

מתמטיקה



תוכן העניינים

1.	מבוא מתמטי לקורס	1
2.	הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות (ללא ספר)	32
3.	הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות	51
4.	חישוב נגזרת של פונקציה	61
5.	אינטגרלים מיידיים	64
6.	אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"	66
7.	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים	70
8.	אינטגרלים בשיטת ההצבה	73
9.	אינטגרלים של פונקציות רציונליות	78
10.	אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות	89
11.	נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה	93
12.	נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה	

מתמטיקה

פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

תוכן העניינים

1	1. מבוא לתורת הקבוצות
7	2. המספרים האי-רציונליים
8	3. קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות
15	4. קבוצה צפופה
17	5. הערך השלם
19	6. סימן הסכימה
22	7. אינדוקציה
24	8. אי שוויונים מפורסמים
25	9. פתרון אי שוויונים
27	10. עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון
30	11. שדות

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו :

א. $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב. $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד. $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה. $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה :

א. $5 \in A$ ב. $2 \in A$ ג. $\{2\} \in A$

ד. $\{2\} \subseteq A$ ה. $\{\{2\}\} \subseteq A$ ו. $\emptyset \in A$

ז. $\emptyset \subseteq A$ ח. $\{2, \{2\}\} \subseteq A$ ט. $\{2, 4\} \subseteq A$

י. $\{2, 4\} \in A$ יא. $\{\{2, 4\}\} \in A$ יב. $\{2, 5\} \subseteq A$

יג. $\{2, 5\} \in A$ יד. $\{1, 4\} \in A$

(7) מצא שתי קבוצות, A ו- B , המקיימות :

א. $A \in B$

ב. $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות :

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$, $C = \{3, 5, 7, 9\}$, $D = \{6, 7, 8\}$, $E = \{7, 8\}$

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X \subseteq A$ וגם $X \not\subseteq D$

ב. $X \subseteq D$ וגם $X \not\subseteq C$

ג. $X \subseteq E$ וגם $X \not\subseteq A$

(9) הוכח : $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

(10) נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשום את :

א. $A \cup B$

ב. $A \cap B$

ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

(11) נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^x = 0\}$$

רשום את :

א. $A \cup B$

ב. $A \cap B$

ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

(12) נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשב את $(A - B) - C$

ב. חשב את $A - (B - C)$

(13) נתון : $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}, A = \{12, 15, 18\}, B = \{13, 15, 17\}$

הדגם את כלל דה מורגן $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(14) הוכח את כלל דה מורגן הראשון $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(15) מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות :

א. $A = [1, \infty)$

ב. $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

16 הצג באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות :

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$ | ב. $A \cup B$ |
| ג. A^c | ד. $A \cap B^c$ |
| ה. $A^c \cap B$ | ו. $A \cup B^c$ |
| ז. $A^c \cup B$ | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ | |

17 ענה על הסעיפים הבאים :

- א. הוכח כי $A \setminus B = A \cap B^c$.
הראה זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
ב. נסמן: $X = C \setminus (A \cap B)$, $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
הוכח כי $X = Y$.
ג. נסמן: $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
הוכח כי $X = Y$.

18 תהיינה X, Y, Z קבוצות כלשהן.

- טענה א': $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$.
טענה ב': $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$.
טענה ג': $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup Z$.
איזו טענה נכונה לכל בחירה של X, Y, Z ?

19 הוכח כי אם הנקודה x_1 שייכת לסביבת ε של הנקודה x_0 , אז קיימת סביבת δ של x_1 שמוכלת בסביבת ε של הנקודה x_0 .

20 הוכח שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

21 הוכח כי אם x_0 לא שייכת לקטע הסגור $[a, b]$, אז קיימת סביבה של הנקודה x_0 אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע $[a, b]$.

22 הוכח כי אם $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y - y_0| < \varepsilon$, אז $|xy - x_0y_0| < \varepsilon(|x_0| + |y_0| + \varepsilon)$.

תשובות סופיות

- (1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ב. לכל x קיים y , כך ש- $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz = \frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.
 ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.
 ה. לכל n טבעי המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$. ב. $\forall x: x^2 + 4 > 0$.
 ג. $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$. ד. $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.
- (3) א. $A = (-4, 4)$, בקבוצה אינסוף איברים.
 ב. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, בקבוצה 7 איברים.
 ג. $C = \{1, 2, 3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D = \{-3, -2, -1, 0\}$, בקבוצה 4 איברים.
 ה. $E = \{0, 1\}$, בקבוצה 2 איברים.
 ו. $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, בקבוצה 9 איברים.
- (4) א. $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$. ב. $B = \{11, 13, 17, 19\}$.
 ג. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. ד. $D = \{1, 4, 9, 16\}$.
- (5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7) $A = \{1, 2\}$ $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א. A, C . ב. E, D . ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{4, 6, 8\}$, $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$
- (11) $A \cup B = (-2, 4)$, $A \cap B = \emptyset$, $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$, $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$, $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$
- (11) $A \cup B = (-2, 4)$, $A \cap B = \emptyset$, $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$, $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$, $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$
- (11) $A \cup B = (-2, 4)$, $A \cap B = \emptyset$, $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$, $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$, $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$

12) א. ϕ ב. $\{4, 5, 6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א. $A^C = (-\infty, 1)$ ב. $B^C = [1, 4]$ ג. $C^C = [1, 4]$

ד. $D^C = (-\infty, 1] \cup [3, 4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענה ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

המספרים האי-רציונליים

שאלות

- (1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכח שהמספר זוגי.
ב. הוכח כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכח שהמספר מתחלק ב-3.
ב. הוכח כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכח שהמספר זוגי.
ב. הוכח כי $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (4) הוכח כי $\sqrt{n}$ הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- n טבעי שאינו ריבוע של מספר).
- (5) הוכח או הפרך :
א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.
ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.
- (6) א. הוכח כי $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ב. הוכח כי $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ג. הוכח כי $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (7) א. יהי p מספר ראשוני ויהיו a, k מספרים טבעיים.
הוכח כי : $p | a \Leftrightarrow p | a^k$.
ב. הוכח : אם $n \neq N^k$, אז $\sqrt[k]{n}$ הוא מספר אי-רציונלי ($n, k, N \in \mathbb{N}$).
הערת סימון : אם מספר a מתחלק במספר b מסמנים $b | a$,
ואומרים גם " b מחלק את a ".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

שאלות

$$(1) \quad A = \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{נתונה הקבוצה}$$

- א. בדוק האם הקבוצה חסומה.
 ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(2) \quad A = \left\{ \frac{1}{n^4 + 2n + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{נתונה הקבוצה}$$

- א. בדוק האם הקבוצה חסומה.
 ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(3) \quad A = \left\{ \frac{n^4 + n^2 + 3}{2n^4 + 2n^2 + 8} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{נתונה הקבוצה}$$

- א. בדוק האם הקבוצה חסומה.
 ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(4) \quad A = \left\{ \frac{[cn]}{n} \mid n \in \mathbb{N}, 0 < c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{נתונה הקבוצה}$$

- א. הוכח שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצא את $\sup A$.
 ב. הוכח שהקבוצה חסומה מלמטה ומצא את $\inf A$.

$$(5) \quad A = \{n^5 - n + 4 \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{נתונה הקבוצה}$$

- א. בדוק האם הקבוצה חסומה.
 ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

6 נתונה הקבוצה $A = \{11 - 4^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- א. בדוק האם הקבוצה חסומה.
 ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

7 נתונה הקבוצה $A = \left\{ \frac{4n-1}{5n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

- א. בדוק האם הקבוצה חסומה.
 ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

8 מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

א. $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| \leq 1\}$

ג. $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-4}{(x-2)^2} \leq 0 \right\}$

ד. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 1 + \frac{n+1}{n+4} \sin \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

9 ענה על הסעיפים הבאים:

- א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים S .
 הוכח שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.
 ב. הוכח שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

10 הוכח את הטענות הבאות:

- א. אם α הוא הסופרמום של הקבוצה A , אז לכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$,
 קיים איבר $x \in A$, כך ש- $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.
 ב. אם β הוא האינפימום של הקבוצה A , אז לכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$,
 קיים איבר $x \in A$, כך ש- $\beta \leq x < \beta + \varepsilon$.

(11) הוכח את הטענות הבאות :

- א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.
(משפט הצפיפות של הממשיים)
- ב. עבור קטעים מהטיפוס : $(a,b), [a,b), (-\infty, b)$, לא קיים מקסימום.
- ג. עבור קטעים מהטיפוס : $(a, \infty), [a, \infty), (-\infty, \infty)$, לא קיים מקסימום.
- ד. עבור קטעים מהטיפוס : $(a,b), [a,b), (-\infty, b)$, הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.
- ה. אם S היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- S יש חסם עליון, ומתקיים $\max S = \sup S$.

(12) תהי A תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$, ויהי $x \in \mathbb{R}$.
נגדיר את המרחק בין x ל- A על ידי : $d(x, A) = \inf \{ |x - a| \mid a \in A \}$.
אם $\alpha \in \mathbb{R}$ הוא החסם העליון של A , הראה כי $d(\alpha, A) = 0$.

(13) הוכח שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.

(14) הוכח שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.

(15) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. נניח ש- K קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.
נתבונן בקבוצה $-K = \{-x \mid x \in K\}$.
הוכח שהקבוצה $-K$ חסומה מלמעלה.
- ב. הוכח שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

(16) תהי T קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.

