מתמטיקה שימושית 2

תוכן העניינים

תוכן העניינים

מתמטיקה שימושית 2

פרק 1 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

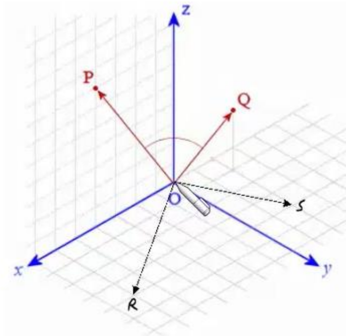
תוכן העניינים

וקטורים

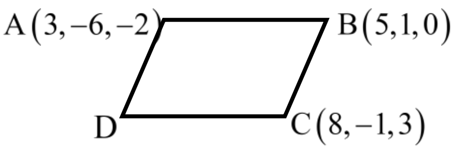
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\mathbf{u}$, $\vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

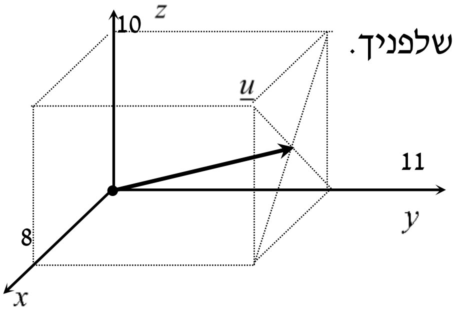
1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



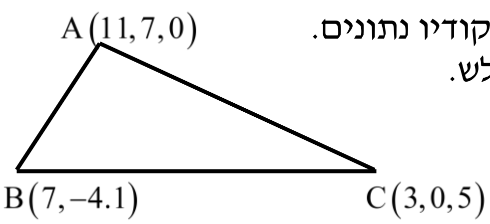
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

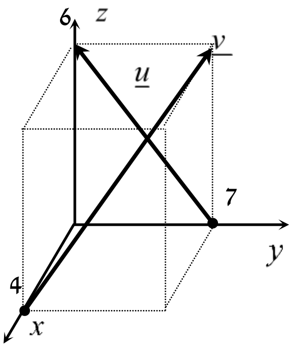


5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



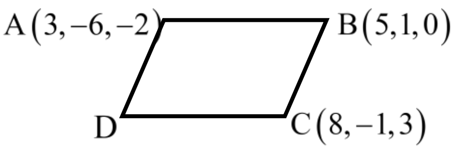
7) מצא את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראה כי $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



בשאלות **16-10** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$ ו- $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, ו-**16** הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשב:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $d(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **19-17** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים:

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$\text{D}(-7,-5,2)$, $\text{C}(-3,-5,0)$, $\text{B}(0,2,-1)$, $\text{A}(-4,2,1)$.
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.
ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$
ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$
ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם :
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) ענה על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכח כי $|u+v|=|u-v| \Leftrightarrow u\perp v$.
הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.
ב. הוכח כי $|u+v|^2=|u|^2+|v|^2 \Leftrightarrow u\perp v$.
הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

26) הוכח :

א. $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$
ב. $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$
ג. $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$
ד. $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$
תן פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.
ה. $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$

תשובות סופיות

1) $\vec{S}=(-2,4,0)$, $\vec{R}=(6,4,0)$, $\vec{Q}=(-2,1,3)$, $\vec{P}=(4,0,7)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{v}=(-4,7,6)$, $\underline{u}=(0,-7,6)$

7) א. $x=5$, $y=-2$, $z=6$

8) א. הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}^*$

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) הוכחה.

21) א. הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277^\circ$ ב. $\alpha=90^\circ$ ג. $\alpha=180^\circ$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) הוכחה.

26) הוכחה.

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

חשב: $(u\times v)\times w$.

2) חשב את שטח המשולש שקדקודיו: $A=(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי: $|u|\neq 0$, $u\cdot w=0$, $u\times v=0$.

הוכח כי: $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי: $|v|=4$, $|u|=1$, $u\perp v$.

חשב: $|(u+v)\times(u-v)|$.

5) נתון $w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

חשב:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

ב. חשב את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

7) חשב את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5), B(1,-1,-4), C(3,3,10), D(8,6,3)$.

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a,b,c}$.
הוכח כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a,a-b,a+b-4c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכח כי $\left[(u+v)\times(v+w)\right](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי: $u\cdot(v\times w)=4$.
חשב:
א. $u\cdot(w\times v)$ ב. $(v\times w)\cdot u$ ג. $w\cdot(u\times v)$ ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a,b,c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a\times b\times c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$
2) $S=22.5$
3) שאלת הוכחה.
4) 8
5) א. -3 ב. -3 ג. -3
6) א. 6 ב. 1
7) $9\frac{1}{3}$
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4
11) אין לו נוסחה.

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

1) הוכח שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

2) מצא את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

3) נתונים שני ישרים:

$$L_1:\quad \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},\qquad\qquad L_2:\quad x+7=y-5\ ,\ z=3$$

א. הוכח שהישרים מצטלבים.
ב. מצא את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) $\sqrt{26}$

3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,
כאשר $r(t)=\left(\cos\pi t,-\ln t,\sqrt{t-2}\right)$ ו- $t_0=4$.

ב. רשום את המשוואות הפרמטריות $x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\cos^2 t$,
כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשום את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה
הווקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

2) רשום את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א. $9x^2+4y^2=36$ (במישור xy)

ב. $\begin{cases}-x+y-z+1=0\\4x-2y-2z-1=0\end{cases}$

ג. $\begin{cases}y^2=z\\x^2=y\end{cases}$

ד. $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z=y+2\end{cases}$

ה. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\z=x^2\end{cases}$

ו. $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\z=2x\end{cases}$

3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(21t^2,21t^2-1,10e^t\right)$.

בסעיפים א-ג, חשב:

א. $\lim\limits_{t\to1}r(t)$

ב. $r'(t)$

ג. $\int_0^1 r(t)dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

4) נתונה: $r(t)=\left(\cos 4t,\sin 4t,t^4\right)$.

א. חשב: $\frac{d|r'|}{dt},\ \left|\frac{dr}{dt}\right|,\ \frac{dr}{dt}$.

ב. הוכח שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$.

א. גזור את הפונקציה.

ב. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$ ב- $t=0$.

ג. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2=z \\ x^2=y \end{cases}$, בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצא משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t)=(\sin t,e^{2t},t^2)$, ב- $t=0$.

6) נתונה העקומה $r(t)=\left(t^2,t,5\right)$.

א. מצא נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור $x-6y+4z-3=0$.

ב. מצא משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t)=\left(3\sin t,-2\cos t,t\right)$, ב- $t=0.5\pi$.

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

7) נתון $r(t)=\left(3\sin t,3\cos t,4t\right)$.

חשב את משיק היחידה (**T**), נורמל היחידה (**N**) והבינורמל (**B**) של r.

8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכח שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t, אז $r(t)\cdot r'(t)=0$.

כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכח שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

מצא את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק, המתאימים ל- $t=2$.

10) נתון $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$.
על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית, הוכח כי $r'(t)=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$.

11) חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x=t^3+2t,\ y=-3e^{-2t},\ z=2\sin 5t$.
עבור החלקיק, בזמן $t=0$, חשב את:
א. המהירות.
ב. גודל המהירות.
ג. התאוצה.
ד. גודל התאוצה.
ה. הזווית בין וקטורֵי המהירות והתאוצה.

12) נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן: $\vec{r}(t)=\vec{v}_0t-\frac{1}{2}gt^2\vec{k}$,
כאשר $\vec{v}_0=\vec{v}(0)=(v_{01},v_{02},v_{03})$ המהירות ההתחלתית.
מצא את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13) חלקיק נע על העקומה $x=2\cos t,\ y=2\sin t$.
א. חשב את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t.
ב. שרטט את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t=0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.
ג. הראה שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14) מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t)=(2,-1,-10t)$.
ברגע $t=0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(0,0,100)$.
מצא את משואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

15) תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t)=\left(18\cos 3t,-18\sin 3t,0\right)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(2,0,1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי) ובמהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

תשובות סופיות

1) א1. $0<t\le 4$ א2. $r(4)=\left(\cos 4\pi,-\ln 4,\sqrt{2}\right)$

ב. $r(t)=\left(\sin t,\ \cos t,\cos^2 t\right)$ ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

2) א. $x=2\cos t\ ,\ y=3\sin t$, $r(t)=\left(2\cos t,3\sin t\right)$

ב. $x=2t-0.5,\ y=3t-1.5,\ z=t$, $r(t)=\left(2t-0.5,3t-1.5,t\right)$

ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^4$, $r(t)=\left(t,t^2,t^4\right)$

ד. $x=t,\ y=\frac{t^2}{4}-1,\ z=\frac{t^2}{4}+1$, $r(t)=\left(t,\frac{t^2}{4}-1,\frac{t^2}{4}+1\right)$

ה. $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=9\cos^2 t$, $r(t)=\left(3\cos t,3\sin t,9\cos^2 t\right)$

3) א. $(21,20,10e)$ ב. $\left(42t,42t,10e^t\right)$ ג. $(7,6,10e-10)$ ד. כן. ה. כן.

4) א. $\frac{d\,|r'|}{dt}=\frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}}$, $\left|\frac{dr}{dt}\right|=4\sqrt{1+t^6}$, $\frac{dr}{dt}=\left(-4\sin 4t,4\cos 4t,4t^3\right)$,

ב. שאלת הוכחה.

5) א. $r'(t)=\left(4\cos 4t,e^t+te^t,4t^3\right)$ ב. $(x,y,z)=(0,0,0)+s(4,1,0)$

ג. $(x,y,z)=(1,1,1)+s(1,2,4)$ ד. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$

6) א. $(9,3,5)$ ב. $2y+z=0.5\pi$

7) $T(t)=\frac{1}{5}\left(3\cos t,-3\sin t,4\right),\quad N(t)=(-\sin t,-\cos t,0),\quad B(t)=\frac{1}{5}\left(4\cos t,-4\sin t,-3\right)$

8) שאלת הוכחה.

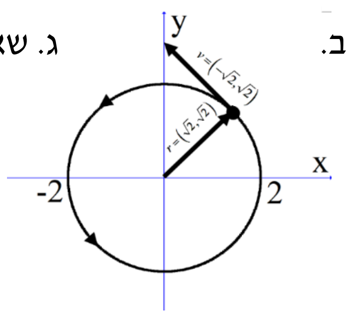
9) המישור הניצב $x+4y+12z=114$, מישור הנישוק $24x-12y+2z=16$,
מישור היישור $76x+143y-54z=292$.

10) שאלת הוכחה.

11) א. $(2,6,10)$ ב. $\sqrt{140}$ ג. $(0,-12,0)$ ד. 12 ה. 120.46°

12) $v(t)=\left(v_{01},v_{02},v_{03}-gt\right),\ |v(t)|=\sqrt{(v_{01})^2+(v_{02})^2+(v_{03}-gt)^2},\ a(t)=\left(0,0,-g\right),\ |a(t)|=g$

13) א. $v(t)=(-2\sin t,2\cos t)$, $|v(t)|=2$ ב.



ג. שאלת הוכחה.

14) $r(t)=(2t,-t,-5t^2+100)$

15) $r(t)=(-2\cos 3t+4,2\sin 3t-4t,4t+1)$

גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

1) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z),\ \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכח:

א. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\operatorname{div}(\mathbf{F})+\operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב. $\nabla(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla(\mathbf{F})+\nabla(\mathbf{G})$

2) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.
הוכח כי: $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F})=(\nabla\varphi)\cdot\mathbf{F}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

3) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.

א. הוכח כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$. או בניסוח אחר $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$.

ב. הוכח כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0$. או בניסוח אחר $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$.

4) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z),\ \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כללים
הוכח כי: $\mathbf{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\mathbf{curl}(\mathbf{F})+\mathbf{curl}(\mathbf{G})$.

5) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי.
הוכח כי $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=-\nabla^2\mathbf{F}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x,y,z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\mathrm{grad}\varphi$ מוגדר על ידי $\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

<u>הגדרה (דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)</u>

יהי $\mathbf{F} = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$.

מגדירים את **הדיברגנץ של F** המסומן $\mathrm{div}\mathbf{F}$, כך:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} \\ &\mathrm{div}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(f,g,h) \\ &\mathrm{div}\mathbf{F} = f_x + g_y + h_z \end{aligned}}.$$

מגדירים את **ה- curl של F** המסומן $\mathrm{curl}\mathbf{F}$, על ידי:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{curlF} = \nabla\times\mathbf{F} \\ &\mathbf{curlF} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(f,g,h) \\ &\mathbf{curlF} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ &\mathbf{curlF} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ &\mathbf{curlF} = (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{aligned}}$$

הערה: יש הרושמים $\mathrm{rot}\mathbf{F}$ במקום $\mathrm{curl}\mathbf{F}$.

מתמטיקה שימושית 2

פרק 2 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

1) תהי $f(x,y)=x^2+y^2$.

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3,4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3,4)$.

2) תהי $f(x,y)=3x^2y$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

3) תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,

בכיוון הווקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

4) תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היחידה,
היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x .

5) תהי $f(x,y)=xy^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$.

6) תהי $f(x,y,z)=x^2y^2z$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f , בנקודה $(2,1,4)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$.

7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x,y) , נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,
מצא את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון לנקודה $(2,6)$.

8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$
בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית, וחשב את ערכה.

9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$,
בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית, וחשב את ערכה.

10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$, ואני נמצא
בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11) נתונה הפונקציה $f(x,y)=4x^2y$.

א. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .

ג. מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2yz^4$.
מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2,-1)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x ,
ו- $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- z .
הנח שהזווית עם ציר ה- y חדה.

13) נתונה הפונקציה $f(x,y)=xy^2-x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1,1)$.

א. חשב את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q ,
בכיוון וקטור שיוצר זווית $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצא וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=0$.

ג. האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=6$.

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+4y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכח כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ג. חשב את $\nabla f(0,0)$.

ד. בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ה. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0,0)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=(1,-1)$.

ו. הסבר מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

15) הפונקציה $f(x,y,z)=2x^2+4y^2+z^2$, מתארת טמפרטורה בנקודה (x,y,z).

א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2,4,1)$?

ב. אוסף הנקודות (x,y,z), בהן הטמפרטורה שווה 20°,
מהווה משטח מפורסם. מהו?

ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2,4,1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר.
באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$),
בנקודה $(2,4,1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר,
אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן.
באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

16) גֻּלָּה מוחזקת בנקודה $(2,1,14)$, שעל המשטח $z=20-x^2-2y^2$.
משחררים את הגֻּלָּה והיא מתחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

א. מהו המשטח הנתון?

ב. מצא את הווקטור $\vec{u}=(a,b,c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֻּלָּה.

17) תהי $f=f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:

1. $f(x,x^2)=\dfrac{x^2}{2}+x^4$ לכל x.

2. הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$, בנקודה $(1,1)$, בכוון הווקטור $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$,
שווה 1.

חשב את הגרדיאנט של f בנקודה $(1,1)$.

18) נתונה $f=f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f\left(x,y,x^2+y^2\right)=2x+y$.
נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,2,4)=-\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u}=(-2,1,2)$.
חשב את $\nabla f(0,2,4)$.

19) נתונה הפונקציה $f(x,y)=12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשב את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8,1)$ בכיוון הווקטור $\vec{u}=(3,4)$.

ב. בדוק האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה (0,0).

ג. חשב $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית α
עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

ד. באיזה כיוון α, הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ תהיה מקסימלית?
מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20) נתונה הפונקציה $f\left(x,y\right)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}+20x+21y & x\neq 0 \\ 21y & x=0 \end{cases}$.

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)<m$, לכל וקטור יחידה $\hat{u}$?

ב. מצא וקטור יחידה $\hat{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=0$.

הערות סימון

1) במישור $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{i}=(1,0)$, $\mathbf{j}=(0,1)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:
$\vec{u}=(x,y)$ **או** $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.
למשל: $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4)$.
במרחב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{k}=(0,0,1)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{i}=(1,0,0)$,
ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v}=(x,y,z)$, **או** $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.
למשל: $\vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4,5)$.

2) יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם $\underline{u}$ או $\mathbf{u}$.

3) וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

תשובות סופיות

1) א. הגרדיאנט $(6,8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.

2) $\frac{48}{5}$ **3)** $\frac{1}{2}$ **4)** $7.5\sqrt{2}$

5) $3\sqrt{13}$ **6)** $\frac{88}{3}$ **7)** $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1,1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.

9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור (12,14,-12) ושווה ל-22.

10) בכיוון הווקטור $(-2,2,-2)$.

11) א. $8\sqrt{3}+2$ ב. $8+2\sqrt{3}$ ג. $\ell:\ (1,2,4)+t\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},8+2\sqrt{3}\right)$

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}-2$

13) א. $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ב. $\vec{u}=(5,1)$ (יש עוד). ג. לא.

14) א. הוכחה. ב. $f_x=1,\ f_y=0$ ג. $\nabla f(0,0)=(1,0)$
ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0

15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הוקטור $(8,32,2)$.
ד. בכיוון הווקטור $(8,32)$.

16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u}=(4,4,-32)$

17) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

18) $\nabla f(0,2,4)=(2,-3,1)$

19) א. $\frac{67}{5}$ ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12\left(\cos\alpha-\cos^3\alpha\right)^{\frac{1}{3}}$
ד. $\alpha=54.73^\circ$, $Max\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(0,0)=12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

20) א. $m>29$ ב. $\hat{u}=\left(21/29,-20,29\right)$ (יש אחרים).

מתמטיקה שימושית 2

פרק 3 - אינטגרלים קוויים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים קוויים ושימושיהם

* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

שאלות

אינטגרל קווי מסוג I

בשאלות **1-4** חשב את האינטגרל $\int_C f(x,y)ds$, כאשר:

1) $f(x,y)=1-x^2 \quad ; \quad C:\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$

2) $f(x,y)=x \quad ; \quad C:\ x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le \pi$

3) $f(x,y)=x+y$; C קטע של ישר המחבר את $\mathrm{O}(0,0)$ עם $\mathrm{A}(1,2)$.

4) $f(x,y)=x+y^2$; C היקפו של $\Delta\mathrm{OAB}$: $\mathrm{O}(0,0),\ \ \mathrm{A}(0,1),\ \ \mathrm{B}(1,0)$.

בשאלות **5-6** חשב את האינטגרל $\int_C f(x,y,z)ds$, כאשר:

5) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \ ; \ C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t \ \ 0\le t\le \pi$

6) $f(x,y,z)=x^3+3z \ ; \ C:\ x=t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}t^2,\ z=\frac{1}{3}t^3 \ \ 0\le t\le 3$

7) חשב את **אורך העקום** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

8) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $(0\le t\le \pi)$ $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t$.
חשב את **מסת** הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x,y,z)=kz$ $(k>0)$.

אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות **9-10** חשב:

9) $\int_C 2xydx+(x^2+y^2)dy$; $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$

10) $\int_C (2x+y)dx+(x^2-y)dy$; $C:\ x=t,\ y=t^2\ \ 0\le t\le 1$

11) חשב $\int_C ydx+x^2dy$, כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$,
ו- C נתון ע"י המשוואה:

א. $y=2x$

ב. $y=x^2$

12) חשב $\int_{(1,1)}^{(4,2)}(x+y)dx+(y-x)dy$, אם העקום נתון על ידי:

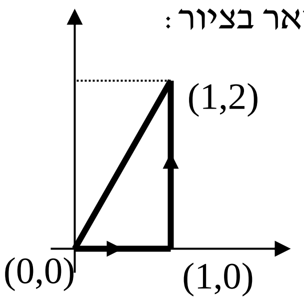
א. הפרבולה $y^2=x$.

ב. קו ישר.

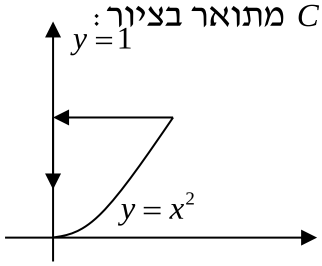
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.

ד. העקום: $y=t^2+1,\quad x=2t^2+t+1$.

13) חשב $\int_C x^2ydx+xdy$, כאשר C המסלול מתואר בציור:



14) חשב $\int_C (x-y^2)dx+dy$, כאשר C המסלול מתואר בציור:



15) אם $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2-6yz\right)\mathbf{i}+\left(2y+3xz\right)\mathbf{j}+\left(1-4xyz^2\right)\mathbf{k}$,

חשב את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$, לאורך המסלולים:

א. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

ב. הקוים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

בשאלות **16-17** חשב את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, כאשר:

16) $F(x,y)=\left(x^2y^3,-y\sqrt{x}\right),\quad r(t)=\left(t^2,-t^3\right),\quad 0\le t\le 1$

17) $F(x,y,z)=\left(\sin x,\cos y,xz\right),\quad r(t)=\left(t^3,-t^2,t\right),\quad 0\le t\le 1$

18) נתון שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=x^3y\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$.

א. חשב את ה**עבודה** שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה $y=x^2$ מ- $(-2,4)$ עד $(1,1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1,1)$ עד $(-2,4)$?

19) חשב את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$, על חלקיק הנע לאורך העיקום $(0\le t\le 1)$ $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$.

