי V מרחב וקטורי של פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות שם למעט מספר סופי של נקודות, כאשר הנגזרת רציפה למקוטעין עם מכפלה פנימית
$$\langle f,g\rangle=f(a)g(a)+\int_a^b f'(x)g'(x)dx.$$

א. לכל $x_0\in[a,b]$ נגדיר את הפונקציה
$$g_{x_0}(x)=\begin{cases}x-a+1 & a\le x\le x_0\\ x_0-a+1 & x_0\le x\le b\end{cases}$$
הוכיחו כי לכל $f\in V$ מתקיים $\langle f(x),g_{x_0}(x)\rangle=f(x_0)$.

ב. הוכיחו כי לכל $f\in V$ ולכל $x_0\in[a,b]$ מתקיים $|f(x_0)|\le\sqrt{b-a+1}\cdot\|f\|$.

ג. נניח כי $f_n(x)\in V$ סדרת פונקציות המתכנסת בנורמת V אל $f\in V$.
הוכיחו כי ההתכנסות היא במידה שווה.

7) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=\left[1-\chi_n(x)\right]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1,\infty)$?
אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$?

ג. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ בנורמת $L^1[1,\infty)$?

8) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\cdot\chi_{\left[2^k,2^k+k\right]}(x)$

כאשר $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

א. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1(-\infty,\infty)$?

ב. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2(-\infty,\infty)$?

9) נגדיר את סדרת הפונקציות הבאה במרחב $L^2[-\pi,\pi]$: $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kx)$.

א. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$ לפונקציה כלשהי?

ב. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

נגדיר $h_n(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt$.

ג. האם $h_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

ד. האם $h_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$?

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) א. $f(x)=0$ ב. $\sup_{[0,10]}|f_n(x)|\geq\sqrt{n}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$

ג. $\frac{1}{2\sqrt{n}}\xrightarrow{n\to\infty}0$ ד. $\frac{2}{\sqrt{3}}\cancel{\xrightarrow{n\to\infty}}0$

4) א. $f(x)=0$ ב. $\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{e}$

ג. $\frac{n}{(n+1)(n+2)}\xrightarrow{n\to\infty}0$ ד. $\frac{2n^2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}\xrightarrow{n\to\infty}0$

5) א. $f(x)=0$ ב. $1\xrightarrow{n\to\infty}1$

ג. $\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ ד. $\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

6) הוכחה.

7) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית ב-$[1,\infty)$ והפונקציה הגבולית הינה $\frac{1}{x}$.

ב. $\max\left\{n^\alpha-\frac{1}{n+\frac{1}{n^2}}\ ,\ \frac{1}{n+1}\right\}$

ג. אין התכנסות בנורמה כיוון שסדרת הפונקציות כלל אינה שייכת למרחב הנורמי.

8) א. לא, סדרת הנורמות שואפת לאינסוף.

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}<\infty$

9) א. לא, סדרת הנורמות שואפת לאינסוף.

ב. לא, כי אם הייתה התכנסות במידה שווה אז הייתה התכנסות בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$ (בקטע הקומפקטי).

ג. $\sup_{[-\pi,\pi]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1-\cos(kx)}{k^{1.5}}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{k^{1.5}}\xrightarrow{n\to\infty}0$

ד. כן, כי התכנסות במידה שווה (בקטע סופי) גוררת התכנסות בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$ (בקטע סופי).

מערכות אורתונורמליות:

שאלות:

1) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x)=\cos(nx)$ במרחב $L^2[-\pi,\pi]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

2) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x)=\sin(nx)$ במרחב $L^2[0,\pi]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית .

3) יהי מרחב מכפלה פנימית V ותהי $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ מערכת של פולינומים כך

ש-$\varphi_n(x)$ הינו פולינום ממעלה n.

נניח כי לכל n,m טבעיים כך ש- $m<n$ מתקיים $\langle\varphi_n(x),x^m\rangle=0$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

4) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $\left[e^{-\pi},e^{\pi}\right]$ עם המכפלה

הפנימית $\int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}}f(x)\overline{g(x)}\frac{1}{x}dx=\langle f,g\rangle$ נגדיר $\varphi_n(x)=\sin(n\ln(x))$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

5) נניח כי המערכת $\left\{\varphi_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2[a,b]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_1=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$. יהיו $c>0$ ו- d ממשי כלשהוא.
הוכיחו כי המערכת $\left\{\psi_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $\psi_n(x)=\sqrt{c}\cdot\varphi_n(c\cdot x+d)$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2\left[\frac{a-d}{c},\frac{b-d}{c}\right]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_2=\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x)\overline{g(x)}dx$.

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{N}$ מערכת אורתונורמלית סופית.
הוכיחו כי לכל $v\in V$ מתקיים $\left\|\sum_{n=1}^{N}\langle v,e_n\rangle e_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{N}\left|\langle v,e_n\rangle\right|^2$.

מערכת פולינומי צ'בישב:

7) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$
ונגדיר ב- K מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
הוכיחו כי אוסף הפונקציות $\left\{T_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $T_n(x)=\cos\left[n\cdot\arccos(x)\right]$ (הנקראת גם פולינומי צ'בישב) הינה מערכת אורתוגונלית ב- K ומצאו קבועים α_n כך שהמערכת $\left\{\alpha_n T_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית.

מערכת פולינומי הרמיט:

8) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2\cdot e^{-x^2}dx<\infty$.
נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\cdot e^{-x^2}dx$.
הוכיחו כי פולינומי הרמיט, המוגדרים על ידי הנוסחה $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]$ (נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתוגונלית במרחב K ומצאו להם קבועי נרמול.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח כי לכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle H_n, x^k\rangle = 0$. ניתן להיעזר בעובדה כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

מערכת פולינומי לג'נדר:

9) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$ ונגדיר ב- K מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי פולינומי לג'נדר, הנתונים על ידי נוסחת רודריגז $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ מהווים מערכת אורתוגונלית ב- K וכי $\langle P_n, P_n\rangle = \frac{2}{2n+1}$ לכל n טבעי.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle P_n, x^k\rangle = 0$.