תהי S קבוצה חלקית לא ריקה של T .
הוכח כי :

- א. ל- T יש חסם עליון $\sup T$.
- ב. ל- S יש חסם עליון $\sup S$.
- ג. $\sup S \leq \sup T$.
- ד. אם S ו- T בעלות מקסימום, אז $\max S \leq \max T$.

- 17)** יהיו A ו- B שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.
 א. נניח כי לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ כך ש- $x < y$.
 הוכח כי $\sup A \leq \sup B$.
 האם יהיה נכון לומר ש- $\sup A < \sup B$?
 ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש- $y < x$.
 הוכח כי $\sup A = \sup B$.
- 18)** נניח ש- A ו- B הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,
 כך ש- $\sup A = \inf B$.
 הוכח שלכל מספר $\delta > 0$, קיים מספר x ב- A , ומספר y ב- B , כך ש- $x + \delta > y$.
- 19)** נניח ש- A ו- B הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,
 כך ש- $\sup A \leq \inf B$.
 נניח שלכל מספר $\delta > 0$ קיים מספר x ב- A , ומספר y ב- B , כך ש- $x + \delta > y$.
 הוכח כי $\sup A = \inf B$.
- 20)** נניח ש- A קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום,
 ונניח כי $x < \sup A$.
 הוכח שיש לפחות שני איברים בקבוצה A , שנמצאים בין x ל- $\sup A$.
- 21)** תהי S קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
 הוכח כי אם $c \geq 0$, אז ל- $c \cdot S$ יש חסם עליון, ומתקיים $\sup(c \cdot S) = c \cdot \sup S$.
- 22)** יהיו S ו- T קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
 הוכח כי הקבוצה $S + T$ היא בעלת חסם עליון ומתקיים:
 $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$.
- 23)** יהיו S ו- T קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
 א. הוכח כי הקבוצה $S \cup T$ היא בעלת חסם עליון.
 ב. הוכח כי $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$.
- 24)** תהיינה U, T, S קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
 נניח כי לכל $s \in S$ ולכל $t \in T$ קיים $u \in U$, המקיים את התנאי: $u \geq s + t$.
 הוכח כי $\sup U \geq \sup T + \sup S$.

(25) הוכח את הטענות הבאות :

- א. אם S ו- T הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים, כך שכל איבר של S אינו גדול משום איבר של T , אז קיימים $\sup S, \inf T$, ומתקיים: $\sup S \leq \inf T$.
- ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה S מתקיים: $\inf S \leq \sup S$. האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

(26) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. נסח והוכח את משפט ארכימדס.
- ב. נסח והוכח את תכונת ארכימדס.
- ג. הוכח שלכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n , כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.
- ד. הוכח שלכל שני מספרים ממשיים α, β , המקיימים $\alpha < \beta$, קיים מספר טבעי n , כך ש- $\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$ וגם $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$.

(27) תהי A תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A .

- נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$, כך ש- $a_n > \alpha - \frac{1}{n}$.
- הוכח כי α הוא הסופרמום של A .

(28) הוכח שלכל מספר ממשי c קיים מספר שלם יחיד $m \in \mathbb{Z}$, כך ש- $m \leq c < m+1$. למספר m קוראים הערך השלם של c , ומסמנים $m = [c]$.

(29) יהיו a ו- b שני מספרים ממשיים המקיימים $|a-b| < \frac{1}{n}$, לכל מספר טבעי n . הוכח כי $a = b$.

(30) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. לכל n טבעי נגדיר $I_n = [n, \infty)$. הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.
- ב. לכל n טבעי נגדיר $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$. הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$.

(31) ענה על הסעיפים הבאים :

א. לכל n טבעי נגדיר $I_n = [a_n, b_n]$.

נניח כי $I_{n+1} \subset I_n$ לכל n .

הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

ב. לכל n טבעי נגדיר $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$.

הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

ג. בסעיף ב' התקיים כי $I_{n+1} \subset I_n$ לכל n , וכן $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

(32) לכל n טבעי נגדיר $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

תשובות סופיות

- (1) א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A = \inf A = 0, \sup A = 1$.
- (2) א. הקבוצה חסומה. ב. $\max A = \sup A = \frac{1}{4}, \inf A = 0$.
- (3) א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A = \inf A = \frac{5}{12}, \sup A = \frac{1}{2}$.
- (4) א. הקבוצה חסומה. ב. $\sup A = c, \inf A = [c]$.
- (5) א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב. $\min A = 4$.
- (6) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.
ב. $\max A = 7$.
- (7) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי $\frac{4}{5}$, וחסומה מלמטה על ידי $\frac{3}{5}$;
לכן, הקבוצה חסומה. ב. $\sup A = \frac{4}{5}, \min A = \frac{3}{5}$.
- (8) א. $\max A = \frac{5}{4}, \inf A = -1$. ב. $\min B = 0, \max B = 2$.
ג. $\min C = -2, \sup C = 2$. ד. $\inf D = 0, \sup D = 2$.

שאלות 9-32 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

קבוצה צפופה

שאלות

- 1) הוכח שקבוצת הממשיים צפופה בקבוצת הממשיים.
- 2) הוכח שקבוצת הרציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- 3) הוכח שקבוצת האי-רציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- 4) הוכח שהקבוצה $A = \{\sqrt{10}q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.
- 5) הוכח שהקבוצה $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.
- 6) יש המגדירים קבוצה צפופה בממשיים כך:
תת-קבוצה S של $\mathbb{R}$ היא צפופה (ב- $\mathbb{R}$),
אם לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $s \in S$, כך ש- $|s - x| < \varepsilon$.
הוכח שאם S תת-קבוצה של $\mathbb{R}$ מקיימת את התכונה,
שלכל $a, b \in \mathbb{R}$ קיים $s \in S$, כך ש- $a < s < b$, אז S צפופה ב- $\mathbb{R}$.
- 7) הוכח שהקבוצה $A = \{q\sqrt{10} \mid 0 < q \in \mathbb{Q}\}$ צפופה ב- $[0, 1]$.
- 8) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע $(1, \infty)$.
הוכח שהקבוצה $B = \left\{ \frac{a}{n} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$ צפופה בקטע $(0, 1)$.
- 9) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע $[0, 1]$.
הוכח שהקבוצה $B = \{na \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$ צפופה בקטע $[0, \infty)$.
- 10) הוכח, שקבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים, שלא מופיעה בהם הספרה 4, אינה צפופה בקטע $I = [0, 1]$.

11 תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע $(1, \infty)$ וצפופה בו.

הוכח שהקבוצה $C = \left\{ \frac{a}{n^2(a+1)} : a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$ אינה צפופה בקטע $[0, 1]$.

12 תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע $[0, 1]$.

הוכח שהקבוצה $C = \left\{ \frac{a+1}{n^2} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$ אינה צפופה בקטע $[0, 1]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

הערך השלם

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $[x+4]=10$

ב. $[x+4]=-10$

ג. $[x+4]^2=100$

ד. $[2x^2+1]=9$

ה. $[x^2+x-1]=-2$

ו. $[x^2-\ln x+e^x-x^5]=0.5$

2) פתור את המשוואה $[x+4]=2x+1$.

3) פתור את המשוואה $[16x^2+7]=8x+6$.

4) פתור את המשוואה $[x^2+x+4]=2x+6$.

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $[|x-4|+x]=4x+4$

ב. $[|x+1|-|x-1|]=x$

6) פתור את המשוואה $[4+[x+1]]=10$.

7) הוכיחו כי לכל x ממשי ו- m שלם מתקיים $[x+m]=[x]+m$.

8) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $[x+4]<10$

ב. $[x+4]>-10$

ג. $[x+4]^2<100$

ד. $[x+4]\leq 10$

9) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $[x]^2 - 5[x] + 6 \leq 0$

ב. $[x-1][x-2] + [x+10] > 3[x+2] + [2.44]$

10) הוכיחו, כי לכל x ו- y ממשיים, מתקיים:

א. $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$

ב. $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$

תשובות סופיות

1) א. $6 \leq x < 7$ ב. $-14 \leq x < -13$ ג. $[6, 7) \cup [14, -13)$

ד. $(-\sqrt{4.5}, -2] \cup [2, \sqrt{4.5})$ ה. $-1 < x < 0$ ו. $\emptyset$

2) $x = 2.5, 3$

3) $x = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$

4) $x = -1, 2$

5) א. $x = 0$ ב. $x = 2, 0, -2$

6) $5 \leq x < 6$

7) שאלת הוכחה.

8) א. $x < 6$ ב. $x > -14$ ג. $-14 < x < 6$ ד. $x < 7$

9) א. $2 \leq x < 4$ ב. $x < 1$ or $x > 4$

10) שאלת הוכחה.

