

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה



תוכן העניינים

1.	מבוא לאלגברה	1
2.	משוואות אלגבריות	49
3.	אי שוויונים אלגבריים	66
4.	חוקי החזקות והשורשים	82
5.	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים	92
6.	חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים	95
7.	אינדוקציה מתמטית	98
8.	טריגונומטריה במשולש ישר זווית	112
9.	זהויות טריגונומטריות	117
10.	משוואות טריגונומטריות	136
11.	טריגונומטריה במישור	157
12.	מספרים מרוכבים	190
13.	חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים	206
14.	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום	221
15.	חשבון דיפרנציאלי - חילוק פולינומים ופתרון משוואות פולינומאליות	234
16.	חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת (ללא ספר)	

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 1 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

1	מספרים מכוונים	1
5	חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים	2
7	סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים	3
8	שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים	4
14	כפל וחילוק שברים	5
16	חיבור וחסור שברים	6
20	בעיות יסודיות באחוזים	7
22	חזרה על תבניות מספר	8
24	כינוס איברים	9
26	פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים	10
28	פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר	11
30	פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים	12
33	פירוק הטרינום	13
35	שברים אלגבריים	14
39	כפל וחילוק של שברים אלגבריים	15
41	חיבור וחסור של שברים אלגבריים	16
45	שברים כפולים	17
47	נסיון ערך	18

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
 - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
 - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
 - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
 - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

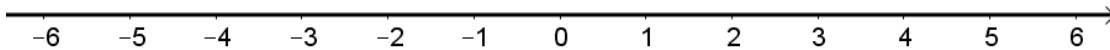
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$	ב. $-3-2$
ג. $3-2$	ד. $-3+2$
ה. $-1-4$	ו. $7+10$
ז. $-6+5$	ח. $-7+3$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$	ב. $5-8-12+17$
ג. $3-14+2+6$	ד. $-4-11+2+9$
ה. $6-21+3-7$	ו. $-7-13+5-3$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4 \cdot 9$	ב. $4 \cdot (-7)$
ג. $(-6) \cdot (-5)$	ד. $(-5) \cdot (-3)$
ה. $(-2) \cdot 8$	ו. $(-8) \cdot 5$
ז. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$	ח. $2 \cdot 3 \cdot 3$
ט. $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$	י. $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$
יא. $2 \cdot 3 \cdot (-3)$	יב. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$
יג. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$	יד. $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א. $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

א. $(-5) : (-25)$

ב. $3 : (-30)$

ג. $(-10) : 40$

ד. $(-4) : (-32)$

ה. $18 : (-6)$

ו. $4 : (-16)$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

א. $0 : 5$

ב. $(-2) \cdot 0$

ג. $0 \cdot (-3) \cdot 4$

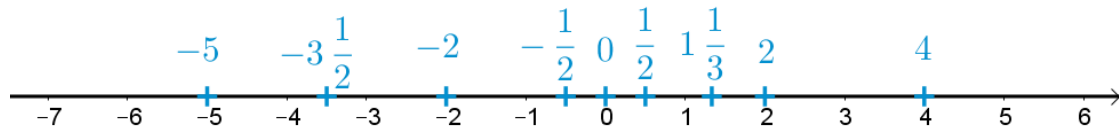
ד. $6 : 0$

ה. $0 + 4$

ו. $0 - 4$

תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



	ה. -5	ד. -1	ג. 1	ב. -5	א. 5 (2)
			ח. -4	ז. -1	ו. 17
ו. -18	ה. -19	ד. -4	ג. -3	ב. 2	א. -10 (3)
	ה. -16	ד. 15	ג. 30	ב. -28	א. 36 (4)
	י. 18	ט. 18	ח. 18	ז. -18	ו. -40
		יד. 16	יג. -16	יב. 36	יא. -18
		ד. -	ג. -	ב. +	א. + (5)
ו. $-\frac{1}{4}$	ה. $-\frac{1}{3}$	ד. 8	ג. -4	ב. -10	א. 5 (6)
		ד. 4	ג. -8	ב. -7	א. -5 (7)
ו. -4	ה. 4	ד. לא מוגדר	ג. 0	ב. 0	א. 0 (8)

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------|---------------|
| א. 3^2 | ב. 3^3 |
| ג. $(-3)^3$ | ד. $(-2)^3$ |
| ה. 4^3 | ו. 3^4 |
| ז. $(-5)^3$ | ח. 10^4 |
| ט. $-(-3)^4$ | י. -5^4 |
| יא. -4^3 | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$ |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$ |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|-----------|----------|-------------|---------|---------|---------|
| (1) א. 9 | ב. 27 | ג. -27 | ד. -8 | ה. 64 | ו. 81 |
| ז. -125 | ח. 10000 | ט. -81 | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| (2) א. -3 | ב. 5 | ג. לא מוגדר | ד. -2 | ה. -3 | ו. -10 |

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$(-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2)$ (2)	$\sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8$ (1)
$3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6}$ (4)	$\sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2$ (3)
$-\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3$ (6)	$(-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3$ (5)
$\sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3$ (8)	$-2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5$ (7)
$(8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[5]{243})$ (10)	$[6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5$ (9)
$\frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\}$ (11)	

תשובות סופיות:

-37 (4)	19 (3)	33 (2)	28 (1)
-21 (8)	5 (7)	-14 (6)	31 (5)
	20 (11)	-44 (10)	-16 (9)

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים שלמים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

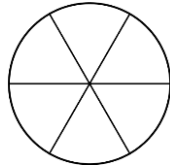
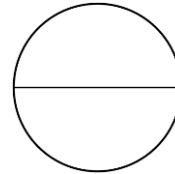
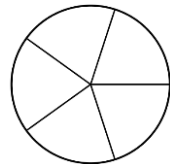
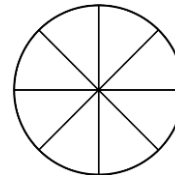
אחוזים - הגדרה:

השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45%, והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

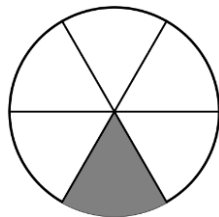
שאלות:

(1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

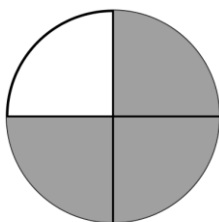
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגולא. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגולד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגולג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

(2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

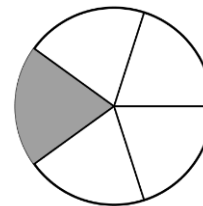
ב. שבר:



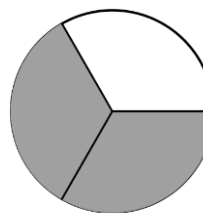
ד. שבר:



א. שבר:



ג. שבר:



(3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי מכנה 4, לפי מכנה 18, לפי מכנה 40.ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי מכנה 10, לפי מכנה 25, לפי מכנה 60.ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי מכנה 16, לפי מכנה 32, לפי מכנה 88.

(4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

א. $\frac{25}{30}$	ב. $\frac{10}{30}$	ג. $\frac{6}{24}$	ד. $\frac{4}{20}$
ה. $\frac{35}{56}$	ו. $\frac{24}{42}$	ז. $\frac{36}{48}$	ח. $\frac{33}{121}$

(5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

א. $-\frac{20}{3}$	ב. $\frac{19}{4}$	ג. $\frac{12}{5}$	ד. $\frac{22}{5}$
ה. $-\frac{34}{6}$	ו. $-\frac{50}{7}$	ז. $\frac{47}{8}$	ח. $\frac{60}{9}$

(6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

א. $1\frac{2}{3}$	ב. $3\frac{5}{6}$	ג. $4\frac{1}{2}$	ד. $6\frac{1}{4}$
ה. $11\frac{3}{4}$	ו. $-2\frac{5}{8}$	ז. $-6\frac{2}{7}$	ח. $12\frac{7}{9}$

(7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$
ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$	ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$

(8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

א. 0.7	ב. 0.07	ג. 0.007	ד. 0.34
ה. 0.304	ו. 0.65	ז. 1.2	ח. 1.02
ט. 1.42	י. 3.5	יא. 6.03	יב. 5.125

(9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים :

א. $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{3}{100}$	ג. $\frac{3}{1000}$	ד. $\frac{23}{1000}$
ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{3}{4}$	ז. $\frac{2}{5}$	ח. $\frac{4}{25}$
ט. $\frac{7}{50}$	י. $\frac{3}{20}$	יא. $\frac{7}{8}$	יב. $\frac{9}{16}$
יג. $9\frac{1}{10}$	יד. $3\frac{1}{5}$	טו. $4\frac{7}{8}$	טז. $-4\frac{1}{16}$

(10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית
(היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית) :

א. $\frac{2}{3}$	ב. $\frac{5}{6}$	ג. $\frac{3}{7}$	ד. $\frac{2}{11}$
------------------	------------------	------------------	-------------------

(11) המר מאחוזים לשברים פשוטים :

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

(12) המר משברים פשוטים לאחוזים :

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

(1) תשובה מודגמת בסרטון.

$$(2) \quad \text{א. } \frac{1}{5} \quad \text{ב. } \frac{1}{6} \quad \text{ג. } \frac{2}{3} \quad \text{ד. } \frac{3}{4}$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80} \quad \text{ב. } \frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300} \quad \text{ג. } \frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{5}{6} \quad \text{ב. } \frac{1}{3} \quad \text{ג. } \frac{1}{4} \quad \text{ד. } \frac{1}{5} \quad \text{ה. } \frac{5}{8} \quad \text{ו. } \frac{4}{7}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{4} \quad \text{ח. } \frac{3}{11}$$

$$(5) \quad \text{א. } -6\frac{2}{3} \quad \text{ב. } 4\frac{3}{4} \quad \text{ג. } 2\frac{2}{5} \quad \text{ד. } 4\frac{2}{5} \quad \text{ה. } -5\frac{4}{6} \quad \text{ו. } -7\frac{1}{7}$$

$$\text{ז. } 5\frac{7}{8} \quad \text{ח. } 6\frac{2}{3}$$

$$(6) \quad \text{א. } \frac{5}{3} \quad \text{ב. } \frac{23}{6} \quad \text{ג. } \frac{9}{2} \quad \text{ד. } \frac{25}{4} \quad \text{ה. } \frac{47}{4} \quad \text{ו. } -\frac{21}{8}$$

$$\text{ז. } -\frac{44}{7} \quad \text{ח. } \frac{115}{9}$$

$$(7) \quad \text{א. } \frac{4}{10} \quad \text{ב. } \frac{7}{6} \quad \text{ג. } \frac{5}{6} \quad \text{ד. } \frac{7}{12}$$

$$(8) \quad \text{א. } \frac{7}{10} \quad \text{ב. } \frac{7}{100} \quad \text{ג. } \frac{7}{1000} \quad \text{ד. } \frac{17}{50} \quad \text{ה. } \frac{38}{125} \quad \text{ו. } \frac{13}{20}$$

$$\text{ז. } 1\frac{1}{5} \quad \text{ח. } 1\frac{1}{50} \quad \text{ט. } 1\frac{21}{50} \quad \text{י. } 3\frac{1}{2} \quad \text{יא. } 6\frac{3}{100} \quad \text{יב. } 5\frac{1}{8}$$

$$(9) \quad \text{א. } 0.3 \quad \text{ב. } 0.03 \quad \text{ג. } 0.003 \quad \text{ד. } 0.023 \quad \text{ה. } 0.5 \quad \text{ו. } 0.75$$

$$\text{ז. } 0.4 \quad \text{ח. } 0.16 \quad \text{ט. } 0.14 \quad \text{י. } 0.15 \quad \text{יא. } 0.875$$

$$\text{יב. } 0.5625 \quad \text{יג. } 9.1 \quad \text{יד. } 3.2 \quad \text{טו. } 4.875 \quad \text{טז. } -4.0625$$

$$(10) \quad \text{א. } 0.\bar{6} \quad \text{ב. } 0.\bar{83} \quad \text{ג. } 0.428 \quad \text{ד. } 0.\bar{18}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{4} \quad \text{ב. } \frac{8}{25} \quad \text{ג. } \frac{16}{25} \quad \text{ד. } \frac{4}{5} \quad \text{ה. } 1\frac{1}{5} \quad \text{ו. } \frac{1}{20}$$

$$\text{ז. } 3 \quad \text{ח. } 1\frac{1}{2}$$

(12 א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
 - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
 - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
 - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$	ב. $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$	ג. $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$
ד. $3 \cdot \frac{4}{5}$	ה. $6 \cdot \frac{2}{3}$	ו. $\frac{12}{25} \cdot 5$
ז. $1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$	ח. $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$	ט. $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$
י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$	יא. $\frac{4}{5^3}$	יב. $\frac{4^3}{5}$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$	ב. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	ג. $\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$
ד. $8 : \frac{2}{9}$	ה. $10 : \frac{2}{3}$	ו. $\frac{5}{6} : 3$
ז. $\frac{2}{5} : 5$	ח. $3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$	ט. $2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{9}{20}$	ב. $\frac{5}{21}$	ג. $\frac{8}{45}$	ד. $2\frac{2}{5}$	ה. 4	ו. $2\frac{2}{5}$
ז. $3\frac{3}{5}$	ח. $15\frac{2}{5}$	ט. $8\frac{8}{35}$	י. $\frac{64}{125}$	יא. $\frac{4}{125}$	יב. $12\frac{4}{5}$
א. $\frac{9}{10}$	ב. $1\frac{1}{2}$	ג. $\frac{6}{35}$	ד. 36	ה. 15	ו. $\frac{5}{18}$
ז. $\frac{2}{25}$	ח. $\frac{2}{3}$	ט. 2			

חיבור וחיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.
 דוגמא: $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}$, $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.
 דוגמא: $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = -\frac{7}{12}$, $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.
 דוגמא: $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$
 חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.
 דוגמא: $3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$
 דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

- חיבור וחסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

$$\text{דוגמא: } 3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102 + 65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$$

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2 - 5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

שאלות:

- (1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3	ב. 2 ו-4	ג. 3 ו-5	ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10	ו. 4 ו-6	ז. 3, 5 ו-10	ח. 2, 3 ו-8

- (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$	ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$
ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$	ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$
ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$	ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$
ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$	ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$
ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$	י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2 + \frac{5}{6}$

ב. $2 - \frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

ז. $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

12. ו.	20. ה.	30. ד.	15. ג.	4. ב.	6. א. (1
				24. ח.	30. ז.
$\frac{1}{9}$. ו.	$\frac{1}{2}$. ה.	$1\frac{3}{4}$. ד.	1. ג.	$\frac{7}{9}$. ב.	$\frac{4}{5}$. א. (2
		$\frac{3}{5}$. י.	$1\frac{5}{8}$. ט.	$-\frac{4}{5}$. ח.	$-\frac{1}{4}$. ז.
$3\frac{5}{6}$. ו.	5. ה.	$-\frac{1}{8}$. ד.	$\frac{7}{12}$. ג.	$\frac{7}{10}$. ב.	$1\frac{5}{6}$. א. (3
				$-\frac{1}{10}$. ח.	$\frac{19}{21}$. ז.
$-\frac{5}{8}$. ו.	$7\frac{11}{12}$. ה.	$1\frac{5}{12}$. ד.	$3\frac{1}{12}$. ג.	$1\frac{1}{6}$. ב.	$2\frac{5}{6}$. א. (4
				$-\frac{1}{20}$. ח.	$2\frac{13}{18}$. ז.
	$3\frac{5}{18}$. ה.	$2\frac{5}{6}$. ד.	$-13\frac{3}{4}$. ג.	$1\frac{1}{10}$. ב.	$2\frac{11}{24}$. א. (5

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $48 = 120 \cdot \frac{40}{100}$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.**

שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
 - א. כמה בנות בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
 - א. כמה תלמידים בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגדים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
 - א. מהו מחירו בסוף העונה?
 - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
 - א. מה מחירו הסופי?
 - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.

בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?
- (6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.

מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

(7) ענה על השאלות הבאות :

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

- | | | |
|-----|----------------|-------------|
| (1) | א. 18 בנות. | ב. 12 בנים. |
| (2) | א. 40 תלמידים. | ב. 12 בנים. |
| (3) | א. 240 ₪ | ב. 60 ₪ |
| (4) | א. 540 ₪ | ב. 40 ₪ |
| (5) | 4.9755 ₪ | |
| (6) | 400 ₪ | |
| (7) | א. 88% | ב. 60% |
| | ג. 50% | ד. 33.33% |
| | ה. 33.33% | ו. 25% |

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).

ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3 \cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| א. $2x+5$ כאשר $x=3$ | ב. x^2+3x כאשר $x=2$ |
| ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$ | ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$ |
| ה. x^3+1 כאשר $x=-2$ | ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$ |
| ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$ | ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

- | |
|--|
| א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$ |
| ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$ |

(3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר :

א. $a^2 + 2ab + b^2$	עבור : $a = 3, b = -5$
ב. $(x-3)^2 + 3x^2b$	עבור : $x = 5, b = -1$
ג. $-x^3 - 2xy + y^4$	עבור : $x = -2, y = -1$
ד. $\frac{(a-2c)^4}{a} - a^2$	עבור : $a = 2, c = -2$
ה. $\frac{4a^2 - 3b}{c}$	עבור : $a = -1, b = 2, c = -4$
ו. $\sqrt{c-3a}$	עבור : $c = 13, a = -1$ ועבור : $c = 82, a = \frac{1}{3}$
ז. $\frac{p^3 + 2\sqrt{q+1}}{m}$	עבור : $p = -5, q = 48, m = 3$

תשובות סופיות:

(1)	א. 11	ב. 10	ג. -12	ד. -65	ה. -7	ו. 5
	ז. -10	ח. 45				
(2)	א. $\frac{10}{27}$	ב. $5\frac{22}{27}$				
(3)	א. 4	ב. -71	ג. 5	ד. 644	ה. $\frac{1}{2}$	
				ז. -37		
	ו. הצבה ראשונה : 4, הצבה שניה : 9					

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$.
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.
 כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

כנס איברים דומים:

- | | |
|---|--|
| $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ (2) | $5x + 7x - 4x$ (1) |
| $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ (4) | $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ (3) |
| $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ (6) | $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ (5) |
| $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ (8) | $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ (7) |
| $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ (10) | $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ (9) |
| $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ (12) | $7x^2 - 3x - 4x + 2$ (11) |
| $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ (14) | $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ (13) |
| $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ (16) | $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ (15) |
| $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ (18) | $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ (17) |
| $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ (20) | $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2$ (19) |
| $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ (22) | $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ (21) |
| $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ (24) | $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ (23) |
| $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ (26) | $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ (25) |
| $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ (27) | |
| $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ (28) | |

תשובות סופיות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------|-----------------------------|
| $4xy$ (3) | $2x^2$ (2) | $8x$ (1) |
| x^2 (6) | $4a^2 - a$ (5) | $-x^2y$ (4) |
| $15x^3 - 19$ (9) | $8mn^2 - 6nm^2$ (8) | $9xy - 36y$ (7) |
| $2xy + x + 1$ (12) | $7x^2 - 7x + 2$ (11) | 0 (10) |
| $-13n - 2m + 6mn$ (15) | $-5x - 5y - 5xy$ (14) | $4x^2 + 3x - 9$ (13) |
| $14x^2z + 5xz^2 + 6$ (18) | $4z^2 - 1$ (17) | $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$ (16) |
| $7a^2b + 13x^2y$ (21) | $-3x^2 - x$ (20) | $-3x^2 + 2x - 3$ (19) |
| $-6x^3y - x^2$ (24) | $-8y^2 - 5x^3y^2$ (23) | $-8x^2y^3 + 15a^2$ (22) |
| $4a^2 - a$ (27) | $25a^2b - 22ab^2$ (26) | $2a^2b + 3a^2 + 7b$ (25) |
| | | $25a^2b - 22ab^2$ (28) |

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x \cdot 3x$	ב. $-4x \cdot (-7x)$	ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$
ד. $8m^2 \cdot 4m^3$	ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$	ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$
ז. $a \cdot 3b$	ח. $4a^2 \cdot 7b^2$	ט. $ab \cdot (-2a^2b)$

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$	ב. $2(-3x^2+5x-1)$
ג. $(7x-2)4$	ד. $(1-2x)(-2)$
ה. $a(3a-1)$	ו. $b(b^2-3b+4)$
ז. $2x(5x+3)$	ח. $5x(x^2+2x-3)$
ט. $3t^2(4t-t^2+6)$	י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$	ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$
ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$	ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

$$\begin{aligned} & \text{ה. } (3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2 \\ & \text{ו. } 3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7 \end{aligned}$$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{aligned} & \text{א. } (x-1)(x+2) \quad \text{ב. } (x+3)(x-7) \\ & \text{ג. } (3-x)(x+4) \quad \text{ד. } (3x+4)(5x+1) \\ & \text{ה. } 3(4x+1)(2x-3) \quad \text{ו. } -2(3x-1)(5-2x) \end{aligned}$$

(5) פשט את ערכי הביטויים הבאים :

$$\begin{aligned} & \text{א. } (x-1)(x+3)+2(3-x) \\ & \text{ב. } (a+4)(a-2)-(a+5)(a-3) \\ & \text{ג. } (2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6) \\ & \text{ד. } -x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2) \end{aligned}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{aligned} & \text{(1) א. } 6x^2 \quad \text{ב. } 28x^2 \quad \text{ג. } -24x^2 \quad \text{ד. } 32m^5 \quad \text{ה. } -6a^5 \quad \text{ו. } -2b^5 \\ & \quad \text{ז. } 3ab \quad \text{ח. } 28a^2b^2 \quad \text{ט. } -2a^3b^2 \\ & \text{(2) א. } 6x-8 \quad \text{ב. } -6x^2+10x-2 \quad \text{ג. } 28x-8 \quad \text{ד. } -2+4x \\ & \quad \text{ה. } 3a^2-a \quad \text{ו. } b^3-3b^2+4b \quad \text{ז. } 10x^2+6x \quad \text{ח. } 5x^3+10x^2-15x \\ & \quad \text{ט. } 12t^3-3t^4+18t^2 \quad \text{י. } 10d^5-7.5d^2 \\ & \text{(3) א. } 6x-6 \quad \text{ב. } 13x-6 \quad \text{ג. } -6x+11 \quad \text{ד. } x+9 \quad \text{ה. } -3x^2+33x-28 \\ & \quad \text{ו. } 10y^2+32y-27 \\ & \text{(4) א. } x^2+x-2 \quad \text{ב. } x^2-4x-21 \quad \text{ג. } -x^2-x+12 \\ & \quad \text{ד. } 15x^2+23x+4 \quad \text{ה. } 24x^2-30x-9 \quad \text{ו. } 12x^2-34x+10 \\ & \text{(5) א. } x^2+3 \quad \text{ב. } 7 \quad \text{ג. } 18m^2-6m-39 \quad \text{ד. } -3x^5y^3+3x^4y^2 \end{aligned}$$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

- | | | |
|----------------|------------------|--------------------|
| א. $(x+5)^2$ | ב. $(x+2)^2$ | ג. $(4x+5)^2$ |
| ד. $(6x+2)^2$ | ה. $(7x+y)^2$ | ו. $(5x+2y)^2$ |
| ז. $(x^2+7)^2$ | ח. $(x^2+y^2)^2$ | ט. $(x^3+2y^2x)^2$ |

(2) פשט את הביטויים הבאים:

- | | | |
|----------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| א. $(x-6)^2$ | ב. $(x-2)^2$ | ג. $(5-x)^2$ |
| ד. $(6x-1)^2$ | ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ | ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$ |
| ז. $(3m-2n)^2$ | ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ | ט. $(x^2y^2-7)^2$ |

(3) פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|---|
| א. $(x-5)(x+5)$ | ב. $(3+x)(x-3)$ |
| ג. $(3x-1)(3x+1)$ | ד. $(5-7x)(7x+5)$ |
| ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ | ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$ |
| ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ | ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$ |

(4) פשט את הביטויים הבאים :

א. $(x+1)(x+2)-3x$ ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$
 ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$ ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$
 ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$
 ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

(1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$
 ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$
 ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$
 (2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$
 ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$
 ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$
 (3) א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$
 ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$
 (4) א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$
 ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף: $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת: $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x - 12$ ב. $6y - 4$

ג. $20 - 8a$ ד. $4a^3 + 8b$

ה. $75m^2 + 25m + 15$ ו. $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $y^2 + 5y$ ב. $3x - 11x^3$

ג. $6y^2 + 5y^3 + 4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

(3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

א. $2x^2 - 8x$	ב. $3t^2 + 12t$
ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$	ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$
ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$	ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$

(4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $x^2 + 10x + 25$	ב. $x^2 + 12x + 36$
ג. $y^2 - 18y + 81$	ד. $y^2 - 22y + 121$
ה. $4x^2 + 4x + 1$	ו. $16y^2 - 8y + 1$
ז. $9x^2 - 24x + 16$	ח. $25x^2 + 70x + 49$

(5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $r^2 - 25$	ב. $x^2 - 81$
ג. $25y^2 - 49$	ד. $121x^2 - 1$
ה. $x^2y^2 - 4$	ו. $9y^4 - 169x^4$

(6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

א. $y - y^3$	ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$
ג. $m^4 - 1$	ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$

תשובות סופיות:

1. א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$
 ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$
 2. א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$
 ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
 3. א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$
 ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$
 4. א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$
 ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$
 5. א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$
 ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
 6. א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$
 ד. $x^2(14x-5)^2$

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2 + bx + c$ כאשר a, b ו- c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו- m_2 , שמקיימים: $m_1 \cdot m_2 = ac$ ו- $m_1 + m_2 = b$.
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$.
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underline{ax^2 + m_1x} + \underline{m_2x + c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו- m_2 באופן

הבא: $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$ אז

נכתוב: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $x^2 + 5x + 4$ | ב. $x^2 - 8x + 15$ | ג. $x^2 - 33x + 62$ |
| ד. $2x^2 + 7x - 15$ | ה. $3x^2 - 11x + 6$ | ו. $6x^2 + 5x + 1$ |
| ז. $2x^2 + x - 6$ | ח. $x^2 - 18x + 81$ | ט. $x^2 + 2x + 8$ |

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

- | | |
|----------------------|--------------------|
| א. $6x^2 + 5x + 1$ | ב. $x^2 + 5x + 4$ |
| ג. $4x^2 + 20x + 25$ | ד. $3x^2 - x + 20$ |

תשובות סופיות:

- (1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$
- ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$
- ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.
- (2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגברים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x \neq -4$ ומשמעו היא ש- x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים :

א. $\frac{x+4}{x+3}$	ב. $\frac{5}{x-6}$
ג. $\frac{x+7}{2x-8}$	ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$
ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$	ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$
ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$	ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע) :

א. $\frac{ax}{a}$	ב. $\frac{a-x}{a}$
ג. $\frac{a-ax}{a}$	ד. $\frac{x+1}{y+1}$
ה. $\frac{x}{x+y}$	ו. $\frac{6x}{6y}$
ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$	ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$
ט. $\frac{4x^2y}{xy}$	י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם :

א. $\frac{3x+12}{x+4}$	ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$
ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$	ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$
ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$	ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$
ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$	ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

(4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10}$	ב. $\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64}$
ג. $\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32}$	ד. $\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m}$
ה. $\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2}$	ו. $\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2}$

(5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$	ב. $\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4}$
ג. $\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15}$	ד. $\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2}$
ה. $\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2}$	ו. $\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2}$
ז. $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6}$	ח. $\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56}$
ט. $\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3}$	י. $\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n}$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \neq -3 \quad \text{ב. } x \neq 6 \quad \text{ג. } x \neq 4 \quad \text{ד. } x \neq 0, x \neq 4$$

$$\text{ה. } x \neq -1 \quad \text{ו. } x \neq -2, x \neq 2 \quad \text{ז. } y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$$

$$\text{ח. } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

$$(2) \quad \text{א. } x \quad \text{ב. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ג. } 1-x$$

$$\text{ד. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ה. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ו. } \frac{x}{y} \quad \text{ז. } \frac{x}{y}$$

$$\text{ח. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ט. } 4x \quad \text{י. לא ניתן לצמצם}$$

$$(3) \quad \text{א. } x \neq -4, 3 \quad \text{ב. } \frac{m}{4}, m \neq -4 \quad \text{ג. } \frac{2}{a}, a \neq 0, 6$$

$$\text{ד. } -\frac{x}{3}, x \neq 5 \quad \text{ה. } -3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{ו. } \frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3 \quad \text{ח. } \frac{3z^2 - 12z + 4}{z+5}, z \neq 0, -5$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{x+5}{2}, x \neq -5 \quad \text{ב. } \frac{n}{8-n}, n \neq 8 \quad \text{ג. } \frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$$

$$\text{ד. } \frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2} \quad \text{ה. } \frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3} \quad \text{ו. } \frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2 \quad \text{ב. } m-8, m \neq 4 \quad \text{ג. } \frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$$

$$\text{ד. } z+8, z \neq -\frac{2}{3} \quad \text{ה. } \frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9 \quad \text{ו. } \frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$$

$$\text{ז. } \frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3 \quad \text{ח. } \frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$$

$$\text{ט. } \frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a \quad \text{י. } \frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$$

כפל וחילוק של שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$
- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{12}_3} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|---|
| א. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8}$ | ב. $\frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$ |
| ג. $7y \cdot \frac{5}{y^2}$ | ד. $6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$ |
| ה. $(x^2 + 3x) \cdot \frac{2}{3x+9}$ | ו. $(a^2 - 25) \cdot \frac{20}{5a+25}$ |
| ז. $\frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6}$ | ח. $\frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$ |
| ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10}$ | י. $\frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$ |

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$	ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$
ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$	ד. $\frac{5}{6a} : a^2$
ה. $(d^2 - 3d) : \frac{5d - 15}{5d}$	ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$
ז. $\frac{y^2 + 8y + 16}{8y^2} : \frac{y^2 - 16}{7y^2}$	ח. $\frac{a^2 - 64}{a^2 - 36} : \frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{x^2}{24}$	ב. $\frac{3}{x}$	ג. $\frac{35}{y}$	ד. $\frac{9x}{20}$	ה. $\frac{2x}{3}$
ו. $4(a-5)$	ז. $\frac{w(w-3)}{2}$	ח. $\frac{y^2 - 16}{2y^2 + 32}$	ט. $\frac{z+15}{z-5}$	י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$
א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{y^2}{125}$	ג. $6a^3$	ד. $\frac{5}{6a^3}$	ה. d^2
ו. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$	ח. $\frac{a-8}{a-6}$	ז. $\frac{1}{3}$		

חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג. $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב. $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד. $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג. $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ב. $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד. $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1 - \frac{2}{x}$

ג. $2 + \frac{2}{x+1}$

ה. $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ב. $1 + \frac{3}{y^2}$

ד. $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ו. $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג. $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב. $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד. $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

(5) פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } \frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3}$$

$$\text{ב. } \frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2}$$

$$\text{ג. } \frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2}$$

$$\text{ד. } \frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15}$$

$$\text{ו. } \frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49}$$

$$\text{ז. } \frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$$

(6) פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } \frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18}$$

$$\text{ב. } \left(\frac{2}{x} + 1\right) \cdot \frac{x^2}{7x+14}$$

$$\text{ג. } \frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16}$$

$$\text{ד. } \left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2}$$

$$\text{ה. } \left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1
- (2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd}$
- ד. $\frac{-5y^2 + x + 1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$
- (3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$
- ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2 + a + 4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y + 12z^2 + 9y^2 - 3y^3 - 126xy^2z}{36xy^2z}$
- (4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2 + 4a + 6}{a(a+2)}$
- ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$
- (5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$
- ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2 - 6x - 13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2 + 6a + 6)}{(a+7)^2(2a+1)}$
- ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$
- (6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2 - 594y + 8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.
 נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|---|
| $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5} \quad (2)$ | $\frac{\frac{4x}{12}}{x} \quad (1)$ |
| $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54} \quad (4)$ | $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2} \quad (3)$ |
| $\frac{\frac{4x}{x+1}}{8} \quad (6)$ | $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{y^2} \quad (5)$ |
| $\frac{x^2+2x+1}{t^2-t-20} \quad (8)$ | $\frac{3-y}{8c^2} \quad (7)$ |
| $\frac{\frac{16t+8}{25-t^2}}{2t+1}$ | $\frac{\frac{3c^3-9c^2-12c}{40}}{15c+15} \quad (9)$ |
| | $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{1-3x(x+1)}$ |
| | $\frac{5x+5}{5x+5}$ |

תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6t^3} \quad (3)$$

$$\frac{t-9}{54t^2} \quad (4)$$

$$\frac{(3y-1)(3-y)}{25} \quad (5)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{c}{c-4} \quad (7)$$

$$\frac{t+4}{-8(t+5)} \quad (8)$$

$$\frac{5}{x} \quad (9)$$

A Simple PDF File

This is a small demonstration .pdf file -

just for use in the Virtual Mechanics tutorials. More text. And more text. And more text. And more text.

And more text. And more text. And more text. And more text. And more text. And more text. Boring, zzzzz. And more text. And more text. And more text. And more text. And more text. And more text.

And more text. And more text. And more text. And more text. And more text. And more text. And more text. Even more. Continued on page 2 ...

Simple PDF File 2

...continued from page 1. Yet more text. And more text. And more text. And more text. And more text. And more text. And more text. And more text. Oh, how boring typing this stuff. But not as boring as watching paint dry. And more text. And more text. And more text. And more text. Boring. More, a little more text. The end, and just as well.