מערכת פולינומי לגר:

10) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_0^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x}dx < \infty$.

נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle = \int_0^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x}dx$.

הוכיחו כי פולינומי לגר, המוגדרים על ידי הנוסחה $L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right]$ (נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב K.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle L_n, x^k\rangle = 0$.

ניתן להיעזר בנוסחה $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = n!$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) מערכת פולינומי צ'בישב: הוכחה.
8) מערכת פולינומי הרמיט: הוכחה.
9) מערכת פולינומי לג'נדר: הוכחה.
10) מערכת פולינומי לגר: הוכחה.

מערכת האר:

שאלות:

1) נתבונן במרחב $L^2{}_{PC}[0,1]$ ויהי N מספר טבעי. מצאו את הקירוב מיטבי לפונקציה $f(x)=x^N$ על תת המרחב הנפרש על ידי $\{\varphi_{0,-1}\}\cup\{\varphi_{n,k}\}_{n=0}^{n=N}{}_{k=0}^{k=2^n-1}$.

2) נתבונן במרחב $L^2{}_{PC}[0,1]$ ויהי N מספר טבעי. מצאו את הקירוב מיטבי לפונקציה $f(x)=e^{i\pi 2^{N+1}x}$ על תת המרחב הנפרש על ידי $\{\psi_{-1}\}\cup\{\psi_{n,k}\}_{n=0}^{n=N-1}{}_{k=0}^{k=2^n-1}$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מוכלל של $f(x)=e^x$ על ידי בסיס האר $\{\psi_{-1}\}\cup\{\psi_{n,k}\}_{n=0}^{n=\infty}{}_{k=0}^{k=2^n-1}$.

ב. הוכיחו כי $\dfrac{e^2-4e+3}{2(e^2-1)}=\sum\limits_{n=0}^{n=\infty}\dfrac{2^n}{1-e^{\frac{2}{2^n}}}\left(2e^{\frac{0.5}{2^n}}-1-e^{\frac{1}{2^n}}\right)^2$.

4) האם קיימת $f\in L^2{}_{PC}[0,1]$ המקיימת $\int\limits_0^1 f(x)\psi_{n,k}(x)dx=\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{(n+2)\ln(n+2)}}$ לכל $n\ge 0$ שלם ולכל $k=0,1,\ldots 2^n-1$.

5) נתבונן בטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^{\frac{n}{2}}}\sum\limits_{k=0}^{k=2^n-1}\psi_{n,k}(x)$ כאשר $\psi_{n,k}(x)$ פונקציות האר.

א. האם הטור מתכנס נקודתית בקטע $[0,1]$?

ב. האם הטור מתכנס בנורמת $L^2[0,1]$?

תשובות סופיות:

1) $$P_W f=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{n=N}\frac{1}{2^{n(N+0.5)}}\sum_{k=0}^{k=2^n-1}\left[2(k+0.5)^{N+1}-(k)^{N+1}-(k+1)^{N+1}\right]\varphi_{n,k}(x)$$

2) $P_W f=0$

3) א. $$f\sim(e-1)\psi_{-1}(x)+\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{k=0}^{k=2^n-1}2^{\frac{n}{2}}\left\{2e^{\frac{0.5}{2^n}}-1-e^{\frac{1}{2^n}}\right\}e^{\frac{k}{2^n}}\psi_{n,k}(x)$$

ב. הוכחה.

4) ∞

5) א. $x=0$ ב. $$S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot 2^{\frac{n}{2}}}\sum_{k=0}^{k=2^n-1}\psi_{n,k}(x)$$

קירוב מיטבי:

שאלות:

1) מצאו את נקודות המינימום של הפונקציה:

$$F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\alpha-\beta\cos(x)-\gamma\cos(10x)\right|^2dx$$

א. כאשר $f(x)=\cos^2(x)$

ב. כאשר $f(x)=x^3$

ג. כאשר $f(x)=\sin(x)$

2) במרחב $C[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

נגדיר תת מרחב $W=span\{1,\sin(x),\cos(x),x\}$ ופונקציה $f(x)=|x|$.

מצאו פונקציה $g\in W$ כך ש- $\|f-g\|$ מינימלי.

<u>הערה:</u>

שימו לב שהמערכת $\{1,\sin(x),\cos(x),x\}$ איננה אורתונורמלית.

3) נתבונן במרחב $C[-1,1]$ מעל $\mathbb{C}$.

א. הוכיחו כי $\langle f,g\rangle=f(-1)\overline{g(-1)}+\int_{-1}^{1}f'(x)\overline{g'(x)}dx$ מהווה מכפלה פנימית.

ב. מצאו את כל הערכים של $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$|-1-\alpha+\beta-\gamma|^2+\int_{-1}^{1}\left|3x^2-\beta-2\gamma x\right|^2dx$$

4) נתבונן במרחב $C[-1,1]$ מעל $\mathbb{C}$.

נתון כי $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx+\int_{-1}^{1}f'(x)\overline{g'(x)}dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

מצאו את כל הערכים של $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$\int_{-1}^{1}\left|x^3-\alpha-\beta x-\gamma x^2\right|^2dx+\int_{-1}^{1}\left|3x^2-\beta-2\gamma x\right|^2dx.$$

5) תהי V קבוצת הפונקציות הרציפות על הישר הממשי המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 e^{-x^2}dx<\infty$.

א. הוכיחו כי V עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר, מהווה מרחב מכפלה פנימית כאשר $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}dx$.

ב. הוכיחו כי כל הפולינומים שייכים ל- V.

ג. מצאו את הקירוב המיטבי של x^3 על מרחב הפולינומים מדרגה 2 לכל היותר.