סימן הסכימה

שאלות

(1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \sum_{n=0}^{10} 4^n & \text{ב.} & \sum_{k=1}^4 2k & \text{ג.} & \sum_{n=4}^{10} na_n \\
 \text{ד.} & \sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i & \text{ה.} & \sum_{t=1}^8 tx^t & \text{ו.} & \sum_{k=4}^{10} na_{k+1} \\
 \text{ז.} & \sum_{k=1}^{10} 4n & \text{ח.} & \sum_{k=-1}^3 (k^2 + 1) & \text{ט.} & \sum_{\ell=1}^3 (\ell^2 - x_{2\ell} - 4)
 \end{array}$$

(2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה :

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} & 1+2+4+8+16+32+64+128 \\
 \text{ב.} & 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 \\
 \text{ג.} & 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 \\
 \text{ד.} & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 \\
 \text{ה.} & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 43 \cdot 44 \\
 \text{ו.} & 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + 21 \cdot 8 \\
 \text{ז.} & 5^2 + 7^2 + \dots + 27^2 \\
 \text{ח.} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11} \\
 \text{ט.} & \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \frac{14}{81} + \frac{18}{243} \\
 \text{י.} & 4 + \frac{8}{5} + \frac{12}{25} + \frac{16}{125} + \frac{20}{625}
 \end{array}$$

(3) חשב את הסכומים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \sum_{k=1}^{10} 4k & \text{ב.} & \sum_{k=1}^{10} (2k + 4k^2) & \text{ג.} & \sum_{k=10}^{24} k(k-1) \\
 \text{ד.} & \sum_{k=10}^{24} \frac{k^3 - k}{k+1} & \text{ה.} & \sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2) & \text{ו.} & \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1)(k-2)
 \end{array}$$

* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה') :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

(4) חשב את הסכומים הבאים :

$$\text{א. } \sum_{k=1}^{20} \frac{5 \cdot 4^k + 8^k}{2^k} \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{11} \frac{2 \cdot 4^{k+2} + 10^k}{0.4^k} \quad \text{ג. } \sum_{k=10}^{20} 2^{2k+10}$$

$$* \text{ תוכל להיעזר בנוסחה הבאה : } \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1} \quad (a \neq 1)$$

(5) חשב את הסכומים הבאים :

$$\text{א. } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2$$

$$\text{ב. } 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 24^2$$

$$\text{ג. } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2$$

$$\text{ד. } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2$$

(6) הוכח כי :

$$\text{א. } \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+4}}{k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{2k+6}}{k+3}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=4}^{n-3} \frac{4k+17+2^{2k}}{k+1} = \sum_{k=8}^{n+1} \frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$$

(7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום :

$$\text{א. } \sum_4^{11} k^2 \quad \text{ב. } \sum_{10}^{20} 4^{2k}$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10}$$

$$\text{ב. } 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

$$\text{ג. } 4a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 4a_7 + 4a_8 + 4a_9 + 4a_{10}$$

$$\text{ד. } 4 \cdot 7^2 a_7 + 4 \cdot 8^2 a_8 + 4 \cdot 9^2 a_9 + 4 \cdot 10^2 a_{10} + 4 \cdot 11^2 a_{11} + 4 \cdot 7^2 a_7$$

$$\text{ה. } 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 8x^8$$

$$\text{ו. } na_5 + na_6 + na_7 + na_8 + na_9 + na_{10} + na_{11}$$

$$\text{ז. } 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n$$

$$\text{ח. } ((-1)^2 + 1) + (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1)$$

$$\text{ט. } (1^2 - x_2 - 4) + (2^2 - x_4 - 4) + (3^2 - x_6 - 4)$$

$$(2) \quad \text{א. } \sum_{k=1}^7 2^k \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{10} 2k \quad \text{ג. } \sum_{k=0}^9 (2k+1) \quad \text{ד. } \sum_{k=1}^7 k(k+1)$$

$$\text{ה. } \sum_{k=1}^{22} (2k-1)2k \quad \text{ו. } \sum_{k=1}^7 3k(k+1) \quad \text{ז. } \sum_{n=3}^{14} (2n-1)^2$$

$$\text{ח. } \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{ט. } \sum_{k=1}^5 \frac{4k-2}{3^k} \quad \text{י. } \sum_{k=1}^4 \frac{4k}{5^{k-1}}$$

$$(3) \quad \text{א. } 220 \quad \text{ב. } 1650 \quad \text{ג. } 4360$$

$$\text{ד. } 4360 \quad \text{ה. } 28 \quad \text{ו. } 4545$$

$$(4) \quad \text{א. } 5 \cdot (2^{21} - 2) + \frac{4}{3} (4^{20} - 1) \quad \text{ב. } 32 \cdot \frac{10(10^{11} - 1)}{10 - 1} + \frac{25(25^{11} - 1)}{25 - 1}$$

$$\text{ג. } 2^{10} \left[\frac{4(4^{20} - 1)}{4 - 1} - \frac{4(4^9 - 1)}{4 - 1} \right]$$

$$(5) \quad \text{א. } 2870 \quad \text{ב. } 4886 \quad \text{ג. } 2024 \quad \text{ד. } 969$$

$$(6) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(7) \quad \text{א. } 8 \cdot 8 + 6 \cdot \frac{8(8+1)}{2} + \frac{8(8+1)(2 \cdot 8 + 1)}{6} \quad \text{ב. } 4^{18} \cdot \frac{16(16^{11} - 1)}{16 - 1}$$

אינדוקציה

שאלות

(1) הוכח באינדוקציה כי $4 \cdot 10^n + 14 \cdot 19^n$ מתחלק ב-9 לכל n טבעי.

(2) הוכח באינדוקציה כי $\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$. $(k, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$

(3) מצא את ה- n הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים $2^n \geq n^2$, והוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

(4) הוכח את הסעיפים הבאים:
א. הוכח באינדוקציה כי $(1+x)^n \geq 1+nx$, לכל n טבעי ולכל $x \geq -1$ ממשי.
הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכח כי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, לכל n טבעי.
רמז: היעזר בתוצאת סעיף א'.

(5) הוכח באינדוקציה כי $(1-x)^n < \frac{1}{1+xn}$ לכל $0 < x < 1, n \in \mathbb{N}$.

(6) הוכח באינדוקציה כי $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
רמז: היעזר במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

(7) נתון כי $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, $a_1 = \sqrt{2}$.
הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:

א. $a_n \leq 2$

ב. $a_n \leq a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיבית.

(8) הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי,
אם $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$,

אז $a_n = n^2 - 2n$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיבית.

(9) הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי,

$$\text{אם } a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, a_1 = 1, a_2 = 1,$$

$$\text{אז } a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n.$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיביות.

(10) הוכח באינדוקציה כי $4^n - 1$ מתחלק ב-15, לכל n טבעי זוגי.

$$\textbf{(11)} \text{ הוכח באינדוקציה כי } \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \text{ , } (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}).$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

הערה: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים"

בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

אי שוויונים מפורסמים

שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שלכל שני מספרים ממשיים x, y המקיימים $x < 1, y > 1$, מתקיים $x + y > xy + 1$.

ב. הוכח באינדוקציה שלכל $n \geq 2$ טבעי:

אם $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, אז $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ ($0 < a_i \in \mathbb{R}$).

(2) נסח והוכח את אי שוויון הממוצעים.

(3) הוכח שלכל $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים:

א. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (אי שוויון המשולש)

ב. $|a - b| \leq |a| + |b|$

ג. $|a - b| \geq |b| - |a|$, $|a - b| \geq |a| - |b|$

ד. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

ה. $|a + b| \geq ||a| - |b||$

ו. $(a_i \in \mathbb{R}) \quad |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

(4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נסח והוכח את אי שוויון קושי-שוורץ.

ב. הוכח כי אם $a_1 + \dots + a_n = 1$ אז $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$).

הערה: אי שוויון ברנולי מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".

נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

פתרון אי שוויונים

שאלות

פתור את אי השוויונים הבאים :

$$(1) \quad x^2 - 12x > -32$$

$$(2) \quad (x-3)(x-7) \geq 8x - 56$$

$$(3) \quad 2x^2 + 2x + 24 \geq 0$$

$$(4) \quad \frac{x-1}{x^2-9} > 0$$

$$(5) \quad \frac{2x-1}{x-5} \leq 0$$

$$(6) \quad \frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$$

$$(7) \quad |x+2| < 3$$

$$(8) \quad |6-2x| < x$$

$$(9) \quad |2x+3| < 8 < |5-x|$$

$$(10) \quad x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$$

$$(11) \quad |2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$$

$$(12) \quad \sqrt{x+3} < 7$$

$$(13) \quad \frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$$

$$(14) \quad \sqrt{x^2+x-6} < x-3$$

הערה : לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.

תשובות סופיות

(1) $x < 4$ או $x > 8$

(2) $x \leq 7$ או $x \geq 11$

(3) כל x

(4) $x > 3$ או $-3 < x < 1$

(5) $\frac{1}{2} \leq x < 5$

(6) $1 \leq x \leq 6$

(7) $-5 < x < -1$

(8) $2 < x < 6$

(9) $-5\frac{1}{2} < x < -3$

(10) $x < -5$ או $x > 7$

(11) $x < -1$ או $x > 4$

(12) $-3 \leq x < 46$

(13) $x < 0.472$

(14) אין פתרון.

עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

שאלות

1) חשב, ללא מחשבון :

א. $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב. $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

2) הוכח את הזהויות הבאות :

א. $(n-2)!(n^2 - n) = n!$

ב. $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג. $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2 - 2}{(n+1)!}$

3) חשב :

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\binom{14}{11}$

4) הוכח את הזהויות הבאות :

א. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ ב. $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ ג. $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

5) הוכח באינדוקציה שלכל $n \geq 2$ טבעי מתקיים :

$$\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} = \binom{n}{2}$$

6) רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים :

א. $(a+b)^4$ ב. $(x+2)^5$ ג. $(x-4)^3$

7) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ לכל $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

(8) הוכח שלכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים:

א. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

ב. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

ג. $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} - \dots + 3^n \binom{n}{n} = 4^n$

(9) מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a} + 2a^2\right)^{10}$.

(10) בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא a^7 . מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

(11) מצא, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את x , וחשב את ערכו.

(12) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a = b = 1$.

(13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15. מצא את n .