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=\int_C\left(f,g,h\right)\cdot\left(dx,dy,dz\right)=\int_C fdx+gdy+hdz$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot dr=\int_C\left(A_1,A_2,A_3\right)\cdot\left(dx,dy,dz\right)=\int_C A_1dx+A_2dy+A_3dz$$

תשובות סופיות

1) π

2) $\frac{16}{3}$

3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

4) $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

5) $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$

6) $\frac{567}{2}$

7) 6

8) $\sqrt{5}k\pi^2$

9) $\frac{1}{3}$

10) $\frac{4}{3}$

11) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

12) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$

13) $\frac{1}{2}$

14) $\frac{4}{5}$

15) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$

16) $-\frac{59}{105}$

17) $\frac{6}{5}-\sin 1-\cos 1$

18) א. 3 ב. -3

19) 1

הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

עקום	הצגה פרמטרית	דוגמה
$y=f(x)\ (a\le x\le b)$	$x=t,\ y=f(t)\ (a\le t\le b)$	$y=x^2\ (1\le x\le 2)$ $\Downarrow$ $x=t,\ y=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x=f(y)\ (a\le y\le b)$	$y=t,\ x=f(t)\ (a\le t\le b)$	$x=y^2\ (1\le y\le 2)$ $\Downarrow$ $y=t,\ x=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t,\ y=r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t,\ y=2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t,\ y=-r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t,\ y=-2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t,\ y=5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=-b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t,\ y=-5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
ישר פרמטרי במישור מהנקי' (x_0,y_0) לנקי' (x_1,y_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מהנקי' $(1,2)$ לנקי' $(3,4)$ $x=1+2t$ $y=2+2t$ $(0\le t\le 1)$
ישר פרמטרי במרחב מהנקי' (x_0,y_0,z_0) לנקי' (x_1,y_1,z_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $z=z_0+t(z_1-z_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מ- $(1,2,3)$ ל- $(4,7,9)$ $x=1+3t$ $y=2+5t$ $z=3+6t$ $(0\le t\le 1)$

מתמטיקה שימושית 2

פרק 4 - שדות משמרים - אי תלות במסלול

תוכן העניינים

שדות משמרים – אי-תלות במסלול

שאלות

בשאלות **1-6** קבע האם $\mathbf{F}$ הוא שדה משמר;
אם כן, מצא פונקציה ϕ, כך ש- $\nabla\phi=\mathbf{F}$.

1) $\mathbf{F}(x,y)=(6x+5y,5x+4y)$

2) $\mathbf{F}(x,y)=xe^{y}\mathbf{i}+ye^{x}\mathbf{j}$

3) $\mathbf{F}(x,y)=\left(2x\cos y-y\cos x,-x^{2}\sin y-\sin x\right)$

4) $\mathbf{F}(x,y,z)=z^{2}\mathbf{i}+e^{-y}\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$

5) $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+\left(xy+3z^{2}\right)\mathbf{k}$

6) $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(z,2yz,y^{2}\right)$

7) נתון האינטגרל $\int_{(1,2)}^{(3,4)}\left(6xy^{2}-y^{3}\right)dx+\left(6x^{2}y-3xy^{2}\right)dy$.

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1,2)$ ו- $(3,4)$.

ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

8) חשב את האינטגרל $\int_{(1,4)}^{(3,1)}2xy^{3}dx+\left(1+3x^{2}y^{2}\right)dy$.

9) חשב את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^{4}+3\right)dx+\left(x^{2}-4xy^{3}\right)dy$.

10) יהי $\mathbf{F}(x,y)=e^{y}\mathbf{i}+xe^{y}\mathbf{j}$. מצא את ה**עבודה** שמבצע השדה על חלקיק הנע על $y=\sqrt{1-x^{2}}$, מ- $(1,0)$ ל- $(-1,0)$.

11) חשב את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)}\left(2xz^3+6y\right)dx+\left(6x-2yz\right)dy+\left(3x^2z^2-y^2\right)dz$.
תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

12) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F}=\frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$, ונתונים 3 מסלולים:

$L_1:\ x^2+y^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

$L_2:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ בכיוון השלילי (עם כוון השעון).

$L_3:\ (x-10)^2+(y-7)^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

חשב:

א. $\oint_{L_1}\mathbf{F}dr$ ב. $\oint_{L_2}\mathbf{F}dr$ ג. $\oint_{L_3}\mathbf{F}dr$

13) ענה על הסעיפים הבאים:

א. שרטט את השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, ברביע הראשון.

ב. בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\right\}$, נסמן $g=\frac{x}{x^2+y^2}$, $f=\frac{-y}{x^2+y^2}$.

1. הוכח כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכח שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום D (מסעיף ב).

ד. הוכח שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,x>0\right\}$, ומצא את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\right\}$, חשב $\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר C עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה $(0,0)$.

14) נתון השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$,

בתחום $D=\{(x,y)\in R^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\}$.

א. שרטט את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

ב. נסמן $g=\frac{y}{x^2+y^2}$, $f=\frac{x}{x^2+y^2}$.

1. הוכח כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.
2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכח שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$

$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\right)$

$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\hat{x}+g(x,y,z)\hat{y}+h(x,y,z)\hat{z}$

$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$

תשובות סופיות

1) $\phi(x,y)=3x^2+5xy+2y^2$

2) השדה אינו משמר.

3) $\phi(x,y)=x^2\cos y-y\sin x$

4) $\phi(x,y,z)=xz^2-e^{-y}$

5) $\phi(x,y,z)=xyz+z^3$

6) השדה אינו משמר.

7) א. שאלת הוכחה. ב. 236

8) -58

9) 5

10) -2

11) $15=$ עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- $(1,-1,1)$ ל- $(2,1,-1)$, לאורך C.

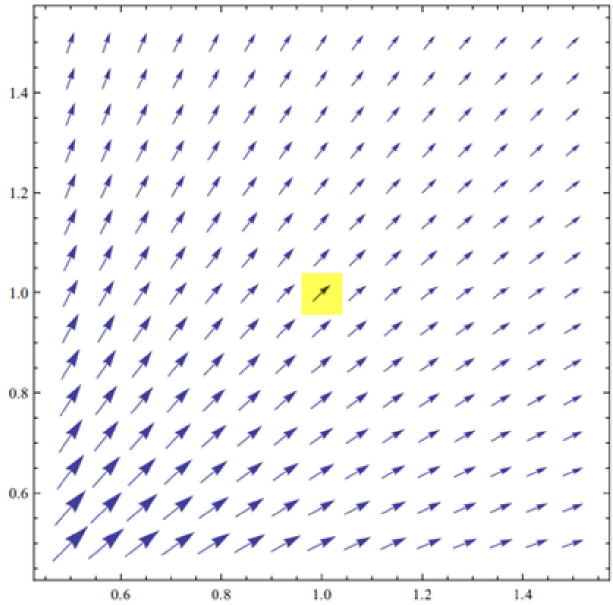
12) א. 2π ב. -2π ג. 0

13) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. שאלת הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.
ג. שאלת הוכחה. ד. שאלת הוכחה; $\phi=\arctan\frac{y}{x}+k$ ה. 2π

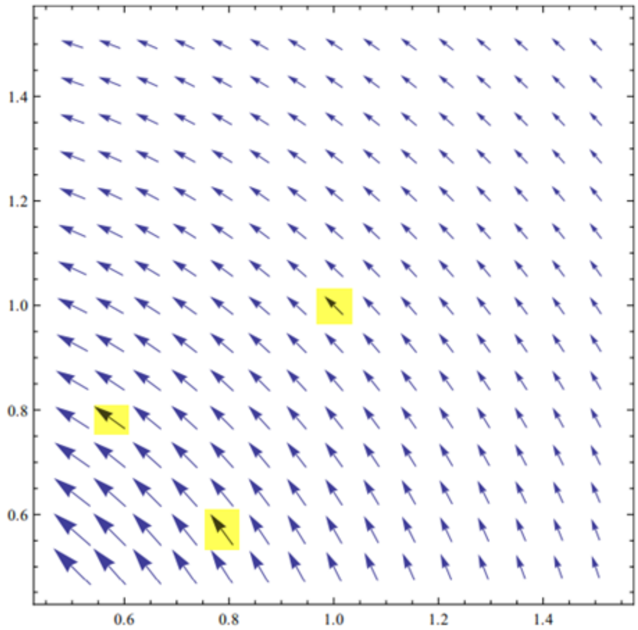
14) א. ראו בעמוד הבא. ב. 1. שאלת הוכחה. 2. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.
ג. שאלת הוכחה.

שרטוטים

שאלה 13 סעיף א:



שאלה 14 סעיף א:



מתמטיקה שימושית 2

פרק 5 - משפט גרין

תוכן העניינים

משפט גרין

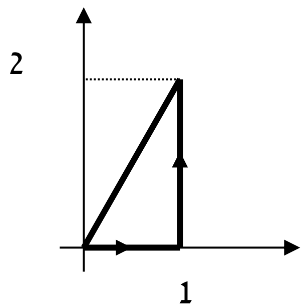
שאלות

בשאלות **1-3** אשר את משפט גרין.

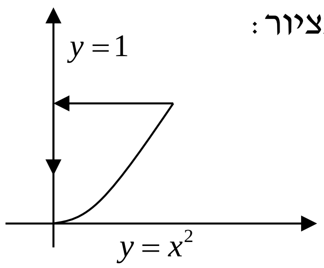
כלומר, חשב את האינטגרל $\oint_C fdx+gdy$ ואת האינטגרל $\iint_R (g_x-f_y)dA$,

והראה שהם שווים זה לזה.

1) $\oint_C x^2ydx+xdy$; המסלול C מתואר בציור:



2) $\oint_C (x-y^2)dx+dy$; המסלול C מתואר בציור:



3) $\oint_C (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$, C הוא ריבוע שקדקודיו:

$(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$ בכיוון החיובי.

4) חשב את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=\left(e^x-y^3\right)\mathbf{i}+\left(\cos y+x^3\right)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2+y^2=1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון,

ומשלים הקפה אחת.

5) חשב את האינטגרל $\int_C \left(e^y-\tan\frac{x}{2}\right)dx+\left(xe^y+y\cos y^2\right)dy$, כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y=8-x^2,\ y=x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

6) חשב את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y}\cos y dx+\left(e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2xy\right)dy$,
כאשר C הוא חצי האליפסה $\left\{x^2+4y^2=4,\ y\ge 0\right\}$ מהנקודה $(2,0)$
לנקודה $(-2,0)$.

7) ענה על הסעיפים הבאים:
א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C,
נתון על ידי $\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$.
ב. חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

8) נתון האינטגרל הקווי $\oint_C \left(x^3+3x^2y+3xy^2y^3\right)dx+\left(3x^2y+3x-\sin y\right)dy$,
כאשר C מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון.
מהו הערך המקסימלי של האינטגרל?
עבור איזו מסילה C הוא מתקבל?

9) הוכח שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין C,
החוסמת שטח במישור, והמקיימת $\oint_C -y^3dx+x^3dy=0$.

10) חשב: $\oint_C \frac{4x-y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dx+\frac{x-4y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dy$, כאשר:
א. C הוא המעגל $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.
ב. C הוא המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=144$.
ג. C היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 0.5.
2) הערך המשותף הוא 0.8.
3) הערך המשותף הוא 8.
4) 1.5π
5) $0.5\sin 64$
6) $\frac{8}{3}+e^4-\frac{1}{e^4}$
7) א. הוכחה. ב. πab
8) הערך המקסימלי הוא $\frac{6\pi}{4}$, עבור המסילה $C: x^2+y^2=1$.
9) הוכחה.
10) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{\pi}{2}$

מתמטיקה שימושית 2

פרק 6 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים משטחיים מסוג I

שאלות

בשאלות **1-5** חשב את האינטגרל המשטחי:

1) $\iint\limits_S x^2yzdS$, כאשר S הוא המישור $z=1+2x+3y$,
מעל המלבן $R=[0,3]\times[0,2]$.

2) $\iint\limits_S xdS$, כאשר S הוא המשטח $y=x^2+4z$, $0\le z\le 2$, $0\le x\le 2$.

3) $\iint\limits_S yzdS$, כאשר S הוא המישור $z=y+3$, שכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$.

4) $\iint\limits_S \left(x^2z+y^2z\right)dS$, כאשר S הוא חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$.

5) $\iint\limits_S xyzdS$, כאשר S הוא חלק החרוט $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+3u\mathbf{k}$,
המקיים $0\le v\le\frac{\pi}{2}$, $1\le u\le 2$.

6) חשב את **שטח הפנים** של כדור בעל רדיוס R .

7) היריעה הדקה S היא חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$, שמתחת למישור $z=1$,
וצפיפותה $\delta(x,y,z)=\delta_0$, קבועה.
חשב את **מסת** היריעה.

תשובות סופיות

1) $171\sqrt{14}$

2) $\frac{33\sqrt{33}-17\sqrt{17}}{6}$

3) $\pi\sqrt{2}/4$

4) 16π

5) $93/\sqrt{10}$

6) $4\pi R^2$

7) $\frac{\pi\delta_0}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

אינטגרל משטחי מסוג II

שאלות

בשאלות הבאות חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

בניסוח אחר: חשב את השטף של שדה הזרימה $\mathbf{F}$ דרך S.

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) $\mathbf{F}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$.

5) $\mathbf{F}=0\mathbf{i}-2z\mathbf{j}+\left(-3y-1\right)\mathbf{k}$, S הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

תשובות סופיות

1) $\frac{11}{6}$

2) $\frac{8\pi}{3}$

3) 27

4) 12π

5) -16π

מתמטיקה שימושית 2

פרק 7 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

תוכן העניינים

משפט הדיברגנץ (גאוס)

שאלות

בשאלות **3-1** אשר את משפט הדיברגנץ.

כלומר, חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, ואת האינטגרל $\iiint_G div\mathbf{F}dV$,

והראה שהם שווים זה לזה ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

(ראה הערת סימון בעמוד הבא)

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G,
הנקבעת ע"י המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G, $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G,
הנקבעת ע"י המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישורים $z=0$ ו-$z=2$.
חשב את **השטף** של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ דרך S.
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

5) חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

$\mathbf{F}=\left(z^2-x\right)\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:
$x=0,\ x=3,\ z=4-y^2,\ z=0$.

6) חשב את $\iint_S xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$,
כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי $z=0$, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

7) יהי S משטח <u>פתוח</u> $x^2+z^2=16$, $0\le y\le 4$ (גליל ללא הבסיסים).
חשב את **השטף** דרך S של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+x^5\mathbf{k}$.
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

8) חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

$$\mathbf{F}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2\right)\mathbf{i}+2x\arctan y\mathbf{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\mathbf{k}\ ;$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$ (המשטח <u>פתוח</u>).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$,

מתקיים: $\iiint_G div\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$.

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla\cdot\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S fdydz+gdzdx+hdxdy$$

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$.

2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$.

3) הערך המשותף הוא 27.

4) 279π

5) 16

6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

7) 0

8) -4π

מתמטיקה שימושית 2

פרק 8 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

משפט סטוקס

שאלות

בשאלות **1-3** בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים.

כלומר, חשב את האינטגרל $\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}ds$, ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$,

והראה שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בעמוד הבא).

1) $\mathbf{F}=2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+5y\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$.

2) $\mathbf{F}=\left(x^2+y-4\right)\mathbf{i}+\left(-3xy\right)\mathbf{j}+\left(2xz+z^2\right)\mathbf{k}$; S הוא שפת חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

3) $\mathbf{F}=(y+z)\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה, החסום על ידי המישורים $2x+z=6,\ y=2$, ושאינו כלול

א. במישור xy.

ב. במישור $y=2$.

ג. במישור $2x+z=6$.

4) חשב את האינטגרל $\oint_C x^2dx+4xy^3dy+y^2xdz$, כאשר C עקומה בצורת מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

5) חשב את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר $\mathbf{F}=\left(x+y^2\right)\mathbf{i}+\left(y+z^2\right)\mathbf{j}+\left(z+x^2\right)\mathbf{k}$;
ו- C היא שפת המשולש, שקדקודיו הם $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$,
וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

6) חשב את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$, כאשר $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$; ו- S הוא החלק של הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$, ומעל למישור xy.

7) חשב את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$, כאשר $\mathbf{F}=(x-z)\mathbf{i}+(x^3+yz)\mathbf{j}-3xy^2\mathbf{k}$;
ו- S הוא משטח החרוט $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, מעל למישור- xy.

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$,

מתקיים: $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\mathrm{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$.

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס :

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\mathrm{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\mathrm{Rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint_C fdx+gdy+hdz=\iint_S \left((h_y-g_z)\mathbf{i}+(f_z-h_x)\mathbf{j}+(g_x-f_y)\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{n}dS$$

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 12π.
2) הערך המשותף הוא -16π.
3) הערך המשותף הוא : א. -6 ב. -9 ג. -18
4) -90
5) -1
6) 0
7) 12π

מתמטיקה שימושית 2

פרק 9 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^4-x}{\ln x}dx$.

2) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^m-x^n}{\ln x}dx \quad (m,n>0)$.

3) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

4) חשב את האינטגרל $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)dx$.

5) הוכח כי $\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right)=\int_0^{\pi}\ln(1+\alpha\cos x)dx$, עבור $|\alpha|<1$.

6) חשב $\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx$, עבור $\alpha\neq\pm1$.

7) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

8) חשב את האינטגרל $\int_0^1 x^p(\ln x)^m dx \quad (p>0,\ m\in\mathbb{N})$.

9) חשב את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{(2-\cos x)^2}dx$.

תשובות סופיות

1) $\ln 2.5$

2) $\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right)$

3) $\frac{\pi}{8}\ln 2$

4) 2π

5) שאלת הוכחה.

6) $\int_0^\pi \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx=\begin{cases}0 & |\alpha|<1\\ 2\pi\ln|\alpha| & |\alpha|>1\end{cases}$

7) $\frac{\pi+2}{8}$

8) $\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}}$

9) $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$, עבור $b > a > 0$.

2) חשב את האינטגרל $\int_0^\pi \ln\frac{b-\cos x}{a-\cos x}dx$, עבור $b, a > 1$.

3) הוכח כי $\int_0^{2\pi}\left[(b-\sin x)^2-(a-\sin x)^2\right]dx = 2\pi(b^2-a^2)$, לכל a ו- b.

הערה: פתור בשתי דרכים, גם ע"י אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם ע"י חישוב ישיר.

4) בהינתן הנוסחה: $\int_0^{2\pi}\frac{1}{\alpha+\sin x}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $\alpha > 1$,

הוכח כי: $\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right)dx = 2\pi\ln\left(\frac{9}{8}\right)$.

תשובות סופיות

1) $\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$

2) $\pi\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה

אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר

הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שילמדו בהמשך.

חלק מהמרצים מסתפק רק בצד הטכני החישובי ולא נכנס לנושא זה כלל.

בררו עם מתרגל ו/או מרצה הקורס האם אתם נדרשים לנושא זה.

במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים.

בהצלחה!

שאלות

1) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(kx)\,dx$, כאשר k ממשי.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $0<a\le\alpha$.

2) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+\alpha\right)^n}dx$, כאשר n טבעי.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha\ge 1$.

3) הוכח שהאינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ מתכנס במידה שווה עבור $\alpha\ge 0$.

4) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2}dx$.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α.

5) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$ עבור $\alpha\ge k>0$.

א. חשב את האינטגרל והוכח שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α המקיים $\alpha\ge k>0$.

6) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x}dx$.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל n טבעי ולכל α המקיים $\alpha \geq k > 0$.

7) נתון כי $\phi(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2}dx$, כאשר $\alpha \geq k > 0$.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

8) נתון האינטגרל $\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2}dx$.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \geq k > 0$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר GooL.co.il

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשב את האינטגרל $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$.

2) הוכח שלכל n טבעי מתקיים:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\frac{\pi}{2}.$$

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}dx$.

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2/2}dx$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty x^{10}e^{-x^2}dx$.

ג. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$.

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ $(\alpha>0)$.

ב. בעזרת סעיף א' חשב את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

תשובות סופיות

1) $n!$

2) שאלת הוכחה.

3) א. $\sqrt{2\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

4) א. אם n אי-זוגי אז 0, ואם n זוגי אז $1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(n-1)\cdot\sqrt{2\pi}$.

ב. $\frac{945}{64}\sqrt{\pi}$ ג. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

5) א. $-\arctan\alpha+\frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{2}$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

(1 חשב: $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, עבור $b>a\geq k>0$.

(2 חשב: $\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$, עבור $b>a\geq k>0$.

(3 חשב: $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

(4 הוכח כי עבור $b>a>0$ ו- $r\in\mathbb{R}$, מתקיים $\int_0^\infty \cos rx\frac{a^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+r^2}{a^2+r^2}$.

(5 ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin rx}{x}dx=\arctan\frac{r}{\alpha}$ $(\alpha,r>0)$.

ב. הוכח כי $\int_0^\infty \left[e^{-\alpha x}\frac{1-\cos rx}{x^2}\right]dx=\arctan\frac{r}{a}-\frac{a}{2}\ln\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)$ $(\alpha,r>0)$.

ג. הוכח כי $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\arctan\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)$ $(\alpha>0)$.

(6 הוכח:

א. $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$.