<u>הערה:</u>
ניתן להשתמש באינטגרלים הבאים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\quad,\quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad,\quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-x^2}dx=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

6) יהי L מרחב וקטורי של פונקציות ממשיות ורציפות למקוטעין על הקטע $[1,\infty)$ המקיימות $\int_{1}^{\infty} x|f(x)|^2dx<\infty$.

במרחב L מוגדרת המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{1}^{\infty} f(x)g(x)xdx$.

נגדיר $W=span\left\{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right\}$.

מצאו את ההיטל האורתוגונלי $P_W\left(\frac{x}{e^{\sqrt{x}}}\right)$

7) תהי $f\in C[-1,1]$.

הוכיחו כי לכל פונקציה אי זוגית $g\in C[-1,1]$

מתקיים $\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}|f(x)+f(-x)|^2dx\le\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|^2dx$.

תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 0.5 \ , \ \beta = \gamma = 0$ ב. $\alpha = 0 \ , \ \beta = 0 \ , \ \gamma = 0$ ג. $\alpha = 0 \ , \ \beta = 0 \ , \ \gamma = 0$

2) $g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(x)$

3) א. הוכחה. ב. $\alpha = 0 \ , \ \beta = 1 \ , \ \gamma = 0$

4) $\alpha = \gamma = 0 \ , \ \beta = \frac{9}{10}$

5) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $P_W\left(x^3\right) = \frac{3}{2}x$

6) $\frac{28}{e}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{36}{e}x^{-\frac{5}{2}}$

7) הוכחה.

מערכת אורתונורמלית סגורה:

שאלות:

1) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א. האם קיים $v \in V$ כך ש- $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}$?

ב. נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.
יהיו $u, v \in V$ כך ש- $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{n}$ ו- $\langle v, e_n \rangle = \frac{1}{n+1}$. חשבו את $\langle u, v \rangle$.

2) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א. יהי $u \in V$ כך ש- $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$.
מצאו את הקירובים המיטביים u_1, u_2, u_3 ל- u בתת המרחבים $W_1 = span\{e_1\}$, $W_2 = span\{e_1, e_2\}$, $W_3 = span\{e_1, e_2, e_3\}$ בהתאמה.

ב. נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.
חשבו $\|u - u_1\|$, $\|u - u_2\|$, $\|u - u_3\|$ כאשר u_1, u_2, u_3 הם הקירובים המיטביים מהסעיף הקודם.

3) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V.
נגדיר $g_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[f_{2n-1} - f_{2n}]$, $g_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[f_{2n-1} + f_{2n}]$.

א. הוכיחו כי המערכת $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית ב- V.

ב. הוכיחו כי המערכת $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V.

תשובות סופיות:

1) א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2 \le \|u\|^2 < \infty$ ב. $\langle u, v \rangle = 1$

2) א. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e_1$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot e_2$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot e_2 + \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot e_3$

ב. $\|u - u_1\| = \sqrt{\frac{5}{12}}$, $\|u - u_2\| = \sqrt{\frac{7}{24}}$, $\|u - u_3\| = \sqrt{\frac{9}{40}}$

3) א. הוכחה. ב. הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) יהי V מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$.

נגדיר על V מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\overline{g'(x)}dx$.

אין צורך להוכיח כי זאת מכפלה פנימית.

א. הוכיחו כי המערכת $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורתוגונלית במרחב V.

מצאו נורמה של e^{inx} המושרית מהמכפלה הפנימית הנ"ל.

ב. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f\in V$ המקיימת:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-in\cdot f'(x)\right)e^{-inx}dx\right|^2}{1+n^2}=1$$

2) נגדיר $a_n=\min_{\alpha\in\mathbb{C}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sqrt{\left|\cos(x)\right|}-\alpha\cos(nx)\right|^2dx\right]$. חשבו $\lim_{n\to\infty}a_n$.

3) נגדיר $R_n=\min_{a,b\in\mathbb{C}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sqrt{|x|^3}-a\sin(nx)-b\sin([n+1]x)\right|^2dx\right]$. חשבו $\lim_{n\to\infty}R_n$.

4) נגדיר $g(a,b)=\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\min\{1,|x|\}-a-b\sin(nx)\right|^2dx\right]$.

א. מצאו את הערכים a,b עבורם $g(a,b)$ מינימלית.

ב. חשבו את $g(a,b)$ עבור a,b אלו.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

2) $\frac{4}{\pi}$

3) $\frac{\pi^3}{2}$

4) א. $b=0$, $a=1-\frac{1}{2\pi}$ ב. $g(a,b)=2-\frac{4}{3\pi}-2\left[1-\frac{1}{2\pi}\right]^2$

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 12 - טורי פורייה

תוכן העניינים

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבון טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבן טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim-\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

משפט פרסבל:

שאלות:

1) באמצעות טור הפורייה $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$, חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0 \end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הינו $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le\pi \\ x+\pi & -\pi\le x<0 \end{cases}$ ו- $g(x)=x$.
מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x\le\pi \\ 0 & -\pi<x\le 0 \end{cases}$ ובאמצעותו חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

5) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le\pi \\ e^{x^2} & -\pi\le x<0 \end{cases}$ ו- $g(x)=\begin{cases} 0 & 1<x\le\pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0\le x\le 1 \\ 0 & -\pi\le x<0 \end{cases}$.
נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$, $f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$.
הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n} = \frac{1}{8}$.

6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

$$f(x)=\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\quad,\quad -\pi\le x<\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi<x<3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{\left(1+n^{2}\right)^{2}}$.

7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי הנוסחה : $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^{2}}-\frac{1}{(n+2)^{2}}}e^{inx}$.

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+\pi)-f(x)\right|^{2}dx$.

8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $p\neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{\left(1-4n^{2}\right)^{2}}=\frac{\pi^{2}}{64}$.