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } \frac{1}{30} \quad \text{ב. } \frac{1001}{285}$$

(2) שאלת הוכחה.

$$(3) \quad \text{א. } 10 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 1 \quad \text{ד. } 364$$

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

$$(6) \quad \text{א. } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{ב. } (x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

$$\text{ג. } (x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

$$(9) \quad T_4 = \frac{15}{2a}$$

$$(10) \quad T_7 = 924a^7$$

$$(11) \quad T_9 = 45$$

$$(12) \quad \text{א. } \frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6} \quad \text{ב. } 2^{18}$$

$$(13) \quad n = 6$$

שדות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור ($\oplus$) וכפל ($\otimes$) על R .

בדוק, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & x \oplus y = x + y + 4 & x \oplus y = x + y \\ \text{ב.} & x \otimes y = 2xy & x \otimes y = y^2 \\ \text{ג.} & & \end{array}$$

2) נתונה הקבוצה $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$.

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \\ (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \end{aligned}$$

הוכח שהקבוצה $Q[\sqrt{2}]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
- ב. הוכח שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
- ג. הוכח שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
- ד. הוכח שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

4) יהיו a, b איברים בשדה.

- א. הוכח כי $a = 0 \Leftrightarrow a + a = a$.
- ב. הוכח כי $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
- ג. הוכח כי $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

5) יהיו a ו- b איברים של שדה. הוכח כי:

- א. $(-1) \cdot a = -a$.
- ב. $(-a)b = a(-b) = -ab$.

6) הוכח שבשדה, מתקיים חוק הצמצום. כלומר, הוכח כי $a = c \Rightarrow ab = cb$, לכל a, b, c , בשדה ($b \neq 0$).

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

מתמטיקה

פרק 2 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עקום (ללא ספר)

מתמטיקה

פרק 3 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

32	1. תחום הגדרה של פונקציה
34	2. הרכבת פונקציות
37	3. הפונקציה ההפוכה
41	4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית
43	5. פונקציה מחזורית
46	6. פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית
47	7. תרגילים משולבים

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x - 4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2 + x + 1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x + 4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x + 4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x + 1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x - 4) \quad (17)$$

תשובות סופיות

(1) כל x .

(2) $x \neq \pm 2$

(3) כל x .

(4) $x \neq 0, 1, -1$

(5) $x \neq 2, -1$

(6) $x \geq 4$

(7) $x \leq -2, x \geq 1$

(8) כל x .

(9) $-1 < x < 1$

(10) $x < -2, x > 1$

(11) $x > 0, x \neq 1$

(12) כל x .

(13) $x > 0, x \neq 1$

(14) $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

(15) $x \neq \frac{\pi k}{4}$

(16) כל x .

(17) $3 < x < 5$

(18) $-2 < x < 0$

הרכבת פונקציות

שאלות

1) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x - 4$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \frac{4}{x}$.

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$
 ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

2) נתון: $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$.

חשב $f(f(x))$ עבור $x=3$.

3) נתון: $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$, $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$.

חשב $f(g(x)) + g(f(x))$ עבור $x=8$.

4) נתון: $f(x) = x^2 - 7x$, $g(x) = \ln x$.

חשב $f(g(x))$ עבור $x = e^2$.

5) נתון: $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$.

חשב $f(g(x))$ עבור $x=2$.

6) נתון: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$.

חשב $f(g(x))$, $g(f(x))$.

7) נתונות הפונקציות:

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצא נוסחה עבור ההרכבה $z(x) = g(f(x))$.

(8) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצא נוסחה עבור ההרכבה $h(x) = f(g(x))$.ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$ ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

$$1. n \leq -3$$

$$2. n \geq 1$$

3. n אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

$$(9) \quad \text{נתון} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ Times}}$$

מצא את

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad \frac{69}{13}$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{ב. } n \leq -3 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א. } (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1) \quad f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3) \quad f(x) = x^2 - 4, \quad x \geq 0 \quad (4)$$

בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5) \quad f(x) = x^2 - x \quad (6) \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצא את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8) \quad y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9) \quad f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

(11) נתונה $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$. האם הפונקציה היא חח"ע? מצא את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבע האם היא פונקציה על:

א. $f(x) = \frac{x-1}{3}$; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ב. $f(x) = \frac{x+1}{x}$; $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

ג. $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$; $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$

ד. $f(x) = x^2 - 4$; $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

13 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבע האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ב. $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ג. $f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1]$ $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

14 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהא $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם f ו- g חח"ע אז h חח"ע.

ב. אם f ו- g חח"ע אז h על.

ג. אם f ו- g על אז h על.

ד. אם f ו- g על אז h חח"ע.

ה. אם f חח"ע ו- g על אז h חח"ע.

ו. אם f חח"ע ו- g על אז h על.

ז. אם f על ו- g חח"ע אז h חח"ע.

ח. אם f על ו- g חח"ע אז h על.

15 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהא $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. נתון כי h על.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. f חח"ע.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. g על.

16) תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהא $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$.

נתון כי h חח"ע.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

- (1) $f^{-1}(x) = 3x + 1$, כל y .
- (2) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$, $y \neq 1$.
- (3) $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$, $y \neq 3$.
- (4) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, $y \geq -4$.
- (5) לא חח"ע. תמונה: $y \leq -2$ או $y \geq 2$.
- (6) לא חח"ע. תמונה: $y \geq -\frac{1}{4}$.
- (7) לא חח"ע. תמונה $0 \leq y \leq 1$.
- (8) כן חח"ע. תמונה: $y > 0$. פונקציה הפוכה: $x > 0$, $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
- (9) לא חח"ע. תמונה: $y \geq 2.3$ או $y \leq -1.3$.
- (10) כן חח"ע. תמונה: $y \neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$.
- (11) לא חח"ע. תמונה: $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$; על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; לא על.
 ג. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; על.
 ד. תחום הגדרה $[0, \infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4, \infty)$; לא על.
 (13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0, 1]$; לא על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0, 1]$; על.
 ג. תחום הגדרה $(1, \infty]$, טווח $(0, 1]$, תמונה: $(0, 0.5)$; לא על.
 (14) שאלת הוכחה.
 (15) שאלת הוכחה.
 (16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצא איזה מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי זוגיות ואיזה זוגיות:

$$(1) \quad y = 4x^3 \quad (2) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (3) \quad y = 1$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x} \quad (5) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (6) \quad y = 2^x$$

$$(7) \quad y = \ln x + x^2 \quad (8) \quad y = \sin x \cdot \cos x$$

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } z(x) = f(x^2), \quad k(x) = -f(x).$$

בדוק, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(11) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדוק, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(12) הוכח כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

תשובות סופיות

שאלות 1-8 : זוגית : 2,3,5,8 ; אי-זוגית : 1,4 ; כללית : 6,7.

(9) k אי-זוגית, z זוגית.

(10) טענה ב'.

(11) k אי-זוגית, z זוגית.

(12) שאלת הוכחה.

פונקציה מחזורית

שאלות

מצא את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-20 :

$$y = 1 + 14 \cos 20x \quad (2) \qquad y = 1 + 10 \sin(0.5x + 4) \quad (1)$$

$$y = -1 + 14 \sec 2x \quad (4) \qquad y = -4 + 20 \tan 4x \quad (3)$$

$$y = \cos^2 2x \quad (6) \qquad y = \sin^2 4x \quad (5)$$

$$y = (\sin x + \cos x)^2 \quad (8) \qquad y = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (7)$$

$$y = \cot^2 x \quad (10) \qquad y = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (9)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x \quad (12) \qquad y = \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{10} \quad (11)$$

$$y = \cos 2x \cos x \quad (14) \qquad y = \sin 4x + \sin 14x + \sin x \quad (13)$$

$$y = \sin^4 x \quad (16) \qquad y = \sin^3 x \quad (15)$$

$$y = |\sin x| \quad (18) \qquad y = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} \quad (17)$$

$$y = \cot x - \tan x \quad (20) \qquad y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (19)$$

הוכח שהפונקציות בשאלות 21-26 אינן מחזוריות :

$$y = x \sin x \quad (23) \qquad y = x + \cos x \quad (22) \qquad y = x + \sin x \quad (21)$$

$$y = \cos 5x + \cos \sqrt{5x} \quad (26) \qquad y = \frac{\sin x}{x} \quad (25) \qquad y = x^2 \cos x \quad (24)$$

הערה : בשאלות 21 ו-22 נדרש ידע בחקירת פונקציה.

(27) הוכח :

אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור p ,אז $y = a + b \cdot f(cx + d)$ מחזורית בעלת מחזור $\frac{p}{c}$.(28) הוכח : אם T הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל n שלם $f(x + nT) = f(x)$.

(29) נתון כי f, g מוגדרות לכל x ובעלת מחזור p_1, p_2 , בהתאמה.

נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.

הוכח כי גם הפונקציות $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) הן מחזוריות.

(30) נתונה הפונקציה $f(x) = x - [x]$.

א. שרטט את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכח את תשובתך מסעיף ב.

(31) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0,1]$.

צייר את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x ,

שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשום נוסחה עבור f .

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$.

צייר את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x ,

שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב- $[0,1]$, ורשום נוסחה עבור g .

תשובות סופיות

- (1) 4π (2) $\frac{\pi}{10}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π (5) $\frac{\pi}{4}$
- (6) $\frac{\pi}{2}$ (7) π (8) π (9) $\frac{\pi}{2}$ (10) π
- (11) 40π (12) π (13) 2π (14) 2π (15) 2π
- (16) π (17) π (18) π

(19) הפונקציה היא למעשה $y = 1$, כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

(20) $\frac{\pi}{2}$

(21) הוכחה.

(22) הוכחה.

(23) הוכחה.

(24) הוכחה.

(25) הוכחה.