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 2 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

49	1. משוואות ממעלה ראשונה
51	2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה
54	3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון
55	4. משוואה ממעלה שנייה
57	5. משוואות דו-ריבועיות
59	6. משוואות עם פרמטרים
61	7. משוואות עם שורשים
63	8. משוואות עם ערך מוחלט
64	9. מערכת משוואות ממעלה שנייה

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax = b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x = \frac{b}{a}$ כאשר $a \neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$ | ב. $7 - 2x = 7$ |
| ג. $2x + x = 24$ | ד. $2x + 6 = 8 + x$ |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$ |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$ | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$ | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$ |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$ |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4$	ב. $\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1$
ג. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}$	ד. $\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1$
ה. $\frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2$	ו. $5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0$	ב. $\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0$
ג. $\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}$	ד. $\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}$
ה. $\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}$	ו. $\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}$

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15}$	ב. $\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0$
ג. $\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0$	ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12$

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|------------|--------------------|
| (1) א. $x=1$ | ב. $x=0$ | ג. $x=8$ | ד. $x=2$ | ה. $x=2$ | ו. $x=-3$ |
| ז. $x=\frac{1}{2}$ | ח. $x=4$ | | | | |
| (2) א. $x=3$ | ב. $x=\frac{1}{2}$ | ג. $x=2\frac{1}{4}$ | ד. $x=1$ | ה. $x=4$ | ו. $x=-1$ |
| (3) א. $x=-18$ | ב. $x=-30$ | ג. $x=-1$ | ד. $x=1$ | ה. $x=-10$ | ו. $x=-21$ |
| (4) א. $x=8$ | ב. $x=-1$ | ג. $x=-3$ | ד. $x=-2$ | ה. $x=2$ | ו. $x=\frac{1}{2}$ |
| (5) א. $x=-6$ | ב. $x=-7$ | ג. $x=-7$ | ד. $x=6, x \neq 3$ | | |

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1, b_1, c_1 ו- a_2, b_2, c_2 הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x+3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

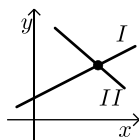
פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

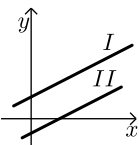
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



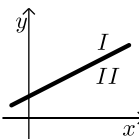
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
- פתרון ע"י השוואת מקדמים:
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} & \text{ג. } \begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} \\
 \text{ד. } \begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} & \text{ה. } \begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} & \text{ו. } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases}
 \end{array}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \\
 \text{ג. } \begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} & \text{ד. } \begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases}
 \end{array}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases}
 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

(6) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

תשובות סופיות:

(1) א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3).

(2) א. $(4, \frac{1}{3})$ ב. $(-\frac{4}{5}, 9)$ ג. (4,1.6) ד. (-2,7).

(3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

(4) א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2).

(5) א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1).

(6) א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4).

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax = b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x = \frac{b}{a}$.

כאשר $a = 0$ מתקבלת המשוואה $0 \cdot x = b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b = 0$ את המשוואה היא $0x = 0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b \neq 0$ את המשוואה היא $0x = b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad x + 4 = 6 + x \quad (2) \quad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2$$

$$(3) \quad 6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (4) \quad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. 13 ב. 6 ג. $-7x$ ד. $-7x + 1$ (או כל מספר במקום 1 השונה מאפס).

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), נקראת משוואה ריבועית.
פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2 + 5x - 4 = 0$.
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2 + 4x + 4 = 0$.
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2 + x + 4 = 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

ד. $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } x^2 - 36 = 0 & \text{ב. } 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג. } 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 & \text{ד. } (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } -7x^2 - 14x = 0 & \text{ב. } 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג. } 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 & \text{ד. } (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} & \text{ב. } \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג. } \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \quad \text{ג. } x = \frac{2}{5} \quad \text{ד. אין פתרון.}$$

$$(2) \quad \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1 \quad \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} \quad \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 \quad \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2$$

$$(3) \quad \text{א. } x = \pm 6 \quad \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \quad \text{ג. } x = \pm 3 \quad \text{ד. } x = \pm 1$$

$$(4) \quad \text{א. } x_1 = 0, x_2 = -2 \quad \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} \quad \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} \quad \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = -2$$

$$\text{ד. } x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8}$$

$$(5) \quad \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 \quad \text{ב. } x = 5, x \neq -3 \quad \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5$$

$$\text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7}$$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ כאשר הנעלם הוא x .
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4 כגון: $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$ באמצעות פרמטר: $t = x^2 - 1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2 + 3t - 2 = 0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x .
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- (1) $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$
- (2) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
- (3) $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- (4) $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$
- (5) $x^6 + x^3 = 56$
- (6) $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$
- (7) $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$
- (8) $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$
- (9) $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$
- (10) $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$
- (11) $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$
- (12) $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$
- (13) $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$
- (14) $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$
- (15) $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$
- (16) $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$
- (17) $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$
- (18) $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$
- (19) $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$
- (20) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$

תשובות סופיות:

(1) $x = \pm 1$

(2) $x = \pm 1, \pm \sqrt{2}$

(3) $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}$

(4) $x = \pm 2, \pm 5$

(5) $x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2$

(6) $x = -2, \sqrt[3]{4}$

(7) $x = 49$

(8) $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1$

(9) $x = 5, -1$

(10) $x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2}$

(11) $x = -1$

(12) $x_{1,2} = 1, 3$

(13) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06$

(14) $x_1 = 0, x_2 = -2$

(15) אין פתרונות.

(16) $x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}}$

(17) $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3$

(18) $x = -1, 2$

(19) $x = 3, -1$

(20) $x = \pm 1, 4, 6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx = 4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר m .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m \neq 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b + 1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$(2) \text{ א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$(3) \text{ א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x} = a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$.

הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$ שבה $a < 0$ אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| (2) $\sqrt{x+2} = x$ | (1) $\sqrt{2x+5} = 7$ |
| (4) $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ | (3) $\sqrt{3x+1} + x = 13$ |
| (6) $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ | (5) $\sqrt{x-1} + 3 = x$ |
| (8) $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ | (7) $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ |
| (10) $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ | (9) $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ |
| (12) $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ | (11) $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ |
| (14) $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ | (13) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ |
| (16) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ | (15) $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ |
| (18) $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ | (17) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ |
| | (19) $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2 | $x = 22$ (1 |
| $x = 9$ (4 | $x = 8$ (3 |
| $x = 25$ (6 | $x = 5$ (5 |
| $x = 3.75$ (8 | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10 | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12 | $x = 6$ (11 |
| $x = 5$ (14 | $x = 3$ (13 |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15 |
| $x = 1$ (18 | $x = 6$ (17 |
| | $x = 2$ (19 |

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$|3x+14|=7 \quad (1) \qquad |3x-24|=x \quad (2)$$

$$|12-x|=3x \quad (3) \qquad 2x-|8-x|=10 \quad (4)$$

$$|4x-5|=|2x+13| \quad (5) \qquad |14-3x|=2|x+5| \quad (6)$$

$$|x|+7=|2x| \quad (7) \qquad |x+2|+6=|2x-4| \quad (8)$$

$$|x+2|+|2x-6|=|4x+8| \quad (9) \qquad |10-3x|-|x+4|=|2x-6| \quad (10)$$

תשובות סופיות:

$x = -\frac{7}{3}, -7$ (1)	$x = 6, 12$ (2)	$x = 3$ (3)	$x = 6$ (4)
$x = 9, -1\frac{1}{3}$ (5)	$x = 24, \frac{4}{5}$ (6)	$x = \pm 7$ (7)	$x = 12, -1\frac{1}{3}$ (8)
$x = 0, -12$ (9)	$x = 0$ (10)		

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

תשובות סופיות:

- (1) $(2,4), (4,2)$
- (2) $(\pm 4, -2)$
- (3) $(\pm 2, \pm 1)$
- (4) $(5, -2), (-5, 2)$
- (5) $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$
- (6) $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$
- (7) $(7, 4)$
- (8) $(5, -3)$
- (9) $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$
- (10) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$
- (11) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
- (12) $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$
- (13) $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$
- (14) $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

66	1. אי שוויונים ממעלה ראשונה
68	2. אי שוויונים ממעלה שנייה
69	3. אי שוויונים ממעלה שלישית
70	4. אי שוויונים עם מנה
72	5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו
73	6. שאלות מסכמות
75	7. מציאת תחום הגדרה
77	8. אי שוויונים עם ערך מוחלט
80	9. אי שוויונים עם שורשים

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|---|---|
| $6x > 2(3x - 1)$ (2) | $45x - 26 > 109$ (1) |
| $(x - 2)^2 + 4 < (x + 2)^2 + 20$ (4) | $2(x - 5) \geq \frac{1}{2}(4x + 6)$ (3) |
| $4(6x - 8) < 8(3x - 4)$ (6) | $\frac{8x - 4}{2} < \frac{9(x + 1)}{3}$ (5) |
| $\frac{7 - x}{10} - \frac{3x - 1}{5} + \frac{x + 4}{3} < 7$ (8) | $\frac{x - 6}{3} - \frac{x - 4}{4} \geq 12 - x$ (7) |

תשובות סופיות:

(1) $x > 3$

(2) כל x

(3) אף x

(4) $x > -2$

(5) $x < 5$

(6) אף x

(7) $x \geq 12$

(8) $x > -13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|------------------------------|--|
| $x^2 - 12x > -32$ (2) | $x^2 < 144$ (1) |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4) | $(x+2)(x+5) < 0$ (3) |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x-56$ (6) | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5) |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8) | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7) |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10) | $-3x^2 + 12x > 0$ (9) |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12) | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2) | $-12 < x < 12$ (1) |
| $-9 < x < 3$ (4) | $-5 < x < -2$ (3) |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8) | $-4 < x < 8$ (7) |
| $x > 5, x < 5$ (10) | $0 < x < 4$ (9) |
| x כל (12) | $x < 3, x > 5$ (11) |

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$, $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$ וכו'. בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| (1) $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ | (2) $x(x^2 + x + 1) > 0$ |
| (3) $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ | (4) $x^3 - 25x \geq 0$ |
| (5) $(x^2 + 3x + 5)(x-2) > 0$ | (6) $(x^2 + 8x + 20)(3x-5) \leq 0$ |
| (7) $(x^2 - x - 6)(x-1) < 0$ | (8) $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ |
| (9) $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ | (10) $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ |

תשובות סופיות:

- | | |
|---|----------------------------------|
| (1) $1 < x < 2, x > 3$ | (2) $x > 0$ |
| (3) $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ | (4) $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ |
| (5) $x > 2$ | (6) $x \leq 1\frac{2}{3}$ |
| (7) $x < -2, 1 < x < 3$ | (8) $x \leq 0, x = 3$ |
| (9) $x > -3$ | (10) $x < 1, 2 < x < 4$ |

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ או $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$

ו- $g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$ בו: $f(x) = 2x+4$ ו- $g(x) = x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)	$\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)
$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4)	$\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)
$\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)	$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)
$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)	$\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)
$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10)	$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9)

תשובות סופיות:

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a < b$ וגם $b < c$, ניתן לכתוב: $a < b < c$. מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-4)(x+2)}{x-1} < 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 12 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

$$(18) \text{ לאלו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3} ?$$

תשובות סופיות:

$$-2 < x \leq -\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$x \leq -4 \quad (2)$$

$$x < -2, 1 < x < 4 \quad (3)$$

$$x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5 \quad (4)$$

$$-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12 \quad (5)$$

$$x < -3, 0 < x < 2.5 \quad (6)$$

$$x < -1, 2 < x < 6, x > 6 \quad (7)$$

$$2.5 \leq x < 8, x > 8 \quad (8)$$

$$x > 3 \quad (9)$$

$$x < -3, 0 < x < 1, x > 4 \quad (10)$$

$$-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3 \quad (11)$$

$$x > 7 \quad (12)$$

$$x < -2, 2 < x < 4 \quad (13)$$

$$x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4 \quad (14)$$

$$x \text{ אף } x \quad (15)$$

$$x \neq 1 \quad (16)$$

$$x \geq 7 \quad (17)$$

$$-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3 \quad (18)$$

תחום הגדרה:

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{3x-4} \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{12x-x^2-x^3} \quad \text{ד. } f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$$

(3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1 \leq x \leq 4$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x \leq -2$, $x > 2$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, a פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a .

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1, x \geq 6$ ג. $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד. $-5 \leq x < -2, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד. $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3) $a = 5$
- (4) $a = 2$
- (5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$ x < a$	$ x > a$
פתרון	$-a < x < a$	$x < -a \cap x > a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $|x+2| < 3$ ב. $|2x+1| > 7$
- ג. $|6-2x| < x$ ד. $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $1 < |4-3x| < 7$ ב. $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $|x^2+6x-4| < 12$ ב. $|x^2+x-10| > 3x-2$
- ג. $|x^2-3x| < 4$ ד. $|6x^2-7x-4| > 1$
- ה. $x^2-6|x|+5 \leq 0$ ו. $x^2-6|x+1|-1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים :

ב. $|x+8| < 11 - |1-3x|$

א. $|x-3| + |2x+2| > 7$

ד. $|2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$

ג. $|3-2x| - 11 > 4 - |6+x|$

ו. $|x+3| + |x^2 - 5x + 4| < 19$

ה. $|5+4x| - |3-x| + \left|4 - \frac{1}{2}x\right| \leq 22$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים :

ב. $1 \leq \left|\frac{x+2}{x-2}\right| \leq 2$

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right| \geq 3$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right| > 5$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12} \leq 12$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים) :

ב. $2 - \sqrt{1-x} \leq |x+2| - 3$

א. $\sqrt{x^2 - |x-12|} < x$

ד. $\frac{|x+2| - |x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0$

ג. $\sqrt{|2x+1| - x - 1} \leq 4 - |3x|$

תשובות סופיות:

- (1) א. $-5 < x < 1$ ב. $x < -4$ או $3 < x$
 ג. $2 < x < 6$ ד. $x < -1$
- (2) א. $-1 < x < 1$ או $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$ ב. $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א. $-2 < x < 2$ או $-8 < x < -4$ ב. $x < 2$ או $4 < x$
 ג. $-1 < x < 4$ ד. $x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$, $x > \frac{5}{3}$
 ה. $-5 \leq x \leq -1$ או $1 \leq x \leq 5$ ו. $x < -5$, $x > 7$
- (4) א. $x < -2$ או $2 < x$ ב. $-1 < x < 1$
 ג. $x < -6$ או $4 < x$ ד. $x < -1$ או $4 < x$
 ה. $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$ ו. $-2 < x < 6$
- (5) א. $\frac{7}{6} \leq x < 2$, $x > 2$ ב. $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$, $x \geq 6$
 ג. $x < 12$, $x \geq 46$ ד. $\frac{1}{2} < x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x \leq 4$
- (6) א. $x = -1$, $x \geq 3$, $x \neq 12$ ב. $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$
 ג. $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$ ד. $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \geq 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \leq f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}-1 < \sqrt{x^2-x+1} \quad (5)$$

$$\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad (6)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2 \quad (8)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \quad (10)$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \quad (11)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4 \quad (12)$$

תשובות סופיות:

(1) $-3 \leq x < 46$

(2) $x \geq 3$

(3) $x < -10, x > 1$

(4) $\emptyset$

(5) $x \leq -2, -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$

(6) $x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-13 + \sqrt{73}}{16}$

(7) $\frac{12}{25} < x \leq \frac{1}{2}$

(8) $x < 2\sqrt{5} - 4$

(9) $1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

(10) $-\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leq 1$ שזה: $-2.618 < x \leq 1$

(11) $2.5 \leq x < 3$

(12) $x < -9, x > 0$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 4 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

82	1. חוקי החזקות
87	2. חוקי השורשים
91	3. כתיבה מדעית של מספרים

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad a^0 = 1 & 2. \quad a^1 = a & 3. \quad a^n \cdot a^m = a^{m+n} \\
 4. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & 5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} & 6. \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \\
 7. \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & 8. \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} & 9. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad a^2 a^6 & \text{ב.} \quad t^3 t^5 t^7 & \text{ג.} \quad b^2 b^5 b^{12} b^3 \\
 \text{ד.} \quad \frac{k^8}{k^3} & \text{ה.} \quad \frac{n^{14}}{n^9} & \text{ו.} \quad \frac{c^6}{c^2} \\
 \text{ז.} \quad \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & \text{ח.} \quad \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & \text{ט.} \quad \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} \\
 \text{י.} \quad 3^2 3^3 3^4 & \text{יא.} \quad \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & \text{יב.} \quad \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & \text{ב.} \quad \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & \text{ג.} \quad \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243 \cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים :

א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$	ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$
ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$	ד. $2^3 + 2^5$

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק : $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

א. $(a^2)^4$	ב. $(c^3)^{10}$	ג. $(x^3 x^{10})^2$
ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$	ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$	ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$
ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$	ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$	ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$
י. $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$	יא. $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$	יב. $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$

(6) לפניך הביטויים הבאים : $\left((3^2)^3\right)^4$ ו- $\left((3^6)^n\right)^2$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$	ב. $\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$	ג. $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$
------------------------------	--	--

(8) פשט את הביטויים הבאים :

א. $3^2 9 \cdot 81^2$	ב. $64^2 2^3 8^2$	ג. $125 \cdot 25 \cdot 5^5$
ד. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$	ה. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$	ו. $\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$

(9) פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} & \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \\
 \text{ב.} & \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \\
 \text{ג.} & \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \\
 \text{ד.} & \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}
 \end{array}$$

(10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים : $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & (a^2b)^3 & \text{ב.} & (m^4n^3)^5 & \text{ג.} & (x^{12}y^3)^3 \\
 \text{ד.} & \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 & \text{ה.} & \left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 & \text{ו.} & \left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \\
 \text{ז.} & \left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6 & \text{ח.} & \left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2 & \text{ט.} & \left(\frac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2
 \end{array}$$