8) חשב: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

תשובות סופיות

1) $\ln\frac{b}{a}$

2) $\frac{\pi}{2}(b-a)$

3) π

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{4}$

8) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

מתמטיקה שימושית 2

פרק 10 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

הפרדת משתנים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$ $\quad (y\neq 0)$

2) $(1-x)y'=y^2$

3) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

4) $(x-1)\frac{dy}{dx}=4y$; $y(2)=1$

5) $\frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9$; $y(1)=-1$

6) $\left(x^2y-2+2x^2-y\right)dx-\left(xy^2-4-4x+y^2\right)dy=0$

7) $dy=2t\left(y^2+4\right)dt$

8) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

9) $y'+y^2\sin x=0$; $y(\pi)=1$

10) $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x$; $y(0)=5$ $\quad (\cos x\neq 0)$

11) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$; $y(0)=1$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$

2) $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c},\quad y=0$

3) $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$

4) $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$

5) $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

6) $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2+k}$

7) $y=2\tan\left(2t^2+k\right)$

8) $x=1+\tan(t+c)$

9) $y=-\frac{1}{\cos x}$

10) $\ln|y|=\tan x+\ln 5$

11) $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

משוואה הומוגנית

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות **1-8**:

1) $\left(y^3+x^3\right)dx+xy^2dy=0$

2) $y'=\dfrac{4y-3x}{2x-y}$

3) $y^2+x^2y'=xyy'$

4) $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

5) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$

6) $y'=\dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $y(1)=0 \;\; ; \;\; \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$

8) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

9) נתונה המשוואה: $\left(y^2+x^2\right)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n, על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות

1) $-\ln|x| = \frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right|+c\ , \qquad y=-\frac{x}{2^{1/3}}$

2) $\ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|(y/x)-1\right|-\frac{5}{4}\ln\left|(y/x)+3\right|+c\ , \quad y=x,\ \ y=-3x$

3) $-\ln|x| = \ln\left|(y/x)\right|-(y/x)+c, \quad y=0$

4) $-\ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right|+c, \quad y=0, \quad y=-2x$

5) $\ln|x| = -\sin(y/x)+c$

6) $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right)=\ln|y|+c, \qquad y=0$

7) $\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c$

8) $\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right|+c, \quad x(t)=0, \quad x(t)=t$

9) $n=1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left(1+2(y/x)^2\right)+c$

משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y+2}$

2) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

4) $\frac{dx}{dy}=\frac{3+x+2y}{1+x+y}$

5) $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

תשובות סופיות

1) $x=\frac{1}{2}(x+y+1)+\frac{1}{4}\ln\left(2(x+y+1)+1\right)+\frac{1}{4}+c,\quad y=-x-1.5$

2) $\ln|x-1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right|+c\ \ ,y=x-3\ \ ,\ \ y=-x-1$

3) $0=14y-(x+2y+3)^2+k$

4) $\ln|x-1|=\frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right|+(-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right]+c$

$y=\sqrt{0.5}x-2-\sqrt{0.5}\ ,\ y=-\sqrt{0.5}x-2+\sqrt{0.5}$

5) $\ln|x-2|=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right)+c$

משוואה מדויקת

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות **1-6**:

1) $\left(2x^3+3y\right)dx+\left(3x+y-1\right)dy=0$

2) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

3) $\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy=0$

4) $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 xdy=0$

5) $\left(y^2-\frac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}+2y(x+1)\right)dy=0$

6) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

7) נתונה המשוואה $\left(3x^2+ye^{xy}\right)dx+\left(2y^3+kxe^{xy}\right)dy=0$, כאשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k, על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות

1) $0.5x^4+3yx+0.5y^2-y=c$

2) $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$

3) $y\sin x+x^2e^y-y=c$

4) $x-\dfrac{y^2\cos 2x}{2}-\dfrac{y^2}{2}=c$

5) $\ln|x+y|+(x+1)y^2+2x-\ln|x|=c$

6) $x^2t^2-2x^3t+x^4=c$

7) $k=1,\ \ x^3+e^{xy}+\dfrac{y^4}{2}=c$

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראה שהמשוואה $x^2y^3+x\left(1+y^2\right)y'=0$ אינה מדויקת,
ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$
אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x.

3) הראה שהמשוואה $(x+2)\sin y dx+x\cos y dy=0$ אינה מדויקת,
ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x.

פתור את המשוואות בשאלות **4-9**:

4) $\left(x^2+y^2+x\right)dx+(xy)dy=0$

5) $\left(x-x^2-y^2\right)dx+ydy=0$

6) $\left(2xy^3+y^4\right)dx+\left(xy^3-2\right)dy=0$

7) $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$

8) $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$

9) $y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}\quad;\quad y(1)=-1$

10) נתונה מד״ר לא מדויקת $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. הוכח: אם $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכח: אם $\frac{M_y-N_x}{M}=g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(y^4-4xy)dx+(2xy^3-3x^2)dy=0$.
מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.
כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

12) נתונה המשוואה $(5x^2+3y^3+2xy)dx+(3x^2+3xy^2+6y^3)dy=0$.
מצא את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
מצא תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(x^2y^3)dx+(x+xy^2)dy=0$.
מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.
כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. מצא תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזר בסעיף א׳ על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $(y-xy^2\ln x)dx+xdy=0$.

16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
מצא תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

תשובות סופיות

1) $0.5x^2+\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=c$

2) $e^x\sin y+2y\cos x=c$

3) $\sin y\cdot e^x\cdot x^2=c$

4) $0.25x^4+0.5x^2y^2+\frac{x^3}{3}=c$

5) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-x=c$

6) $x^2+xy+\frac{1}{y^2}=c$

7) $x-\frac{x}{y}=c$

8) $-\ln x-\frac{1}{xy}+y=c$

9) $-\frac{x^3}{y}+\frac{2y^3}{3}=\frac{1}{3}$

10) שאלת הוכחה.

11) $\mu(xy)=(xy)^2$

12) $\mu(x+y)=(x+y)^2$

13) $\text{if: } \frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}=h\left(x/y\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu=e^{\int\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}}$

14) $\mu=\frac{1}{xy^3}$

15) א. $\text{if: } \frac{M_y-N_x}{yN-xM}=h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}}$ ב. $\mu=\frac{1}{x^2y^2}$

16) $\text{if: } \frac{M_y-N_x}{N-M}=h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N-M}}$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

2) $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

3) $(x-2)y'=y+2(x-2)^3 \quad (x>2)$

4) $x^3y'+(2-3x^2)y=x^3 \quad (x>0)$

5) $\frac{dy}{dt}+y=2+2t \; ; \; y(0)=1$

6) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x} \quad (\sin x>0)$

7) $y'-2y\cot x=1 \quad (\sin x>0)$

8) $x^2z'+2xz=\cos x \; ; \; z(\pi)=0$

9) $ydx=(2x+y^3)dy$

תשובות סופיות

1) $y=2+C\cdot e^{-x^2}$

2) $y=x\left[\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+C\right]$

3) $y=(x-2)\left[x^2-4x+C\right]$

4) $y=\frac{1}{2}x^3+C\cdot x^3e^{\frac{1}{x^2}}$

5) $y=2t+e^{-t}$

6) $y=\frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x}+C\right]$

7) $y=\sin^2 x\left[-\cot x+C\right]$

8) $z=\frac{\sin x}{x^2}$

9) $x(y)=y^2(y+c)$

משוואת ברנולי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x^2y'+2xy-y^3=0$

2) $\left(x^2+1\right)y'-2xy-y^2=0$

3) $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^2y^{1/2}$

4) $y'-\left(\dfrac{1}{x}+5x^4\right)y=-x^3y^2 \quad ; \quad y(1)=2.5$

5) $z'-\cot x\cdot z=\dfrac{1}{\sin x}z^3 \qquad (\sin x\neq 0)$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{5x}+c\cdot x^4}}$

2) $y=\dfrac{x^2+1}{-x+C}$

3) $y=x^2\left(\dfrac{x}{2}+C\right)^2$

4) $y=\dfrac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

5) $z=\pm\sqrt{\dfrac{\sin^2 x}{\cos x+C}}$

משוואת ריקטי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^{x}\right)y + y^{2}$$

2) $$y' = 1 + (x - y)^{2}$$

3) $$y' = 1 + x + 2x^{2}\cos x - (1 + 4x\cos x)y + 2y^{2}\cos x$$

תשובות סופיות

1) $$y(x) = -0.5e^{x} + \frac{e^{x}}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}}$$

2) $$y(x) = x + \frac{1}{-x + C}$$

3) $$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^{x}}$$

הצבות שונות ומשונות

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y' = \cos(y-x)$

2) $y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right);\ y(1)=0$

3) $y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4},\ \ y(0)=1$

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{\sin z} + c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right)$

3) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1}$

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדוק עם מרצה הקורס אם אתה נדרש אליו.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $4x^2p^2 - 4x^2p - 2xy - y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

2) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

3) $xyp^2 + \left(x^2 + xy + y^2\right)p + x^2 + xy = 0$ $\quad (p = y')$

4) $y = 2px + p^4x^2$ $\quad (p = y')$

5) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$ $\quad (p = y')$

6) $6p^2y^2 + 3px - y = 0$ $\quad (y > 0)$ $\quad (p = y')$

תשובות סופיות

1) $\left(y-2x-\sqrt{x}\cdot c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|x|-c_2\right)=0$

2) $\left(\ln|y|-2\ln|x|-c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+3\ln|x|-c_2\right)=0$

3) $\left(y+0.5x-\frac{c_1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-c_2\right)=0,\quad x>0$

4) $y=\pm2\sqrt{cx}+c^2$

5) $y=\frac{1}{2}cx^2+\frac{2}{c}$

6) $6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2y^2+3\left(\frac{c}{y^2}\right)x-y=0$

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

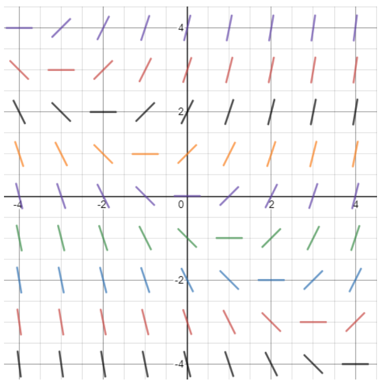
1) שרטט שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y'=2y-x$.

2) התאם כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א׳-ג׳ לשדה הכיוונים שלה:

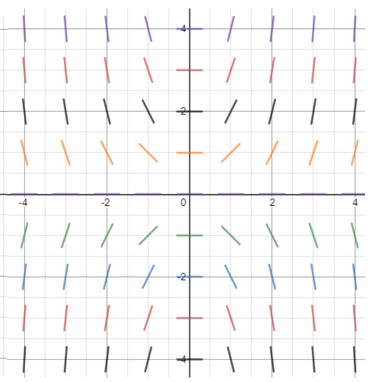
א. $y'=\frac{x}{y}$

ב. $y'=xy$

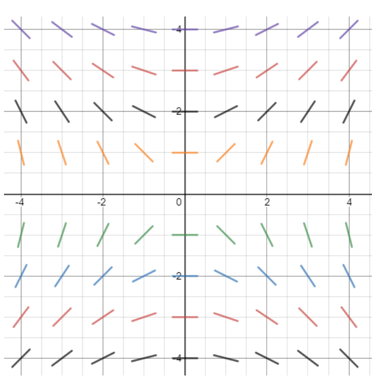
ג. $y'=x+y$



איור 1



איור 2



איור 3

3) נתונה המד״ר: $y'=y-x\ ,\ y(0)=2$.

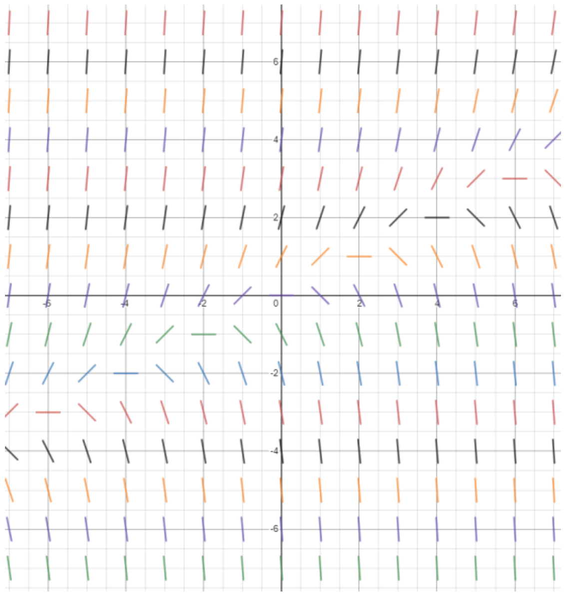
מצא בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.1$.

4) נתונה המד״ר: $y'=x+y\ ,\ y(1)=2$.

מצא בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.2$.

תשובות סופיות

1)



2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

3) $y(1) = 4.593$

4) $y(2) = 6.95328$

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הבעיה $y'=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y}$, $y(2)=-1$.

א. הוכח ש- $y_1(x)=-x+1,\quad y_2(x)=-\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.
קבע באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבר מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה $y'=\sqrt[3]{y}+4$, $y(0)=0$.

א. הוכח שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכח שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכח שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצא אותו.

3) פתור את הבעיה $y'=\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+x^2\sin y$, $y(4)=0$.

4) נתונה הבעיה $y'=(y-1)\left(x^2+y\right)^5$, $y(0)=4$.

א. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר $ydx=\left(2x+y^3\right)dy$.

א. הראו שעבור $x=x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,
ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,
מהן נקודות ההתחלה (x_0,y_0), כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,
העובר דרך (x_0,y_0).
צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0,y_0) ?

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו 3 קרובי פיקארד לפתרון הבעיה.
ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).
ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \to \infty$.

7) כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = \frac{1}{x}|\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases}$ $(x > 0)$?

8) נתונה בעיית התחלה: $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.
ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.
ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלה: $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.
ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.
ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

3) $y(x)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.
ב. כל נקודת התחלה (x_0,y_0), שעבורה $y_0\neq 0$.
הקטע הארוך ביותר: $(0,\infty)$ או $(-\infty,0)$.

6) א. $y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+x^2,\quad y_2(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!},\quad y_3(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}$
ב. $y_n(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}$ ג. הוכחה.

7) אחד.

8) א. $[-0.08,0.08]$ ב. $[-0.1,0.1]$ ג. הוכחה.

9) א. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5,0.5]$ ג. הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

מתמטיקה שימושית 2

פרק 11 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x^2y''+xy'=\frac{1}{x} \quad (x\neq 0)$

2) $y''\tan x-1=y' \quad (\cos x\neq 0)$

3) $2xy'y''-(y')^2+1=0$

4) $y''x\ln x=y'$

5) $xy''=x^2e^x+y'$

6) $yy''+(y')^2=0$

7) $2y''y-(y')^2=1$

8) $y''\tan y=2(y')^2 \quad (\cos y\neq 0)$

תשובות סופיות

1) $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$

2) $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

3) $y=\pm\frac{2}{3C_1}\left(C_1x+1\right)^{3/2}+C_2; y=\pm x+C_3$

4) $y=C_1\left(x\ln x-x\right)+C_2; y=C_3$

5) $y=e^x\left(x-1\right)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

6) $\frac{y^2}{2}=cx+k \quad ; \quad y=c$

7) $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2\left(x+k\right)^1}{4}+1\right]$

8) $\cot y=-\left(cx+k\right) \quad ; \quad y=c$

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות **1-11**:

1) $y''-100y=0$

2) $y''-4y'=0$

3) $y''-8y'+7y=0$

4) $z(0)=1\ ,\ z'(0)=1,\ 4z''+z'-5z=0$

5) $y''-2y'+y=0$

6) $4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\frac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

7) $y''+4y=0$

8) $y''+10y'+125y=0$

9) $y(0)=0,\ \ y'(0)=3\ ;\ y''-2y'+10y=0$

10) $5y''+8y'+4y=0$

11)
$$\begin{cases} y''(x)-\frac{1}{a^2}y(x)=0 \qquad (a>0) \\ y(0)=4 \\ y(\infty)=y(-\infty)=0 \end{cases}$$

12) נתונה המד"ר : $yy''+\left(y'\right)^2=0$.

א. הראה כי $y_1=4$ ו- $y_2=\sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראה כי הפתרון $z\left(x\right)=y_1\left(x\right)+y_2\left(x\right)$, אינו פתרון של המד"ר.

האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$

2) $y=c_1+c_2e^{4x}$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$

4) $z=e^{x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

6) $x\left(t\right)=c_1e^{\frac{-t}{2}}+c_2te^{\frac{-t}{2}}$

7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

8) $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

9) $y=e^{2}\sin 3x$

10) $y=e^{\frac{-4x}{5}}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

11) $y=4e^{-\frac{|x|}{a}}$

12) שאלת הוכחה.

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ \ y'(0)=7;\ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''-3y'+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

8) $y''+3y'=9x$

9) $y''-3y'+2y=e^x$

10) $y''-2y'=6x^2-2x$

11) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$

2) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

5) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^x-3xe^x+2e^{3x}$

8) $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

9) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-xe^x$

10) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

11) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$

12) $y=e^{-x}\sin 2x$

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ \ y'(0)=7;\ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''+3y'=9x$

8) $y''-3y'+2y=e^{x}$

9) $y''-2y'=6x^2-2x$

10) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

11) $y''-3y'+2y=2x^2+e^{x}+2xe^{x}+4e^{3x}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$

2) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

5) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7) $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

8) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$

9) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

10) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$

11) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^x-3xe^x+2e^{3x}$

12) $y=e^{-x}\sin 2x$

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y''+y=\frac{1}{\sin x}$

2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

3) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

4) $y(1)=0\ ,\ y'(1)=0\quad ;\quad y''-2y'+y=\frac{e^{x}}{x}$

5) $y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}}$

6) $y''+4y=\sec 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln|\sin x|$

2) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{1}{2}\right]+x^2e^{-2x}[\ln x-1]$

3) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2(x+1)^{3/2}\right]$

4) $y=e^{x}-xe^{x}+xe^{x}\ln x\quad (x>0)$

5) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

6) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\sin 2x\cdot x$

משוואה לינארית לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – השיטה האופרטורית

שאלות

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדוק עם מרצה הקורס אם אתה נדרש אליו.

בשאלות אלו הסימון הוא: $ay''+by'+cy=Q(x) \Leftrightarrow (aD^2+bD+c)y=Q(x)$.

פתור את המשוואות הבאות:

1) $(D^2-D-2)y=4e^{-2x}+10e^{x}+11$

2) $(D^2-2D+1)y=10e^{4x}+e^{x}-1$

3) $(D^2+D-2)y=4e^{x}+e^{10x}+14$

4) $(D^2+4)y=\sin 5x$

5) $(D^2-4)y=\sin x\cos x\cos 2x$

6) $(D^2+D-2)y=\cos x-3\sin x$

7) $(D^2+2D-3)y=2\cos x\cos 2x$

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^{x} - 5.5$

2) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^{x} - 1$

3) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - 4xe^{x} + \frac{1}{72} e^{10x} + 7$

4) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$

5) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x$

6) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \sin x$

7) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$

משוואה לינארית, כללית – שיטת ד'אלמבר – שיטת הפתרון השני – שיטת אבל

שאלות

1) פתור $y''+\tan x\cdot y'-\left(2\tan x+4\right)y=0$,
כאשר ידוע $y_1\left(x\right)=e^{2x}$.

2) פתור $\left(1-x^2\right)y''+2xy'-2y=0$.

3) הסבר את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגם על המד"ר:
$\left(1-x\right)y''+x\cdot y'-y=2\left(1-x\right)^2e^{-x},\quad \left(0<x<1\right)$,
כאשר ידוע ש- $y_1\left(x\right)=e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}\left(\sin x-4\cos x\right)$

2) $y=c_1x+c_2\left(x^2+1\right)$

3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

1) האם ייתכן כי $y_1(x)=e^x,\ \ y_2(x)=\sin x$, הם שני פתרונות של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, עם מקדמים רציפים בקטע $[0,\pi]$?

2) הראו כי הפונקציות $y_1(x)=\sin x^2,\ \ y_2(x)=\cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$, בקטע $(-4,\infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x=0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x)=xe^x,\ \ y_2(x)=e^{-x}$,
הן פתרונות של המשוואה $y''-\frac{2}{1+2x}y'-\frac{2x+3}{1+2x}y=0$, בקטע $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?

4) נתונות שתי פונקציות $y_2=\left|x^3\right|$, $y_1=x^3$, בקטע $[-4,4]$.
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy''-2y'=0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?

5) ענה על הסעיפים הבאים:
א. יהיו $y_1(x)\ ,\ \ y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I,
ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I.
הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)\ ,\ \ y_2(x)$ הם פתרונות שלה.
ב. רשום משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x>0$,
שהפונקציות $y_1(x)=x^2\ ,\ \ y_2(x)=x^4$, הן פתרונות שלה.

6) נתון כי $y_1(x),\ y_2(x)$, הם פתרונות של המד״ר $y"(x)+p(x)y'+q(x)=0$,
בקטע I, כאשר p, q רציפות בקטע I.
הראו, כי אם קיימת נקודה c בקטע I, שעבורה $y_1(c)=y_2(c)=0$,
אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד״ר הנתונה.

תשובות סופיות

1) לא.

2) $W=-2x$

3) כן.

4) א. $W=0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

5) א. שאלת הוכחה. ב. $y^{"}-\frac{5}{x}y^{'}+\frac{8}{x^2}y=0$

6) שאלת הוכחה.

משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

שאלות

1) נתונה המשוואה $y''-4y=12x$.

א. פתור את המשוואה.

ב. מצא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=11 \end{cases}$.

ג. נסה למצוא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=1 \end{cases}$.

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תן דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0)=1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

2) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''-2xy'+2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

הראה כי $y_1(x)=0$ ו- $y_2(x)=x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x=0$, כך שהפונקציות $y=4x$ ו- $y=\sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

1) א. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-3x$ ב. $y=4e^{2x}-3e^{-2x}-3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו ל: www.GooL.co.il.

2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

מתמטיקה שימושית 2

פרק 12 - משוואות ליניאריות מסדר n

תוכן העניינים

משוואות לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות **1-15**:

1) $y'''-2y''-3y'=0$

2) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=0$

3) $y'''-2y''-y'+2y=0$

4) $y^{(4)}-5y''+4y=0$

5) $y^{(4)}-y=0$

6) $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+20y=0$

7) $y^{(4)}+y=0$

8) $y^{(6)}-y''=0$

9) $\left(D^5+3D^4+2D^3-2D^2-3D-1\right)y=0$

10) $y^{(8)}+8y^{(4)}+16y=0$

11) $z'''-6z''+12z'-8z=0$

12) $y^{(4)}-4y=0$

13) $x^{(6)}-3x^{(4)}+3x''-x=0$

14)
$$\begin{cases} y'''-y''+y'-y=0 \\ y(0)=3 \\ y'(0)=4 \\ y''(0)=-1 \end{cases}$$

15)
$$\begin{cases} y''''-3y'''+6y''-12y'+8y=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=5 \\ y''(0)=-19 \\ y'''(0)=-47 \end{cases}$$

16) נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6,
אשר אחד הפתרונות שלה הוא $x^2e^x\cos 2x$.

א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה.

ב. מצא את המשוואה.