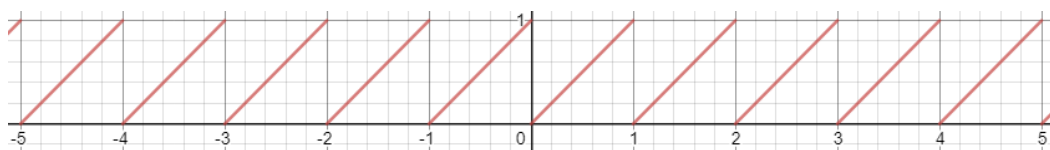
(26) הוכחה.

(27) הוכחה.

(28) הוכחה.

(29) הוכחה.

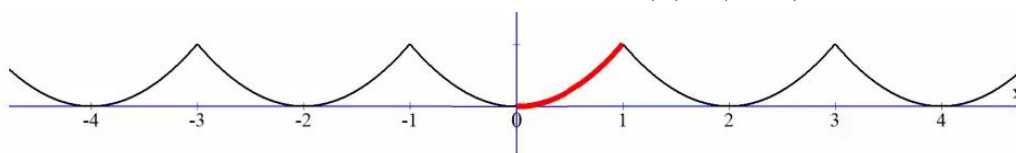
(30) א.



ב. 1 ג. הוכחה.

(31) $g(x) = x - k$, עבור k שלם, זוגי.

(32) $g(x) = (x - k)^2$, עבור k שלם, זוגי.



פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

שאלות

רשום כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטט את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשב $f(1)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(7)$.

ב. שרטט את גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

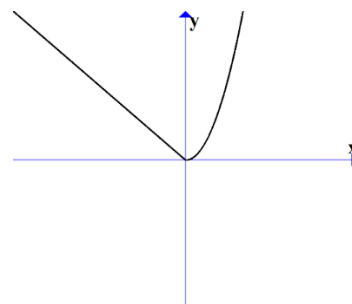
$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{א.} \quad f(1)=1, f(4)=16, f(-4)=4, f(0)=0, f(7)=\text{undefind}$$

ב. ג. הפונקציה כללית.



תרגילים משולבים

שאלות

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטט את הפונקציה, וקבע האם היא :

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבע האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ג': $h(x) = k(x)z(x)$ זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות, $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$.

נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

תהי $h(x) = f(g(x))$.

איזו טענה נכונה?

א. h יורדת חלש.

ב. h עולה ממש.

ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד. h אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

תהי $h(x) = f(g(x))$.

א. מצא את h בקטע $[-2,0)$.

ב. קבע האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.

ג. קבע האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.

ד. קבע האם $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$ היא על.

* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3$, $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

קבע מי מבין הטענות הבאות נכונה.

הפונקציה $h(x) = f(g(x))$ היא:

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3$, $g(x) = -\lfloor x \rfloor$.

א. בדוק את מונוטוניות $z(x) = f(g(x))$.

ב. בדוק את מונוטוניות $k(x) = g(f(x))$.

ג. בדוק האם $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ אז הפונקציה f יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$,
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9 מצא את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

וקבע את תחום הגדרתה.

הוכח שהפונקציה על $\mathbb{R}$.

הערה: הפונקציה לעיל נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקור את מונוטוניות הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכח שהפונקציה חסומה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
- ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א. $h(x) = x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
- ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
- ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
- ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; תחום הגדרתה : כל x .
- (10) ראו באתר.
- (11) א. $-1 \leq x \leq 2$ ב. $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
- ד. $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2} < x \leq 2$ ירידה.

מתמטיקה

פרק 4 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה	51
3. תרגילים נוספים לפי סוגים	(ללא ספר)
4. גזירה סתומה	55
5. כלל השרשרת	57
6. גזירה לוגריתמית	60

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 27-35 מצא רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$y = x^{\ln x} \quad (30) \quad f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

$$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (33) \quad y = x^{\sqrt{x}} \quad (32) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (31)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (35) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (34)$$

הערה: בשאלות 28 ו-29 נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתייהן.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x + 10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x + 10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2\tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} \cdot 2, \quad f''(x) = \frac{4(2x+3)}{(1-(2x+3)^2)^{1.5}} \quad (25)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (26)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (27)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (29)$$

$$y' = x^{\ln x} \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) \quad (30)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (31)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1 \right) \quad (32)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (33)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (34)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (35)$$

גזירה סתומה

שאלות

- (1) גזור את הפונקציה הסתומה: $x^2 + y^5 - 1 = 1$.
- (2) גזור את הפונקציה הסתומה: $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.
- (3) גזור את הפונקציה הסתומה: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
- (4) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה $(3, 4)$.
- (5) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1, 1)$.
- (6) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (7) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$, דרך הנקודה $(1, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (8) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (9) נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.
 א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.
 ב. מצא את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שמצאת בסעיף א.
- (10) גזור את הפונקציה הסתומה: $x^y - xy = 10$.
- (11) גזור את הפונקציה הסתומה: $x^y - y^x = 1$.
- (12) נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$.
 מצא את ערך y^n בנקודה בה $y = 1$.

$$(13) \quad \text{נתון כי המשוואה } h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$$

מגדירה את $y = y(x)$ כפונקציה סתומה של x .

נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.

הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$(1) \quad 5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1}$$

$$(2) \quad \frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y}$$

$$(3) \quad \sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$(4) \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

$$(5) \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$(6) \quad y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5}$$

$$(7) \quad y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6}$$

$$(8) \quad y = \frac{4}{3}x + 2$$

$$(9) \quad \text{א. } (0,0), (1,0) \quad \text{ב. בראשית הצירים: } y = -x, \text{ המשוואה השנייה: } y = x - 1.$$

$$(10) \quad x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x}$$

$$(11) \quad x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}}$$

$$(12) \quad -1$$

$$(13) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

כלל השרשרת

שאלות

(1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4) = 10$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$.

חשב את $g'(2)$.

(2) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(2) = 4$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשב את $g'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכח כי g יורדת.

(3) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = x^2 + f(\ln x)$.

א. חשב את $g'(e)$.

ב. הוכח שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

ג. חשב את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$.

(4) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f(1) = -2$, $f'(1) = e$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f^2(\ln x)$.

א. חשב את $g'(e)$.

ב. האם g עולה או יורדת, בנקודה $x = e$?

ג. נתון כי f שלילית ועולה. מה ניתן לומר על g ?

(5) נתונה פונקציה, $f(x)$, יורדת וחיובית.

$$g(x) = \sqrt{f(x^2) + 4}$$

מי מהבאים נכון?

א. g עולה לכל x .

ב. g יורדת לכל x .

ג. g עולה לכל $x > 0$.

ד. g יורדת לכל $x > 0$.

$$(6) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי $f(10) = f'(10) = 4$. חשב $g'(100)$.

$$(7) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי $f'(1) = 4$, $f(1) = 1$. חשב $g'(1)$.

$$(8) \quad g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי $f'(0) = 1$, $f(0) = 2$. חשב $g'(1)$.

$$(9) \quad g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי $f'(4) = 2$, $f(4) = 1$. חשב $g'(1)$.

$$(10) \quad g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי $f'(1) = 4$, $f(1) = 1$. חשב $g'(1)$.

תשובות סופיות

- | | | | |
|----------------|-----------|-----------------|------|
| | | 40 | (1) |
| | ב. הוכחה. | -16 | (2) |
| $2e+1$ ג. | ב. הוכחה. | $2e+1$ | (3) |
| $g'(x) < 0$ ג. | ב. יורדת. | -4 | (4) |
| | | ד | (5) |
| | | $\frac{17}{80}$ | (6) |
| | | 36 | (7) |
| | | $\frac{8}{9}$ | (8) |
| | | 44 | (9) |
| | | -2 | (10) |

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזור את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt[10]{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1} \right)^{2x} \quad (2)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

מתמטיקה

פרק 5 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים 61

אינטגרלים מידיים

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

$$\int 4dx \quad (1) \quad \int x^4 dx \quad (2) \quad \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4) \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \quad \int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \quad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \quad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10) \quad \int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx \quad (11) \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$):

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \quad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \quad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \quad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \quad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} \quad (19) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + 1} \quad (20)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$):

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \quad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \quad \int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \quad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \quad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

(פתירה על ידי הכלל : $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$)

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (30) \text{ חשב את האינטגרל :}$$

(פתירה על ידי הכלל : $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$)

חשב את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

תשובות סופיות

- $$4x + c \quad (1)$$
- $$\frac{x^5}{5} + c \quad (2)$$
- $$-\frac{1}{x} + c \quad (3)$$
- $$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$
- $$-\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5)$$
- $$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6)$$
- $$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$
- $$-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8)$$
- $$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9)$$
- $$\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$
- $$-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11)$$
- $$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12)$$
- $$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15)$$
- $$\frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14)$$
- $$\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$
- $$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$
- $$\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$
- $$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19)$$
- $$-\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$
- $$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$
- $$\frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21)$$
- $$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$
- $$x + \ln|x+2| + c \quad (25)$$
- $$\frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24)$$
- $$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$
- $$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28)$$
- $$\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27)$$
- $$4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$
- $$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30)$$
- $$8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$
- $$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33)$$
- $$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32)$$
- $$\frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