9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}h^{2} & h\le x\le\pi\\ 0 & -\pi\le x\le h\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$

כאשר $0\neq h\in[-\pi,\pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^{n}\cos(2n)}{n^{2}}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים :

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^{2}}{\left(1-4n^{2}\right)^{2}}=\frac{\pi^{2}}{32}$.

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{\left(1-4n^{2}\right)^{2}}=\frac{\pi^{2}}{64}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi^2}{6}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) $\frac{\pi^2}{4}$

5) הוכחה.

6) א. ראו סרטון.

ב. $\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx)$

ג. ≈ 0.769

7) 8π

8) הוכחה.

9) $\frac{\pi^2-4}{4}$

10) א. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx}$

ב. הוכחה.

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

1) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x}\cos\left(\sqrt{|x|}\right)\sin(nx)\,dx$.

2) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2+1}e^{i\cdot n^2 t}\,dt$.

3) הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{x}\frac{se^{s^2}\,ds}{\sqrt{s^2+2017}}e^{inx}\,dx\right)=0$.

תשובות סופיות:

1) 0
2) 0
3) הוכחה.

משפט דיריכלה:

שאלות:

1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ לטור פורייה ממשי $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$.

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$.

רמז: הציבו $x=\frac{\pi}{2}$.

2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π: $f(x)=\begin{cases}2+\frac{2x}{\pi} & -\pi<x<0\\ 2 & 0<x<\pi\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

ב. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

ד. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\cos(ax)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר a אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

א. $\frac{1}{\sin(\pi a)}=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{\pi a+\pi n}+\frac{1}{\pi a-\pi n}\right]$

ב. $\cot(\pi\alpha)=\frac{1}{\pi\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\alpha+\pi n}+\frac{1}{\pi\alpha-\pi n}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. ראו סרטון.

ב. $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi n}\sin(nx)$ ג. הוכחה.

3) א. $x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$

מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$
ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$).
נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$ מתכנס בהחלט.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?
שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$.

ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x)=\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ בקטע $[0,\pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.
נסמן $f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_n e^{inx}\right|$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$ מתכנס?

4) נתבונן בטור הפורייה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{in(x+i)}$.
כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ בקטע $(0,2\pi)$.

ב. נסמן $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0,2\pi)$.

6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi,\pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ לכל $j = 0,1,\dots k-1$. נסמן $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(n^k c_n\right) = 0$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$ ו-$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

ב. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[0,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0) = f(\pi) = 0$.
הראו כי מתקיים $\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \le \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

8) נגדיר $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

9) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \sin\left(n^{2.5}x\right)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

10) נסמן $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{1.4}} + \frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$.

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

11) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

12) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3.1}+i\cdot n^{2.2}}\cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $[0,\pi]$ $\quad f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin([2k-1]x)$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

ה. $[0,\pi]$ $\quad \frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\sim\frac{\pi^3}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi(2k-1)^4}\cos([2k-1]x)$ ו. הוכחה.

3) א. $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot nc_n\right|\le\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2<\infty$ ב. $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|<\infty$

ג. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$

4) ראו סרטון.

5) א. הוכחה. ב. $-\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{6}x$

6) הוכחה.

7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

10) א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2.8}}<\infty$ ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי הפונקציה $g(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ \pi-x & 0\le x<\pi\end{cases}$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

ב. עבור $-\pi\le x\le\pi$ נגדיר את הפונקציה $h(x)=a\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\int_{-\pi}^{x}g(t)dt$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה

ל- $h(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) נגדיר פונקציה $f(x)=|\sin(x)|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב- $f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f'.

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

1) א. $g(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2k\cdot x)$ ב. $a=-\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $f(x)\sim\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)}\right]\cos(2k\cdot x)$,

$f'(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)}\right]\sin(2k\cdot x)$ ב. $f'(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית- 2π, הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n+\delta,\pi(n+1)-\delta]$

לכל $0<\delta<\pi$ ולכל n שלם.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$.

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.

4) פתחו את $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$.

5) פתחו את $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$.

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף $-1\le x<1$ $f(x)=2-|x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1,1]$?

7) מצאו טור קוסינוסים $f(x)=x$ בקטע $[0,3]$.

8) פתחו את $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

תשובות סופיות:

1) $0 \le x \le 2\pi$ $\quad x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cdot\cos nx-\frac{4\pi}{n}\cdot\sin nx$

2) א. $b_n=0 \quad , \quad a_n=\begin{cases}\frac{-4}{\pi^2[2k-1]^2} & n=2k-1\\ \frac{-8}{\pi^2[4k-2]^2} & n=4k-2\\ 0 & else\end{cases}$

ב. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[2k-1]^4}=\frac{\pi^4}{96}$

3) א. $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|4n^2\pi^2}e^{in\pi x}$ ב. ראו סרטון. ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$

4) $|x|\sim\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(\pi[2k-1]x)$

5) $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2[2k-1]^2}\sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right)$

6) א. $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos([2k-1]\pi x)$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a)=f(b)$ ו-f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[a,b]$.

7) $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-12}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right)$

8) $\cos(2x)\sim-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2}\sin([2k-1]x)$

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) הוכח את הטענה כי אם $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π
אז $(f*g)_{(x)}$ מחזוריות- 2π.

2) הוכח את הטענה כי אם $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות- 2π
ופונקציות זוגיות אז $(f*g)_{(x)}$ זוגית.

3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$
מתקיים $f(x)=\sqrt{2\pi}\cdot\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$.
הערה: $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

4) נתונות $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$
מתקיים $g(x)=\cos(x)$, $f(x)=x^2$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

5) נתונות $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$
מתקיים $g(x)=\chi_{[0,1]}(x)$, $f(x)=x$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) $\pi - x$

4) לכל $-\pi \le x \le \pi$, $(f*g)_{(x)} = -2\cos(x)$

5)
$$(f*g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(x^2 - (x-1)^2\right) & -\pi+1 \le x \le \pi \\ \frac{1}{4\pi}\left[x^2 - \left(x+(2\pi-1)\right)^2\right] & -\pi \le x \le -\pi+1 \end{cases}$$

גרעין דיריכלה:

שאלות:

1) נגדיר $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ (גרעין דיריכלה).