תשובות סופיות

1) $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}$

2) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{x}+c_3e^{-x}$

4) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+e^{0x}\left[c_3\cos x+c_4\sin x\right]$

6) $y=c_1e^{-4x}+e^{x}\left[c_2\cos 2x+c_3\sin 2x\right]$

7) $y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

8) $y=c_1+c_2x+c_3e^{x}+c_4e^{-x}+\cos x+\sin x$

9) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3xe^{-x}+c_4x^2e^{-x}+c_5x^3e^{-x}$

10) $$\begin{aligned}y&=e^{x}\left[c_1\cos x+c_2\sin x\right]+xe^{x}\left[c_3\cos x+c_4\sin x\right]+\\&+e^{-x}\left[c_5\cos x+c_6\sin x\right]+xe^{-x}\left[c_7\cos x+c_8\sin x\right]\end{aligned}$$

11) $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3x^2e^{2x}$

12) $y=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}+c_3\cos\sqrt{2}x+c_4\sin\sqrt{2}x$

13) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3x^2e^{x}+c_4e^{-x}+c_5xe^{-x}+c_6x^2e^{-x}$

14) $y=e^{x}+2\cos x+3\sin x$

15) $y=e^{x}-2e^{2x}+3\cos 2x+4\sin 2x$

16) א. $$\begin{aligned}y&=e^{x}\left[c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right]+xe^{x}\left[c_3\cos 2x+c_4\sin 2x\right]+\\&+x^2e^{x}\left[c_5\cos 2x+c_6\sin 2x\right]\end{aligned}$$

ב. $y''''''-6y'''''+27y''''-68y'''+135y''-150y'+125y=0$

שיטת השוואת מקדמים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y'''-2y''-3y'=2\sin x-4\cos x$

2) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=-28e^{2x}$

3) $y'''-2y''-y'+2y=2x^3-3x^2-12x+14$

4) $y'''-3y'+2y=e^x$

5) $y'''-y''+y'-y=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

6) $\begin{cases} y'''-y'=4e^{-x}+3e^{2x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=-1 \\ y''(0)=2 \end{cases}$

7) $y^{(4)}+y''=3x^2+4\sin x-2\cos x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}+\sin x$

2) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{x}+c_3e^{-x}+x^3+4$

4) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3e^{-2x}+\frac{1}{6}x^2e^{x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2\cos x+c_3\sin x+\frac{1}{4}x(\cos x-\sin x)$

6) $y=-4.5+4e^{-x}+2xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{2x}$

7) $y=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\sin x+\frac{1}{4}x^4-3x^2+x\sin x+2x\cos x$

שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $$y'''+y'=\frac{1}{\cos x}$$

2) $$y'''-3y''+2y'=\frac{e^x}{1+e^{-x}}$$

3) $$y'''-3y''+3y'-y=\frac{e^x}{x}$$

תשובות סופיות

1) $$y=c_1+c_2\cdot\cos x+c_3\cdot\sin x+\ln\left|\tan x+\frac{1}{\cos x}\right|-x\cos x+\sin x\ln\left|\cos x\right|$$

2) $$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(e^x+1-\ln\left(e^x+1\right)\right)+e^x\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right)+e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)$$

3) $$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x-\frac{3}{4}x^2e^x+\frac{1}{2}x^2e^x\ln\left|x\right|$$

משוואה חסרה מסדר שלישי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $y'y'''-(y'')^2-3y''(y')^2-4(y')^4=-16y(y')^3$,
עם תנאי ההתחלה: $y(0)=0,\ \ y'(0)=-3,\ \ y''(0)=-12$.

2) $$\begin{cases} y'''-\dfrac{(y'')^2}{y'}=y''y'-2(y')^2y \\ y(0)=0,\ \ y'(0)=1,\ \ y''(0)=2 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} y'''-\dfrac{(y'')^2}{y'}=y''y'-2(y')^2y \\ y(0)=-1,\ \ y'(0)=1,\ \ y''(0)=0 \end{cases}$$

4) $$3y'''y-y'y''=0$$
$$y(1)=1,\ \ y'(1)=3,\ \ y''(1)=6$$

5) $$\left(y'y'''-2(y'')^2\right)y^2=-(y')^4$$
$$y>0$$
$$y(1)=y'(1)=y''(1)=1$$

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}\ln|-3+4y|=x+\frac{1}{4}\ln 3$

2) $y=\frac{1}{1-x}-1$

3) $y=\tan x-1$

4) $y=x^3$

5) $y=e^{x-1}$

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

1) האם קיימת מד"ר מהצורה $y'''+p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0$,
בעלת מקדמים רציפים בקטע $[-1,1]$,
כך שהפונקציות $y_1(x)=x\,,\ y_2(x)=x^2,\ y_3(x)=x^3$, הן פתרונות שלה?

2) נתונות הפונקציות: $y_1(x)=4-x,\ y_2(x)=4+x,\ y_3(x)=20+x$.
א. חשב את הוורונסקיאן של הפונקציות.
ב. קבע האם הפונקציות תלויות בקטע $(-\infty,\infty)$.
ג. ענה שוב על סעיף ב', בידיעה ששלוש הפונקציות הן פתרון של המד"ר $y''=0$.

3) פתור את הסעיפים הבאים:
א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמים בקטע I, ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I.
הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע I, כך ש-$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ הם פתרונות שלה.
ב. רשום משוואה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות $y_1(x)=x\,,\ y_2(x)=x^2,\ y_3(x)=x^3$ הן פתרונות שלה.

תשובות סופיות

1) לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודה אחת $x=0$.
2) א. $W=0$ ב. הפונקציות תלויות. ג. הפונקציות תלויות.
3) א. שאלת הוכחה. ב. $x\neq 0$, $y'''-\frac{3}{x}y''+\frac{6}{x^2}y'-\frac{6}{x^3}y=0$

השיטה האופרטורית

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

1) $\left(D^3-2D^2-3D\right)y=4e^x-10e^{-2x}$

2) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=10e^{4x}+2e^x-1$

3) $\left(D^4-6D^3+13D^2-12D+4\right)y=10e^x+4e^{2x}$

4) $\left(D^5-8D^4+22D^3-28D^2+17D-4\right)y=24e^x+81e^{4x}$

5) $\left(D^6+D^4+D^2\right)y=104\sin\left(2x+1\right)+\cos\left(x+10\right)$

6) $\left(D^5-8D^4+22D^3-28D^2+17D-4\right)y=-5\sin 2x$

7) $\left(D^4-3D^3+6D^2-12D+8\right)y=30\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+48\cos^2 x-16$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{0x}+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}-e^x+e^{-2x}$

2) $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}+\frac{5}{81}e^{4x}-\frac{1}{18}xe^x-\frac{1}{30}$

3) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}+5x^2e^x+2x^2e^{2x}$

4) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4x^3e^x+c_5e^{4x}-\frac{1}{3}x^4e^x+xe^{4x}$

5) $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}+c_5e^{3x}+c_6e^{-3x}-2\sin\left(2x+1\right)-\cos\left(x+10\right)$

6) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4x^3e^x+c_5e^{4x}+\frac{1}{500}\left[4\sin 2x-22\cos 2x\right]$

7) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x+\frac{5\sin x+25\cos x}{26}+\frac{-3\cos 2x-18\sin 2x}{37}+1$

מתמטיקה שימושית 2

פרק 13 - מערכת משוואות לינאריות

תוכן העניינים

חזרה מאלגברה ליניארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

שאלות

בשאלות הבאות מצא את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של A :

1) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}1&-1&4\\3&2&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

תשובות סופיות

1) $x=0,\ x=1,\ \ x=2,\ v_{x=0}=(-1,0,1),\ v_{x=1}=(0,1,0),\ \ v_{x=2}=(1,0,1)$

2) $x=6,\ \ x=2,\ \ x=-4,\ v_{x=6}=(0,0,1),\ \ v_{x=2}(1,1,1),\ \ v_{x=-4}=(-1,1,0)$

3) $x_1=2,\ x_2=3,\ \ x_3=3,\ \ v_{x=2}=(1,1,1),\ \ v_{x=3}^{(1)}=(1,0,1)\ \ x_{x=3}^{(2)}=(1,1,0)$

4) $x=1,\ x=3,\ x=-2,\ \ v_{x=1}=(-1,4,1),\ v_{x=3}=(1,2,1),\ \ v_{x=-2}=(-1,1,1)$

5) $x=1,\ x=4,\ \ x=-1,\ \ v_{x=1}=(1,-2,1),\ v_{x=4}=(1,1,1),\ \ v_{x=-1}=(-1,0,1)$

6) $x=-1,\ x=3\ \ \ v_{x=-1}=(-1,2),\ \ v_{x=3}=(1,2)$

7) $x_{1,2}=1\pm 2i,\ \ v_{x=1+2i}=(1+i,2),\ \ v_{x=1-2i}=(1-i,2)$

8) $x=1,\ x=1+\sqrt{3}i,\ x=1-\sqrt{3}i,\ \ v_{x=1}=(1,1,1)$,
$v_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right),\ \ v_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון

שאלות

פתור את מערכות המשוואות בשאלות **1-2**:

1) $$\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$$

2) $$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\ ;\ \underline{x}(0)=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$$

3) נתון $$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}}_{A}=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix}$$, כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$.

הוכח כי $z(t)=y(t)$.

פתור את מערכות המשוואות בשאלות **4-5**:

4) $$\begin{cases}x'=x-y+4z\\y'=3x+2y-z\\z'=2x+y-z\end{cases}$$

5) $$\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$$

6) נתון $$\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$$, כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$.

חשב: $\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}+\lim_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=0$.

7) פתור את מערכת המשוואות: $\begin{cases} y_1'+5y_1-2y_2'=0 \\ 3y_2'-4y_1'-5y_2=0 \end{cases}$.

8) פתור: $\vec{x}'(t)=A\cdot\vec{x}(t)$, כאשר $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

הערה: בשאלות **7** ו-**8** יש להגיע לפתרון המרוכב מהפתרון ממשי.

פתור את מערכות המשוואות המופיעות בשאלות **9-14**:
(שים לב שכל המערכות <u>אינן</u> ניתנות ללכסון)

9) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

10) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

11) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

12) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

13) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

14) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

15) דני פתר את המערכת $x'(t)=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&2&6\\-1&-1&-3\end{pmatrix}x(t)$,

וקיבל $x(t)=c_1e^{-1t}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2{}^{0t}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{0t}\left[t\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right]$.

נתון תנאי התחלה: $x(0)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

עבור אילו ערכים של הקבועים הממשיים, a,b,c , הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה הנתון יהיה חסום לכל t ממשי?

תשובות סופיות

1) $$\underline{x}(t)=c_1e^{0t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{1t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

2) $$\underline{x}(t)=e^{6t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+3e^{-4t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

3) $z(t)=y(t)$

4) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

5) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

6) 0

7) $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\sin 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]+c_2e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sin 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$$

8) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{t}\left[\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}-\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]+$$
$$+c_3e^{t}\left[\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]$$

9) $$\underline{x}(t)=c_1e^{0t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{t}\begin{pmatrix}t+1\\t+1\\t\end{pmatrix}$$

10) $$\underline{x}(t)=c_1e^{-5t}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-2t+1\\2t-1\\t\end{pmatrix}$$

11) $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\t\end{pmatrix}+c_3e^{t}\begin{pmatrix}1\\t-1\\0.5t^2\end{pmatrix}$$

12) $$\underline{x}(t)=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}2t-1\\t\\t\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{bmatrix}t^2-t+2\\\frac{t^2}{2}+1\\\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}$$

13) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{1t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\t\end{pmatrix}+c_3e^{1t}\begin{pmatrix}0\\1\\t-1\\\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}+c_4e^{1t}\begin{pmatrix}1\\t-2\\\frac{t^2}{2}-t+1\\\frac{t^3}{6}\end{pmatrix}$$

14) $$\underline{x}(t)=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}-2t+1\\-4t\\-2t\end{pmatrix}$$

15) $a=-c,\quad b=2a$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות

פתור את מערכת המשוואות בשאלות **1-4**:

1)
$$x_1' = x_1 + x_2 + 2e^{-t}$$
$$x_2' = 4x_1 + x_2 + 4e^{-t}$$

2)
$$x_1' = x_1 + x_2 + e^{at}$$
$$x_2' = 4x_1 + x_2 - 2e^{at}$$
(a קבוע)

3)
$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4)
$$x' = x + y + 2z + e^t$$
$$y' = x + 2y + z$$
$$z' = 2x + y + z + e^t$$

5) המר את המשוואה $y''' + y'' - 2y = t^2$,
במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

6) פתור את מערכת המשוואות: $\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 8t+3 \\ -3t+3 \\ t+3 \end{pmatrix}$.

7) נתונה המד"ר $e^{-x}y''''(x) - y''(x) + e^x x^2 y'(x) = 5e^{-x}$.
רשום את המד"ר כמערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון,
בהצגה מטריציונית.

8) נתונה המד"ר $x^2 y''(x) + 10xy'(x) + (1+4x^2)y(x) = \ln x$.
רשום את המד"ר כמערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון,
בהצגה מטריציונית.

הערה: בשאלות **7** ו-**8** המערכת המתקבלת היא לא עם מקדמים קבועים.
יחד עם זאת, אתם מתבקשים רק להציג את המערכת ולא לפתור אותה.

תשובות סופיות

1) $\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}$

2) עבור $a=-1$ נקבל: $\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}te^{-t}\\-2e^{-t}\end{pmatrix}$

עבור $a\neq 1$ נקבל: $\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{1+a}\begin{pmatrix}e^{at}\\-2e^{at}\end{pmatrix}$

3) $\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+(3t+2)\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}-(3t+1)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+(-3t+1)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

4) $\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{3}te^{t}\right)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{2}{9}e^{t}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\t^2\end{pmatrix}$

6) $\underline{x}(t)=c_1\begin{pmatrix}-2e^{-5t}\\e^{-5t}\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2e^{-t}\\2e^{-t}\\e^{-t}\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}(-2t+1)e^{-t}\\(2t-1)e^{-t}\\te^{-t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\t\\t-1\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&-e^{2t}t^2&e^{t}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\5\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-\left(\frac{1}{t^2}+4\right)&-\frac{10}{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{\ln t}{t^2}\end{pmatrix}$

מערכת משוואות כללית – שיטת ההצבה

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y''+2z'=e^{3x} \\ y'-z''+3z=x^2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y''+z'=e^{-2x} \\ y+z=\sin x \end{cases}$, בהינתן $z(0)=y(0)=y'(0)=0$.

3) $\begin{cases} x'=4x-2y+e^{t} \\ y'=6x-3y+e^{-t} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1'=x_1+x_2+\sin 2t \\ x_2'=x_1+x_2+\cos 2t \end{cases}$

5) $\begin{cases} z''-3z'+2z+y'-y=0 \\ z'-2z+y'+y=0 \end{cases}$

תשובות סופיות

1) $z=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-x}+\frac{1}{24}e^{3x}+x^2, \quad y=\frac{1}{12}e^{3x}-\frac{2}{3}x^3-2c_2e^{x}+2c_3e^{-x}+kx+l$

2) $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{x}-\frac{1}{6}e^{-2x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x, \quad y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}e^{x}+\frac{1}{6}e^{-2x}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$

3) $x=c_1+c_2e^{t}+4te^{t}-e^{-t} \quad , \quad y=2c_1+\frac{3}{2}c_2e^{t}+6te^{t}-\frac{3}{2}e^{t}-\frac{5}{2}e^{-t}$

4) $x_1=c_1+c_2e^{2t}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t \quad , \quad x_2=-c_1+c_2e^{2t}+\frac{1}{4}\sin 2t$

5) $z=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{2x}, \quad y=2c_1+\frac{1}{2}c_2e^{x}$

מתמטיקה שימושית 2

פרק 14 - פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים

תוכן העניינים

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות **1-7** על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=0$.
במיוחד, רשום נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי,
וציין את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

תזכורת: טור חזקות סביב $x=0$ שקול לטור טיילור סביב $x=0$ ושקול לטור מקלורן.

1) $y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \qquad y(0)=3, \quad y'(0)=12;$

2) $y''-xy=0 \quad ; \quad y(0)=1,\ y'(0)=2$

3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

4) $(x^2+4)y''+xy=x+2$

5) $y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0$

6) $y''+ty=e^{t+1} \qquad y(0)=a_0=1, \quad y'(0)=a_1=2;$

7) $y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0$ (השתמש בפתרון בסימן Σ)

8) פתור את המשוואה $y''(x)+(x-1)y(x)=e^x$; $y(1)=1$, $y'(1)=2$,
על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

9) פתור את המשוואה $y''+xy'+(2x-1)y=0$; $y(-1)=2, \quad y'(-1)=-2$.
רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

תשובות סופיות

1) $y=3+12x+x^2-\frac{5}{3}x^3-\frac{23}{12}x^4+\ldots+a_nx^n\ldots \quad , \quad a_n=\frac{2n-10}{(n-1)n}a_{n-3} \ (n\ge 5)$

2) $y=1+2x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots \quad , \quad a_n=\frac{1}{(n-1)n}a_{n-3} \ (n\ge 3)$.

3) $y=a_0+a_1x+-a_0x^2+0x^3-\frac{1}{3}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots \quad , \quad a_n=\frac{n-3}{n-1}a_{n-2} \quad (n\ge 2)$

4)
$$y=a_0+a_1x+\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3+\left(\frac{-1}{48}a_1-\frac{1}{96}\right)x^4+\ldots+a_nx^n$$
$$a_n=\frac{-1}{4(n-1)n}a_{n-3}-\frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n}a_{n-2}\ ,\ (n\ge 4)$$

5)
$$y=a_0+a_1x+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)x^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)x^3+\frac{1}{6}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3} \quad (n\ge 3)$$

6)
$$y(t)=1+2t+\frac{e}{2}t^2+\frac{e-1}{6}t^3+\frac{e-4}{24}t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e}{n(n-1)(n-2)!}-\frac{a_{n-3}}{n(n-1)} \quad (n\ge 3)$$

7)
$$y=a_0+a_1t+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)t^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)t^3+\frac{1}{6}a_0t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3} \quad (n\ge 3)$$

8)
$$y=1+2(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e-1}{6}(x-1)^3+\frac{e-4}{24}(x-1)^4+\ldots+a_n(x-1)^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e-a_{n-3}(n-2)!}{n!} \quad (n\ge 3)$$

9)
$$y=2-2(x+1)+2(x+1)^2-\frac{2}{3}(x+1)^3+\frac{1}{3}(x+1)^4+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3} \quad (n\ge 3)$$

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראה שהנקודה היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתור את המשוואה על ידי פיתוח המשוואה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

1) $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

2) $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$

3) $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$

4) $3x^2y''-xy'+y=0$

5) $x^2y''+xy'+x^2y=0$

6) $x^2y''-xy'+y=0$

7) $x^2y''+x(x+2)y'-2y=0$

8) $x^2y''+x(x-2)y'+2y=0$

הערות:

בשאלות 2-5, הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרש אינו מספר שלם.
בשאלות 6 ו-7 הפתרונות שווים, ובשאלות 8 ו-9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

תשובות סופיות

1) $$y=k_1x^{1/3}\left(1-\frac{1}{14}x^2+\frac{1}{728}x^4+\dots\right)+k_2\left(1-\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{440}x^4+\dots\right)$$

2) $$y=k_1x^{1/2}\left(1-\frac{7}{18}x^1+\frac{147}{792}x^2+\dots\right)+k_2x^{-3}\left(1-\frac{21}{5}x^1+\frac{49}{5}x^2-\frac{343}{15}x^3\right)$$

3) $$y=k_1x^{-1}\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{90}x^3+\dots\right)+k_2x^{2.5}\left(1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2-\frac{1}{7722}x^3+\dots\right)$$

4) $$y=k_1x+k_2x^{1/3}$$

5) $$y=k_1\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\dots\right)+$$
$$+k_2\left[\ln x\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\dots\right)+\left(\frac{2}{2^3}x^2+\frac{-12}{4^3\cdot 2^3}x^4+\dots\right)\right]$$

6) $$y(x)=k_1x+k_2x\ln x$$

7) $$y(x)=\frac{k_1}{x^2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-e^{-x}\right)+\frac{k_2}{x^2}e^{-x}$$

8) $$y=-a_0x^2\ln x\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\dots\right)+a_0x\left(1-x^2-\frac{3}{4}x^3+\dots\right)$$

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\dots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\dots$

מתמטיקה שימושית 2

פרק 15 - התמרת לפלס

תוכן העניינים

התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות להתמרת לפלס.

שאלות

חשב את התמרות לפלס בשאלות **1-12** בעזרת טבלת התמרות לפלס:

1) $L\left(t^2+4t-2\right)$

2) $L\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}+1\right)$

3) $L\left(e^{-4t}+10e^{2t}\right)$

4) $L\left(\cosh 4t\right)$

5) $L\left(\sinh 10t\right)$

6) $L\left(\sin 2t\cos 2t\right)$

7) $L\left(\sin 2t\cos 3t\right)$

8) $L\left(\sin^2 t\right)$

9) $L\left(\cos^2 4t\right)$

10) $L\left(t^2\sin 4t\right)$

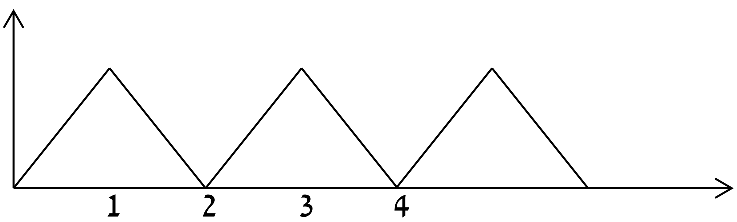
11) $L\left(t^4e^{2t}\right)$

12) $L\left(e^{2t}\sin 4t\right)$

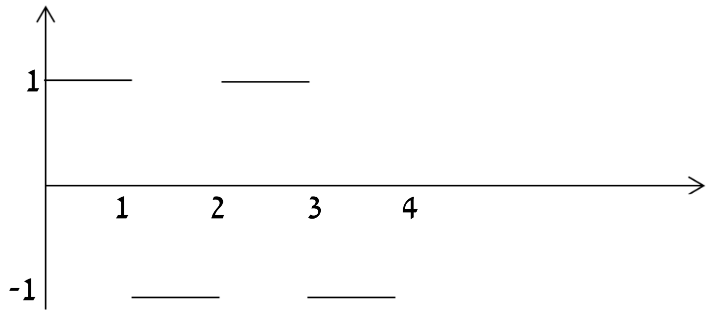
13) מצא את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 1 & t>1 \end{cases}$.