מתמטיקה

פרק 6 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים 64

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|--|--|--|
| $\frac{1}{3} \ln x^3 + 1 + c$ (3) | $\ln \sin x + c$ (2) | $\ln x^2 + 1 + c$ (1) |
| $e^2 \ln e^x + 1 + c$ (6) | $\ln \ln x + c$ (5) | $-\ln \cos x + c$ (4) |
| $-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c$ (9) | $e^{\tan x} + c$ (8) | $e^{x^2} + c$ (7) |
| $\sin(\ln x) + c$ (12) | $\sin(\sin x) + c$ (11) | $\sin(2x^2 + 1) + c$ (10) |
| $-2 \cos(\sqrt{x}) + c$ (15) | $-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c$ (14) | $\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c$ (13) |
| $\frac{1}{2} (\tan x)^2 + c$ (18) | $\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + c$ (17) | $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$ (16) |
| $\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$ (21) | $\sqrt{2 \sin x} + c$ (20) | $2\sqrt{x^2 + 1} + c$ (19) |
| $\frac{2}{3} (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c$ (24) | $\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$ (23) | $\frac{2}{9} (x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c$ (22) |

מתמטיקה

פרק 7 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 66

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x e^x dx \quad (1) \quad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \quad \int x \sin x dx \quad (3)$$

$$\int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4) \quad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int \ln x dx \quad (7) \quad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int \arctan x dx \quad (9)$$

$$\int \arcsin x dx \quad (10) \quad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13) \quad \int x \arctan x dx \quad (14) \quad \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int \ln^2 x dx \quad (16) \quad \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \quad \int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19) \quad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \quad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

$$\int x \tan^2 x dx \quad (22) \quad \int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23)$$

$$(24) \text{ מצא נוסחת נסיגה עבור } \int x^n e^x dx \text{ באשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(25) \text{ חשב את } \int x^4 e^x dx.$$

$$(26) \text{ מצא נוסחת נסיגה עבור } \int \cos^n x dx \text{ באשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(27) \text{ חשב את } \int \cos^4 x dx.$$

(28) מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ כאשר n טבעי.

(29) חשב את $\int \sin^4 x dx$.

(30) מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ כאשר n טבעי.

(31) חשב את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

(32) חשב את האינטגרלים $\int e^{ax} \cos bxdx$, $\int e^{ax} \sin bxdx$.

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right\} \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

מתמטיקה

פרק 8 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 70

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

מתמטיקה

פרק 9 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית.....73
2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית.....75
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית.....76

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x - 1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x + 4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x - 1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x - 2| + \frac{1}{4} \ln|x + 2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}}$$
 (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$$
 (2)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx$$
 (3)

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx$$
 (4)

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$
 (5)

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$
 (6)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$
 (7)

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln \left| 1 - \sqrt[3]{x}^2 \right| + c \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln |1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left(\frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln |1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln \left((\sqrt[3]{x} - 0.5)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln |1 + e^x| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

נוסחאות

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

מתמטיקה

פרק 10 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות 78
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות 80
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית 81
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים 82
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות 85

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכור כי:

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$
$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 4x} \quad (2)$$

$$\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 10x} \quad (3)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8)$$

$$\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} \quad (9)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$$

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\frac{3}{4} x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8} x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(t) dt \quad \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ x = \arcsin t \end{array} \right.$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t) (-dt) \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ x = \arccos t \end{array} \right.$$

זכור כי :

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (3)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (8)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c \quad (2)$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c \quad (4)$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad (5)$$

$$\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c \quad (8)$$

$$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (12)$$

$$-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c \quad (11)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ x = 2 \arctan t \end{array} \right|$$

זכור כי :

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}} \arctan \left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}} \right) \right) + c \quad (3)$$

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt) \\ \int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right) \end{aligned}$$

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} dx \quad (3)$$

הערה : כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right)}{1 - \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin \left(\arccos \left(\frac{1}{x} \right) \right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} \sin \left(2 \arcsin \frac{x}{2} \right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \arcsin \frac{x+3}{3} \right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(2 \arctan \frac{x}{2} \right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin \left(\arctan \left(\frac{x+1}{2} \right) \right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} \quad (10)$$

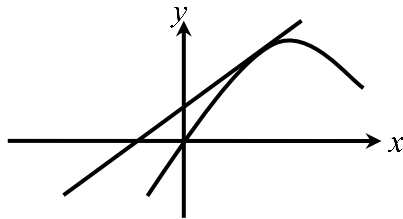
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

שאלות

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2 \sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

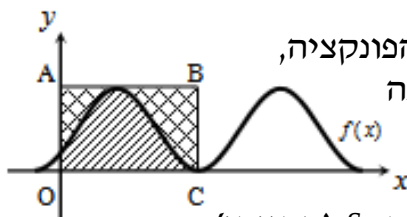


א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x , ברביעים הראשון והשני.

(2) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$.

בתחום: $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$.



מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ומעלים אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .

א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

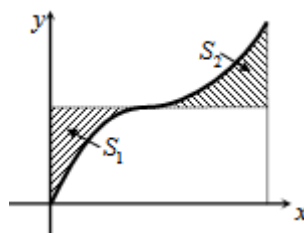
(3) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y = \sin x + x$, בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

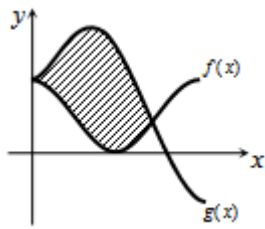
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכח.

ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 2\pi$,

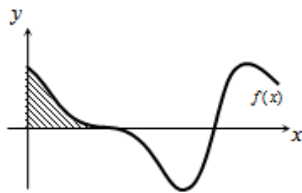
ומעבירים ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

הראה כי השטחים המסומנים בשרטוט, S_1 ו- S_2 , שווים.

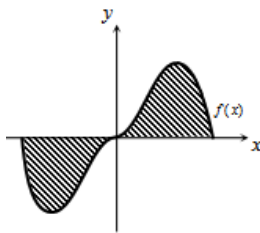




- 4 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
 השתמש בזהות $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.



- 5 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$.
 א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות $f'(x) = 0$ בתחום $0 < x < 2\pi$.
 ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$, אשר אינה קיצון, נמצאת על ציר ה- x .
 ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- 6 נתונה הפונקציה $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$.
 א. הוכח כי נגזרת הפונקציה היא $y' = x^2 \sin x$.
 באיור שלפניך נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \sin x$ בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.
 ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

- 7 נתונה הפונקציה $f(x) = a \cos x + b \sin x$, כאשר a, b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$,

והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות

- (1) א. $y = x + 2$ ב. π יח"ש.
- (1) א. $y = 1$ ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$.
- (2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול.
 ב. $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$.
- (3) א. $(0, 1)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$ ב. $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$.
- (4) א. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.
- (5) א. הוכחה ב. הוכחה ג. $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$.
- (6) $b = -2, a = 2$

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

מתמטיקה

פרק 11 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

- 1. הצגה פרמטרית של עקום..... 89
- 2. הנגזרת ושימושיה..... 90
- 3. שימושי האינטגרל המסוים..... 91

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

(1) עבור מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

(2) עבור מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

(3) לפניך תיאור פרמטרי של מסלולים במישור. על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצא משוואה מתאימה, שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

תשובות סופיות

(1) א. $y = x - 1, x \geq 1$ ב. $y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$ ג. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$

(2) א. $x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4$ ב. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$ ג. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$

(3) א. $y = (x+4)^2$ ב. $(x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1$ ג. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1$ ה. $x^2 + y^2 = 25$ ו. $x^2 - y^2 = 4k^2$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

(1) חשב את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad \text{הנתונה בצורה פרמטרית:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטט את העקום.

ב. חשב את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצא את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

ד. מצא את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

$$(3) \quad \begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטט את העקום.

ב. מצא את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0, 0)$.

ג. מצא את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי, ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

$$(1) \quad y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$$

$$(2) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y' = \frac{-2}{2t+1} \quad \text{ג. } y = 2x + 3 \quad \text{ד. } y = -0.5x + 3$$

$$(3) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y = \pm\sqrt{3}x \quad \text{ג. אופקי- } (0, -9) \quad \text{אנכי } (2, -6), (-2, -6)$$

ד. $-1 < t < 1$ קמור. $t > 1$ או $t < -1$ קעור.

שימושי האינטגרל המסוים

(1) חשב את השטח הכלוא בעקום $C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$

(2) חשב את השטח הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, כאשר $a, b > 0$

* שים לב שאם $a = b = r$, נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס r .

(3) חשב את השטח הכלוא בין העקום $0 \leq t \leq \pi$, $x = \cos t$, $y = t + \sin t$ לבין ציר ה- x .

(4) חשב את השטח הכלוא בין העקום $0 \leq t \leq 2\pi$, $x = 4 \cos t$, $y = \sin^2 t$ לבין ציר ה- x .

(5) חשב את אורך העקום $0 \leq t \leq 2\pi$ $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

(6) חשב את אורך העקום $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$, מהנקודה $(1, 0)$ לנקודה $(-1, \pi)$.

(7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$

מצא את המרחק שהחלקיק עבר והשווה אותו לאורך העקום עצמו.

(8) חלק העקום $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$, שבין $t = 0$ לבין $t = \pi$, מסתובב סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

(9) חלק העקום $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, שבין $t = 0$ לבין $t = \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

(10) חשב את אורך העקום $-\pi \leq t \leq 2\pi$ $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}$

11) חשב את אורך העקום $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$, $1 \leq t \leq 3$.

תשובות סופיות

(1) $8/3$

(2) πab

(3) 1.5π

(4) $16/3$

(5) 8

(6) 4

(7) אורך העקום הוא 2π . המרחק שעבר החלקיק הוא 4π .

(8) $4\pi r^2$

(9) $6\pi/5$

(10) $6\pi\sqrt{29}$

(11) $\sqrt{3}e(e^2 - 1)$

מתמטיקה

פרק 12 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

93	1. קואורדינטות קוטביות
95	2. הנגזרת ושימושיה
96	3. שימושי האינטגרל המסוים

קואורדינטות קוטביות

שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

(2) ענה על הסעיפים הבאים :

א. א. המר את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המר את הנקודה הקרטזית $(0, -4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המר את הנקודה הקרטזית $(-2, 2)$ לנקודה קוטבית.