א. הוכיחו כי $D_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

ב. הוכיחו כי $D_n(x)=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ עבור $x\neq 2\pi m$.

2) חשבו לכל ערך של n שלם את ערכו של הביטוי $I(n)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin(100x)\,dx$.

3) הוכיחו כי $I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}dx=2(n+1)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

4) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$. נסמן $S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}$ טור פורייה חלקי.

הוכיחו כי $(f*D_n)_x=S_n(x)$.

5) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{arctg(x-1)\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{e^{(x-1)^2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}dx$.

6) נגדיר $S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2001}{2}t}{\sin t}2\cos\frac{t}{2}\cos^{17}\left(e^{\sqrt{|x-t|}}\right)dt$.

יהיו a_n , b_n מקדמי פורייה הממשיים ו- c_n מקדמי פורייה המרוכבים, של הפונקציה $S(x)$.

חשבו את b_{500} , c_{1001} .

רמז: $S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)f(x-t)dt$ כאשר $D_N(t)$ גרעין דיריכלה מסדר N ו- S_N טור פורייה החלקי ה- N -י של f .

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

2) 0

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) $-\frac{\pi^2}{2e}$

6) $b_{500}=0$, $c_{1001}=0$

גרעין פייר וממוצעי סזארו:

שאלות:

1) נסמן $D_n(x)$ גרעין דיריכלה. נגדיר את גרעין פייר כך: $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)$.

א. הראו כי לכל $x\neq 2\pi m$ $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

ב. הראו כי $K_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx}$.

2) הוכיחו כי $K_n(x)\geq 0$ לכל x כאשר $K_n(x)$ גרעין פייר.

3) הוכיחו כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)dx=1$

4) הוכיחו כי לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|<\pi}K_n(x)dx=0$.

5) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין, מחזורית-2π וכי $m\leq f(x)\leq M$ לכל x ממשי.
הוכיחו כי $m\leq\sigma_n(x)\leq M$ לכל n טבעי ולכל x ממשי כאשר $\sigma_n(x)$ סדרת ממוצעי סזארו של הפונקציה $f(x)$.

6) תהי $\varphi(x)$ רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ ונניח כי:

i. $\varphi(x)\geq 0$.

ii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=1$.

iii. קיים $0<\delta_0<\pi$ כך שלכל $|x|>\delta_0$ מתקיים $\varphi(x)=0$.

נגדיר $F_n(x)=n\varphi(nx)$ ונרחיב אותה באופן מחזורי.
הוכיחו כי $F_n(x)$ מהווה גרעין חיובי.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

גרעין פוואסון:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx}$.

ב. גרעין פוואסון נתון על ידי $P_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π וטור פורייה שלה נתון על ידי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הראו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt$.

ג. הוכיחו את התכונות הבאות של גרעין פוואסון:

i. $P_r(x)\ge 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. מתקיים $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$.

ד. תהי $f(x)$ רציפה ומחזורית 2π ועם טור פורייה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}\xrightarrow{r\to1-}f(x)$ במידה שווה.

הערה: ניתן להיעזר במשפט הבא: אם סדרת פונקציות $P_r(x)$ מקיימת את התכונות הבאות:

i. $P_r(x)\ge 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. מתקיים $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$.

אזי $f(x)\xrightarrow{r\to1-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt$ במידה שווה.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t)=e^{i\alpha t}$ בתחום $-\pi \le t \le \pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n \cdot 2\alpha}{\left[\alpha^2-n^2\right]}=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}-\frac{1}{\alpha}$.

ג. הראו שמתקיים $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{[\alpha-n]^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$.

ד. הראו שמתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left((2n+1)^2-\alpha^2\right)}=\frac{\pi}{4\alpha^2}\left(\frac{1}{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}-1\right)$.

2) נגדיר $f(x)=|x|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty,\infty)$?

$$\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+\dots$$

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

3) תהי $f\in L^2_{PC}([-\pi,\pi])$.

נסמן ב-c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f.

נסמן $d_n=\mathrm{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

- f ממשית.
- f מתאפסת על הקטע $[-\pi,0]$.
- מתקיים השיוויון $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}d_n e^{inx}=x^2e^{|x|}\cos(x)$.

מצאו את f.

4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x)=\cos(2x)$
בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ו-$f(x)=-1$ בתחום $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.
מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$.
האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π.
נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_ne^{inx}$ ויהי $h>0$ פרמטר כלשהו.
מצאו את מקדמי פורייה של $h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(t+x)dt$ כתלות ב-f_n.

תשובות סופיות:

1) א. $e^{i\alpha t}\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi}\cdot e^{in\cdot t}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

2) א. $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos([2k+1]x)$

ב. $\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \pi k<x<\pi(k+1)\\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1)<x<\pi k\\ 0 & x=\pi k\end{cases}$, כאשר k מספר שלם.

ג. $\frac{\pi^2}{8}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x^2e^{|x|}\cos(x) & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$

4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$ - אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$
ו-$f'\in E[-\pi,\pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל-f בקטע $[-\pi,\pi]$.

5) f_0

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 13 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

מבוא כללי:

שאלות:

1) חשבון את התמרת פורייה של $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

2) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

3) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$.

4) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 2 & 1<|x|<2\\ 0 & else\end{cases}$.

5) הוכיחו כי התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & x>0\\ e^{bx} & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים הינה $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{b-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]$.

6) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

7) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$.

8) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & 0\le x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

9) הוכיחו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{2ix} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$ הינה $f(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$.

10) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

11) חשבון את התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}x & |x|<a\\ 0 & else\end{cases}$ עבור $a>0$.