14) מצא את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 2-t & 1<t \end{cases}$.

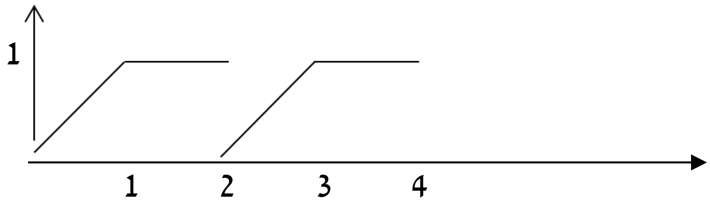
15) מצא את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



16) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



17) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



18) הגדר ושרטט את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

19) שרטט את הפונקציה $f(t)=u(t-2)-u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

20) רשום את הפונקציה $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$, בעזרת פונקציית המדרגה.

21) רשום את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$, של הפונקציה $u(t-k)$, ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

22) חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ (t-4)^2 & t\ge 4\end{cases}$.

23) חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ t^2 & t\ge 4\end{cases}$.

24) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הגדר ושרטט את פונקציית הדלתא $\delta(t)$.

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה $\delta(t-a)$?

תשובות סופיות

1) $\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}$

2) $\frac{12}{s^5}+s^{-3/2}+\frac{1}{s}$

3) $\frac{1}{s+4}+10\frac{1}{s-2}$

4) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-4}+\frac{1}{s+4}\right]$

5) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-10}-\frac{1}{s+10}\right]$

6) $\frac{1}{2}\frac{4}{s^2+16}$

7) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{s^2+25}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$

8) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}$

9) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+64}$

10) $\frac{8\left(3s^2-16\right)}{\left(s^2+16\right)^3}$

11) $\frac{24}{\left(s-2\right)^5}$

12) $\frac{4}{\left(s-2\right)^2+16}$

13) $\frac{1-e^{-s}}{s^2}$

14) $\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$

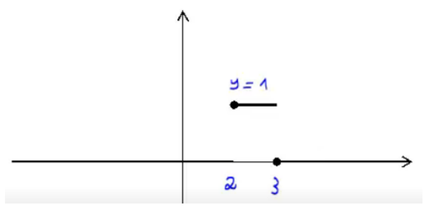
15) $\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}$

16) $\frac{1-e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)}$

17) $\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

18) $u\left(t-k\right)=\begin{cases}0 & t<k\\ 1 & t\geq k\end{cases}$

19)



20) $f\left(t\right)=\begin{cases}0 & t\leq\\ 1 & t>4\end{cases}=u\left(t-4\right)$

21) $L=\left(u\left(t-k\right)f\left(t-k\right)\right)=e^{-ks}L\left(f\left(t\right)\right)$

22) א. $L\left(\left(t-4\right)^2\cdot u\left(t-4\right)\right)=\frac{2e^{-4s}}{s^3}$

23) $e^{-4s}L\left(t^2\right)+8e^{-4t}L\left(t\right)+16\frac{e^{-4s}}{s}$

24) $L\left[\delta\left(t-2\pi\right)\right]=e^{-2\pi s}$

התמרת לפלס ההפוכה

שאלות

חשב את ההתמרות בשאלות **1-29** :

1) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)$

3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right)$

4) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$

5) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

6) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right)$

7) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right)$

8) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)$

9) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)$

10) $L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$

11) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)$

12) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right)$

13) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right)$

14) $L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right)$

15) $L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right)$

16) $L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right)$

17) $L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right)$

18) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right)$

19) $L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right)$

20) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right)$

21) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right)$

22) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)$

23) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right)$

24) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right)$

25) $L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$

26) $L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right)$

27) $L^{-1}\left(\frac{3}{s}-\frac{4e^{-s}}{s^2}+\frac{4e^{-3s}}{s^2}\right)$

28) $L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$

29) $L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right)$

*בשאלה **27** כתוב את התוצאה בצורה מפורטת ושרטט אותה.

30) נתון $F(s)=\frac{e^{-s}+2}{s}$.

חשב את $f(0)$ ו-$f(\infty)$, כאשר $f(t)=L^{-1}(F(s))$.

פתור בשתי דרכים שונות.

הערה: $f(0)=\lim_{t\to 0} f(t)$, $f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)$.

31) הסבר והדגם את משפט הקונוולוציה.

השתמש במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

32) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right)$

33) $L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right)$

34) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right)$

35) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right)$

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{t^3}{3!}$

3) e^{10t}

4) $\frac{1}{3}\sin 2t$

5) $\cos 2t$

6) $e^{10t}\frac{1}{2}\sin 2t$

7) $e^{2t}\left\{\cos 2t+2\frac{1}{2}\sin 2t\right\}$

8) $\frac{1}{4}t\sin 2t$

9) $\frac{1}{4}t\sin 2t$

10) $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$

11) $\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$

12) $1-2e^{-5t}$

13) $3e^{-3t}-2e^{-2t}$

14) $1+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$

15) $e^{-t}+2e^{-2t}+3e^{3t}$

16) $e^{-3t}+e^{3t}-e^{-2t}-e^{2t}$

17) $e^{2t}+4te^{2t}-e^{-2t}$

18) $-6+5t+6e^{-2t}$

19) $4-4e^{-3t}-3te^{-3t}$

20) $2e^{t}+te^{t}-2e^{2t}+te^{2t}$

21) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$

22) $\frac{1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5t}\sin\sqrt{0.75}t$

23) $\sin t+2e^{3t}$

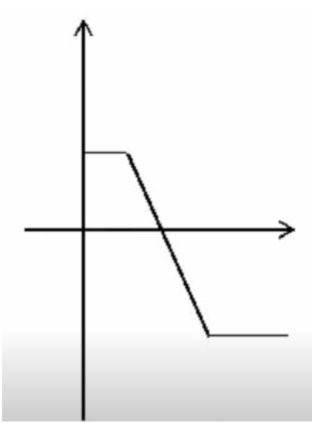
24) $\cos t+e^{-2t}$

25) $\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t$

26) $e^{t}-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+5t\sin 2t+\frac{5}{4}(\sin 2t-2t\cos 2t)$

27) א. $3-4u(t-1)\cdot(t-1)+4u(t-3)\cdot(t-3)$

ב. $\begin{cases}3 & t<1\\ 7-4t & 1<t<3\\ -5 & t\geq 3\end{cases}$; שרטוט:



28) $u(t-4)e^{-(t-4)}+u(t+2)\sin(t+2)$

29) $u(t-10)\left(e^{t-10}-e^{2(t-10)}\right)$

30) $f(0)=2 \quad f(\infty)=3$

31) שאלת הסבר.

32) $-\frac{1}{2}\left(t^2+2t+2\right)+e^t$

33) $0.5t-\frac{1}{4}\sin 2t$

34) $\frac{1}{4}e^{4t}(t-1)+\frac{1}{4}$

35) $\frac{1}{2}\left(-2\cos t+2-t\sin t\right)$

פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס

שאלות

פתור את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

1) $y(0)=0\ ;\ y'+4y=e^{-3t}$

2) $y(0)=-1\ ,\ y'(0)=4\ ;\ y''+4y'+4y=10e^{-2t}$

3) $y(0)=-1,\ y'(0)=-4\ ;\ y''-4y'=16$

4) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+4y'=8t+2$

5) $y(0)=y'(0)=\frac{1}{4}\ ;\ 4y''-4y'=te^{t}+e^{t}$

6) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''-3y'+2y=u(t-4)$,
כאשר $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$ היא פונקציית המדרגה.

7) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+y'=f(t)$, כאשר $f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2 & t\geq 1\end{cases}$.

8) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+5y'+6y=h(t)$, כאשר $h(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ 0 & t\geq 2\end{cases}$.

9) $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=3\ ;\ y'''+4y''+5y'+2y=10\cos t$

10) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ y''+2y'+2y=\delta(t-\pi)$

11) $y(0)=2,\ y'(0)=-3\ ;\ y''+3y'-10y=4\delta(t-2)$

12) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ -y''+4y=\delta(t-2\pi)-\delta(t-\pi)$

תשובות סופיות

1) $y(t)=e^{-3t}-e^{-4t}$

2) $y(t)=e^{-2t}(5t^2+2t-1)$

3) $y(t)=-4t-1$

4) $y(t)=t^2$

5) $y(t)=\frac{1}{8}e^t(t^2+2)$

6) $y(t)=u(t-4)\left(0.5-e^{t-4}+e^{2(t-4)}\right)$

7) $y(t)=2u(t-1)\cdot\left(-1+(t-1)+e^{-(t-1)}\right)$

8) $y(t)=\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\right]-u(t-2)\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2(t-2)}+2e^{-3(t-2)}\right]$

9) $y(t)=-\cos t+2\sin t+2e^{-t}-2te^{-t}-e^{-2t}$

10) $y(t)=-u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin(t)$

11) $y(t)=\frac{4}{7}u(t-2)\left[e^{2(t-2)}-e^{-5(t-2)}\right]+e^{2t}+e^{-5t}$

12) $y(t)=-\frac{1}{2}u(t-2\pi)\left[\sinh\left(2(t-2\pi)\right)\right]+\frac{1}{2}u(t-\pi)\left[\sinh\left(2(t-\pi)\right)\right]$

נוסחאות – התמרת לפלס

$g(t)$	$G(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \quad (\text{for } n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\text{for } n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{1}{s^n}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$t^{n-1}e^{at}$	$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\frac{t}{2a}\sin(at)$	$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$
$\frac{1}{2a}(\sin(at)+at\cos(at))$	$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$
$e^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$

$e^{-bt}\cos at$	$\dfrac{s+b}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$
$t\sin at$	$\dfrac{2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$t\cos at$	$\dfrac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$
$\dfrac{1}{2a^3}\left(\sin(at)-at\cos(at)\right)$	$\dfrac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$\sqrt{t}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-\frac{3}{2}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}$
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$u(t-k)$	$\dfrac{e^{-ks}}{s}$
$u(t-k)f(t-k)$	$e^{-ks}\cdot F(s)$
$t^n g(t)$	$(-1)^n\left(F(s)\right)^{(n)}$

תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$, של פונקציה $f(t)$,
ורוצים את $f(0)$ ו-$f(\infty)$.
אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

- קונוולציה:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$\boxed{L\left(f(t)*g(t)\right)=F(s)\cdot G(s)}$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=f(t)*g(t)$$

מתמטיקה שימושית 2

פרק 16 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

בעיות גיאומטריות

שאלות

1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x,y) על העקום,
שווה ל- $-\frac{x}{y}$.
מצא את משוואת העקום.

2) מצא את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

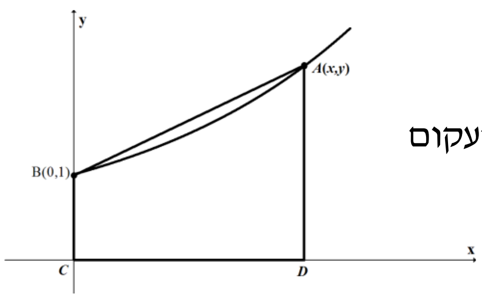
3) מצא את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

4) נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2,4)$.
נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x,y)$ שעליו,
ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים,
שווה לשיעור ה- y של הנקודה A.

5) מצא את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3,4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

6) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x,y) שבין נקודה זו וציר ה- x,
נחצה על ידי ציר ה- y.
מצא משוואת עקום זה.

7) נתון עקום העובר בנקודה $B(0,1)$.
בכל נקודה A שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$, הנראה בציור.
מהי משוואת העקום?



8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1,3)$,
ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x,y) שווה ל- $-\left(1+\frac{y}{x}\right)$.
מצא את משוואת העקום.

9) מצא את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(1,2)$,
ושבכל נקודה (x,y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2-x^2}$.

10) מצא את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(0,1)$, כך שהמשולש המוגבל
על ידי ציר ה- y, המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $\mathrm{M}(x,y)$ והקטע OM,
מהראשית O ל-M, הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע MN
(כאשר N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה- y).
צייר ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

תשובות סופיות

1) $x^2+y^2=k$

2) $x^2+y^2=k$

3) $y^2=ax$

4) $y=2xe^{x-2}$

5) $y=4\pm\sqrt{25-(x-3)^2}$

6) $2x^2+y^2=k$

7) $y=2e^{x^2/4}-1$

8) $2xy+x^2=7$

9) $x^3-3y^2x=11$

10) $2=y+\sqrt{y^2+x^2}$

עקומות אורתוגונליות

שאלות

מצא את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות **4-1**:

(1 $2\ln x+\ln y=c$

(2 $xy=c$

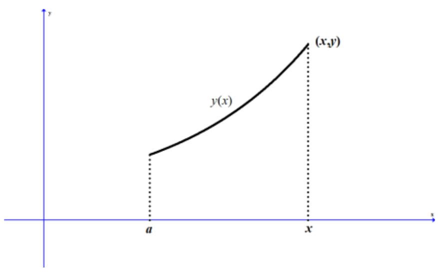
(3 א. $x^2+2y^2=c$

ב. מצא את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2+2y^2=9$,
בנקודה $(1,2)$ שעליה.

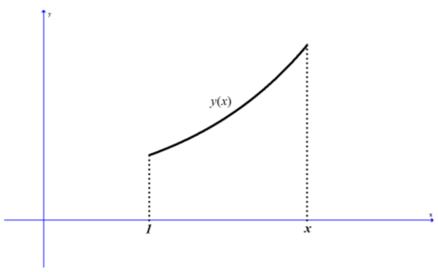
(4 $x^2+y^2=cx$

(5 מצא את משפחת העקומות, היוצרות זווית של 45°
עם משפחת המעגלים $x^2+y^2=c$.

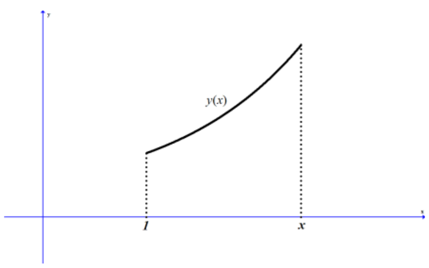
(6 שטח S מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה-x, $x=a$, ו-x משתנה (ראו ציור).
ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת
בין הנקודות $(x,y(x))$ ו-$(a,y(a))$.
מצא את משוואת העקום.



(7 שטח S מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה-x, $x=1$, ו-x משתנה (ראו ציור).
ידוע כי $y(1)=2$.
האם קיים עקום כזה,
כך ששטחו של S שווה ל-$2y(x)$?



(8 שטח S מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה-x, $x=1$, ו-x משתנה (ראו ציור).
ידוע כי $y(1)=2$.
האם קיים עקום כזה,
כך שהשטח של S שווה ל-$y(x)-2$?



תשובות סופיות

1) $2\ln x+\ln y=c$

2) $y^2-x^2=k$

3) $y=ax^2 \quad , \quad y=2x^2$

4) $y=m(x-c)^2 \quad y>0$

5) $\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)=-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+c$

6) $y=k\cosh\left(\pm\frac{1}{k}x+C\right)$

7) לא.

8) כן.

בעיות גדילה ודעיכה

שאלות

1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה.
ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.

א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?

ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?

ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?

*הנח שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).

2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית.
בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים,
ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.

א. מצא את אחוז הגידול השנתי.

ב. מצא כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת),
היו בעיר 550 אלף תושבים.

3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%.
כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.

א. כמה כסף הפקיד האדם?

ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש"ח?

4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית.
בספירה הראשונית היו 1,000 חיות.
בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר.
מצא אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה,
היו בשמורה 2,000 חיות בר.

5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים.
ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד,
פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.

א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים,
מכמות התחלתית של 100 גרם?

ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם,
מכמות התחלתית של 100 גרם?

6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע.
בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.

א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?

ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

תשובות סופיות

1) א. 7.28 מיליארד. ב. 3.54 מיליארד. ג. בשנת 2,106.

2) א. 2% ב. 15.92 שנים.

3) א. 4093.65 ₪. ב. 13.41 שנים.

4) 40.77 חודשים.

5) א. 88.69 גרם. ב. 19,188 שנים.

6) א. 3.04 שבועות. ב. 14.6 שבועות.

בעיות שונות

שאלות

1) בזמן $t=0$, יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים.
נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.

א. חשב את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.

ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?

2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש.
ברגע $t=0$, כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחתור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה.
משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$, כאשר v נמדדת במטר/שניה.

א. מצא את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.

ב. מצא כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.

ג. מצא את המהירות הסופית.

3) חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה.
חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.

א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?

ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?

4) נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים.
ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם.
נסמן ב-$h(t)$ את גובה פני המים, וב-k את קבוע הפרופורציה.

א. רשום מד"ר עבור גובה פני המים, $h(t)$.
מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?

ב. ידוע כי $k=-2\pi$.
פתור את המד"ר.
תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.
לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.
א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t.
ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $\frac{1}{64}$ מנפחו ההתחלתי?

6) מבלון מלא אוויר, שרדיוסו R, מתחיל לצאת אוויר.
קצב יציאת האוויר הוא $3V(t)$, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t.
הוכח, כי כעבור $\ln 2$ שניות נפח הבלון ייקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.

הערה: בשאלות **5** ו-**6** נדרש ידע בהפרדת משתנים.

תשובות סופיות

1) א. 26.75 ק"ג. ב. 0.942 דקות.

2) א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.

3) א. $43\frac{1}{3}^{\circ}$ ב. 1.13 שעות.

4) א. $h(0)=4\ ;\ \pi h'(t)=k\sqrt{h(t)}$ ב. $h=(2-t)^2\ ;\ t=\sqrt{2}+2$

5) א. $R(t)=\frac{12}{2t+3}$ ב. 4.5 שעות.

6) שאלת הוכחה.

מתמטיקה שימושית 2

פרק 17 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**.
במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

טור טלסקופי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**.
במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

טור הרמוני מוכלל

12) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

15) מצא את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.141414...+0.123123123...$.

תשובות סופיות

1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.

2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.

3) מתבדר.

4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.

5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.

6) מתכנס ל- 8.

7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.

8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.

9) מתבדר.

10) $S=\frac{1}{\ln 2}$

11) $\frac{1}{12}$

12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.

13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.

14) $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$

15) $\frac{323}{1221}$

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p>1)$

5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p\le 1)$

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

ב. מצא את הגבול $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n^3}$.

מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin^2 n}{n!}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן רַאבֶּה

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot3^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

25) $\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}$

26) $\sum\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$

תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) א. מתכנס. ב. 0
7) מתכנס.
8) מתבדר.
9) מתכנס.
10) מתבדר.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתבדר.
14) מתכנס.
15) מתכנס.
16) מתבדר.
17) מתכנס.
18) מתכנס.
19) מתכנס.
20) מתכנס.
21) מתכנס.
22) מתכנס.
23) מתכנס.
24) מתכנס.
25) מתבדר.
26) מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n+1}$ **2)** $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n}$

מבחן דיריכלה

בשאלות **4** ו-**5**, קבע אם הטור מתכנס או מתבדר:

4) $1+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{2}{16}+\ldots$

5) $\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1}$

6) הוכח שהטורים $\sum \cos n\theta$, $\sum \sin n\theta$, כאשר $\theta \neq 2\pi k$, חסומים.

7) הוכח את התכנסות הטורים הבאים:

$\sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n} \quad (\theta \neq 2\pi k)$.

8) בדוק התכנסות הטור $\sum \frac{\sin^2 n}{n}$.

9) הוכח שאם הסדרה b_n יורדת ושואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n \sin n$ מתכנס.

10) ענה על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(3-n)(\bmod 7)$ הוא טור חסום.

ב. בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}$.

מבחן אבל

בשאלות הבאות קבע אם הטור מתכנס או מתבדר:

11) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

12) $\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}}$

13) $\sum \frac{(-1)^n \ln\left(1+n^{-1}\right)}{n}$

14) $\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2}$

תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתכנס.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתכנס.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) מתבדר.
9) הוכחה.
10) א. הוכחה. ב. מתכנס.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתכנס.
14) מתכנס.

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

תשובות סופיות

1) מתבדר.

2) מתכנס בהחלט.

3) מתכנס בתנאי.

4) מתכנס בתנאי.

5) מתכנס בהחלט.

6) מתכנס בהחלט.

7) מתכנס בתנאי.

8) מתכנס בתנאי.

9) מתכנס בתנאי.

תרגילי תיאוריה

1) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

2) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

3) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + (-1)^n\right)$ מתבדר.

4) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכח ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכח כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.
הוכח כי $\sum \frac{a_n+4^n}{a_n+10^n}$ מתכנס.

9) הוכח או הפרך:
אם הסדרה $(a_n)_{n\ge1}$ מקיימת $0\le a_n\le\frac{1}{n}$ לכל n, אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

10) נניח כי $a_n\ge0$.
הוכח כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

11) הוכח או הפרך:
אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס.

12) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n$ מתבדר.

13) הוכח או הפרך:
אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.
הוכח או הפרך:
א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ לכל n, אז הטור מתכנס.
ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ לכל n, אז הטור מתבדר.

15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.
הוכח כי $\sum\sqrt{a_na_{n+1}}$ מתכנס.

16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכח כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכח כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכח כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

17) הוכח:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

18) הוכח כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n.

א. נתון כי $\lim_{n\to\infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכח כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכח כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

21) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר כך: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$.

הוכח כי הטור מתכנס.

22) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$,

ונתון כי לכל n מתקיים $a_{n+1} \le a_n$.

הוכח כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

23) נתון $\forall n \ge 1:\ 0 < a_n < 1\ ,\ 4a_n(1-a_{n+1}) > 1$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 - 1\right)$ מתכנס?

24) נניח כי (a_n) סדרה המקיימת $a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}\ ,\ a_n > 0$ לכל n טבעי.

הוכח כי $\sum a_n$ מתבדר.

25) (a_n) היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.

הוכח כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

26) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכח או הפרך:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

27) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי הסדרה a_n מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right)$ מתכנס.