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $4x - x^2 = 1 + xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המר את המשוואה $r = -4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $x^2 + y^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המר את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המר את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

(5) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המר את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המר את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המר את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המר את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

תשובות סופיות

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ ב.}$$

$$(2) \quad (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ב.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ ג.}$$

$$(3) \quad 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א.} \quad (x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב.}$$

$$(4) \quad r = 4 \sin \theta \text{ א.} \quad r \cos \theta = 10 \text{ ב.} \quad r \sin \theta = 4 \text{ ג.}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א.} \quad y = x \text{ ב.} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג.}$$

$$6 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \cdot y = 4 \sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ד.}$$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

- (1) מצא את משוואת המשיק לעקום $r = 3 + 8 \sin \theta$ בנקודה $\theta = \frac{\pi}{6}$.
- (2) מצא את משוואת המשיק לעקום $r = 1 - 2 \sin \theta$ בראשית הצירים.

תשובות סופיות

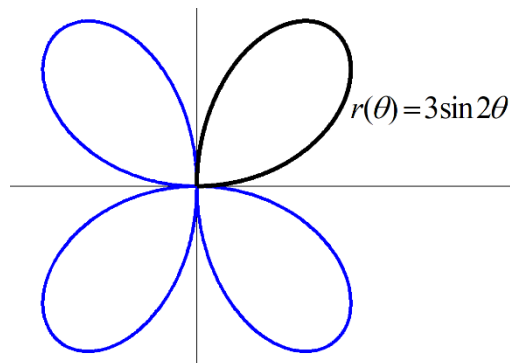
$$y = \frac{11\sqrt{3}}{5}x - \frac{98}{5} \quad (1)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (2)$$

שימושי האינטגרל המסוים

שאלות

- (1) חשב את השטח של הלולאה הפנימית של $r = 2(1 + 2\cos\theta)$.
- (2) חשב את השטח הכלוא בתוך $r = 6 + 4\cos\theta$ ומשמאל לציר ה- y .
- (3) חשב את השטח הכלוא בתוך $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (4) חשב את השטח המוגבל בתוך $r = 3 + 2\sin\theta$ ומחוץ ל- $r = 2$.
- (5) חשב את השטח המוגבל בתוך $r = 2$ ומחוץ ל- $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (6) חשב את השטח המוגבל בתוך $r = 2$ ובתוך $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (7) חשב את השטח הכלוא בתוך המעגל $r = 2\sin\theta$ ומחוץ למעגל $r = 1$.
- (8) מצא את אורך הקרדיואידה $r = 1 + \cos\theta$.
- (9) מצא את האורך של עלה אחד של הוורד $r = 3\sin 2\theta$.
אין צורך לחשב את האינטגרל!



- (10) מצא את אורך העקום $r = \theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq 1$.
- (11) העקום $r = \cos\theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

(12) העקום $r = 4 + 4\sin \theta$, כאשר $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y .
 מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

תשובות סופיות

$$S = 4\pi - 6\sqrt{3} = 2.174 \quad (1)$$

$$S = 22\pi - 48 \quad (2)$$

$$S = 11\pi \quad (3)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} = 24.187 \quad (4)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} = 2.196 \quad (5)$$

$$10.37 \quad (6)$$

$$S = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (7)$$

$$8 \quad (8)$$

$$\ell = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\cos^2 2\theta} d\theta \quad (9)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{2} \quad (10)$$

$$S_x = \pi \quad (11)$$

$$S_y = 102.4\pi \quad (12)$$

נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

קווים

$$(1) \quad r \cos \theta = a \quad - \text{ הישר } x = a$$

$$(2) \quad r \sin \theta = b \quad - \text{ הישר } y = b$$

$$(3) \quad \theta = \beta \quad - \text{ הישר העובר דרך הראשית } y = (\tan \beta)x$$

מעגלים

$$1. \quad r = a \quad - \text{ מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו } a$$

$$2. \quad r = 2a \cos \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנקודה } (a, 0) \text{ ורדיוסו } |a|$$

$$3. \quad r = 2b \sin \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנקודה } (0, b) \text{ ורדיוסו } |b|$$

$$4. \quad r = 2a \cos \theta + 2b \sin \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנק' } (a, b) \text{ ורדיוסו } \sqrt{a^2 + b^2}$$

קרדיוידות ולמניסקטות

$$(1) \quad \text{קרדיוידות } r = a \pm a \cos \theta, r = a \pm a \sin \theta : \\ \text{גרף בצורת לב שמכיל את הראשית.}$$

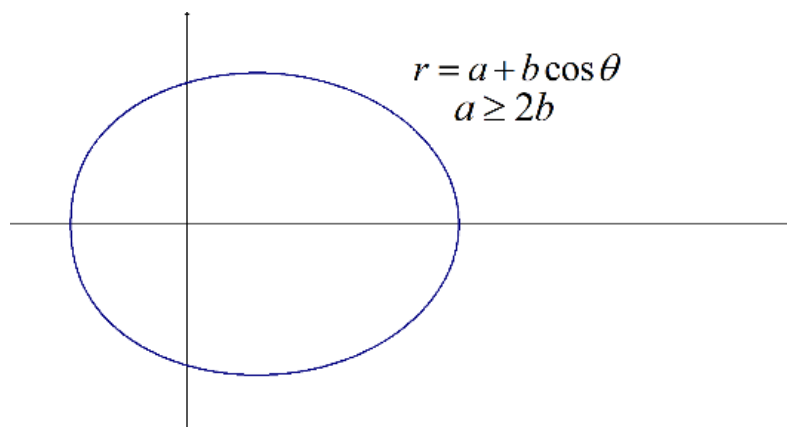
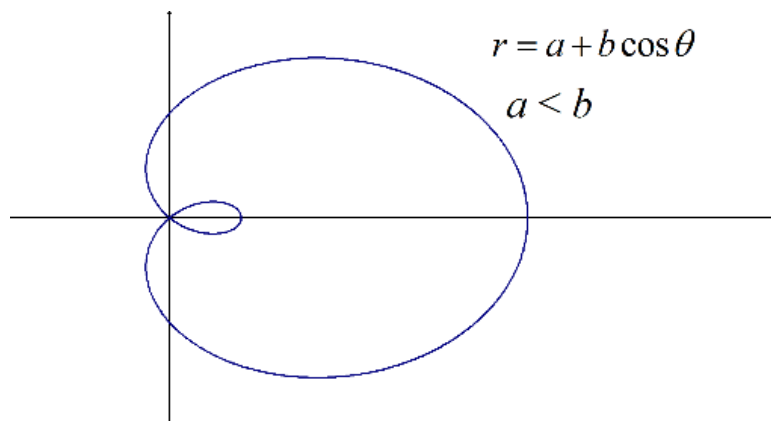
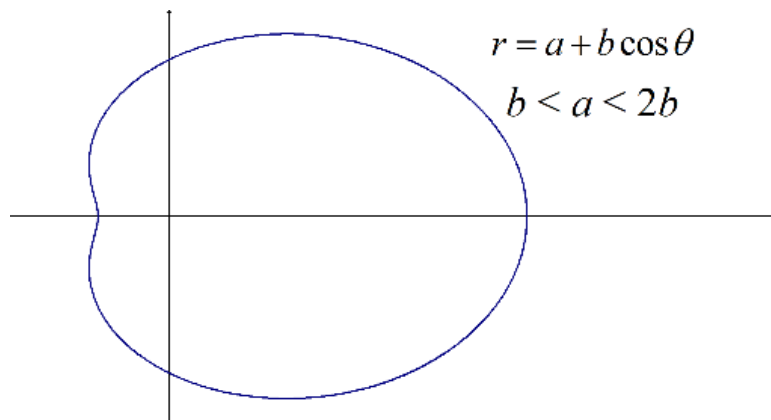
$$(2) \quad \text{למניסקטות עם לולאה פנימית } r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta : (a < b) : \\ \text{גרף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.}$$