12) האם קיימת $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\begin{cases}1-|\omega| & |\omega|\le\frac{1}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{1}{2}\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{1-\cos(\omega)}{\pi\omega^2}$

3) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}$

4) $f(\omega)=\frac{2\sin(2\omega)-\sin(\omega)}{\pi\omega}$

5) הוכחה.

6) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega)+i\left[\cos(\omega)-1\right]}{\omega}$

7) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1+e^{-i\omega}-2e^{-i2\omega}}{i\omega}$

8) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1-i\omega}$

9) הוכחה.

10) $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin([1-\omega])}{1\quad\omega}-\frac{\sin([1+\omega])}{1\,|\,\omega}\right\}$

11) $f(\omega)=-\frac{1}{\pi}i\frac{\sin(\omega a)-\omega a\cos(\omega a)}{\omega^2}$

12) לא. אינה רציפה בנקודות $\omega=\pm\frac{1}{2}$.

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-r,r]\\ 0 & else\end{cases}$ כאשר $r>0$.

2) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) נתונה פונקציה $g(x)\in G(R)$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.
מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב- $g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

4) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-ax^2}$ כאשר $a>0$.
רמז: $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\cos(4\pi\omega)\cdot\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.
רמז: $F\left\{\chi_{[-1,1]}(x)\right\}=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$.

תשובות סופיות:

1) $$\frac{\sin(\omega\cdot r)}{\pi\omega}$$

2) $$f(\omega)=\frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

3) $$f(x)=\frac{g(x+1)+g(x-1)}{2}$$

4) $$f(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}}$$

5) $$f(x)=\frac{\pi}{2}\begin{cases}1 & 4\pi-2\le x\le 4\pi+2 \ \ or \ \ -4\pi-2\le x\le -4\pi+2 \\ 0 & else\end{cases}$$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

1) נניח כי $f(x)\in G$ גזירה, מקיימת $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$, $f'(x)\in G$ ו- $f(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^{30}}$.
מצאו התמרת פורייה של $f'(x)\cos(2x)$.

2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $\left(-\frac{1}{2}\right)(i\omega)\frac{1}{2|a|}e^{-|\omega a|}=F\left\{\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right\}_{\omega}$.

3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\omega^2 e^{-|\omega|}$.
רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

תשובות סופיות:

1) $$\frac{i\cdot\frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}}+i\cdot\frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2}$$

2) הוכחה.

3) $$f(x)=(-2)\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)}=\frac{1}{\pi i}\frac{2c\cdot\omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$.

2) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$.

3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}\sin(ax)e^{-bx} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים,
הינה $g(\omega)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{bi-(\omega-a)}-\frac{1}{bi-(\omega+a)}\right]$.

4) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

6) נניח כי $f(x)\in G(R)$ ונגדיר $g(x)=f(3x-2)\cdot\cos(x)$. בטאו את $g(\omega)$ על ידי $f(\omega)$.

7) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=e^{3i\omega}\cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

8) תהי $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$.
חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:
א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a>0$.
ב. $H(x)e^{-ax}\cos(bx)$ כאשר $a,b>0$.
ג. $H(x)e^{-ax}\sin(bx)$ כאשר $a,b>0$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f(x)=2\pi i\cdot\chi_{[-1,1]}(x)\cdot\sin(x)$

3) הוכחה.

4) $F\left\{e^{-|x|}\cos(2x)\right\}=\dfrac{1}{2\pi\left(1+[\omega+2]^2\right)}+\dfrac{1}{2\pi\left(1+[\omega-2]^2\right)}$

5) $g(\omega)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}-\left[\dfrac{1}{2\pi\left(1+[\omega+6]^2\right)}+\dfrac{1}{2\pi\left(1+[\omega-6]^2\right)}\right]$

6) $g(\omega)=\dfrac{1}{6}\left[e^{-i\frac{2}{3}(\omega+1)}f\left(\dfrac{\omega+1}{3}\right)+e^{-i\frac{2}{3}(\omega-1)}f\left(\dfrac{\omega-1}{3}\right)\right]$

7) $F\left\{e^{2i[x+3]}\dfrac{2}{1+[x+3]^2}\right\}$

8) א. $\dfrac{1}{2\pi(a+i\omega)}$

ב. $\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a+i[\omega-b]}+\dfrac{1}{a+i[\omega+b]}\right)$

ג. $\dfrac{1}{4\pi i}\left(\dfrac{1}{a+i[\omega-b]}+\dfrac{1}{a+i[\omega+b]}\right)$

נוסחת המומנט:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases} x & x\in(-1,1) \\ 0 & else \end{cases}$ על ידי שימוש בנוסחה $F\{x\cdot f(x)\}=i\frac{d}{d\omega}f(\omega)$.

2) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x^2e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\{e^{-x^2}\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x\cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\{e^{-|x|}\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x)=e^{-x^2}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=8x^3e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$.

6) תהי $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^5} & x\geq 1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$.

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

7) נתון כי התמרת פורייה של $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega)=\frac{1}{1+|\omega|}$.

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f(x)|dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

1) $i\cdot\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\pi\omega^2}$

2) $F\left\{x^2e^{-x^2}\right\}=\dfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(1-\dfrac{\omega^2}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

3) $F\left\{x\cdot e^{-|x|}\right\}=-\dfrac{i}{\pi}\dfrac{2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$

4) $f\left(\omega\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) $f\left(\omega\right)=\dfrac{1}{256}\sqrt{\dfrac{3}{\pi}}\left(27i\omega^3+216\omega^2-792i\omega-1088\right)e^{i\omega-\frac{3\omega^2}{16}-\frac{5}{3}}$

6) הוכחה.

7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)}d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

2) חשבו $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\pi\omega}d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.