ב. בדוק האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדוק האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמד את הנושא **טורי מקלורן עם שארית לגראנז'**.

28) פונקציה f מוגדרת לכל x, גזירה ב- 0 ומקיימת $f(0)=0$.
הוכח כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

29) נתון $p(x)$ פולינום.
$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
הוכח כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p(0)=0$.

30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.
נתון כי:
(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. (2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n טבעי.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

מתמטיקה שימושית 2

פרק 18 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות **1-11**:

א. בדוק התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.
במידה והסדרה מתכנסת מצא את הפונקציה הגבולית.

ב. בדוק התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

1) $f_n(x)=x^n$ ב- $[0,0.5]$.

2) $f_n(x)=x^n$ ב- $(0,1)$.

3) $f_n(x)=\arctan(nx)$ ב- $(0,\infty)$.

4) $f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$ ב- $[0,1]$.

5) $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ ב- $[0,1]$.

6) $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$ ב- $[0.5,4]$.

7) $f_n(x)=\frac{1}{x^2+n}$ ב- $\mathbb{R}$.

8) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ ב- $\mathbb{R}$.

9) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{1+x^2+n^2}$ ב- $\mathbb{R}$.

10) $f_n(x)=n(1-x)x^n$ ב- $[0,1]$.

11) $f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1-\frac{1}{n}\\ n(x-1)+1 & 1-\frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$ ב- $[0,1]$.

12) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in[n,n+1]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,4]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,4]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

13) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=nxe^{-n^2x^2}$.

א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0,\infty)$?

ב. האם הסדרה מתכנסת במ״ש בקטע $[0,\infty)$?

ג. האם הסדרה מתכנסת במ״ש בקטע $[1,\infty)$?

14) נתונה $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

15) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=[1-\chi_n(x)]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$,

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1,\infty)$?
אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$?

תשובות סופיות

1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & 0<x\le 1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0.5\le x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\le 4\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.

9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.

13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.

14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1,\infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.
ב. רק אם $\alpha<0$.

טורי פונקציות

שאלות

מצא את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-6**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\left[\ln(nx)\right]^4}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$

בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידן:

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ $\quad (-\infty < x < \infty)$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\quad (-1 \le x \le 1)$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}$ $\quad (-\infty < x < \infty)$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)$ $\quad \left(\frac{1}{4} \le x \le 4\right)$

11) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ $\quad (-a \le x \le a)$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x}{1+n^7x^2}$ $\quad (-\infty < x < \infty)$

תשובות סופיות

1) $x>0$

2) $x\neq 5$

3) $x<3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$

4) $0<x\neq\frac{1}{n}$

5) $x>0$

6) $x\neq 0,-1,-2,-3,\ldots$

7) מתכנס במידה שווה.

8) מתכנס במידה שווה.

9) מתכנס במידה שווה.

10) מתכנס במידה שווה.

11) מתכנס במידה שווה.

12) מתכנס במידה שווה.

טורי חזקות

שאלות

מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-12**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin^2\frac{1}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{(2n+1)}x^{2n}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x-1)^n$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n-2)!}x^n$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n\cdot4^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n(x+5)^n$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^4\cdot100^n}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{n\cdot2^{2n+1}}$

מצא את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבע את תחום ההתכנסות:

13) $f(x)=\frac{1}{1+x}$

14) $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$

15) $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$

16) $f(x)=\frac{1}{x-5}$

17) $f(x)=\frac{x}{4x+1}$

18) $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

19) $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$

20) $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

הערות חשובות
1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא "פירוק לשברים חלקיים".

תשובות סופיות

1) $-1 \le x < 1 \, , \, R = 1$

2) $-\infty < x < \infty \, , \, R = \infty$

3) $-0.2 \le x \le 0.2 \, , \, R = 0.2$

4) $-1 \le x \le 1 \, , \, R = 1$

5) $-3 < x \le -1 \, , \, R = 1$

6) $-1 < x < 1 \, , \, R = 1$

7) $x = 1 \, , \, R = 0$

8) $-\infty < x < \infty \, , \, R = \infty$

9) $-5 < x \le 3 \, , \, R = 4$

10) $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3} \, , \, R = 4/3$

11) $-9 \le x \le 11 \, , \, R = 10$

12) $-7 < x < -3 \, , \, R = 2$

13) $\left(|x|<1\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

14) $\left(|x|<1\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n}$

15) $\left(|x|<\frac{1}{3}\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$

16) $\left(|x|<5\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$

17) $\left(|x|<\frac{1}{4}\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1}$

18) $\left(|x|<3\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

19) $\left(|x|<1\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n$

20) $\left(|x|<\frac{1}{3}\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} \left(2(-1)^n - 3^n \right) x^n$

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתח לטור חזקות את הפונקציות בשאלות **1-7**:

1) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

2) $f(x)=\ln(1+x)$

3) $f(x)=\ln(1-x)$

4) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

5) $f(x)=\ln(5-x)$

6) $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$

7) $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

8) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$.

9) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^{n-1}$.

10) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n-1)}$?

11) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

ב. חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$.

12) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$.

13) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}\quad (|x|<1)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\quad (-1<x\le 1)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad (-1\le x<1)$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}\quad (|x|<1)$

5) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}\quad (-5\le x<5)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}\quad (|x|<\tfrac{1}{2})$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}\quad (|x|\le 3)$

8) $\frac{20}{27}$

9) $|x|<1\quad \frac{2}{(1-x)^3}$

10) א. $|x|<1\quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ ב. $\frac{1}{4}\ln 3$

11) א. $|x|<1\quad \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\arctan x$ ב. $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}\right)$

12) $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{11}{9}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{10}\right)$

13) $|x|\le 1\quad \arctan x$

מתמטיקה שימושית 2

פרק 19 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) בשאלות **1-24**:

1) $f(x)=\sin 2x$
2) $f(x)=x^2e^{-4x}$
3) $f(x)=\sinh x$
4) $f(x)=\sin^2 x$
5) $f(x)=\cos^2 x$
6) $f(x)=2^x$
7) $f(x)=x\cos(4x^2)$
8) $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$
9) $f(x)=\arcsin x$
10) $f(x)=\frac{1}{1+x}$
11) $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$
12) $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$
13) $f(x)=\frac{1}{x-5}$
14) $f(x)=\frac{x}{4x+1}$
15) $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$
16) $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$
17) $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$
18) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$
19) $f(x)=\ln(1+x)$
20) $f(x)=\ln(1-x)$
21) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$
22) $f(x)=\ln(5-x)$
23) $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$
24) $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

הערות: לפתרון שאלות **15** ו-**16**, עליך להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24**, עליך להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
תוכל להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח שבעמוד האחרון.

מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות בשאלות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

25) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$
26) $f(x)=\tan x$
27) $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

8) $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1<x<1)$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $(|x|<1)$

12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $(|x|<\frac{1}{3})$

13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $(|x|<5)$

14) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $(|x|<\frac{1}{4})$

15) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(|x|<3)$

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $(|x|<1)$

17) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $(|x|<\frac{1}{3})$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

19) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

20) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

21) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

22) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

23) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

24) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

25) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

26) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

27) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

1) $f(x) = \ln x$ $\quad (x_0 = 1)$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad (x_0 = 2)$

3) $f(x) = \sin x$ $\quad \left(x_0 = \dfrac{\pi}{2}\right)$

תשובות סופיות

1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$$
$$\left(0 < x \le 2\right)$$

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$$
$$\left(0 < x < 4\right)$$

3) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$$
$$\left(-\infty < x < \infty\right)$$

חישוב סכום של טור

שאלות

חשב את סכום הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$
3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!}$
4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$
5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$
7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$
8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$
9) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

תשובות סופיות

1) e
2) e^{-2}
3) $\sqrt{e}$
4) $2e$
5) $\pi / 4$
6) $\sin 1$
7) $\cos 1$
8) $\ln 2$
9) $\ln \frac{3}{2}$

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות **1-3** חשב את ערך הגבול:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

4) נתון כי $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=k$ כאשר k קבוע שונה מאפס.
מצאו את n ואת k.

תשובות סופיות

1) $\dfrac{1}{120}$

2) $\dfrac{1}{3}$

3) $\dfrac{1}{3}$

4) $k=1, n=3$

חישובים מקורבים של פונקציות

שאלות

בשאלות **1-3** חשב בשגיאה הקטנה מ- 0.001 :

1) $\frac{1}{e}$ **2)** $\sin 3^\circ$ **3)** $\arctan 0.25$

בשאלות **4-6** חשב בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והערך את השגיאה בחישוב :

4) $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ **5)** $(n=1)\cos 4^\circ$ **6)** $(n=4)\ln 1.5$

7) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x|\le\frac{\pi}{6}$?

8) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x)\cong x$ עבור $|x|<0.01$?

9) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x\cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x|\le 0.2$?

10) עבור אילו ערכי x , $\sin x\cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

11) עבור אילו ערכי x , $\arctan x\cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?

תשובות סופיות

1) $\frac{53}{144}$

2) $\frac{\pi}{60}$

3) $\frac{47}{192}$

4) $\frac{5}{8}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$.

5) 1, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi\cdot\pi}{4050}$.

6) $\frac{77}{192}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$.

7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

10) $|x|<\sqrt[5]{3/25}$

11) $|x|<\sqrt[9]{9/100}$

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε:

1) $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (\varepsilon = 0.0001)$

2) $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (\varepsilon = 0.001)$

3) $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (\varepsilon = 0.0001)$

תשובות סופיות

1) $\frac{449}{2250}$

2) $\frac{39}{400}$

3) $\frac{143}{576}$

השארית של לגראנז'

1) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את $\sqrt[3]{66}$ והערך את השגיאה בקירוב.

2) רשום את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את $\tan 0.1$ והערך את השגיאה בקירוב.

3) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את $\sqrt{5}$ והערך את השגיאה בקירוב.

4) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.
חשב, בעזרת הנוסחה שקיבלת, את $\sqrt[4]{15}$ והערך את השגיאה בקירוב.

<u>הערה לגבי קירובים</u>

אם מבקשים קירוב שהוא **מדויק ל-** n **ספרות אחרי הנקודה**,
אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n}.
למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,
שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.0005=0.5\times10^{-3}$.
בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

תשובות סופיות

1) נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

2) נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

3) נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

4) נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

תחום התכנסות	טור מקלורן
$-\infty < x < \infty$	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
$-\infty < x < \infty$	$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
$-\infty < x < \infty$	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
$-1 < x \le 1$	$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
$-1 \le x \le 1$	$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$
$-1 < x < 1$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$
$-1 \le x \le 1 \; (m > 0)$ $-1 < x \le 1 \; (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \; (m \le -1)$ $m \ne 0, 1, 2, 3, \dots$	$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$

מתמטיקה שימושית 2

פרק 20 - טורי פורייה

תוכן העניינים

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבון טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבן טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

משפט פרסבל:

שאלות:

1) באמצעות טור הפורייה $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$, חשבון את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הינו $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ x+\pi & -\pi\le x<0\end{cases}$ ו- $g(x)=x$.
מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$ ובאמצעותו
חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

5) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le\pi\\ e^{x^2} & -\pi\le x<0\end{cases}$ ו- $g(x)=\begin{cases}0 & 1<x\le\pi\\ \frac{1}{x^2+1} & 0\le x\le 1\\ 0 & -\pi\le x<0\end{cases}$.
נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $g\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}g_ne^{inx}$, $f\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_ne^{inx}$.
הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_n\cdot\overline{g_n}=\frac{1}{8}$.

6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π:

$$f(x)=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad , \quad -\pi\le x<\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi<x<3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+n^2\right)^2}$.

7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי הנוסחה: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}}e^{inx}$.

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+\pi)-f(x)\right|^2dx$.

8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $p\neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}h^2 & h\le x\le\pi\\ 0 & -\pi\le x\le h\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$

כאשר $0\neq h\in[-\pi,\pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos(2n)}{n^2}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{32}$.

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi^2}{6}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) $\frac{\pi^2}{4}$

5) הוכחה.

6) א. ראו סרטון.

ב. $\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx)$

ג. ≈ 0.769

7) 8π

8) הוכחה.

9) $\frac{\pi^2-4}{4}$

10) א. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx}$

ב. הוכחה.

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

1) חשבון $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x}\cos\left(\sqrt{|x|}\right)\sin(nx)\,dx$.

2) חשבון $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2+1}e^{i\cdot n^2 t}\,dt$.

3) הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{x}\frac{se^{s^2}ds}{\sqrt{s^2+2017}}e^{inx}dx\right)=0$.

תשובות סופיות:

1) 0

2) 0

3) הוכחה.

משפט דיריכלה:

שאלות:

1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ לטור פורייה ממשי $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$.

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$.

רמז: הציבו $x=\frac{\pi}{2}$.

2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π: $f(x)=\begin{cases}2+\frac{2x}{\pi} & -\pi<x<0\\ 2 & 0<x<\pi\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

ב. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

ד. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\cos(ax)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר a אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

א. $\frac{1}{\sin(\pi a)}=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{\pi a+\pi n}+\frac{1}{\pi a-\pi n}\right]$

ב. $\cot(\pi\alpha)=\frac{1}{\pi\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\alpha+\pi n}+\frac{1}{\pi\alpha-\pi n}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. ראו סרטון.

ב. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$ ג. הוכחה.

3) א. $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$ מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$
ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$).
נסמן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \sim f(x)$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ מתכנס בהחלט.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.
א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.
ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?
שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).
ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$.
ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.
ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x)=\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ בקטע $[0,\pi]$.
ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.
נסמן $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_n e^{inx}\right| \sim f(x)$ פיתוח פורייה מרוכב.
א. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|$ מתכנס?
ב. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|$ מתכנס?
ג. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$ מתכנס?

4) נתבונן בטור הפורייה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{in(x+i)}$.
כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ בקטע $(0,2\pi)$.

ב. נסמן $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0,2\pi)$.

6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi,\pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ לכל $j = 0,1,...k-1$. נסמן $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}(n^k c_n) = 0$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$ ו-$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

ב. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[0,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0) = f(\pi) = 0$. הראו כי מתקיים $\int_{0}^{\pi} |f(x)|^2 dx \le \int_{0}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

8) נגדיר $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

9) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \sin(n^{2.5}x)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

10) נסמן $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{1.4}} + \frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$.

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

11) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

12) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3.1}+i\cdot n^{2.2}}\cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $[0,\pi]$ $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin([2k-1]x)$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

ה. $[0,\pi]$ $\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\sim\frac{\pi^3}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi(2k-1)^4}\cos([2k-1]x)$ ו. הוכחה.

3) א. $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot nc_n\right|\le\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2<\infty$ ב. $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|<\infty$

ג. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$

4) ראו סרטון.

5) א. הוכחה. ב. $-\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{6}x$

6) הוכחה.

7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

10) א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2.8}}<\infty$ ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי הפונקציה $g(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ \pi-x & 0\le x<\pi\end{cases}$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

ב. עבור $-\pi\le x\le\pi$ נגדיר את הפונקציה $h(x)=a\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\int_{-\pi}^{x} g(t)dt$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה

ל- $h(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) נגדיר פונקציה $f(x)=|\sin(x)|$ במרחב $L_{PC}^{2}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב- $f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f'.

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

1) א. $g(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2k\cdot x)$ ב. $a=-\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $f(x)\sim\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)}\right]\cos(2k\cdot x)$,

$f'(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)}\right]\sin(2k\cdot x)$ ב. $f'(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית- 2π, הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n+\delta,\pi(n+1)-\delta]$

לכל $0<\delta<\pi$ ולכל n שלם.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$.

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$.
א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.
ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$.
א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.
ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).
ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.

4) פתחו את $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$.

5) פתחו את $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$.

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף $-1\le x<1$ $f(x)=2-|x|$.
א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.
ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.
ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.
ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1,1]$?

7) מצאו טור קוסינוסים $f(x)=x$ בקטע $[0,3]$.

8) פתחו את $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

תשובות סופיות:

1) $0\le x\le 2\pi$ $\qquad x^2\sim\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cdot\cos nx-\frac{4\pi}{n}\cdot\sin nx$

2) א. $b_n=0 \quad , \quad a_n=\begin{cases}\frac{-4}{\pi^2[2k-1]^2} & n=2k-1\\ \frac{-8}{\pi^2[4k-2]^2} & n=4k-2\\ 0 & else\end{cases}$

ב. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[2k-1]^4}=\frac{\pi^4}{96}$

3) א. $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|4n^2\pi^2}e^{in\pi x}$ ב. ראו סרטון. ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$

4) $|x|\sim\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(\pi[2k-1]x)$

5) $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2[2k-1]^2}\sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right)$

6) א. $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos([2k-1]\pi x)$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a)=f(b)$ ו-f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ״ש ל- f בקטע $[a,b]$.

7) $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-12}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right)$

8) $\cos(2x)\sim-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2}\sin([2k-1]x)$

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) הוכח את הטענה כי אם $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π
אז $(f*g)_{(x)}$ מחזוריות- 2π.

2) הוכח את הטענה כי אם $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות- 2π
ופונקציות זוגיות אז $(f*g)_{(x)}$ זוגית.

3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$
מתקיים $f(x)=\sqrt{2\pi}\cdot\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$.

הערה: $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

4) נתונות $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$
מתקיים $g(x)=\cos(x)$, $f(x)=x^2$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

5) נתונות $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$
מתקיים $g(x)=\chi_{[0,1]}(x)$, $f(x)=x$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) $\pi - x$
4) לכל $-\pi \le x \le \pi$, $(f*g)_{(x)} = -2\cos(x)$
5)
$$(f*g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(x^2 - (x-1)^2\right) & -\pi+1 \le x \le \pi \\ \frac{1}{4\pi}\left[x^2 - \left(x + (2\pi - 1)\right)^2\right] & -\pi \le x \le -\pi+1 \end{cases}$$

גרעין דיריכלה:

שאלות:

1) נגדיר $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$ (גרעין דיריכלה).

א. הוכיחו כי $D_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

ב. הוכיחו כי $D_n(x)=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ עבור $x\neq 2\pi m$.

2) חשבון לכל ערך של n שלם את ערכו של הביטוי $I(n)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin(100x)\,dx$.

3) הוכיחו כי $I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}dx=2(n+1)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

4) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$. נסמן $S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}$ טור פורייה חלקי.

הוכיחו כי $(f*D_n)_x=S_n(x)$.

5) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{arctg(x-1)\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{e^{(x-1)^2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}dx$.

6) נגדיר $S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2001}{2}t}{\sin t}2\cos\frac{t}{2}\cos^{17}\left(e^{\sqrt{|x-t|}}\right)dt$.

יהיו a_n , b_n מקדמי פורייה הממשיים ו- c_n מקדמי פורייה המרוכבים, של הפונקציה $S(x)$.

חשבו את b_{500} , c_{1001} .

רמז: $S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)f(x-t)dt$ כאשר $D_N(t)$ גרעין דיריכלה מסדר N ו- S_N טור פורייה החלקי ה- N -י של f .

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

2) 0

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) $-\frac{\pi^2}{2e}$

6) $b_{500}=0$, $c_{1001}=0$

גרעין פייר וממוצעי סזארו:

שאלות:

1) נסמן $D_n(x)$ גרעין דיריכלה. נגדיר את גרעין פייר כך: $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)$.

א. הראו כי לכל $x\neq 2\pi m$ $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

ב. הראו כי $K_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx}$.

2) הוכיחו כי $K_n(x)\geq 0$ לכל x כאשר $K_n(x)$ גרעין פייר.

3) הוכיחו כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)dx=1$

4) הוכיחו כי לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|<\pi}K_n(x)dx=0$.

5) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין, מחזורית-2π וכי $m\leq f(x)\leq M$ לכל x ממשי.
הוכיחו כי $m\leq\sigma_n(x)\leq M$ לכל n טבעי ולכל x ממשי כאשר $\sigma_n(x)$ סדרת ממוצעי סזארו של הפונקציה $f(x)$.

6) תהי $\varphi(x)$ רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ ונניח כי:

i. $\varphi(x)\geq 0$.

ii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=1$.

iii. קיים $0<\delta_0<\pi$ כך שלכל $|x|>\delta_0$ מתקיים $\varphi(x)=0$.

נגדיר $F_n(x)=n\varphi(nx)$ ונרחיב אותה באופן מחזורי.
הוכיחו כי $F_n(x)$ מהווה גרעין חיובי.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

גרעין פוואסון:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx}$.

ב. גרעין פוואסון נתון על ידי $P_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π וטור פורייה שלה נתון על ידי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הראו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt$.

ג. הוכיחו את התכונות הבאות של גרעין פוואסון:

i. $P_r(x)\ge 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to1^-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. מתקיים $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$.

ד. תהי $f(x)$ רציפה ומחזורית 2π ועם טור פורייה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $f(x)\xrightarrow{r\to1^-}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}$ במידה שווה.

הערה: ניתן להיעזר במשפט הבא: אם סדרת פונקציות $P_r(x)$ מקיימת את התכונות הבאות:

i. $P_r(x)\ge 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to1^-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. מתקיים $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$.

אזי $f(x)\xrightarrow{r\to1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt$ במידה שווה.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t)=e^{i\alpha t}$ בתחום $-\pi\le t\le\pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים $\frac{1}{\alpha}-\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\alpha}{\left[\alpha^2-n^2\right]}$.

ג. הראו שמתקיים $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{[\alpha-n]^2}$.

ד. הראו שמתקיים $\left(\frac{1}{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}-1\right)\frac{\pi}{4\alpha^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left((2n+1)^2-\alpha^2\right)}$.

2) נגדיר $f(x)=|x|$ במרחב $L_{PC}^2([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty,\infty)$?

$$\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+\dots$$

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

3) תהי $f\in L_{PC}^2([-\pi,\pi])$.

נסמן ב-c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f.

נסמן $d_n=\text{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

- f ממשית.
- f מתאפסת על הקטע $[-\pi,0]$.
- מתקיים השיוויון $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}d_ne^{inx}=x^2e^{|x|}\cos(x)$.

מצאו את f.