(11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 & \text{ב.} & \left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 & \text{ג.} & \left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3
 \end{array}$$

(12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \frac{1}{4^6} & \text{ב.} & \frac{1}{5^3} & \text{ג.} & \frac{1}{2^{10}} \\
 \text{ד.} & \frac{1}{8} & \text{ה.} & \frac{1}{81} & \text{ו.} & \frac{1}{125}
 \end{array}$$

(13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \frac{1}{4^{-3}} & \text{ב.} & \frac{1}{3^{-2}} & \text{ג.} & \frac{1}{5^{-3}}
 \end{array}$$

(14) חשב את הביטויים הבאים :

ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

(15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג. $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

(16) פשט את הביטויים הבאים :

ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

תשובות סופיות:

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
 ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. $x^6 y^{10}$
- (3) $n=16$
- (4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
 ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5
- (6) $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}
- (9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (10) א. $a^6 b^3$ ב. $m^{20} n^{15}$ ג. $x^{36} y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21} b^3$
- ז. $x^{12} y^{18}$ ח. $t^4 r^{12}$ ט. $b^2 c^6$
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3
- (15) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & 2. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} & 3. \quad \sqrt[n]{a^n} = a \\
 4. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & 5. \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & 6. \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot n]{a}
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

(19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|---|---|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$ | ב. $32^{\frac{3}{5}}$ | ג. $128^{-\frac{2}{7}}$ |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$ |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{-\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$ |

(20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

(21) פשט את הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|--|--|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$ |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

(22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

- | | | |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$ | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ | |

(23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$ | ב. $4\sqrt[3]{2}$ | ג. $2\sqrt[5]{3}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$ | ח. $-5\sqrt[4]{2}$ | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$ |

(24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$
- ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

(25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$
- ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$
- ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

(26) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7} + \sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד. $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

(27) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

- (17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
- ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
- ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5
- (19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$
- ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$
- (20) $\sqrt{2}$
- (21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
- ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$
- (22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$
- (23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$
- ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$
- (25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$
- ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[8]{3}$
- (26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$
- ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

(28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

(29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0012)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

(28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
(29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 5 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות (ללא ספר)
2. מערכת משוואות מעריכיות 92
3. אי שוויונים מעריכיים 93
4. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך 94

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) (4	(1,2) (3	(0,2) , (2,4) (2	(2,9) (1
(1,2) , (-1,0) (7	(-1,-2) (6	(3,2) (5	

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} & (2) \\ 3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} & (1) \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} & (4) \\ e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} & (3) \\ e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 & (6) \\ 25^x + 5 < 6 \cdot 5^x & (5) \end{array}$$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ($\ln$) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$\begin{array}{ll} e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 & (8) \\ e^x > 3 & (7) \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} & (2) \\ x < \frac{2}{3} & (1) \\ x \leq \frac{1}{8} & (4) \\ 0 \leq x < 1 & (3) \\ x = 0 & (6) \\ 0 < x < 1 & (5) \\ x < 0 \text{ או } x > \ln 4 & (8) \\ x > \ln 3 & (7) \end{array}$$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x) > 0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x) > 1$ אז: $g(x) > h(x)$.

אם: $0 < f(x) < 1$ אז: $g(x) < h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2-2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$3 < x < 6 \quad (2)$$

$$1 < x < 3 \quad (3)$$

$$0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$0 < x < 2 \quad (6)$$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 6 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם	(ללא ספר)
2. חוקי הלוגריתמים ישן	(ללא ספר)
3. משוואות לוגריתמיות הנפתרות באמצעות הגדרת הלוג	(ללא ספר)
4. משוואות לוגריתמיות הנפתרות באמצעות חוקי הלוגריתמים	(ללא ספר)
5. הוצאת לוג משני אגפי המשוואה	(ללא ספר)
6. משוואות לוגריתמיות עם בסיסים שונים	(ללא ספר)
7. מערכת משוואות לוגריתמיות	95
8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות	96
9. אי-שוויונים לוגריתמים	97

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (8, -5) \quad (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) & (8, 3) \quad (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) & (25, 8) \quad (5) & (16, 7) \quad (4) \\ (4, 7) \quad (9) & (3, 9), (9, 3) \quad (8) & (25, 4), (625, 2) \quad (7) \end{array}$$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2 (4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3 (9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4 (5 - 9^y) \\ \log_2 (2^x + 3) = \log_4 (29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2 (y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) & (3, 3) & (1, 1) \\ (1, 0) & (1, 1), (2, 3) & \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \end{array} \quad \begin{matrix} (3) & (2) & (1) \\ (6) & (5) & (4) \end{matrix}$$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| $\log_6 (x^2 - 5x) < 1$ (2) | $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$ (1) |
| $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x)$ (4) | $\log_3 x > \log_9 (15 - 2x)$ (3) |
| $\ln x < 3$ (6) | $\ln x \geq \ln (x^2 - 12)$ (5) |
| $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8) | $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---|-----------------------------|
| $-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2) | $x > 5$ (1) |
| $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4) | $3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3) |
| $0 < x < e^3$ (6) | $2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5) |
| $x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8) | $\frac{1}{e} < x < e^7$ (7) |

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 7 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

98	1. שאלות העוסקות בתכונות התחלקות
101	2. סדרות
103	3. עצרת
104	4. שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים
105	5. שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים
106	6. שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה
108	7. שאלות כוללות ומסכמות
110	8. מושג הסכימה וקתיבה מקוצרת של אינדוקציות

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

סיכום כללי:

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:

בדיקה:

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $n=k$ (טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

הוכחת האינדוקציה:

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

סיכום:

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

שאלות:

- (1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8^n - 3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית לכל n טבעי.
- (2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $11^n - 4^n$ מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי.
- (3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8 \cdot 7^n + 4^{n+2}$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל n טבעי.
- (4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5 \cdot 3^{2n} - 5^{n+1}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל n טבעי.
- (5) a_n הוא האיבר במקום ה- n בסדרה החשבונית: $1, 3, 5, 7, \dots$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n} + 4$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל n טבעי הגדול מ-1.
- (6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^2 + n$ מתחלק ב-2 ללא שארית לכל n טבעי.
- (7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3 + 5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.
- (8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n - 2n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.
- (9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9(9^n - 1) - 40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל n טבעי.
- (10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n + 5^n - 2^n(2^n + 1)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

(11) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n + 2^{2n}$ מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

(12) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $a^n - b^n$ מתחלק ב- $(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

(13) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2} + 1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב-3 לכל n טבעי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדרות:

סיכום כללי:

תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים: $a_1, a_2, \dots, a_n$, כאשר n הוא מיקום האיבר בסדרה ו- a_n הוא ערך האיבר העומד במקום ה- n בסדרה.

○ סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.

○ סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- S_n

והוא מקיים: $S_n = a_1 + \dots + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר d הפרש הסדרה.

○ סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר q היא מנת הסדרה.

○ סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

שאלות:

(14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1) \quad \text{מתקיים:}$$

(15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי

$$4+7+10+13+\dots+(3n+1) = \frac{n}{2}(3n+5) \quad \text{מתקיים:}$$

(16) נתונה סדרה שבה: $a_n = n(n+2)$

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

(17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

(18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

(19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4} [3^n (2n-1) + 1]$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

עצרת:

סיכום כללי:

תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.
מגדירים: $0! = 1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n! = n \cdot (n-1)!$, $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

שאלות:

(20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

(21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{4} + \frac{3 \cdot 4!}{8} + \dots + \frac{n(n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$$

(22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$p! + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + \dots + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

(23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \dots \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{n!}$$

(24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1 \cdot 4} - \frac{11}{4 \cdot 7} + \frac{17}{7 \cdot 10} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (6n-1)}{(3n-2)(3n+1)} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

שאלות:

(25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2n = n(2n + 1)$$

(26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{3}(2n + 1)(4n + 1)$$

(27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 3n \cdot 2^{3n-1} = (3n - 1)2^{3n} + 1$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

שאלות:

(28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = 2n(2n+1)$$

(29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

(30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

(31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

(32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

שאלות:

(33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+1}$$

(34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

(35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

(36) נתונה סדרה שבה: $a_n = n^n$. נגדיר: $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $T_n \leq n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

(37) נתון אי-השוויון: $2^n > n^2$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(38) נתון אי-השוויון: $4^n > 5n^2 + 1$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(39) נתון אי-השוויון: $n^3 - n < 5^{n-1}$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(40) נתון אי-השוויון: $3^n + 4^n + 5^n < 6^n$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(41) נתון אי-השוויון : $n^n \geq n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי.

(42) נתון אי-השוויון : $a^n + b^n < (a+b)^n$, $(a, b > 0)$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-1.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות כוללות ומסכמות:

שאלות:

(43) נתון השוויון: $4 + 7 + 10 + 13 + \dots = \frac{n}{2}(3n + 5)$

- א. מצא את האיבר במקום ה- n .
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ג. חשב את הסכום: $37 + 40 + 43 + \dots + 85$.

(44) נתון השוויון: $\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה- n .

(45) נתון השוויון: $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots = \frac{n}{4n+1}$

- א. מצא את האיבר במקום ה- n .
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ג. חשב את הסכום: $\frac{1}{25 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 33} + \frac{1}{33 \cdot 37} + \dots + \frac{1}{89 \cdot 93}$.

(46) נתון השוויון: $(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2 + 27^2 + 28^2 + \dots + 48^2$.

(47) נתון השוויון: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ב. הבע באמצעות n את הסכום: $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (4n)^2$.

(48) נתונים השוויונים הבאים:

א. $3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7}{3}(n^2 + 3n - 1)$

ב. $3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = n^2 + 11n - 5$

ג. $3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7n}{2}(n+1)$

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

$$(49) \text{ נתון השוויון: } n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = an(2n+b).$$

- א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו- $n=2$. מצא את ערכי a ו- b .
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

$$(50) \text{ נתון אי-השוויון: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-2.
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{18} > \frac{1}{2}$

$$(51) \text{ נתון אי-השוויון: } n^2 < 2^n$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-4.
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot \dots \cdot 20^2 < 2^{200}$

$$(52) \text{ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום: } 9 + 27 + 81 + \dots + 3^{3n+1}$$

מתחלק ב-117 ללא שארית לכל n טבעי.

$$(53) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3 + 5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.
 ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
 הוכח כי $a^3 + b^3$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

$$(54) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

- א. הוכח את הטענה: אם ל- n טבעי מסוים $3^n + 5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2} + 5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.
 ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי $3^n + 5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי?
 ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n + 5^n$ מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי אי-זוגי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות:

סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא: $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים

בערך המצוין בתחתית הסימון $\left(\sum_{k=1}^n\right)$ עד לערך המצוין בחלקו העליון $\left(\sum_{k=1}^n\right)$.

דוגמאות:

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\bullet \sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2 + 4^2 + \dots + 12^2$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n+1}$$

שאלות:

$$(1) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$(2) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(3) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

$$(4) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$$

$$(5) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{3}{4^{k-1}} = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$(6) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} k = 1 \frac{1}{2} n(3n+1)$$

$$(7) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} (4k-1) = 3n(6n+1)$$

$$(8) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n (n+k) = \frac{n}{2}(3n+1)$$

$$(9) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 3^{n+k} = \frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 8 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

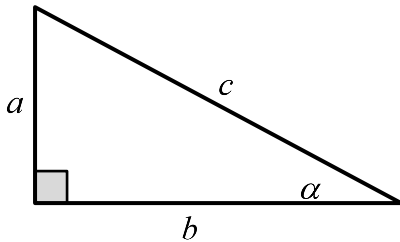
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית.....112

משולש ישר זווית:

סיכום כללי:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

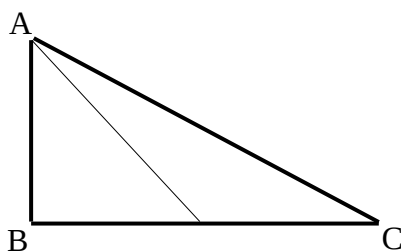
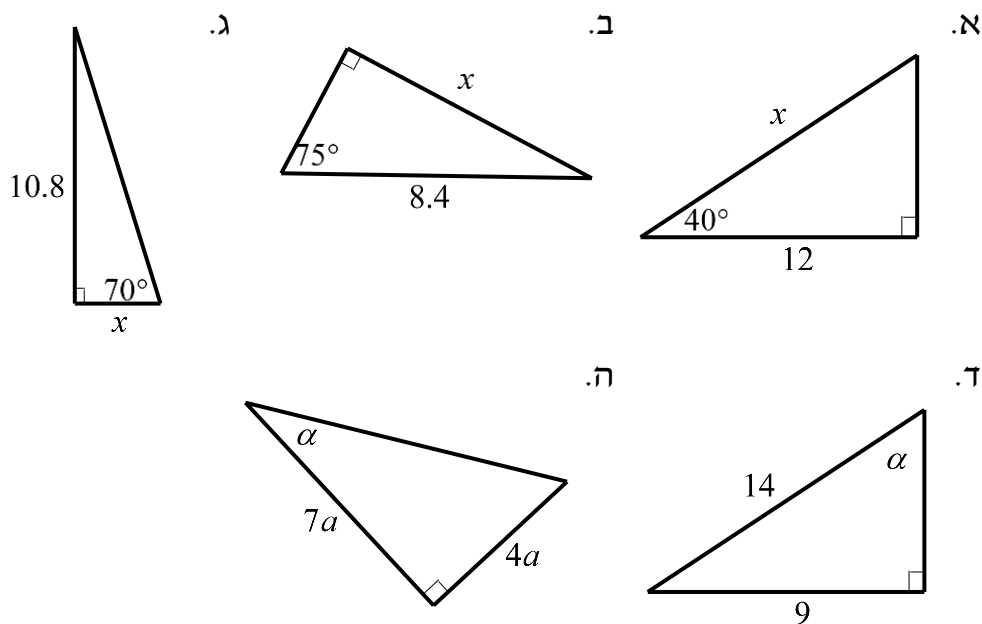
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2: \text{משפט פיתגורס}$$

שאלות:

1) מצא את ערכו של x / α במשולשים ישרי הזווית הבאים:



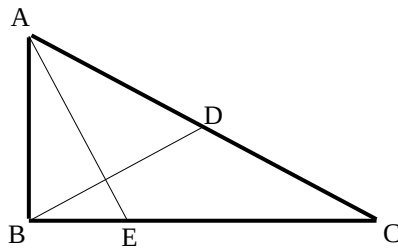
2) המשולש ABC שבציור הוא משולש

ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

AD הוא התיכון לניצב BC.

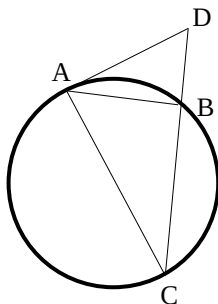
נתון: $\angle C = 28^\circ$, $AB = 6$ ס"מ.

מצא את AD ואת $\angle BAD$.



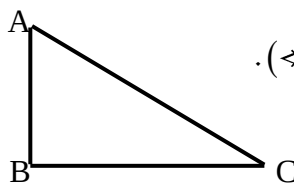
- (3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). BD הוא התיכון ליתר AC ו-AE הוא חוצה הזווית $\angle A$. נתון: $BD = 5.6$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ. מצא את BE ואת $\angle BAE$.

- (4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסונו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

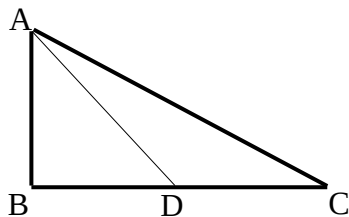


- (5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D. נתון: $\angle DAB = 32^\circ$, $BD = 4$ ס"מ. מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

- (6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92° . מצא את שטח המשולש.

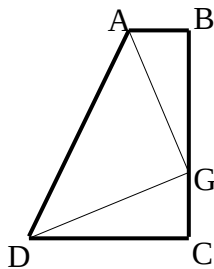


- (7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). נתון: $AB = a$, $\angle A = \alpha$. הבע באמצעות α ו- a את היקף המשולש.

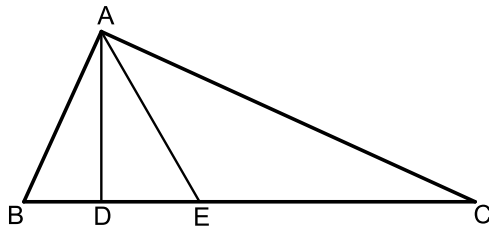


- (8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). AD הוא התיכון לניצב BC. נתון: $AB = b$, $\angle C = \alpha$. הבע באמצעות α ו- b את אורכי הקטעים BD ו-AD.

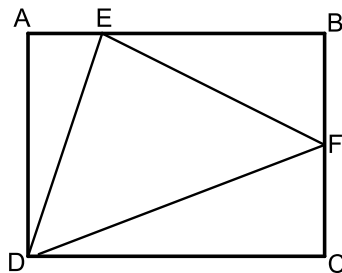
- (9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k . הבע באמצעות α ו- k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



- (10)** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle B = \angle C = 90^\circ$). הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$. נתון: $\angle BAG = \beta$, $AG = DG = m$. הבע באמצעות β ו- m את שטח הטרפז.