2) $$\begin{cases} 0 & |x|>1 \\ 1 & |x|<1 \\ \frac{1}{2} & x=1\ ,\ x=-1 \end{cases}$$

משפט פלנשראל:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a>0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\frac{\sin(bx)}{x}dx$ עבור $a,b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

3) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})\cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=\frac{\sin(\omega a)}{\pi\omega}$ ב. $\pi\cdot\min\{a,b\}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) חשבון את הקונבולוציה $\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים.

2) חשבון את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים $x>0$ ו- $x\le 0$.

3) מצאו פונקציה $f\in G$ כך ש- $f(\omega)=\left(\dfrac{\sin\omega}{\omega}\right)^2$.

4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt<\infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t)\in E$ מתקיים השיוויון

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)-f''(t)\right)g(x-t)dt=2f(x).$$

5) נגדיר $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\dfrac{1}{x^2+a^2}\right\}=\dfrac{1}{2a}e^{-a|\omega|}$.

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבון התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-t|}f(t)dt=e^{-|x|}+|x|e^{-|x|}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$.

8) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[1,2]}(x)$.

9) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,2]}(x)$.

10) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}$.

11) חשבו את הקונבולוציה $\left(e^{-x^2}*e^{-x^2}\right)_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x-t)dt=e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$.

13) נניח כי $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy\equiv 0$ הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$.

תשובות סופיות:

1) $$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x\in[-2,0] \\ 2-x & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$$

2) $$(f*f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

3) $$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x\in[-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$$

4) $g(x)=e^{-|x|}$

5) $\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{x^2+9}$

6) א. $\frac{2}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $f(x)=e^{-|x|}$

7) א. $$(f*f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>2 \\ 2-x & 1<x<2 \\ x & 0<x<1 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$ ב. הוכחה.

8) $$(f*f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>4 \\ 4-x & 3<x<4 \\ x-2 & 2<x<3 \\ 0 & x<2 \end{cases}$$

9) $$(f*f)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>4\\ 4-x & 2<x<4\\ x & 0<x<2\\ 0 & x<0\end{cases}$$

10) $$\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>3\\ 3-x & 2<x<3\\ x-1 & 1<x<2\\ 0 & x<1\end{cases}$$

11) א. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

12) $$f(x)=\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}}e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

13) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבון התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & |x|\le\pi \\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבון התמרת פורייה של הפונקציה $g(x)=\begin{cases}\cos(x) & |x|\le\pi \\ 0 & else\end{cases}$.

ג. חשבון את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)\sin(x)}{(1-x^2)}dx$.

ד. חשבון את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\sin^2(\pi x)dx$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבון התמרת פורייה של $f(x)=x\cdot e^{-|x|}$.

ב. מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות $\int_{-\infty}^\infty h'(y)e^{-|x-y|}dy=x\cdot e^{-|x|}$.

3) יהי $A>0$ קבוע. נגדיר $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le A \\ 0 & else\end{cases}$.

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x)\in G$ המקיימת $g(\omega)=f(\omega)f(-\omega)$.

מצאו במפורש את $g(x)$.

4) נניח כי $f(x)\in C^2(-\infty,\infty)$ כך ש- $f'(x),x\cdot f'(x),f''(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$

ומתקיים $f''(x)+x\cdot f'(x)+f(x)=0$ לכל x ממשי.

א. הוכיחו כי $f(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$.

ב. חשבון את $f(\omega)$ אם נתון כי $f(0)=1$.

ג. מצאו את $f(x)$.

5) תהי $f(x)=\begin{cases}2 & |x|\le 1\\ 4 & 1\le |x|\le 2\\ 0 & else\end{cases}$.

א. חשבו את $f(\omega)$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty}\frac{\left[2\sin(2t)-\sin(t)\right]^2}{t^2}dt$.

ג. חשבו את האינטגרל $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{2\sin(2t)-\sin(t)}{\pi t}\cos(t)\,dt$.

6) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x^2}{\pi^2} & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו את האינטגרלים : $\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\right)^2dx$

ו- $\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\cos(x)\,dx$.

7) נגדיר $\phi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורתונורמלית ב- $L^2{}_{PC}(-\infty,\infty)$.

8) תהי $f\in G$ פונקציה כך ש- $f'\in G$ פונקציה רציפה. מצאו פונקציה $g\in G$ המקיימת את המשוואה $g(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{u-t}g(u)\,du+f'(t)$.

9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^2}$.

10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+b^2}dt=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}$.

11) נגדיר $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(\omega-t)\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(t)e^{i\omega x}dtd\omega$.

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f(x)$.

תזכורת: $\chi_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1 & t\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

12) השתמשו במשפט פלנשראל על מנת לחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)\left(x^2+b^2\right)}dx$

כאשר $a,b>0$.

13) מצאו את התמרת הפורייה של $f(x)=e^{-\left(x^2+2x+5\right)}$.

14) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos(bx)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$ לכל $a,b>0$ קבועים.

15) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x)\cos(x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$.

16) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\sin^3(x)xe^{-x}dx=\frac{9}{25}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\sin(\omega\pi)\cdot\frac{2}{1-\omega^2}$ ב. $g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\omega\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}$

ג. $\frac{\pi}{2}\sin(1)$ ד. $\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $-\frac{2i\omega}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $h(y)=-e^{-|y|}\ ,\ -h(y)=e^{-|y|}$

3)
$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(A+x)^3}{3}-\frac{(A+x)^2}{2}x\right) & -A<x<0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{A^3}{3}-\frac{A^2}{2}x+\frac{x^3}{6}\right) & 0<x<A\\ 0 & else\end{cases}$$

4) א. הוכחה. ב. $e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ ג. $\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

5) א. $\frac{4\cdot\sin(2\omega)-2\cdot\sin(\omega)}{\pi\omega}$ ב. $\frac{5\pi}{2}$ ג. $\frac{3\pi}{2}$

6) א. $2\frac{\sin(\pi\omega)-\pi\omega\cos(\pi\omega)}{\pi^3\omega^3}$ ב. $\frac{1}{15}$ ו- $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)$

7) הוכחה.