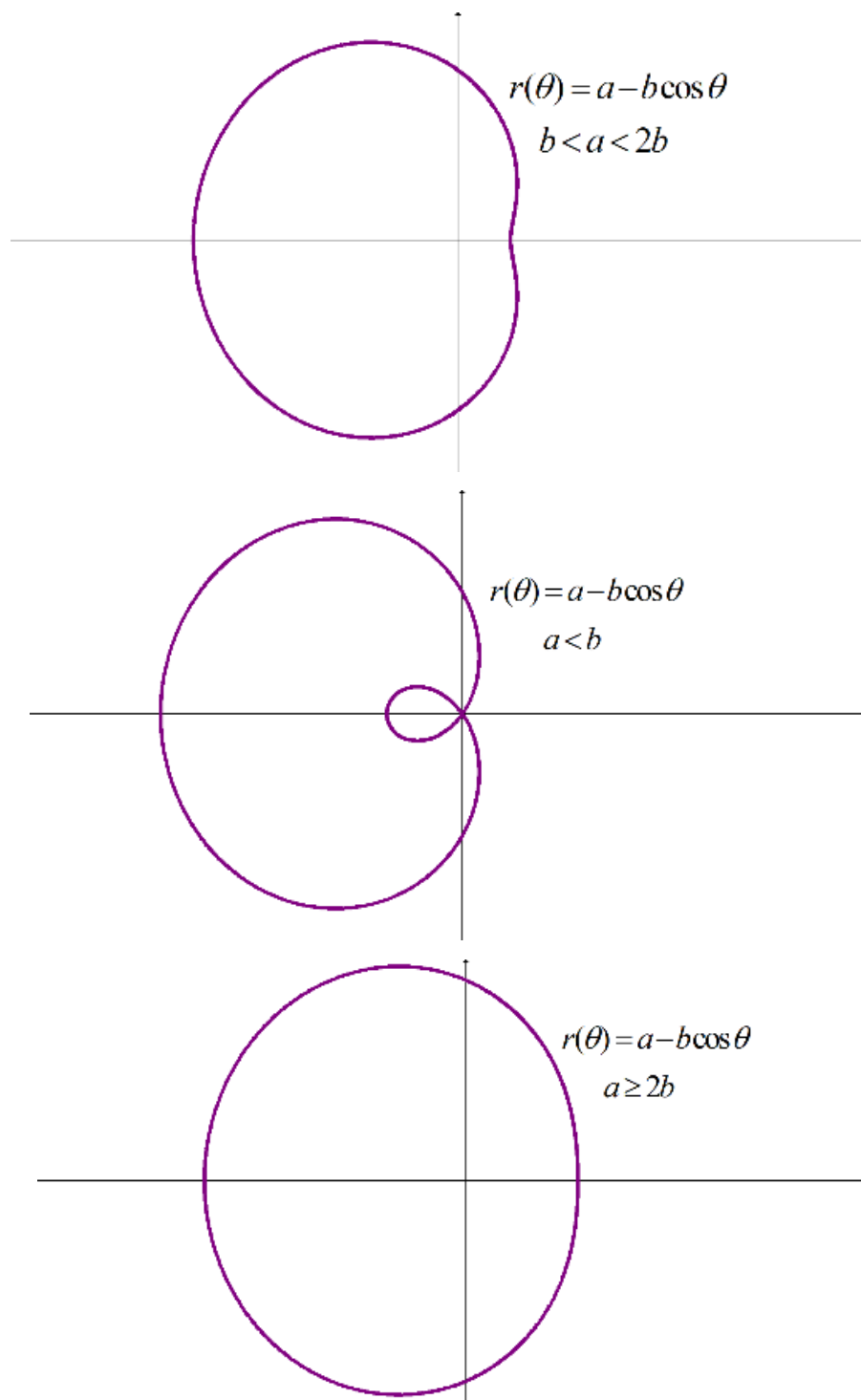
$$(3) \quad \text{למניסקטות ללא לולאה פנימית } r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta : (a > b) : \\ \text{גרף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.}$$

$$* \text{ נשרטט בדרך כלל עבור מחזור שלם } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

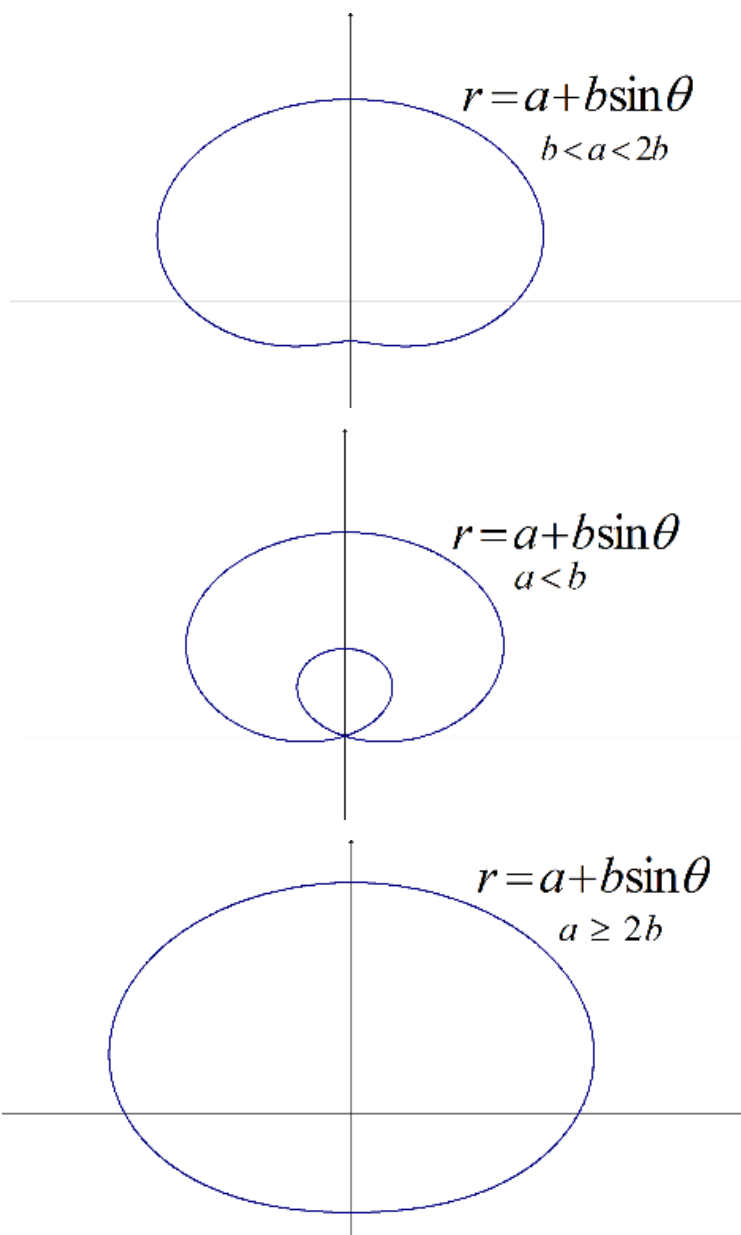
למינסקטות ביתר פירוט

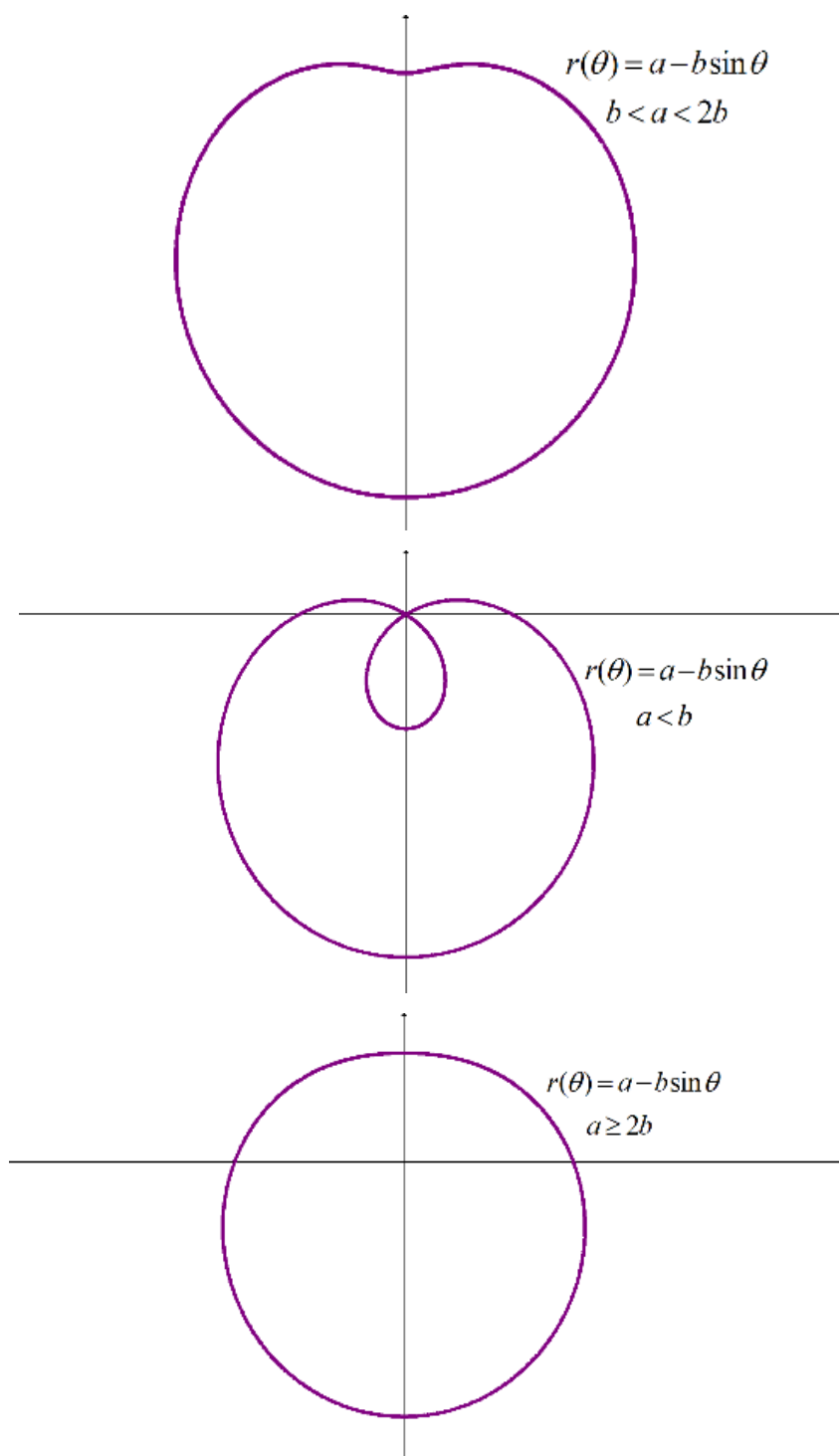
הגרף של $r = a + b \cos \theta$:



הגרף של $r = a - b \cos \theta$ 

הגרף של $r = a + b \sin \theta$



הגרף של $r = a - b \sin \theta$ 

גרפים נפוצים נוספים