- (11)** המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$). הקטעים AD ו- AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית. מסמנים: $\angle DAE = \alpha$, $DE = k$.
א. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.
ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי: $\alpha = 30^\circ$ ו- $k = 2$.

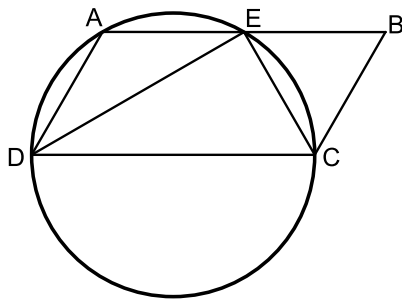


- (12)** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו- F הנמצאות על הצלעות AB ו- BC בהתאמה כך ש- $AE = BE$. מקיימת: $3AE = BE$ ו- F היא אמצע הצלע BC. אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE. מעבירים את הקטעים EF, DF ו- DE כך שנוצר במשולש DEF.
א. סמן ב- t את אורך הקטע AE והבע באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.
ב. חשב את זווית המשולש EDF.

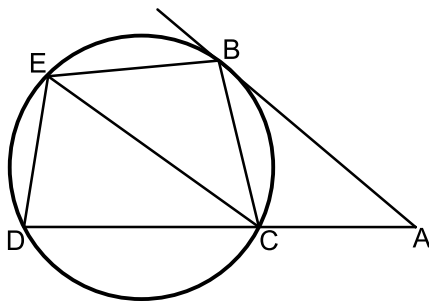
- (13)** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל. הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

- (14)** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא b והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא α . הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:



- 15** דרך הקודקודים A, C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $(AE = BE)$. נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.
- הוכח כי המיתר CE חוצה את זווית C.
 - רדיוס המעגל יסומן ב- R. הבע באמצעות R את היקף המקבילית.
 - מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.



- 16** מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD. מעבירים את המיתרים BC ו-BE, אשר זהים באורכם. כמו כן מעבירים את המיתר DE. אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.
- הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.
 - הוכח כי: $\angle BEC = 2 \cdot \angle EDC$.
 - נתונים: $\angle A = 40^\circ$, $AC = 6$ ס"מ, $AB = 9$ ס"מ, $CE = 8$ ס"מ. חשב את שטח המרובע ABEC.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = 15.665 \quad \text{ב. } x = 8.114 \quad \text{ג. } x = 3.931 \quad \text{ד. } \alpha = 40.005^\circ \quad \text{ה. } \alpha = 29.745^\circ$$

$$(2) \quad \angle BAD = 43.24^\circ, AD = 8.236 \text{ ס"מ}$$

$$(3) \quad \angle BAE = 22.792^\circ, BE = 3.294 \text{ ס"מ}$$

$$(4) \quad 106.26^\circ, 73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ$$

$$(5) \quad R = 6.04 \text{ ס"מ}$$

$$(6) \quad S = 28.618 \text{ סמ"ר}$$

$$(7) \quad P = a \left(1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$(8) \quad AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}, \quad BD = \frac{b}{2 \tan \alpha}$$

$$(9) \quad AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \quad S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2}$$

$$(10) \quad \frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2}$$

$$(11) \quad \text{א. } S = \frac{k^2}{\cos 2\alpha \tan^2 \alpha} \quad \text{ב. } 24 \text{ סמ"ר}$$

$$(12) \quad \text{א. } DE = t\sqrt{10}, EF = t\sqrt{11.25}, DF = t\sqrt{18.25} \quad \text{ב. } 81.86^\circ, 51^\circ, 47.14^\circ$$

$$(13) \quad R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2}$$

$$(14) \quad \frac{1}{2} b \sin \alpha + \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}}, \quad S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$(15) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } 6R \quad \text{ג. } 4 \text{ ס"מ}$$

$$(16) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג. } 32.78 \text{ סמ"ר}$$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 9 - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

117	1. זהויות יסוד
121	2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות
123	3. מעגל היחידה
126	4. סכום והפרש זוויות
130	5. זווית כפולה
133	6. סכום והפרש פונקציות

זהויות יסוד:

סיכום כללי:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ $\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- 90°
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	
		קשרים בין פונקציות

שאלות:

הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 & \text{(2)} & \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha & \text{(1)} \\
 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha & \text{(4)} & \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \tan \alpha & \text{(3)} \\
 (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 & \text{(6)} & \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 & \text{(5)} \\
 \sin^2(\alpha + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - \alpha) = 1 & \text{(8)} & \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha & \text{(7)} \\
 \frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha & \text{(10)} & \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha & \text{(9)} \\
 \cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1 & \text{(12)} & \frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot \alpha & \text{(11)} \\
 \frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha & \text{(14)} & \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot \alpha & \text{(13)} \\
 \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha & \text{(16)} & \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha & \text{(15)}
 \end{array}$$

הוכחות מתקדמות:

$$(17) \quad \frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha} + \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = 2 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(18) \quad \frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha} + \frac{1-\tan \alpha}{1+\tan \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(19) \quad (\cot \alpha - \tan \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = (1 + \cot^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(20) \quad \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \cot^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(21) \quad 1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \cos^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(22) \quad \left(\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \right)^2 = 4 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(23) \quad \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(24) \quad \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

$$(25) \quad \sin \alpha + \cos \alpha = k \quad \text{נתון כי:}$$

הבע באמצעות k את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

ב. $\sin \alpha - \cos \alpha$

ג. $\tan \alpha + \cot \alpha$

ד. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

$$(26) \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{נתון כי:}$$

מבלי למצוא את α חשב את: $\tan^2 \alpha - 2 \cot^2 \alpha$

(27) נתון כי: $\tan \alpha = \sqrt{7}$.

מבלי למצוא את α חשב את: $\frac{\sqrt{7} \sin \alpha + 6 \cos \alpha}{\sqrt{28} \sin \alpha - \cos \alpha}$.

(28) חשב את ערך המכפלה הבאה: $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdots \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$.

תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) שאלת הוכחה.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.

$$(25) \text{ א. } \frac{k^2 - 1}{2} \quad \text{ב. } \pm \sqrt{2 - k^2} \quad \text{ג. } \frac{2}{k^2 - 1} \quad \text{ד. } \frac{k}{2}(3 - k^2)$$

$$(26) -7.75$$

$$(27) 1$$

$$(28) 1$$

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

סיכום כללי:

$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin \alpha$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos \alpha$
ϕ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan \alpha$
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ϕ	$\cot \alpha$

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של 0° ו- 90° תלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$ אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos \alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan \alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot \alpha$.

שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

$$(1) \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$$

$$(2) \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$(3) \tan 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$\cdot \frac{1 + \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ} \quad (4)$$

$$\cdot \cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ \quad (5)$$

$$\cdot \frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4 \left(\sin^2 60^\circ - \frac{1}{4} \right)} \quad (7)$$

$$\cdot \frac{27 \cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} \quad (8)$$

תשובות סופיות:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

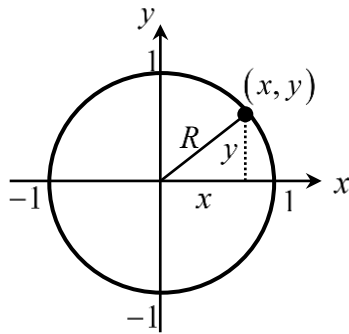
$$-\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$2\sqrt{6} \quad (8)$$

מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

סיכום כללי:

הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קונוי שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ מתאימות לזוויות של 270° , 180° , 90° , 0° .

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
II	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$
III	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$
VI	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
סימנים			

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{matrix} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{matrix}}, \quad \boxed{\begin{matrix} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{matrix}}$$

כאשר k הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

שאלות:

(1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120^\circ$	ב. $\cos 150^\circ$
ג. $\tan 160^\circ$	ד. $\cot 130^\circ$
ה. $\sin 215^\circ$	ו. $\cos 245^\circ$
ז. $\tan 230^\circ$	ח. $\cot 200^\circ$
ט. $\sin 300^\circ$	י. $\cos 310^\circ$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150^\circ$	ב. $\cos 210^\circ$	ג. $\tan 120^\circ$
ד. $\sin 330^\circ$	ה. $\tan 225^\circ$	ו. $\sin 315^\circ$
ז. $\cos 120^\circ$	ח. $\tan(-30^\circ)$	ט. $\cos(-45^\circ)$
י. $\sin 510^\circ$	יא. $\cos 930^\circ$	יב. $\tan(-225^\circ)$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

- א. $(\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ))^2$
 ב. $8\sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ)$
 ג. $\frac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ$

(4) הוכח כי אם α, β ו- γ הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

- א. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$
 ב. $\sin\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \sin 60^\circ & \text{ב. } -\cos 30^\circ & \text{ג. } -\tan 20^\circ & \text{ד. } -\cot 50^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ה. } -\sin 35^\circ & \text{ו. } -\cos 65^\circ & \text{ז. } \tan 50^\circ & \text{ח. } \cot 20^\circ \end{array}$$

$$\text{ט. } -\sin 60^\circ \quad \text{י. } \cos 50^\circ$$

$$(2) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \frac{1}{2} & \text{ב. } -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{ג. } -\sqrt{3} & \text{ד. } -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ה. } 1 & \text{ו. } -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{ז. } -\frac{1}{2} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ט. } \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{י. } \frac{1}{2} & \text{יא. } -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{יב. } -1 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } -1 \end{array} \quad \text{ג. } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$$

$$(4) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cos(\alpha \pm \beta)$ יחושב לפי:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}\end{aligned}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור $\tan(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75^\circ$	ב. $\sin 15^\circ$	ג. $\sin 105^\circ$
ד. $\sin(-15^\circ)$	ה. $\cos 75^\circ$	ו. $\cos 15^\circ$
ז. $\cos(-105^\circ)$	ח. $\cos 165^\circ$	ט. $\cos(-195^\circ)$

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

- א. $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ$
 ב. $5 \cos 50^\circ \cos 20^\circ + 5 \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(3) הוכח את הזהויות הבאות :

$$\text{א. } \sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$$

$$\text{ב. } \cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\text{ג. } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\text{ד. } \tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

(4) נתון: $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = \frac{8}{17}$ ו- α, β זוויות חדות.מבלי למצוא את הערכים של α ו- β חשב :

$$\text{א. } \sin(\alpha + \beta)$$

$$\text{ב. } \cos(\alpha + \beta)$$

$$\text{ג. } \tan(\alpha + \beta)$$

(5) הוכח את הזהות: $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$ (6) הוכח את הזהות: $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \sin 3\alpha + \cos \alpha$ (7) הוכח את הזהות: $\tan 7\alpha - \tan 5\alpha - \tan 2\alpha = \tan 7\alpha \tan 5\alpha \tan 2\alpha$ (8) הוכח את הזהות: $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ (9) הוכח את הזהות: $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

(10) הוכח את הזהות הבאה :

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

(11) הוכח כי מתקיים : $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$

(12) הוכח כי מתקיים : $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$

(13) נתון כי : $\sin 76^\circ = m$. הבע את $\sin 31^\circ$ באמצעות m .

(14) הזוויות α ו- β הן זוויות חדות.

נתון כי : $\tan \beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$ ו- $\tan \alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$

הראה כי מתקיים : $\alpha + \beta = 60^\circ$.

(15) היעזר בנוסחה : $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ ומצא את $\tan x$ ו- $\tan y$

אם ידוע כי : $\tan(x+y) = -3$ ו- $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$. הבחן בין שני מקרים.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{lllll} \text{א. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ב. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \text{ג. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ד. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ה. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \text{ו. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ז. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ט. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{84}{85} & \text{ב. } -\frac{13}{85} \\ \text{ג. } -6\frac{6}{13} \end{array}$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (m - \sqrt{1-m^2})$$

(15) שאלת הוכחה.

$$(16) \quad 1 \text{ ו- } 2 \text{ או } -\frac{1}{2} \text{ ו- } -1.$$

זווית כפולה:

סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

שאלות:

(1) הוכח את הזהויות הבאות:

- א. $4\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$
 ב. $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$
 ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$
 ד. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$
 ה. $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$
 ו. $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$
 ז. $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 1$
 ח. $\cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$

(2) הוכח את הזהות: $\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$

לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

(3) הוכח את הזהות: $\cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$

לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

(4) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\sin \alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos \alpha$

ב. $\tan \alpha$

ג. $\sin 2\alpha$

ד. $\cos 2\alpha$

ה. $\tan 2\alpha$

(5) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin \alpha$.

ב. $\cos \alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

(6) נתונה זווית α ברביע הראשון וזווית β ברביע השני המקיימות: $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

ו- $\cos \beta = -0.8$. מבלי למצוא את α ו- β חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha + \beta)$.

ב. $\cos(\alpha + \beta)$.

ג. $\sin(2\alpha + \beta)$.

(7) נתון כי $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.2$ עבור $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. חשב את $\sin 2\alpha$.

(8) פשט את הביטוי הבא: $\sqrt{\frac{1 + \cos 8\alpha}{2}}$.

(9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 16^\circ \cos 16^\circ}{3 - 6 \sin^2 29^\circ}$.

(10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin^2 78^\circ - \cos^2 78^\circ}{\sin 66^\circ}$.

(11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{5 \tan 15^\circ (1 - 2 \cos^2 15^\circ)}{1 - \tan^2 15^\circ}$.

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{9}{41} & \text{ב. } 4\frac{4}{9} \\ \text{ג. } \frac{720}{1681} & \text{ד. } -\frac{1519}{1681} \end{array}$$

$$\text{ה. } -\frac{720}{1519}$$

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{5}{13} & \text{ב. } \frac{12}{13} \\ \text{ג. } \frac{120}{169} & \text{ד. } \frac{119}{169} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{16}{65} & \text{ב. } -\frac{63}{65} \\ \text{ג. } -\frac{123}{845} & \end{array}$$

$$(7) \quad 0.44$$

$$(8) \quad \cos 4\alpha$$

$$(9) \quad \frac{1}{6}$$

$$(10) \quad 1$$

$$(11) \quad -1.25$$

סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\
 \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}
 \end{aligned}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos \alpha$
- (2) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 7\alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin 2.5\alpha \cos 4.5\alpha$
- (3) הוכח את הזהות הבאה : $\cos \alpha + \cos 5\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha$
- (4) הוכח את הזהות הבאה : $\cos 5\alpha - \cos 2\alpha = -2 \sin 3.5\alpha \cos 1.5\alpha$
- (5) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה : $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$
- (7) הוכח את הזהות הבאה : $\sin(2\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \sin \beta$
- (8) הוכח את הזהות הבאה : $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = 2 \cos \alpha$

$$(9) \quad \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2 \sin \alpha : \text{ הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(10) \quad \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha : \text{ הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(11) \quad \tan \alpha + \tan 3\alpha = \frac{2 \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} : \text{ הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(12) \quad \text{פשט את הביטוי : } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} \text{ ומצא את ערכו מבלי להיעזר}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6} \text{ במחשבון אם ידוע כי}$$

$$(13) \quad \text{נתון כי } \alpha \text{ ו- } \beta \text{ הן זוויות חדות המקיימות : } \sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ ו- } \sin \beta = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ : \text{ הראה כי}$$

$$(14) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \cos 6\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha = -\sin 7\alpha \sin \alpha$$

$$(15) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 5\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha$$

$$(16) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 52.5^\circ \cdot \sin 7.5^\circ$$

$$(17) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \frac{\sin 35^\circ \sin 55^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - 0.25}$$

$$(18) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$(19) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 5^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 85^\circ$$

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) $-\frac{7}{9}$.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.

(17) 1.

(18) $\frac{1}{8}$.(19) $\frac{1}{64}$.