8) $g(t)=f(t)+f'(t)$

9)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{x}(1-x) & x<0\\ \frac{\pi}{2}e^{-x}(1+x) & x>0\end{cases}$$

10) $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{b}{a}\frac{(a-b)x}{\left(x^2+(a-b)^2\right)^2}$

11) $f(x)=4\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}$

12) $\frac{\pi}{a+b}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\frac{\omega}{b^2+\omega^2}d\omega$

13) $f(\omega)=\frac{1}{e^4}\cdot e^{i\omega}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 14 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראה שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראה שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^{x}y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתור את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **4-7**:

(עבור כל בעיה עליך למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

8) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

א. הוכח שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתור את הבעיה.

9) פתור את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

1. פתח את הפונקציה $f(x)=1 \, , \, 0\le x\le 1$
לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.
התחל את הטור מ- $n=1$.

2. מה סכום הטור ב- $x=0$?
האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}$.

פתח את הפונקציה $f(x)=x \, , \, 0\le x\le 2$
לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתור את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

ב. פתח את הפונקציה $f(x)=e^x, 0\le x\le \pi$
לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.
התחל את הטור מ- $n=1$.

11) נתונה הבעיה:
$$\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}.$$

א. הוכח שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
ב. מצא את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.
ג. הראה שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.
ד. פתח את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.
הראה שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.
ה. חשב את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $(xy')'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-(-x)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

5) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$, $\lambda_n=n^2$; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע״ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$, $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2$.

7) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע״ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$, $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x$.

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

9) א. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,...$ $\varphi_n(x)\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2$.

ב. סכום הטור ב- $x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$, כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,...$ $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$, כאשר $0<x<\pi$.

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\ldots$ $\quad$ $\varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\ldots$ $\quad$ $\lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$.

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x=1.5$ הוא 1; וב- $x=2$ הוא 0.

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 15 - שאלות מסכמות בנושא פונקציות מרוכבות

תוכן העניינים

שאלות מסכמות ברמת בחינה:

שאלות:

1) האם קיימת f אנליטית ב- $B_1(0)=\{|z|<1\}$ כך ש- $\left|f(z)\right|=\ln\left(2+|z|\right)$ לכל $z\in B_1(0)$?

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<\infty$ ונניח כי קיים מספר α ממשי שאינו שלם כך שלכל $R>0$ מתקיים: $\int_0^{2\pi}\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right|d\theta\le 2\pi R^{\alpha}$.
הוכיחו כי: $f(z)=0$ בטבעת.

3) הוכח / הפרך:
קיימת פונקציה $f(z)$ אנליטית ב- $B_{1+\varepsilon}(0)$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

4) הראו כי הטור: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^z-i}{e^z+i}\right)^n$ מתכנס בהחלט ברצועה: $U=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,0<\mathrm{Im}(z)<\pi\right\}$.

5) נניח כי: $f=u+iv$ שלמה כך ש- $v(x,y)=\cosh\left[u(x,y)\right]$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

6) הוכח / הפרך:
קיימת סדרה: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0\ne a_n\in\mathbb{C}$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n a_n}{(2k+1)^n}=0$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

7) הוכיחו כי לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2t\cos(\theta)}d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(n!)^2}$.

8) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב-$B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{n+2}$.

9) חשבו את האינטגרל: $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}$.

10) הוכח / הפרך:
קיימת פונקציה שלמה $f(z)$ כך ש-$\left|z^2 \cdot f(z)+e^z\right| \leq 1$ לכל $|z|<1$.

11) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<2$ כך שלכל $n \geq 0$ מתקיים:
$\oint_{|z|=1} z^n f(z) dz=0$. הוכיחו כי $\lim_{z \to 0} f(z)$ קיים וסופי.

12) הוכח / הפרך:
קיימת פונקציה $f(z)$ שלמה כך ש-$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{(-1)^n}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

13) האם קיימת f שלמה המקיימת:
$f(x)=\begin{cases} x^4 & x \in \mathbb{R}\ ,\ x>0 \\ -x^4 & x \in \mathbb{R}\ ,\ x<0 \end{cases}$.

14) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הראו כי: $\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]}} |Log(z)|=\infty$.
ב. הראו כי: $\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]}} |z \cdot Log(z)|=0$.
ג. האם הפונקציה: $f(z)=\begin{cases} z \cdot Log(z) & z \neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ אנליטית ב-$z=0$?

15) חשבו את האינטגרל: $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$.

16) פתחו את הפונקציה: $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^4}$ לטור לורן בטבעת $0<|z-i|<2$.

17) נתון כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<1$ וזוגית (כלומר: $f(z)=f(-z)$).

חשבו: $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz$.

18) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב-$B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-

$f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right)\neq\frac{1}{n}$.

19) תהי: $f:B_1(0)\to\mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה.

נניח כי: $f^2(z)$ ו-$f^3(z)$ אנליטיות ב-$B_1(0)$.

הוכיחו כי $f(z)$ אנליטית ב-$B_1(0)$.

20) הוכח / הפרך:

אם: $f:B_1(0)\to\mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה ו-$f^2(z)$ ו-$f^6(z)$ אנליטיות ב-$B_1(0)$

אז $f(z)$ בהכרח אנליטית ב-$B_1(0)$.

תשובות סופיות:

1) לא.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.
10) הוכחה.
11) הוכחה.
12) הוכחה.
13) לא קיימת.
14) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. לא.
15) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
16) $a_k = \begin{cases} (-1)^{k+4}\dfrac{(k+7)(k+6)(k+5)}{6(2i)^{k+8}} & k \ge -4 \\ 0 & k \le -5 \end{cases}$.
17) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left[f(z),0\right] = 0$.
18) הוכחה.
19) הוכחה.
20) הוכחה.

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 16 - שאלות מסכמות בנושא אנליזת פורייה

תוכן העניינים