4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x)=\cos(2x)$ בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ו-$f(x)=-1$ בתחום $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$.

האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π.

נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_ne^{inx}$ ויהי $h>0$ פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של $h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(t+x)\,dt$ כתלות ב-f_n.

תשובות סופיות:

1) א. $e^{i\alpha t}\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi}\cdot e^{in\cdot t}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

2) א. $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos([2k+1]x)$

ב. $\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \pi k<x<\pi(k+1)\\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1)<x<\pi k\\ 0 & x=\pi k\end{cases}$, כאשר k מספר שלם. ג. $\frac{\pi^2}{8}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x^2e^{|x|}\cos(x) & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$

4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$ - אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$f'\in E[-\pi,\pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל-f בקטע $[-\pi,\pi]$.

5) f_0

מתמטיקה שימושית 2

פרק 21 - יישומים של טורי פורייה

תוכן העניינים

בעיות שטורם ליוביל:

שאלות:

1) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$.

3) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

4) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

5) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

6) $\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0 & , \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

תרגילים מסכמים:

1) מצאו פונקציות עצמיות וערכים עצמיים עבור בעיית שטורם ליוביל הבאה:

$\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0 & , \quad 0<x<L \\ y(0)=y(L)=0 \end{cases}$.

2) מצאו פונקציות עצמיות וערכים עצמיים עבור בעיית שטורם ליוביל הבאה:

$$\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0 \quad , \quad 0<x<L \\ y'(0)=y'(L)=0 \end{cases}.$$

תשובות סופיות:

1) פונקציות עצמיות של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots \quad , \quad \varphi_n(x)=\cos(n\pi x)$.

ערכים עצמיים של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots \quad , \quad \lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

2) $y=0$

3) $y=0$

4) פונקציות עצמיות של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots \quad , \quad \varphi_n(x)=\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2\ell}x\right)$.

ערכים עצמיים של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots \quad , \quad \lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2\ell}\right)^2$.

5) פונקציות עצמיות של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots \quad , \quad \varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x$.

ערכים עצמיים של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots \quad , \quad \lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$.

6) פונקציות עצמיות של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots \quad , \quad \varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x$.

ערכים עצמיים של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots \quad , \quad \lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

תרגילים מסכמים-תשובות סופיות:

1)

$$\text{n=1,2,3,...} \qquad y_n(x)=\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$$

2)

$$n=0,1,2,3,\ldots \qquad y_n(x)=\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$$

משוואת החום:

שאלות:

1) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \sin(x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}.$$

2) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{2} + 3\sin^2(x) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}.$$

3) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = 16u & 0 < x < 3 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = x \\ u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0 \end{cases}.$$

4) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & 0 < x < 2 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 6 + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0 \end{cases}.$$

5) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & 0 < x < 2 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = x \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0 \end{cases}.$$

תשובות סופיות:

1) $u(x,t)=e^{-t}\sin(x)$

2) $u(x,t)=2-\frac{3}{2}e^{-4t}\cos(2x)$

3) $u(x,t)=\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-12}{\pi^2(2k-1)^2}e^{-\left(\frac{4\pi(2k-1)}{3}\right)^2 t}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right)$

4) $u(x,t)=6+4e^{-\frac{81\pi^2}{4}t}\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$

5) $u(x,t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi^2(2k-1)^2}e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{2}\right)^2 t}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}x\right)$

משוואת הגלים:

שאלות:

1) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0)=\frac{1}{2}\sin(\pi x)-7\sin(5\pi x) \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}.$$

2) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0)=1 \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}.$$

3) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx} & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0)=-2x-1 \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}.$$

תשובות סופיות:

1) $u(x,t)=\frac{1}{2}\cos(\pi t)\sin(n\pi x)-7\cos(5\pi t)\sin(5\pi x)$

2) $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)}\cos(\pi(2k-1)t)\sin(\pi(2k-1)x)$

3) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{3(-1)^n-1}{\pi n}\cos(2\pi nt)\sin(\pi nx)$

מתמטיקה שימושית 2

פרק 22 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

מבוא כללי:

שאלות:

1) חשבו את התמרת פורייה של $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

2) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

3) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$.

4) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 2 & 1<|x|<2\\ 0 & else\end{cases}$.

5) הוכיחו כי התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & x>0\\ e^{bx} & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים הינה $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{b-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]$.

6) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

7) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$.

8) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & 0\le x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

9) הוכיחו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{2ix} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$ הינה $f(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$.

10) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

11) חשבו את התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}x & |x|<a\\ 0 & else\end{cases}$ עבור $a>0$.

12) האם קיימת $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\begin{cases}1-|\omega| & |\omega|\le\frac{1}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{1}{2}\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{1-\cos(\omega)}{\pi\omega^2}$

3) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}$

4) $f(\omega)=\frac{2\sin(2\omega)-\sin(\omega)}{\pi\omega}$

5) הוכחה.

6) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega)+i\left[\cos(\omega)-1\right]}{\omega}$

7) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1+e^{-i\omega}-2e^{-i2\omega}}{i\omega}$

8) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1-i\omega}$

9) הוכחה.

10) $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin([1-\omega])}{1\quad\omega}-\frac{\sin([1+\omega])}{1\,|\,\omega}\right\}$

11) $f(\omega)=-\frac{1}{\pi}i\frac{\sin(\omega a)-\omega a\cos(\omega a)}{\omega^2}$

12) לא. אינה רציפה בנקודות $\omega=\pm\frac{1}{2}$.

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-r,r]\\ 0 & else\end{cases}$ כאשר $r>0$.

2) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) נתונה פונקציה $g(x)\in G(R)$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.
מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב- $g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

4) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-ax^2}$ כאשר $a>0$.
רמז: $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\cos(4\pi\omega)\cdot\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.
רמז: $F\left\{\chi_{[-1,1]}(x)\right\}=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$.

תשובות סופיות:

1) $\dfrac{\sin(\omega\cdot r)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\dfrac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$

3) $f(x)=\dfrac{g(x+1)+g(x-1)}{2}$

4) $f(\omega)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}}$

5) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\begin{cases}1 & 4\pi-2\le x\le 4\pi+2 \ \ or \ \ -4\pi-2\le x\le -4\pi+2\\ 0 & else\end{cases}$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

1) נניח כי $f(x)\in G$ גזירה, מקיימת $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$, $f'(x)\in G$ ו- $f(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^{30}}$.
מצאו התמרת פורייה של $f'(x)\cos(2x)$.

2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F\left\{\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right\}_\omega=\left(-\frac{1}{2}\right)(i\omega)\frac{1}{2|a|}e^{-|\omega a|}$.

3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\omega^2 e^{-|\omega|}$.
רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

תשובות סופיות:

1) $\dfrac{i\cdot\dfrac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}}+i\cdot\dfrac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2}$

2) הוכחה.

3) $f(x)=(-2)\dfrac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)}=\frac{1}{\pi i}\frac{2c\cdot\omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$.

2) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$.

3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}\sin(ax)e^{-bx} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים, הינה $g(\omega)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{bi-(\omega-a)}-\frac{1}{bi-(\omega+a)}\right]$.

4) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

6) נניח כי $f(x)\in G(R)$ ונגדיר $g(x)=f(3x-2)\cdot\cos(x)$. בטאו את $g(\omega)$ על ידי $f(\omega)$.

7) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=e^{3i\omega}\cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

8) תהי $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$.
חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:
א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a>0$.
ב. $H(x)e^{-ax}\cos(bx)$ כאשר $a,b>0$.
ג. $H(x)e^{-ax}\sin(bx)$ כאשר $a,b>0$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f(x)=2\pi i\cdot \chi_{[-1,1]}(x)\cdot \sin(x)$

3) הוכחה.

4) $F\left\{e^{-|x|}\cos(2x)\right\}=\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega+2]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega-2]^2\right)}$

5) $g(\omega)=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}-\left[\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega+6]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega-6]^2\right)}\right]$

6) $g(\omega)=\frac{1}{6}\left[e^{-i\frac{2}{3}(\omega+1)}f\left(\frac{\omega+1}{3}\right)+e^{-i\frac{2}{3}(\omega-1)}f\left(\frac{\omega-1}{3}\right)\right]$

7) $F\left\{e^{2i[x+3]}\frac{2}{1+[x+3]^2}\right\}$

8) א. $\frac{1}{2\pi(a+i\omega)}$

ב. $\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a+i[\omega-b]}+\frac{1}{a+i[\omega+b]}\right)$

ג. $\frac{1}{4\pi i}\left(\frac{1}{a+i[\omega-b]}+\frac{1}{a+i[\omega+b]}\right)$

נוסחת המומנט:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases} x & x\in(-1,1) \\ 0 & else \end{cases}$ על ידי שימוש בנוסחה $F\{x\cdot f(x)\}=i\frac{d}{d\omega}f(\omega)$.

2) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x^2e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\{e^{-x^2}\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x\cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\{e^{-|x|}\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x)=e^{-x^2}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=8x^3e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$.

6) תהי $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^5} & x\geq 1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$.
הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

7) נתון כי התמרת פורייה של $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega)=\frac{1}{1+|\omega|}$.
הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f(x)|dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

1) $i\cdot\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\pi\omega^2}$

2) $F\left\{x^2e^{-x^2}\right\}=\dfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(1-\dfrac{\omega^2}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

3) $F\left\{x\cdot e^{-|x|}\right\}=-\dfrac{i}{\pi}\dfrac{2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$

4) $f(\omega)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) $f(\omega)=\dfrac{1}{256}\sqrt{\dfrac{3}{\pi}}\left(27i\omega^3+216\omega^2-792i\omega-1088\right)e^{i\omega-\frac{3\omega^2}{16}-\frac{5}{3}}$

6) הוכחה.

7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

2) חשבו $\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\pi\omega} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.

2) $$\begin{cases} 0 & |x|>1 \\ 1 & |x|<1 \\ \frac{1}{2} & x=1\ ,\ x=-1 \end{cases}$$

משפט פלנשראל:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a>0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\frac{\sin(bx)}{x}dx$ עבור $a,b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

3) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})\cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=\frac{\sin(\omega a)}{\pi\omega}$ ב. $\pi\cdot\min\{a,b\}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים.

2) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים $x>0$ ו- $x\le 0$.

3) מצאו פונקציה $f\in G$ כך ש- $f(\omega)=\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2$.

4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt<\infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t)\in E$ מתקיים השיוויון.

$\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)-f''(t)\right)g(x-t)dt=2f(x)$.

5) נגדיר $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$, $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\}=\frac{1}{2a}e^{-a|\omega|}$.

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-t|}f(t)dt=e^{-|x|}+|x|e^{-|x|}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\frac{\pi}{3}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}dx$.

8) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[1,2]}(x)$.

9) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,2]}(x)$.

10) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}$.

11) חשבו את הקונבולוציה $\left(e^{-x^2}*e^{-x^2}\right)_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x-t)dt=e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$.

13) נניח כי $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy\equiv 0$ הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$.

תשובות סופיות:

1) $$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x\in[-2,0] \\ 2-x & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$$

2) $$(f*f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

3) $$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x\in[-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$$

4) $$g(x)=e^{-|x|}$$

5) $$\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{x^2+9}$$

6) א. $$\frac{2}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$$ ב. $f(x)=e^{-|x|}$

7) א. $$(f*f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>2 \\ 2-x & 1<x<2 \\ x & 0<x<1 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$ ב. הוכחה.

8) $$(f*f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>4 \\ 4-x & 3<x<4 \\ x-2 & 2<x<3 \\ 0 & x<2 \end{cases}$$

9) $$(f*f)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>4\\ 4-x & 2<x<4\\ x & 0<x<2\\ 0 & x<0\end{cases}$$

10) $$\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>3\\ 3-x & 2<x<3\\ x-1 & 1<x<2\\ 0 & x<1\end{cases}$$

11) א. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

12) $$f(x)=\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}}e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

13) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & |x|\le\pi \\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $g(x)=\begin{cases}\cos(x) & |x|\le\pi \\ 0 & else\end{cases}$.

ג. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)\sin(x)}{(1-x^2)}dx$.

ד. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\sin^2(\pi x)dx$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=x\cdot e^{-|x|}$.

ב. מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות $\int_{-\infty}^\infty h'(y)e^{-|x-y|}dy=x\cdot e^{-|x|}$.

3) יהי $A>0$ קבוע. נגדיר $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le A \\ 0 & else\end{cases}$.

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x)\in G$ המקיימת $g(\omega)=f(\omega)f(-\omega)$.

מצאו במפורש את $g(x)$.

4) נניח כי $f(x)\in C^2(-\infty,\infty)$ כך ש- $f'(x),x\cdot f'(x),f''(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$

ומתקיים $f''(x)+x\cdot f'(x)+f(x)=0$ לכל x ממשי.

א. הוכיחו כי $f(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$.

ב. חשבו את $f(\omega)$ אם נתון כי $f(0)=1$.

ג. מצאו את $f(x)$.

5) תהי $f(x)=\begin{cases}2 & |x|\le 1\\ 4 & 1\le |x|\le 2\\ 0 & else\end{cases}$.

א. חשבו את $f(\omega)$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty}\frac{\left[2\sin(2t)-\sin(t)\right]^2}{t^2}dt$.

ג. חשבו את האינטגרל $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{2\sin(2t)-\sin(t)}{\pi t}\cos(t)\,dt$.

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x^2}{\pi^2} & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו את האינטגרלים: $\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\right)^2dx$

ו- $\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\cos(x)\,dx$.

7) נגדיר $\phi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורותונורמלית ב- $L^2_{PC}(-\infty,\infty)$.

8) תהי $f\in G$ פונקציה כך ש- $f'\in G$ פונקציה רציפה. מצאו פונקציה $g\in G$ המקיימת את המשוואה $g(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{u-t}g(u)\,du+f'(t)$.

9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^2}$.

10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+b^2}dt=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}$.

11) נגדיר $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(\omega-t)\,\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(t)e^{i\omega x}dtd\omega$.

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f(x)$.

תזכורת : $\chi_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1 & t\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

12) השתמשו במשפט פלנשראל על מנת לחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)\left(x^2+b^2\right)}dx$

כאשר $a,b>0$.

13) מצאו את התמרת הפורייה של $f(x)=e^{-\left(x^2+2x+5\right)}$.

14) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos(bx)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$ לכל $a,b>0$ קבועים.

15) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x)\cos(x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$.

16) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\sin^3(x)xe^{-x}dx=\frac{9}{25}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\sin(\omega\pi)\cdot\frac{2}{1-\omega^2}$ ב. $g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\omega\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}$

ג. $\frac{\pi}{2}\sin(1)$ ד. $\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $-\frac{2i\omega}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $h(y)=-e^{-|y|}$, $-h(y)=e^{-|y|}$

3) $$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(A+x)^3}{3}-\frac{(A+x)^2}{2}x\right) & -A<x<0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{A^3}{3}-\frac{A^2}{2}x+\frac{x^3}{6}\right) & 0<x<A\\ 0 & else\end{cases}$$

4) א. הוכחה. ב. $e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ ג. $\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

5) א. $\frac{4\cdot\sin(2\omega)-2\cdot\sin(\omega)}{\pi\omega}$ ב. $\frac{5\pi}{2}$ ג. $\frac{3\pi}{2}$

6) א. $2\frac{\sin(\pi\omega)-\pi\omega\cos(\pi\omega)}{\pi^3\omega^3}$ ב. $\frac{1}{15}$ ו- $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)$

7) הוכחה.

8) $g(t)=f(t)+f'(t)$

9) $$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{x}(1-x) & x<0\\ \frac{\pi}{2}e^{-x}(1+x) & x>0\end{cases}$$

10) $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{b}{a}\frac{(a-b)x}{\left(x^2+(a-b)^2\right)^2}$

11) $f(x)=4\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}$

12) $\frac{\pi}{a+b}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\frac{\omega}{b^2+\omega^2}d\omega$

13) $f(\omega)=\frac{1}{e^4}\cdot e^{i\omega}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

מתמטיקה שימושית 2

פרק 23 - פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

פונקציות מרוכבות:

שאלות:

1) רשמו את הפונקציה $f(z)=z\cdot\operatorname{Re}(z)$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

2) רשמו את הפונקציה $f(z)=|z|^2$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

3) רשמו את הפונקציה $f(z)=2|z|^2+i(\bar{z})^2$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

4) רשמו את הפונקציה $f(z)=\dfrac{z}{1+|z|^2}$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

5) רשמו את הפונקציה $f(z)=z^2+\bar{z}$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

6) רשמו את הפונקציה $f(x+iy)=\dfrac{x^3}{3}+i\cdot\left(-\dfrac{y^3}{3}\right)$, בצורה $f(z)$, כאשר $z=x+iy$.

תשובות סופיות:

1) $f(z)=x^2+i\cdot xy$

2) $f(z)=x^2+y^2+i\cdot 0$

3) $f(z)=2\left[x^2+xy+y^2\right]+i\left(x^2-y^2\right)$

4) $f(z)=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}+i\cdot\dfrac{y}{1+x^2+y^2}$

5) $f(z)=x^2+x-y^2+i\cdot(2xy-y)$

6) $f=\dfrac{2z^3+6z(\bar{z})^2}{24}$

גבולות מרוכבים ורציפות:

שאלות:

מצאו את הגבולות הבאים (אם קיימים):

1) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=?$

2) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^4}{|z|^4}=?$

3) $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^2}}=?$

4) $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^4}}=?$

תשובות סופיות:

1) $\frac{1-ik}{1+ik}$

2) $\frac{(1+ik)^4}{(1+k)^2}$

3) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

4) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

נגזרות מרוכבות:

שאלות:

1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=\bar{z}$ גזירה.
הראו עפ"י הגדרת הנגזרת כי $f(z)=\bar{z}$ אינה גזירה ב- z_0 לכל $z_0 \in \mathbb{C}$.

2) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=\mathrm{Re}(z)$ גזירה.

3) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=|z|^2$ גזירה.

4) הוכיחו את משפט לופיטל: $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}$

תשובות סופיות:

1) הפונקציה לא גזירה.
הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.
2) הפונקציה לא גזירה.
3) בראשית הצירים, והנגזרת שלה היא 0.
4) הוכחה.

משוואות קושי-רימן:

שאלות:

1) הראו כי $f(z)=z^2+\text{Im}(z)$ אינה גזירה לכל z.

2) הראו כי $f(z)=xy+i(x^2+y^2)$ אינה גזירה בכל הנקודות בהן $z\neq 0$,
אך כן גזירה בנקודה $z=0$ (לפי הגדרה).

3) מצאו מספרים ממשיים a,b כך שהפונקציה $f(z)=e^{ax}\cos(3y)+i\left(-e^{-3x}\sin(\text{b}\,y)\right)$
תהיה גזירה בכל נקודה.

4) נתון כי $f(z)=\frac{z}{\bar{z}}$ אינה רציפה ב $z=0$.
מצאו את כל הנקודות (אם קיימות) בהן הפונקציה גזירה.

משפט קושי-רימן: הוכחה (הפתרון בסרטון)
אם $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$, גזירה ב-$z_0=x_0+iy_0$,
אז מתקיימות משוואות קושי-רימן בנקודה זו, כלומר: $\begin{matrix} u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0) \end{matrix}$.

5) נניח כי $f(z)$ גזירה בתחום D, ונניח כי $\text{Re}\{f(z)\}=0$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

6) נניח כי $f(z)$ פונקציה גזירה שאינה קבועה בתחום D.
נגדיר $g(z)=\overline{f(z)}$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $g(z)$ אינה גזירה בכל D.

7) נתונה הפונקציה $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה אינה רציפה בראשית.

ב. משוואות קושי-רימן מתקיימות בראשית.

8) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $H^{+}=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z)>0\}$.
הוכיחו כי $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$ אנליטית בתחום $H^{+}=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z)<0\}$.

9) הוכיחו כי $f(z)=e^{\operatorname{Re}(z)}$ אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב.

10) נתונה הפונקציה $f(z)=cx^2-xy+ixy^2$, כאשר c קבוע מרוכב כלשהו.
נתון כי $f(z)$ גזירה בנקודה $1+i$.
מצאו את הקבוע c ואת כל הנקודות בהן הפונקציה גזירה.

11) נתונה הפונקציה $f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\cdot\arctan(\frac{y}{x})$.
קבעו האם הפונקציה $f(z)$ אנליטית בחצי המישור הימני $H=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z)>0\}$.

12) נתונה הפונקציה $f(z)=e^{\frac{x^2-y^2}{2}}\left[\cos(xy)+i\cdot a\sin(xy)\right]$.
עבור אילו ערכי a זוהי פונקציה הולומורפית (אנליטית) בכל המישור?

13) נניח כי $g(z)$ הולומורפית בתחום $\overline{D(0,1)}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 1\}$,
ומקיימת $|g(z)|=1 \quad \forall |z|\le 1$.
הוכיחו כי $g(z)$ קבועה.
הדרכה: ניתן לכתוב את $g(z)$ באופן הבא: $g(z)=e^{i\cdot h(x,y)}$.

14) נניח כי $R>0$ ונתונה הפונקציה $f:D(0,R)\to\mathbb{C}$ גזירה בכל התחום.
נגדיר: $g(z)=\overline{f\left(\frac{R}{\overline{z}}\right)}$.
מצאו תחום בו $g(z)$ מוגדרת, ובדקו אם היא גזירה שם.

תשובות סופיות:

1) $u'_y=-2y+1 \quad , \quad v'_x=2y$

2) $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

3) $a=-3 \quad , \quad b=3$

4) $x=0 \quad , \quad y=0$

5) הוכחה

6) הוכחה

7) א. הוכחה   ב. הוכחה

8) הוכחה

9) הוכחה

10) $c=a+i\cdot b=\frac{3}{2}$,
$y=0\ ,\ y=1\ ,\ y=0.5$
$x=0\ ,\ x=1\ ,\ x=0.25$
$z=0\ ,\ z=1+i\ ,\ z=0.25+0.5\cdot i$

11) $u_y=\frac{y}{x^2+y^2}\ ;\ u_x=\frac{x}{x^2+y^2}$.