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 10 - משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים

136	1. משוואות טריגונומטריות כלליות
139	2. משוואות הנפתרות על ידי טכניקה אלגברית
141	3. משוואות הנפתרות על ידי זהויות יסוד
143	4. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של מעגל היחידה
144	5. משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס
145	6. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות
146	7. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של זווית כפולה
147	8. משוואות מהצורה $a \sin(x) + b \cos(x) = c$
148	9. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש פונקציות
150	10. משוואות עם תחום נתון
151	11. משוואות עם זוויות ברדיאנים
155	12. אי שוויונים טריגונומטריים

משוואות טריגונומטריות כלליות:

סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 360^\circ k$, $x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 360^\circ k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

(1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ב.} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ג.} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{ד.}$$

(2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ב.}$$

(3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{א.} \quad \tan x = -1 \quad \text{ב.}$$

(4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית) :

א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$

(5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות) :

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2 \cos 2x = -\sqrt{3}$

ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3 \sin 2x = 2$

ה. $3 \cos 3x = 1$ ו. $2 \tan 4x = 1$

(6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב) :

א. $\sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50^\circ - x) = 1.3$

(7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים) :

א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x + 30^\circ)$

ג. $\sin x = \sin(120^\circ - x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$

ה. $\cos x = \cos(40^\circ - x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$

ז. $\tan 2x = \tan(60^\circ - x)$

(8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות) :

א. $\sin x = 0$ ב. $\sin x = 1$

ג. $\sin x = -1$ ד. $\cos x = 0$

ה. $\cos x = 1$ ו. $\cos x = -1$

ז. $\tan x = 0$ ח. $\tan x = 1$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 135^\circ + 360^\circ k$
 ג. $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 240^\circ + 360^\circ k$ ד. $x_1 = -30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$
- (2) א. $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$
- (3) א. $x = 30^\circ + 180^\circ k$ ב. $x = 135^\circ + 180^\circ k$
- (4) א. $x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k$
 ג. $x = 78.69^\circ + 180^\circ k$
- (5) א. $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$, $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$ ב. $x_1 = 75^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = -75^\circ + 180^\circ k$
 ג. $x = -9^\circ + 36^\circ k$ ד. $x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$
 ה. $x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k$ ו. $x = 6.64^\circ + 45^\circ k$
- (6) א. $x_1 = 105^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = -45^\circ + 180^\circ k$ ב. $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$, $x_2 = 40^\circ + 120^\circ k$
 ג. $x = 60^\circ + 180^\circ k$ ד. $x = -2.431^\circ + 180^\circ k$
- (7) א. $x_1 = 180^\circ k$, $x_2 = 45^\circ + 90^\circ k$ ב. $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$
 ג. $x = 20^\circ + 180^\circ k$ ד. $x = 90^\circ k$
 ה. $x = 180^\circ k$ ו. $x = 20^\circ + 60^\circ k$
 ז. $x = 180^\circ k$ ח. $x = 90^\circ + 360^\circ k$ ט. $x = 180^\circ + 360^\circ k$
 י. $x = 90^\circ + 180^\circ k$ יא. $x = 360^\circ k$ יב. $x = 180^\circ + 360^\circ k$
 יג. $x = 180^\circ k$ יד. $x = 45^\circ + 180^\circ k$

משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad (2) \qquad \cos^2 x = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad (4) \qquad \tan^2 2x = 3 \quad (3)$$

$$2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (6) \qquad \sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \quad (5)$$

$$3 \sin^2 x - \sin x = 2 \quad (8) \qquad 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (7)$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x = 3 \quad (10) \qquad 6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (9)$$

$$\tan^2 x = 4 \tan x - 1 \quad (12) \qquad \tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad (14) \qquad \cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad (15)$$

תשובות סופיות:

$$. x_{1,2} = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = 330^\circ + 360^\circ k, x_4 = 210^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 90^\circ k, x_2 = -30^\circ + 90^\circ k \quad (3)$$

$$. x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 60^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 90^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k, x_3 = 75^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k, x_3 = -30^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = -41.8^\circ + 360^\circ k, x_3 = 221.8^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = -19.4^\circ + 360^\circ k, x_4 = 199.4^\circ + 360^\circ k \quad (9)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (10)$$

$$. x_1 = -45^\circ + 180^\circ k, x_2 = 75.964^\circ + 180^\circ k \quad (11)$$

$$. x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k \quad (12)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (13)$$

$$. x = 180^\circ + 360^\circ k \quad (14)$$

$$. x = 45^\circ + 90^\circ k, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad (15)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ $\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- 90°
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	
		קשרים בין פונקציות

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x = \cos(x + 45^\circ) \quad (2)$$

$$\sin x = \cos x \quad (1)$$

$$2 \cos^2 x = 3 \sin x \quad (4)$$

$$\cos x = \frac{2}{3} \sin^2 x \quad (3)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \quad (6)$$

$$\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$\sin x - \tan x = 0 \quad (8)$$

$$\sin^2 x + 2 \cos^2 x = 1.5 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$. x = 45^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 22.5^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad (3)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$. x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

$$x_1 = 30^\circ + 120^\circ k, x_2 = -90^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$. x_{1,2} = \pm 45^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 135^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

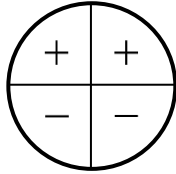
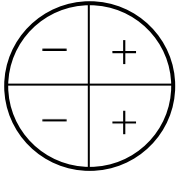
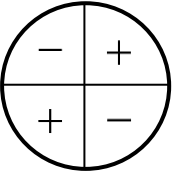
$$. x = 180^\circ k \quad (8)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
I II III	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
סימנים			

זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\begin{array}{|l} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{array}, \quad \begin{array}{|l} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{array}$$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \cos 2x = -\cos 3x & (2) \\ \sin 3x = -\cos(180^\circ - x) & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sin x = -\sin 3x & (1) \\ \sin(x + 30^\circ) = -\cos x & (3) \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 180^\circ + 360^\circ k, x_2 = 36^\circ + 72^\circ k & (2) \\ x_1 = 22.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 45^\circ + 180^\circ k & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_1 = 90^\circ k, x_2 = -90^\circ + 180^\circ k & (1) \\ x = 120^\circ + 180^\circ k & (3) \end{array}$$

משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה: $\sin x = a \cos x$ לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$ (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$). כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a \cos x \quad / : \cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = a$$

$$x = \tan^{-1}(a) + 180^\circ k$$

הערה:

יש לבדוק האם ערכי x שמקיימים $\cos x = 0$ מהווים פתרון למשוואה. אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$3 \sin x = \cos x \quad (2)$$

$$\sin x = 2 \cos x \quad (1)$$

$$2 \sin x = -5 \cos x \quad (4)$$

$$4 \sin x = 7 \cos x \quad (3)$$

$$3 \sin^2 x = \cos^2 x \quad (6)$$

$$\sin^2 x = 8 \cos^2 x \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$. x = 63.43^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 18.43^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 60.25^\circ + 180^\circ k \quad (3)$$

$$. x = -68.19^\circ + 180^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 70.52^\circ + 180^\circ k, x_2 = -70.52^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, x_2 = -30^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$	סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin(x + 45^\circ) \sin(x - 45^\circ) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \sin x = \sin(60^\circ - x) \quad (1)$$

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x \quad (4)$$

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2 \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$. x = 19.11^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 90^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 15^\circ + 60^\circ k \quad (3)$$

$$. x_{1,2} = \pm 60^\circ + 180^\circ k, x_3 = 90^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$	סינוס זווית כפולה
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$	קוסינוס זווית כפולה

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| $\sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0$ (2) | $\sin x - \sin 2x = 0$ (1) |
| $2 \cos 2x + \sin 4x = 0$ (4) | $4 \cos x = \sin 2x$ (3) |
| $\cos 2x = 2 \sin x$ (6) | $3 \cos x - \cos 2x = 0$ (5) |
| $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$ (8) | $\sin x + \cos 2x = 1$ (7) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---|---|
| $x_1 = 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 135^\circ + 360^\circ k$ (2) | $x_1 = 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 120^\circ k$ (1) |
| $x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 135^\circ + 180^\circ k$ (4) | $x = 90^\circ + 180^\circ k$ (3) |
| $x_1 = 21.1^\circ + 360^\circ k, x_2 = 158.9^\circ + 360^\circ k$ (6) | $x_{1,2} = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k$ (5) |
| $x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, x_3 = 150^\circ + 360^\circ k$ (7) | |
| $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 120^\circ + 360^\circ k, x_4 = 240^\circ + 360^\circ k$ (8) | |

משוואות מהצורה: $a \sin(x) + b \cos(x) = c$

סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה: $a \sin x + b \cos x = c$ לצורה: $\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$.

מציאת זווית α המקיימת: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ תאפשר לכתוב: $\sin x + \tan \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a}$.

שימוש בזהות: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ וזהות: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ יובילו:

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \quad / \cdot \cos \alpha$$

$$\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

אם נסמן: $\frac{c}{a} \cos \alpha = k$ נקבל את המשוואה: $\sin(x + \alpha) = k$ כאשר α ו- k ידועים. מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5 \cos x - 6 \sin x = 1 \quad (2)$$

$$10 \sin x + 3 \cos x = 5 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = \sqrt{12} \quad (3)$$

$$\cos x + \cos(60^\circ + x) = \sqrt{2} + \cos(60^\circ - x) \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$x_1 = 11.91^\circ + 360^\circ k, x_2 = 134.69^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$x = 15^\circ + 180^\circ k \quad (3) \quad x_1 = 227.156^\circ + 360^\circ k, x_2 = 32.44^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = -60^\circ + 720^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = -105^\circ + 360^\circ k, x_2 = 15^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$	סכום והפרש פונקציות עבור סינוס
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x \quad (1)$$

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 2x \quad (2)$$

$$\sin x + \sin 3x = 4 \sin^3 x \quad (3)$$

$$\sin 6x - \sin 4x = 1 - \cos 2x \quad (4)$$

$$(\sin 5x + \sin 7x)^2 = (\cos 5x + \cos 7x)^2 \quad (5)$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 3x + \cos 5x = 1 \quad (6)$$

$$1 + \sin x + \sin 7x = \cos 8x \quad (7)$$

$$2 \sin 3x (\cos 2x + \cos x) = \sin x + \sin 2x \quad (8)$$

$$\sin(x + 60^\circ) - \sin x = \sin(2x + 60^\circ) - \sin 2x \quad (9)$$

$$\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin x \cos x \quad (10)$$

$$\sin 8x \sin 2x + \cos 10x = 0 \quad (11)$$

$$\cos x + 3 \sin x = 1 + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (12)$$

$$4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0 \quad (13)$$

$$4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 \quad (14)$$

תשובות סופיות:

$$x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (1)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 180^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = 37.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (3)$$

$$x_1 = 15^\circ + 60^\circ k, x_2 = 180^\circ k, x_3 = -22.5^\circ + 90^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = 36^\circ k, x_2 = \left(\frac{180}{7}\right)^\circ + \left(\frac{180}{7}\right)^\circ k \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \pm 30^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

$$x_1 = -\left(12\frac{6}{7}\right)^\circ k + \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ k, x_2 = 45^\circ k \quad (7)$$

$$x_1 = 40^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$x_1 = -20^\circ + 120^\circ k, x_2 = 360^\circ k \quad (9)$$

$$x_1 = 52.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = -7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (10)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 11.25^\circ + 22.5^\circ k \quad (11)$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (12)$$

$$x_1 = 7.5^\circ + 15^\circ k, x_2 = 90^\circ k \quad (13)$$

$$x_1 = 60^\circ + 180^\circ k, x_2 = 22.5^\circ + 45^\circ k \quad (14)$$

משוואות עם תחום נתון:

סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

- (1) $[0^\circ:180^\circ]$, $8\sin x - 4 = 0$
- (2) $[-90^\circ:90^\circ]$, $\sin 2x = \sin(x + 60^\circ)$
- (3) $[-90^\circ:90^\circ]$, $3\cos(2x + 30^\circ) + 1 = 0$
- (4) $[0^\circ:360^\circ]$, $\cos(50^\circ - x) = -\cos x$
- (5) $[-30^\circ:30^\circ]$, $2\sin 3x - 5\cos 3x = 0$
- (6) $[0^\circ:180^\circ]$, $2\cos^2 3x = \sin 6x + 1$
- (7) $[-180^\circ:180^\circ]$, $\cos 4x + 1 = 3\sin 2x$
- (8) $[-180^\circ:180^\circ]$, $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x = 0$

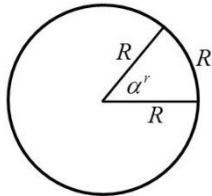
תשובות סופיות:

- (1) $x = 30^\circ, 150^\circ$
- (2) $x = -80^\circ, 40^\circ, 60^\circ$
- (3) $x = 39.736^\circ, -69.736^\circ$
- (4) $x = 115^\circ, 295^\circ$
- (5) $x = 22.733^\circ$
- (6) $x = 7.5^\circ, 37.5^\circ, 67.5^\circ, 97.5^\circ, 127.5^\circ, 157.5^\circ$
- (7) $x = -165^\circ, -105^\circ, 15^\circ, 75^\circ$
- (8) $x = -138.19^\circ, -41.81^\circ, 90^\circ$

משוואות עם זוויות ברדיאנים:

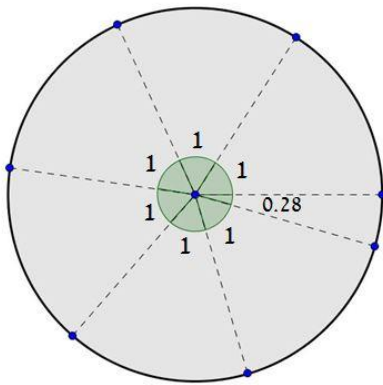
סיכום כללי:

הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו R , תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P = 2\pi \cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן. מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 2\pi k$, $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + \pi k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + \pi k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

(1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

א. 30°	ב. 90°	ג. 75°	ד. 120°
ה. 210°	ו. 315°	ז. 18°	ח. 285°
ט. -15°	י. -80°	יא. 510°	יב. -390°

(2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

א. π	ב. 2π	ג. 4π	ד. 1.5π
ה. $\frac{1}{2}\pi$	ו. $\frac{\pi}{4}$	ז. $\frac{\pi}{6}$	ח. $\frac{1}{18}\pi$
ט. $\frac{13}{18}\pi$	י. $\frac{19}{12}\pi$	יא. $1\frac{1}{6}\pi$	יב. $2\frac{1}{4}\pi$

(3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x = 1$, $\left[0 : \frac{1}{3}\pi\right]$	ב. $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$, $[0 : \pi]$
ג. $3 - 3\tan \frac{x}{2} = 0$, $[0 : 2\pi]$	ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0 : \pi]$
ה. $4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$, $\left[0 : \frac{1}{2}\pi\right]$	ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$, $\left[-\frac{5\pi}{18} : \frac{5\pi}{18}\right]$
ז. $5 - 5\tan(4x - 0.1\pi) = 0$, $\left[0 : \frac{\pi}{3}\right]$	ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7$, $\left[-\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{4}\right]$

(4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, $\left[0 : \frac{\pi}{2}\right]$	ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0$, $\left[-\frac{\pi}{8} : \frac{\pi}{8}\right]$
ג. $2\tan^2 x - 18 = 0$, $[0 : \pi]$	ד. $3\sin x \cos x + 3\cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{3} : \frac{\pi}{3}\right]$
ה. $\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$	ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$, $[-\pi : \pi]$
ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0$, $[-\pi : 0]$	ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0$, $[0 : 2\pi]$

(5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \leq x \leq \pi, \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב. $0 \leq x \leq \pi, \tan x = 4 \sin x$

ג. $0 \leq x \leq 2\pi, 2 \sin^2 x = 3 \cos x$

(6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $[-\pi : \pi], \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב. $[0 : \pi], \sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג. $[0 : \pi], \sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right], \tan x = -\tan 2x$

(7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \leq x \leq \pi, \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $[-\pi : \pi], \cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \leq x \leq \pi, \cos 4x + \sin^2 x = 1$

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$
ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$
יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$
- (2) א. 180° ב. 360° ג. 720° ד. 270° ה. 90°
ו. 45° ז. 30° ח. 10° ט. 130° י. 285°
יא. 210° יב. 405°
- (3) א. $x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$ ב. $x = \frac{5\pi}{6}$ ג. $x = \frac{\pi}{2}$ ד. $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$
ה. $x = 0$ ו. $x = \frac{2\pi}{9}$ ז. $x = 0.0875\pi$ ח. $x = 0.224\pi$
- (4) א. $x = \frac{\pi}{3}$ ב. ϕ ג. $x = 0.398\pi, 0.602\pi$ ד. ϕ
ה. $x = 0, 0.437\pi$ ו. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
ז. $x = -\frac{\pi}{4}, -0.615\pi$ ח. $x = 0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi$
- (5) א. $x = \frac{\pi}{8}$ ב. $x = 0, 0.42\pi, \pi$ ג. $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
- (6) א. $x = \frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}$ ב. $x = \frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72}$
- (7) א. $x = \pm \frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi$ ב. $x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$
ג. $x = \pm \frac{\pi}{3}$ ד. $x = 0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi$

אי שוויונים טריגונומטריים:

סיכום כללי:

- כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:
1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
 2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
 3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
 - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
 - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
 4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

- | | |
|---|---|
| (1) $[0, 180^\circ] \sin x < \frac{1}{2}$ | (2) $[0, 1.5\pi] 2\cos x - \sqrt{3} \geq 0$ |
| (3) $(-90^\circ, 90^\circ) 2\cos^2 x + \sin x \geq 1$ | (4) $[0, \pi] \sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$ |
| (5) $[0^\circ, 180^\circ] 1 < 2\sin(x + 10^\circ) < \sqrt{3}$ | (6) $(0 < x < \pi) \sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 1$ |
| (7) $[0, 2\pi] \tan x + \cot x > 0$ | (8) $(-\pi < x < \pi) \tan(x) > \frac{1}{\sqrt{3}}$ |

תשובות סופיות:

$$(1) \quad 0^\circ \leq x < 30^\circ, 150^\circ \leq x \leq 180^\circ$$

$$(2) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$(3) \quad -30^\circ \leq x < 90^\circ$$

$$(4) \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$$

$$(5) \quad 20^\circ < x < 50^\circ, 110^\circ < x < 140^\circ$$

$$(6) \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(7) \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

$$(8) \quad -\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}, x \neq -\frac{\pi}{2} : \text{או} \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}, x \neq \frac{\pi}{2}$$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 11 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

157	1. שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים
165	2. שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש
174	3. שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה
178	4. שאלות מסכמות

שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

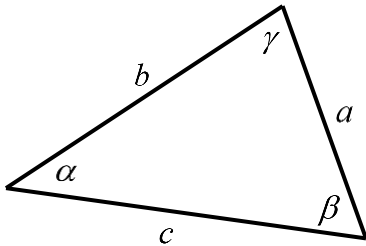
סיכום כללי:

משפט הסינוסים:

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

בצורה מתמטית:



משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{או} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

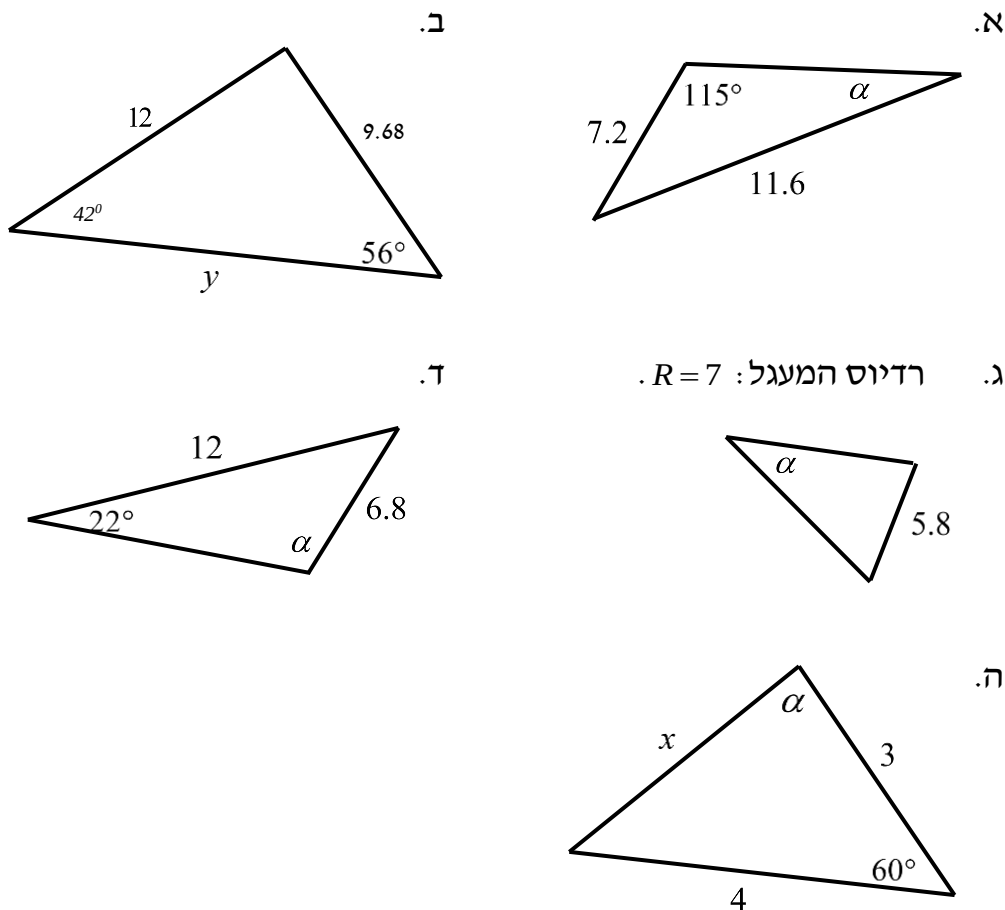
בקוסינוס הזווית שבניהן:

מתי נשתמש בכל משפט:

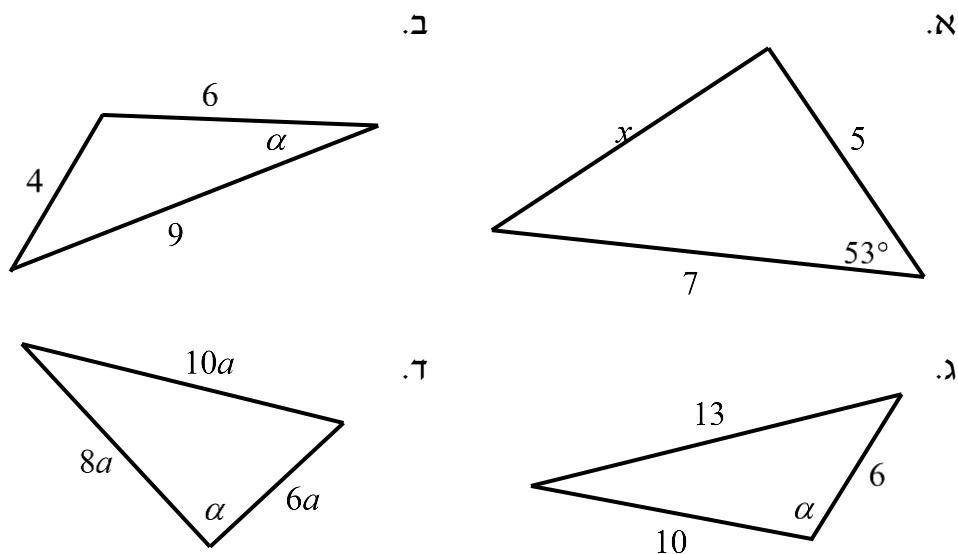
- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
 - נתונות שתי זוויות וצלע.
 - נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
 - נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
 - נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
 - נתונות שלוש צלעות.
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

שאלות:

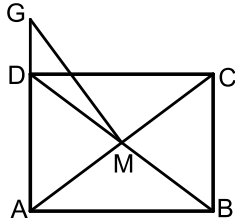
1 מצא את ערכו של $a/x/y$ במשולשים הבאים
 (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):



2 מצא את ערכו של a/x במשולשים הבאים:

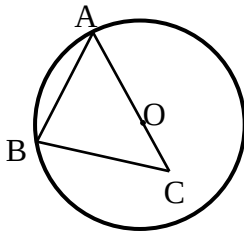


- (3) נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא 70° . CD הוא חוצה זווית הבסיס $\angle C$. מצא את אורכו של הקטע AD .



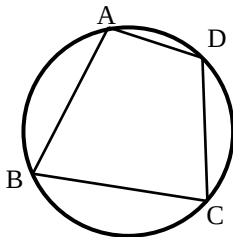
- (4) אלכסוני המלבן $ABCD$ נפגשים בנקודה M . הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD . נתון: $AD = 3$ ס"מ, $AB = 4$ ס"מ, $DG = 1.2$ ס"מ. מצא את גודלו של הקטע GM .

- (5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ. חשב את זוויות המרובע.

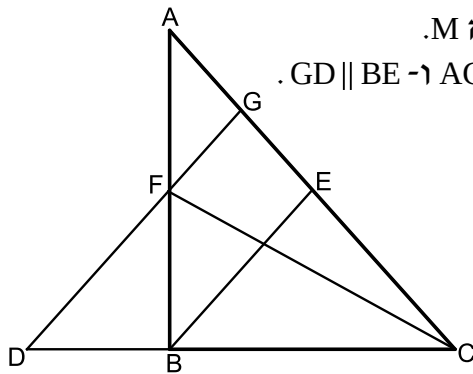


- (6) הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O . הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט. נתון: $BC = 9$ ס"מ, $OC = 3$ ס"מ, $\angle BAC = 38^\circ$. מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB .

- (7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם צלע אחת של המקבילית וזווית של 61.05° עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה. חשב את היקף המקבילית.



- (8) המרובע $ABCD$ חסום במעגל. נתון: $AB = 6$ ס"מ, $BC = 9$ ס"מ, $CD = 10$ ס"מ, ו- $AD = 4$ ס"מ. מצא את אורכם של האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.



9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.

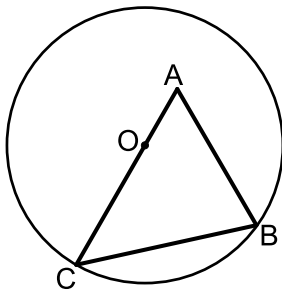
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: $AC = DC$ ו- $GD \parallel BE$.

א. הוכח: $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: $ME = 4$ ס"מ. חשב את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי: $\angle ACD = 48.189^\circ$. הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.

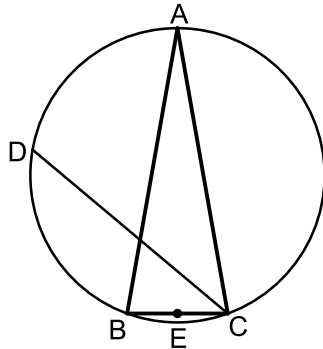
10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא 60° .



א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB. חשב את זווית ADB.

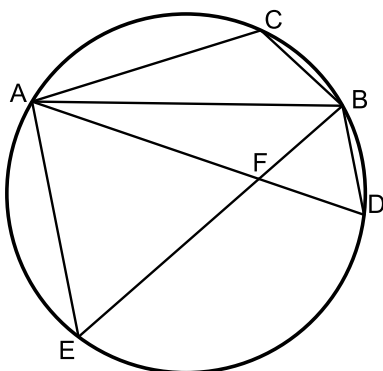
11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) החסום במעגל שרדיוסו R. הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת $\widehat{AB}$. ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא 80° .



א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

ב. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED. הבע באמצעות R את r .

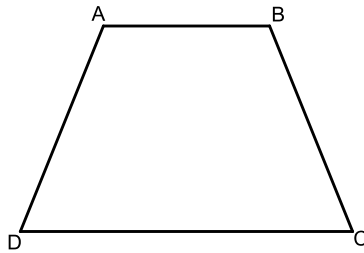
12) AB , AC ו- AD הם מיתרים במעגל המקיימים: $\widehat{BC} = \widehat{BD}$. מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים BE ו-AE. המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F. נתון כי: $AC = AF = EF$.



א. הוכח: $\triangle ABF \cong \triangle ABC$.

ב. נתון גם: $3 \cdot \angle CAB = \angle DAE$. הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

13 המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD, AD = BC$).



מידות הטרפז הן:

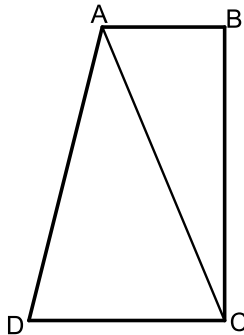
$AB = 6$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ, $CD = 12$ ס"מ.

א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).

ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.

ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

14 המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD, \angle B = 90^\circ$).



מסמנים את הבסיס: $AB = t$ וידוע כי: $AD = 3t$, $DC = 1.6t$.

היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.

א. הבע באמצעות t את אורך האלכסון AC.

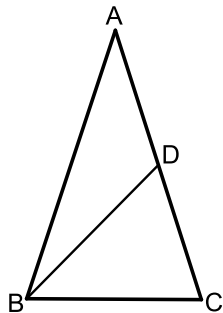
ב. ידוע גם כי: $\angle D = 60^\circ$.

i. חשב את אורך הקטע AC.

ii. חשב את שטח הטרפז.

15 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) בעל זווית

ראש 36° החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.



א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.

ב. חשב את אורך התיכון BD.

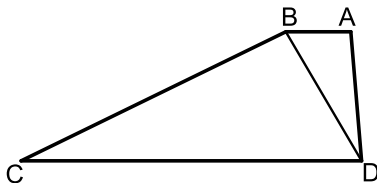
ג. מסמנים:

r_1 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

r_2 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

הוכח את היחס הבא: $\frac{r_1}{r_2} = 2 \cos 36^\circ$.

16 המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).



מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\angle BCD = \angle ADB$.

נתון כי: $AB = 5$ ס"מ, $AD = 10$ ס"מ, $CD = 20$ ס"מ.

כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.

ב. חשב את זווית C.

ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.

חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

17 באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.

ידוע כי: $\angle D = 90^\circ$.

נסמן את הצלעות באופן הבא: $AB = 6x$, $BC = 5x$, $CD = 8x$, $AD = 3x$.

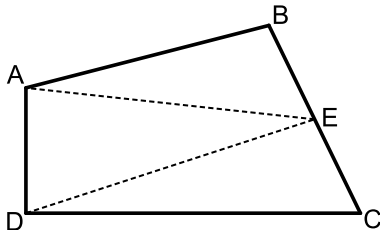
א. חשב את זווית BCD.

ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.

מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך

ש-DE מקביל ל-AB.

חשב את היחס הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$.



18 מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA, OB, OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α .

המשולש COD הוא ישר זווית $\angle CDO = 90^\circ$.

נתונים האורכים: $BO = 9$, $DO = 10$.

מסמנים: $BC = 1.4m$, $CD = 1.5m$.

א. הבע באמצעות m את $\sin \alpha$.

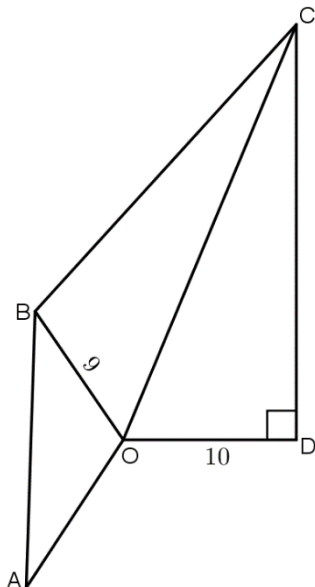
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי: $AB = m$.

מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם

את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

ג. חשב את זווית BOC.



19 במשולש ABC הזווית A היא בת 60° .

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\angle ADB = 60^\circ$.

ידוע כי $AB = \sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD

גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

א. מצא את אורך הצלע BD.

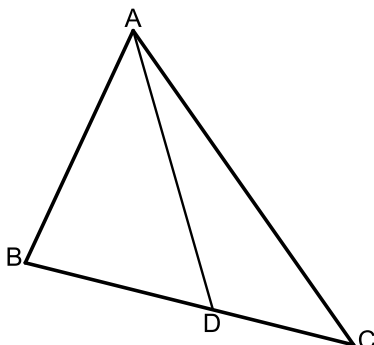
ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 5\sqrt{7} + 7$.

i. סמן: $DC = t$ והבע באמצעות t

את אורך הצלע AC.

ii. מצא את t .

ג. חשב את שטח המשולש ABC.



(20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.

הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.

הנקודות E, C ו-F נמצאות על אותו הישר.

ידוע כי המשולשים ABD, DEF ו-DCE הם

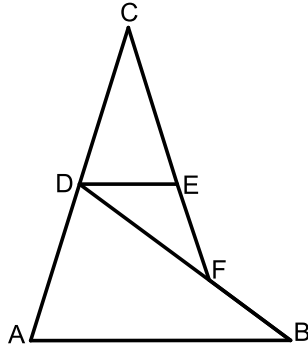
שווי שוקיים ($AB = BD$, $DC = CE$, $EF = DE$).

נתון כי: $AD = 8$.

א. חשב את אורך הקטע BF.

ב. מחברים את הנקודות B ו-C.

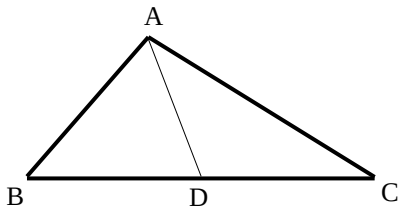
חשב את אורך הצלע BC.



(21) בשרטוט נתון: $AB = 6$ ס"מ, $AC = 8$ ס"מ,

5 ס"מ AD . הנקודה D היא אמצע הצלע BC.

חשב את אורך הקטע BC.



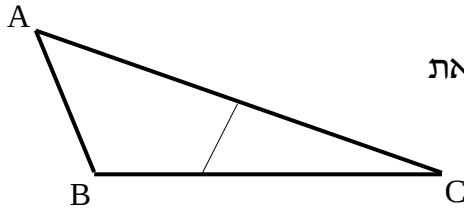
(22) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת

על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.

נתון: $AB = a$, $BC = b$.

הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.

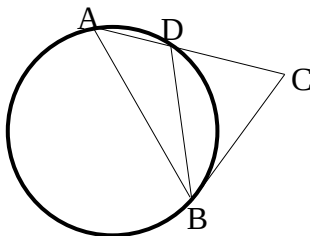


(23) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.

המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B

נפגשים בנקודה C. נתון: $\angle C = \alpha$, $\angle ADB = \beta$.

הבע באמצעות R, α ו- β את אורך הקטע BC.

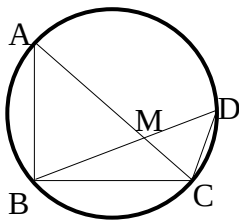


(24) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R,

שנפגשים בנקודה M. זווית $\angle B$ היא זווית ישרה.

נתון: $DC = q$, $DM = p$, $AB = k$.

הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.