12) $a=1$

13) הוכחה

14) $A=\{z \mid |z|>1\}$

פונקציות הרמוניות:

שאלות:

1) הראו כי הפונקציה x^3-3xy^2, היא פונקציה הרמונית בכל המישור.

2) הראו כי הפונקציה x^2-y^2, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו לה צמודה הרמונית.

3) הראו כי הפונקציה $f(z)=xy+i\left(x^2+y^2\right)$, היא פונקציה גזירה בראשית-
הצירים, אך החלק המדומה שלה אינו פונקציה הרמונית.
האם $f(z)$ הולומורפית בראשית?

4) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\sin(x)\cosh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה $v(x,y)$ המקיימת $v(0,0)=2$.
רמז: $f(z)=\sin(z)$.

5) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\cos(x)\sinh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו פונקציה הלומורפית כך שמתקיים $u(x,y)=\mathrm{Re}\{f\}$.

6) הראו כי הפונקציה $v(x,y)=e^y\sin(x)$, היא פונקציה הרמונית במישור,
מצאו לה פונקציה צמודה הרמונית $u(x,y)$ ופונקציה שלמה $f(z)$,
כך שמתקיים: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

7) הראו כי הפונקציה $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$,
היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
רמז: $u(r,\theta)$ תקרא הרמונית אם היא מקיימת $r^2u''_{rr}+ru'_r+u''_{\theta\theta}=0$.

8) נתון כי $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$ היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
מצאו לה צמודה הרמונית בתחום זה.

9) הוכיחו כי $u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$, היא פונקציה הרמונית ומצאו לה צמודה הרמונית.

10) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=u(x,y)^2-v(x,y)^2$ פונקציה הרמונית.

11) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=\sin\left[u(x,y)\right]\cdot\cosh\left[v(x,y)\right]$ פונקציה הרמונית.

12) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)$
(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

13) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$
(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

14) הראו כי הפונקציה $\sinh(x)\cos(y)$ היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

מתמטיקה שימושית 2

פרק 24 - פונקציות אלמנטריות

תוכן העניינים

אקספוננט מרוכב:

שאלות:

1) פתרו את המשוואה $e^z=-1$.

2) הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $\left|e^{ix}\right|=1$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי אם $\mathrm{Im}(z)\geq 0$ אז $\left|e^{iz}\right|\leq 1$.

ב. הראו כי $\left|e^{z}\right|=1$ אם ורק אם $\mathrm{Re}(z)=0$.

4) פתרו את המשוואה $e^z=1$.

5) פתרו את המשוואה $e^z=i$.

6) פתרו את המשוואה $e^z=1+i$.

7) האם הפונקציה $f(z)=e^z$ היא חח"ע?

תשובות סופיות:

1) $z=i\cdot\pi[2n+1]$

2) $\sqrt{\cos^2(x)+\sin^2(x)}=1$

3) א. $\left|e^{iz}\right|=e^{-y}=\frac{1}{e^y}\leq\frac{1}{e^0}=1$ ב. הוכחה.

4) $k\in\mathbb{Z}$ $\quad z_k=2\pi ik$

5) $k\in\mathbb{Z}$ $\quad z_k=i\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right)$

6) $k\in\mathbb{Z}$ $\quad z_k=\frac{1}{2}\ln(2)+i\pi\left(2k+\frac{1}{4}\right)$

7) לא.

סינוס מרוכב:

שאלות:

1) פתרו את המשוואה $\sin(z)=2$.

2) הוכיחו כי $\sin(z)=\sin(x+iy)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$.

3) פתרו את המשוואה $\sin(z)=5$.

תשובות סופיות:

1) כל הפתרונות הם מהצורה הבאה: $z_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$,
כאשר n מספר שלם.

2) הוכחה.

3) $z_k=\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left(5\pm2\sqrt{6}\right)$

קוסינוס מרוכב:

שאלות:

1) הוכיחו כי $\cos(z)=\cos(x+iy)=\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)$.

2) פתרו את המשוואה $\cos(z)=2$.

3) האם $|\cos(z)|\le 1$ לכל z ?

4) פתרו את המשוואה $\cos(\pi z)+\frac{3}{4}i=0$.

5) הוכיחו כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|\cos(z)|\le\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ כאשר $y=\operatorname{Im}(z)$.

6) פתרו את המשוואה $\tan(z)=\frac{i}{3}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $z_n=2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$

3) לא.

4) $z_k=-\frac{1}{2}+2k-i\frac{1}{\pi}\ln(2)$

5) הוכחה.

6) $z_k=\pi k+i\frac{1}{2}\ln(2)$

העתקות אלמנטריות:

שאלות:

1) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$,
תחת ההעתקה $f(z)=z+1$.

2) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$,
תחת ההעתקה $f(z)=5z$.

3) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,Arg(z)=\frac{\pi}{4}\right\}$,
תחת ההעתקה $f(z)=z^3$.

4) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

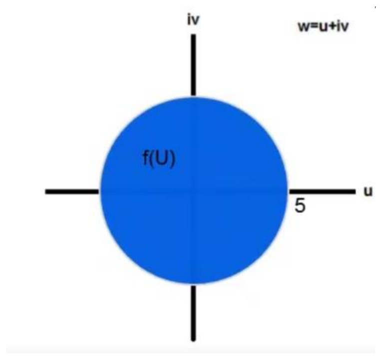
5) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<2\pi\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

6) מהי תמונת התחום $A=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,-\infty<\mathrm{Re}(z)<0, 0<\mathrm{Im}(z)<\frac{\pi}{2}\right\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

תשובות סופיות:

1) $|w-1|<1$

2)



3) $\frac{3\pi}{4}\simeq 135°$

4) $0<\alpha<\pi \quad 0<R<\infty \quad f(z)=e^xe^{iy}\equiv \mathrm{R}e^{i\alpha}$

5) $0<\alpha<2\pi \quad 0<R<\infty \quad f(z)=e^xe^{iy}\equiv \mathrm{R}e^{i\alpha}$

6) $0<\alpha<\frac{\pi}{2} \quad 0<R<1 \quad f(z)=e^xe^{iy}\equiv \mathrm{R}e^{i\alpha}$

לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים:

שאלות:

1) חשב את הגדלים הבאים:
א. $Arg(1+i)$
ב. $Arg\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

2) חשב את הגדלים הבאים:
א. $Log(1+i)$
ב. $Log\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

3) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\sqrt{i}$.

4) מצאו את כל הערכים האפשריים של i^i.

5) מצאו את כל הערכים האפשריים של $2^{\frac{1}{9}+\frac{i}{50}}$.

6) חשב את הערך $(2+2i)^{5i}$ עבור 3 ענפים שונים לבחירתכם.
כמה תשובות אפשריות יש לערך זה.

7) מצאו את תמונת התחום $A=\{z=re^{i\theta} \mid R_1<r<R_2 \ , \ -\pi<\theta<\pi\}$ תחת העתקה $Log(z)$ (הענף הראשי של הלוג).

8) מצאו תחום בו הפונקציה $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ אנליטית. כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ $a\neq b$.
הערה: תרגיל זה דורש ידע בהעתקות מוביוס.

9) הראו כי $|a^z|=a^{\operatorname{Re}(z)}$ עבור a ממשי חיובי בתחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$ כאשר פונקציית החזקה מוגדרת ע"י ענף הראשי של הלוג, כלומר: $a^z=e^{z\cdot Log(a)}$.

10) הוכיחו ישירות כי העתקה $\sqrt{z}$ איננה רציפה בתחום $\mathbb{C}$ אם מגדירים את $\sqrt{z}$ באופן הבא: $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ כאשר $z=re^{i\theta}$ | $\theta\in[0,2\pi]$.

11) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\log(\log(-1))$.

12) נניח כי $\log(z)$ זה ענף רציף של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C}\setminus\{z=x+iy\ ,\ x\geq 0\ ,\ y=\sin(x)\}$ ונניח שבענף זה מתקיים $\log(1)=0$, חשבו בענף זה את הערכים: $\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $\log\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, $\log(-i)$, $\log(i)$, $\log(-1)$.

13) נגדיר $\log_\alpha(z)=\ln|z|+i\cdot\arg(z)$ כאשר $\alpha-2\pi<\arg(z)\leq\alpha$.

א. חשבו את הערכים: $\log_0(1)$, $\log_\pi(1)$, $\log_{2\pi}(1)$.

ב. מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ תחת ההעתקה $\log_\pi(z)$.

ג. מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ תחת ההעתקה $\log_0(z)$.

14) יהיו z_n , ... , z_1 מספרים מרוכבים כך ש-$\mathrm{Re}(z_k)>0$ לכל $1\leq k\leq n$ וגם $\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_k)$ לכל $1\leq k\leq n$.
הוכיחו כי $Log(z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n)=Log(z_1)+\ldots+Log(z_n)$, כאשר $Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוגריתם.

15) יהי $U=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ויהי $y>0$. חשבו את הגבול $\lim\limits_{y\to 0}\left[\log(a+iy)-\log(a-iy)\right]$ עבור $a>0$ ועבור $a<0$.

16) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt{z}$ ב-$\mathbb{C}$. כלומר, הראו שלא קיימת פונקציה אנליטית $h(z)$ ב-$\mathbb{C}$ כך ש-$h^2(z)=z$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

17) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$ ב-$|z|<1$ לכל $n\geq 2$.

18) נניח כי $g(z)$, $f(z)$ הם שני ענפים אנליטיים של הלוג בקבוצה פתוחה וקשירה U. הוכיחו כי קיים קבוע k שלם כך ש-$f(z)-g(z)=2\pi ik$ לכל $z\in U$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{4}$ ב. $-\frac{\pi}{2}$

2) א. $\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\frac{\pi}{4}$ ב. $\ln(2)-\frac{\pi}{2}$

3) $e\frac{\pi}{4}i \;,\; k=0 \quad ; \quad e\frac{5\pi}{4}i \;,\; k=1$

4) $\left\{e^{-\pi\frac{4k+1}{2}} \quad \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$

5) $\left\{2^{\frac{1}{9}}e^{-\frac{2\pi k}{50}}e^{i\left(\frac{\ln(2)}{50}+\frac{2\pi k}{9}\right)} \quad \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$

6) $\left\{e^{-5\cdot\frac{\pi}{4}}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)} \;,\; e^{-5\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)} \;,\; e^{-5\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)} \;,\; ..\right\}$

7) $\ln(r)+i\cdot\theta$

8) $\frac{z-a}{z-b}\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$

9) $a^{\mathrm{Re}(z)}$

10) הוכחה.

11) $m\in\mathbb{Z} \;,\; k\geq 0$ $\quad \ln(\pi+2\pi k)+i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$

$m\in\mathbb{Z}$ $\quad \ln(-\pi-2\pi k)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$

12) $-\pi i \;,\; -\frac{3\pi}{2}i \;,\; -\frac{\pi}{2}i \;,\; \ln\left(\frac{5\pi}{2}\right) \;,\; \ln\left(\frac{3\pi}{2}\right)-2\pi i$

13) א. $2\pi i \;,\; 0 \;,\; 0$ ב. $\ln(r)+i\theta \;,\; -\infty<\ln(r)<\infty \;,\; \theta<r<\infty$

ג. $\ln(r)+i\theta \;,\; -\infty<\ln(r)<\infty \;,\; 0<\theta\leq 2\pi$

14) הוכחה.

15) $2\pi i$

16) הוכחה.

17) הוכחה.

18) הוכחה.

מתמטיקה שימושית 2

פרק 25 - אינטגרציה מרוכבת

תוכן העניינים

אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx$, לכל $\forall m,n\in\mathbb{Z}$.

2) לכל $z\in\mathbb{C}$, המקיים $\mathrm{Re}(z)<0$, פתרו את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{zt}dt$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$

2) $-\frac{1}{z}$

אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} z^n dz$, כאשר $n \in \mathbb{Z}$.

2) חשבון את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$, כאשר $\gamma = \{z = 2e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$.

3) חשבון את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} (z-1) dz$, כאשר $\gamma = \{z = 1 + e^{i\theta} \mid \pi \le \theta \le 2\pi\}$.

4) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma} \pi e^{\pi \bar{z}} dz$, כאשר γ מסילת קווים ישרים,
העוברת בנקודות $\gamma : 0 \to 1 \to 1+i \to i \to 0$.

5) חשבון את אורך המסילה $\gamma = [z_1, z_2]$, כאשר $\gamma = [z_1, z_2]$ היא מסילת הקו הישר
המחברת בין z_1 ל- z_2.

6) חשבון את אורך המסילה $\gamma(t) = \{(t - \sin t) + i \cdot (1 - \cos t) \ \mid \ 0 < t < 1\}$.

7) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \bar{z} \, dz$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases} 0 & n \ne -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$

2) $2\pi i - 4$

3) 0

4) $4e^{\pi} - 4$

5) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

6) ≈ 0.48

7) $2\pi i$

אי-שיוויונות אינטגרליים (משפט הערכה):

שאלות:

הוכיחו את אי השוויונות הבאים :

1) $\left|\int_C \frac{z^3}{z^2+1}dz\right| \le \frac{81\pi}{8}$, כאשר $C:\{|z|=3\ ,\ \ \mathrm{Re}(z)>0\}$.

2) $\left|\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1}dz\right| \le \frac{6\pi}{8}$

3) $\left|\int_C e^{z^2}dz\right| \le \sqrt{8}$, כאשר C הינה מסילת הקו הישר מ- 0 עד $2+2i$.

4) $\left|\int_C \frac{z^2}{\sin(z)}dz\right| \le \frac{\pi^2}{2}+2$, כאשר C הוא הקטע הישר המתחיל בנקודה $\frac{\pi}{2}+i$ ומסתיים בנקודה $\frac{\pi}{2}-i$.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

משפט קושי גורסט:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2+\frac{i\pi}{4}} e^z dz$.

2) הוכיחו כי $\int_4^{1+i} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \sqrt[4]{2}\cos(\frac{\pi}{8}) - 2 + i\sqrt[4]{2}\sin(\frac{\pi}{8})$.
כאשר $\sqrt{z}$ הינו הענף העיקרי של פונקציית השורש.

תשובות סופיות:

1) $\frac{e^2[1+i]}{\sqrt{2}} - 1$

2) הוכחה.

נוסחת האינטגרל של קושי:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z}dz$.

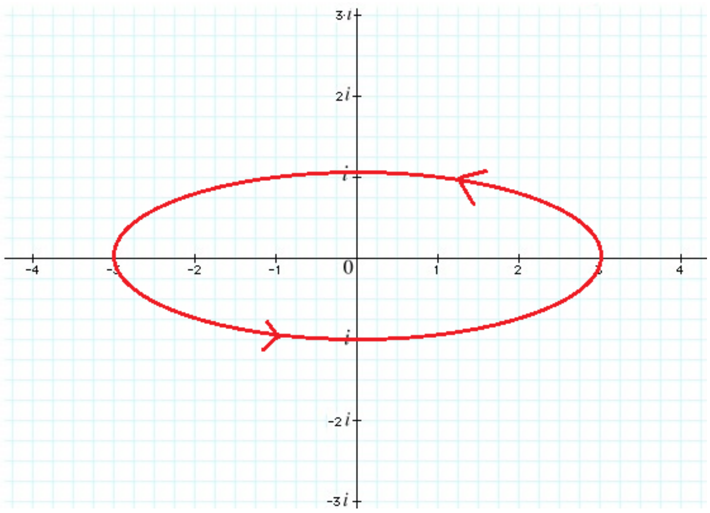
2) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2}dz$.

3) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\sin(z^2)}{z(z-2)}dz$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z+e^{-z}}{z(z-2)(z-3)}dz$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1.5} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)}dz$.

6) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z(z-2)(z-4)}dz$, עבור המסילה שבציור:



7) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-e^{z^2}}{z(z^2-1)(z+3)}dz$.

8) תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית בתחום D.
נניח כי $z_0\in D$ וכי הדיסק $D(z_0,R)=\{|z-z_0|\le R\}$ מוכל כולו ב-D.
הוכיחו כי $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0+R\cdot e^{i\theta}\right)d\theta$.

9) חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{2+\sin(2\theta)}d\theta$.

10) הוכיחו: $n\in\mathbb{N}$ $\quad\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n}(\theta)d\theta=\frac{2\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

11) חשבו את האינטגרל $\int\limits_C \frac{z}{z^2+1}dz$ כאשר $C=\{z\in\mathbb{C}\mid\ |z|=2\ ,\ \operatorname{Im}(z)\ge 0\}$.

12) חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)}$ כאשר $a>b>0$.

13) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1}\frac{Log\left(1+\frac{z}{3}\right)}{z}dz$.

14) תהי $f(z)=u+iv$ הולומורפית בתחום $|z|<1$ כך ש-$u^2(0)=v^2(0)$.
הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\int_0^{2\pi}u^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}v^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta$.

15) תהי $f(z)=u+iv$ הולומורפית בתחום $D=\{z\in\mathbb{C}\ \mid\ |z|<1\}$.
הוכיחו כי לכל $0<r<1$ ולכל $0<|a|<r$ מתקיים

$$\oint\limits_{|z|=r}\frac{\operatorname{Re}(z)}{z-a}f(z)dz=\pi i\cdot\left(\left[a+\frac{r^2}{a}\right]f(a)-\frac{r^2}{a}\cdot f(0)\right).$$

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$
2) $2\pi e^2 i$
3) $2\pi i\cdot\frac{\sin\left(2^2\right)}{2}$
4) $2\pi i\cdot\frac{1}{3}$
5) $\pi i-2\pi e i$
6) $-\frac{\sin(2)\pi i}{2}$
7) $\pi i\cdot\left(\frac{17}{12}-\frac{3e}{4}\right)$
8) הוכחה.
9) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
10) הוכחה.
11) πi
12) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$
13) 0
14) הוכחה.
15) הוכחה.

נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin(z)}{(z-i)^3}dz$.

2) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}dz$.

3) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2}dz$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3}dz$.

6) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=6} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

7) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)^2(z-4)}dz$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

2) $-\pi i$

3) $-2\pi i\cdot\sin\left(\pi\right)$

4) $-\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}\pi i$

5) $-2\pi^2 i$

6) $-\frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

7) 0

פונקציות קדומות:

שאלות:

1) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

2) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^n}$ $(n\geq 2)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

3) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$? האם יש לה קדומה שם?

4) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$? האם יש לה קדומה שם?

5) הוכיחו כי לפונקציה $f(z)=\frac{1}{z(z^2-\pi^2)}$ יש קדומה בתחום $D=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|>\pi\}$.

6) נסמן $I=\int_\Gamma \frac{2z}{z^2+1}dz$ כאשר $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|=2\ ,\ \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$ בכיוון החיובי.

א. האם לאינטגרנד $\frac{2z}{z^2+1}$ יש פונקציה קדומה בתחום פשוט קשר המכיל את Γ ?

ב. חשבו את I.

7) נניח כי b , a מספרים מרוכבים בחצי המישור השמאלי, כלומר $\mathrm{Re}(b)<0\ ,\ \mathrm{Re}(a)<0$.
הוכיחו כי $|e^a-e^b|<|a-b|$, $(a\neq b)$.

8) נניח כי $g(z)$, $f(z)$ פונקציות שלמות המקיימות $f^2(z)+g^2(z)=1$ לכל $z\in\mathbb{C}$. הוכיחו כי קיימת פונקציה שלמה $h(z)$ כך שמתקיים: $f(z)=\cos(h[z])$ ו- $g(z)=\sin(h[z])$.

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$
2) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור γ המוכל בתחום Ω.
3) π
4) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור בתחום.
5) הוכחה.
6) א. לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור בתחום. ב. $2\pi i$
7) הוכחה.
8) הוכחה.

משפט מוררה:

שאלה:

1) תהי $f_n(z)$ סדרת פונקציות אנליטיות המתכנסת במ"ש לפונקציה $f(z)$ בתחום D פשוט קשר. הוכיחו כי:

א. $f(z)$ אנליטית בתחום D.

ב. מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = f'(z) \qquad \forall z \in D$

הערה: תחום זה קבוצה פתוחה וקשירה.

תשובה סופית:

ראו פתרון מלא בסרטון הוידאו.

התכנסות במש של סדרת פונקציות הולומורפיות:

שאלות:

1) יהי $a>0$. הוכיחו כי הפונקציה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-a\cdot n^2 z}$ הולומורפית ב- $\operatorname{Re}(z)>0$.

2) יהי $a>0$. הוכיחו כי הפונקציה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^z}$ הולומורפית ב-$\operatorname{Re}(z)>1$.

הערה: $(a+n)^z$ מוגדרת באופן הבא $(a+n)^z=e^{z\cdot Log(a+n)}$ ו-$Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוג.

3) פונקציית זטא של רימן מוגדרת כך $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$.

הראו כי היא הולומורפית בתחום $\operatorname{Re}(z)>1$.

הערה: n^z מוגדרת באופן הבא: $n^z=e^{z\cdot Log(n)}$ ו-$Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוג.

4) תהי $f(x):(0,\infty)\to R$ רציפה וחסומה. נגדיר $L[f](z)=\int_0^{\infty} f(x)e^{-z\cdot x}dx$.

נתון כי $L[f](z)$ רציפה בתחום $\operatorname{Re}(z)>0$, הוכיחו כי היא הולומורפית שם.

תשובות סופיות:

ראו פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)dx=\sqrt{\pi}e^{-b^2}$ עבור $b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ו- $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\sin(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx=\pi$.

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^6(x)}{x^6}dx$.

5) הוכיחו כי $\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{(a+b\cos\theta)^2}d\theta=2\pi\cdot\frac{a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$ עבור $a>b>0$.

6) תהי $f(z)=\frac{1}{(1+az)^2}+\frac{1}{(1+bz)^2}$ כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ קבועים המקיימים $|a|<1\,,\ |b|<1$ שונים מאפס. נניח כי $|f(z)|\le 3$ לכל $|z|=1$. הוכיחו כי $|a^n+b^n|\le\frac{3}{n+1}$ לכל $n\ge 0$.
רמז: התבוננו ב- $|f^{(n)}(0)|$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) $\frac{11\pi}{20}$
5) הוכחה.
6) הוכחה.