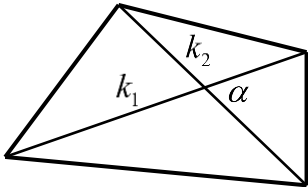
תשובות סופיות:

- (1) א. $\alpha = 34.231^\circ$ ב. $y = 14.33$ ס"מ ג. $\alpha = 155.526^\circ$ או $\alpha = 24.474^\circ$
- (2) א. $x = 5.646$ ס"מ ב. $\alpha = 20.742^\circ$ ג. $\alpha = 105.962^\circ$ ד. $\alpha = 90^\circ$
- (3) $AD = 13.064$ ס"מ
- (4) $GM = 3.360$ ס"מ
- (5) $66.444^\circ, 113.556^\circ, 41.810^\circ, 138.190^\circ$
- (6) $R = 9.242$ ס"מ, $AB = 14.56$ ס"מ
- (7) $P = 22$ ס"מ
- (8) $R = 5.395$ ס"מ, $AC = 10.790$ ס"מ
- (9) $DG = 18$
- (10) $R = 10.5$ ס"מ ב. 24.32°
- (11) א. $DE = 1.48R, CD = R\sqrt{3}$ ב. $r = 1.15R$
- (12) א. 68° ב. 11.66 ס"מ ג. $R = 6.29$ ס"מ
- (13) א. 9.4 ס"מ ב. 10 ס"מ
- (14) א. $AC = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$ ב. $i. 13$ ס"מ, $ii. 78$ סמ"ר
- (15) א. 9.4 ס"מ ב. 10 ס"מ
- (16) א. $\angle C = 28.9^\circ$ ג. $R = 13.77$
- (17) א. 64.04° ב. $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}} = 0.817$
- (18) א. $\sin \alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$ ב. $m = 16$ ג. 56.94°
- (19) א. 4 ב. $i. 1.5\sqrt{28} + 3 - t$ $ii. 3$ ג. $S = 18.18$
- (20) א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ
- (21) $BC = 10$ ס"מ
- (22) $DE = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$
- (23) $BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$
- (24) $MC = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$

שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

סיכום כללי:

שטחים של משולשים ומרובעים:

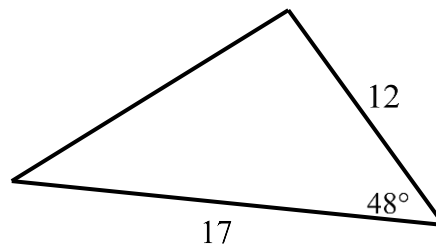


- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י: $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסונו: $S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$

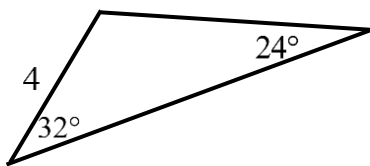
שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



ב.



26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של 15° עם הבסיסים.

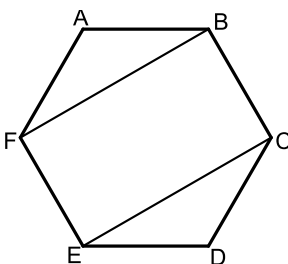
27) אורכו של מלבן הוא m ורוחבו n . הזווית שבין אלכסוני המלבן היא θ .

$$\sin \theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad \text{הוכח כי מתקיים:}$$

28) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$), BD חוצה את הזווית $\angle B$.

נתון: $\angle A = \alpha$, $AB = m$.

הבע באמצעות α ו- m את שטח המשולש BCD .



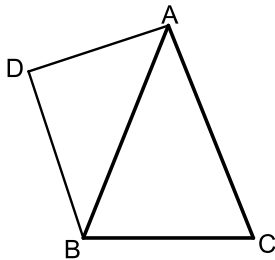
29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S .

א. הבע באמצעות S את אורך צלע המשושה.

ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן $BFEC$.

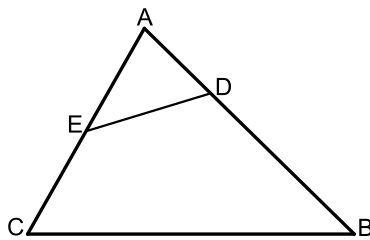
הבע באמצעות S את שטח המלבן.

(30) המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש α , $(AB = AC)$. אורך הבסיס BC הוא k .



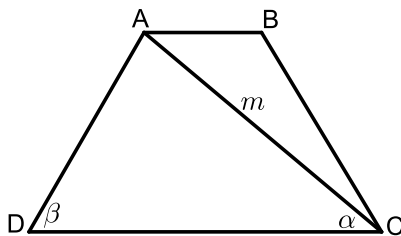
- על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\angle D = 90^\circ$.
- הבע באמצעות k ו- α את אורך שוק המשולש ABC.
 - הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$.
 - וכי: $\angle ABD = 40^\circ$. מצא את זוויות המשולש ABC.
 - חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי $k = 6$.

(31) במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.



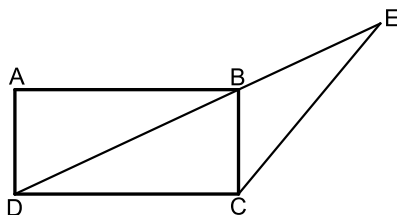
- הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D מקיימת: $AD = 3$ ס"מ.
- ידוע כי: $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$.
- מצא את אורך הקטע DE.
 - חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
 - חשב את שטח המרובע BCED.

(32) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$. הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.

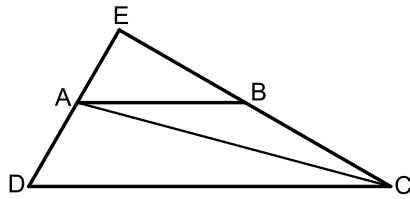


- מסמנים: $AC = m$, $\angle ACD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$.
- הבע באמצעות α , β ו- m את אורך הבסיס הגדול DC.
 - נתון כי האלכסון AC מקיים: $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$.
 - הבע באמצעות α , β ו- m את הבסיס AB.
 - חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$ ו- $m = 8$.

(33) המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.



- אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן. מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.
- ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא 115° .
- מצא את אורך הקטע CE.
 - מצא את אורך האלכסון BD.
 - חשב את שטח המשולש DCE.



34) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם

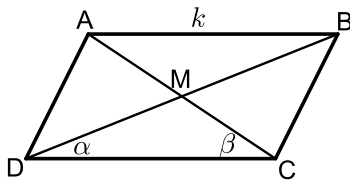
בנקודה E. ידוע כי: $DE \perp CE$.

מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C. מסמנים את הבסיס הגדול DC ב-k ואת: $\angle ACD = \alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α את הבסיס הקטן AB.

ב. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר: $\alpha = 15^\circ$, $12 \text{ ס"מ} = k$.



35) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים

את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים

בנקודה M כמתואר באיור.

מסמנים: $AB = k$, $\angle BDC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$.

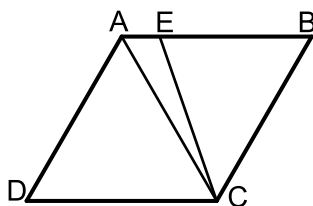
א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. הבע באמצעות α , β ו-k את שטח המשולש DMC.

ii. הבע באמצעות α , β ו-k את שטח המקבילית ABCD.

ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD} = 2$. הראה כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2 \sin^2 \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.



36) המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\angle D = 60^\circ$.

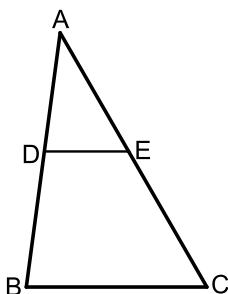
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE

כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת

אותה ביחס: $\frac{BE}{AE} = 4$.

א. חשב את זווית AEC.

ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.



37) הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.

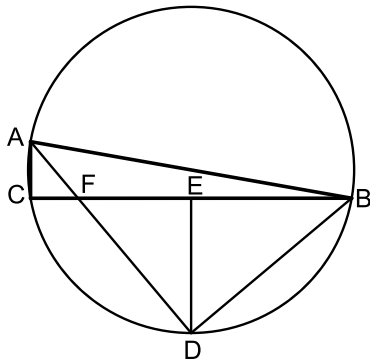
נתון כי: $CE = 13$, $BC = 15$, $BD = \sqrt{129}$.

ידוע כי זווית AED היא 60° .

א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע

ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.

ג. חשב את שטח המשולש ADE.



(38) המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.

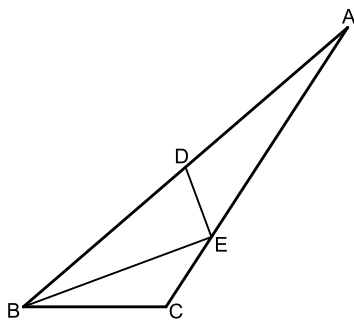
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC.

מסמנים: $DE = k$ ונתון כי: $\angle ABC = 10^\circ$.

א. הבע באמצעות k את רדיוס המעגל.

ב. הבע באמצעות k את שטח המשולש ABF.

ג. מצא את k אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.



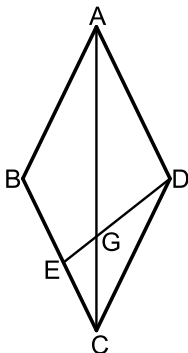
(39) במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.

הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת: $DE = CE$.

ידוע כי: $BC = 6$, $BE = 8$, $BD = 9$.

א. מצא את זווית B.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.



(40) נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.

א. חשב את זוויות המעוין.

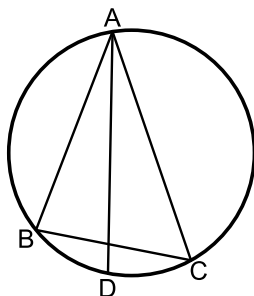
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא m .

הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.

הזווית EDC תסומן ב- α .

i. הבע באמצעות m ו- α את אורך הקטע CE.

ii. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש EGC.



(41) המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.

מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.

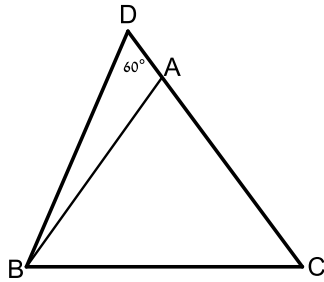
ידוע כי: $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle BAC = 40^\circ$.

מסמנים: $AD = k$.

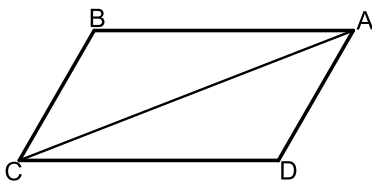
א. הבע באמצעות k את אורך המיתר BD.

ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.

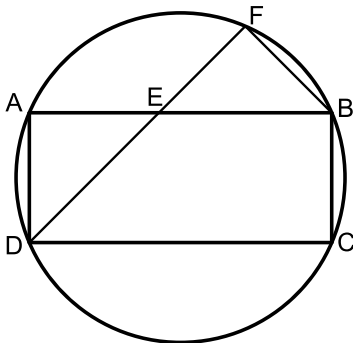
מצא את k (עגל למספר שלם).



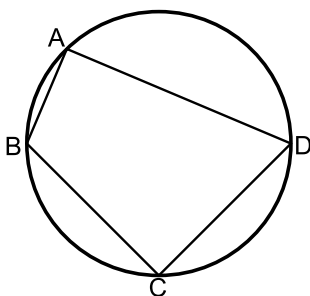
- 42** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD. ידוע כי: $\angle D = 60^\circ$. אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ. א. מצא את אורך הקטע AD. ב. חשב את שטח המשולש ABC.



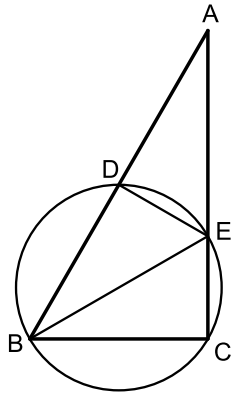
- 43** במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ. היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\angle B = 120^\circ$. א. מצא את אורכי צלעות המקבילית. ב. חשב את שטח המקבילית. ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



- 44** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל. מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF החותך את הצלע AB בנקודה E. ידוע כי: $\widehat{AF} = \widehat{CF}$. הצלע AD של המלבן תסומן ב-a. א. הוכח כי המשולש DAE שווה שוקיים. ב. נתון גם כי: $BC = BF$. i. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל. ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ (אין צורך לסרטט אותן).



- 45** המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור. ידוע כי: $AB = b$, $BC = a$, $CD = a$, $AD = 3b$. א. הבע באמצעות a ו-b את $\cos \angle BCD$. ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a = b\sqrt{5}$. ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ. הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.



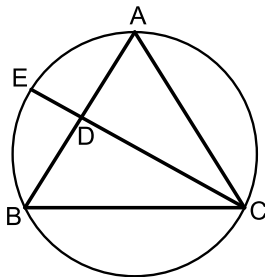
- (46)** המשולש ABC הוא ישר זווית $\angle C = 90^\circ$ ובו: $\angle B = 2\alpha$.
 מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C
 אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.
 המיתר BE חוצה את זווית B.
 א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש ABE.
 ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים
 וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.
 חשב את שטח המשולש ABE.

- (47)** במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא β , BE חוצה את זווית B ו-CD הוא הגובה לשוק AB.

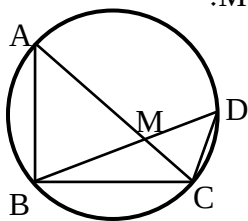
הוכח כי שטח המשולש ADE הוא:

$$S_{ADE} = -\frac{k^2 \sin \frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4 \sin \frac{3\beta}{2}}$$

- (48)** נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) החסום במעגל.
 מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.



- ידוע כי E היא אמצע הקשת $\widehat{AB}$ והיחס בין הקטעים BD ו-CD הוא 4:7.
 מסמנים: $\angle ACD = \alpha$.
 א. מצא את זוויות המשולש ABC (עגל למספרים שלמים).
 ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.



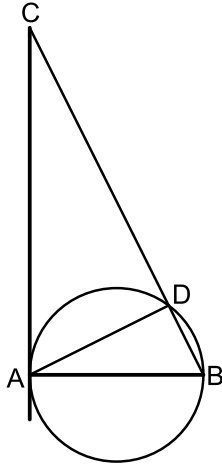
- (49)** AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M.

- זווית B היא זווית ישרה.
 נתון: $\angle MCB = \beta$, $\angle MBC = \alpha$.
 א. הבע באמצעות R, α ו- β את שטח המשולש BDC.
 ב. נתון: $\beta = 2\alpha$, $S_{BDC} = \frac{1}{2} R^2$.
 חשב את α .

(50) בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא b והזווית שליד הבסיס הגדול היא γ נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות γ ו- b את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את γ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.



(51) המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ו-AD הוא מיתר.

ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.

המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.

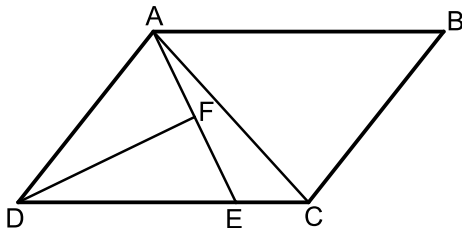
מסמנים: $\angle BAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את α אם ידוע כי שטח המשולש ABD

קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



(52) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים

המקיימים: $3CE = DE$.

מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.

ידוע כי: $\angle ADF = \angle CDF = \alpha$.

מסמנים: $CE = k$.

א. הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.

הבע באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את α .

תשובות סופיות:

$$(25) \quad S = 75.801 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad S = 8.641 \text{ סמ"ר}$$

$$(26) \quad S = 16 \text{ סמ"ר}$$

$$(27) \quad S_{ABCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$$

$$(28) \quad \text{א.} \quad \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}} \approx 0.62S \quad \text{ב.} \quad \frac{2}{3}S$$

$$(29) \quad \text{א.} \quad \frac{k}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{ב.} \quad 67.78^\circ, 67.78^\circ, 44.4^\circ \quad \text{ג.} \quad S = 37.18$$

$$(30) \quad \text{א.} \quad DE = \sqrt{1.6} = 1.26 \quad \text{ב.} \quad R = 2 \quad \text{ג.} \quad S = 21.48$$

$$(31) \quad \text{א.} \quad DC = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \quad \text{ב.} \quad AB = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{3 \sin \beta} \quad \text{ג.} \quad S_{ABCD} = 31.2$$

$$(32) \quad \text{א.} \quad 12.75 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 14.19 \text{ ס"מ} \quad \text{ג.} \quad 63.05 \text{ ס"מ}$$

$$(33) \quad \text{א.} \quad \frac{k \tan \alpha}{\tan 2\alpha} \quad \text{ב.} \quad \frac{k^2 \tan \alpha \sin 2\alpha}{2 \tan^2 2\alpha} \quad \text{ג.} \quad S = 7.754 \text{ ס"מ}$$

$$(34) \quad \text{א.} \quad \frac{k^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ב.} \quad \frac{2k^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$(35) \quad \text{א.} \quad 109.1^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 86.6$$

$$(36) \quad \text{א.} \quad 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 34.48 \text{ סמ"ר}$$

$$(37) \quad \text{א.} \quad R = \frac{k}{2 \sin^2 40} = 1.21k \quad \text{ב.} \quad S = \frac{k^2 \sin 10}{2 \sin 50 \sin^3 40} \quad \text{ג.} \quad k = 6$$

$$(38) \quad \text{א.} \quad 40.72^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 12.52$$

$$(39) \quad \text{א.} \quad 128.32^\circ; 51.68^\circ \quad \text{ב.} \quad 1.27m \sin \alpha \quad \text{ג.} \quad \frac{0.35m^2 \sin^2 \alpha \sin(128.32 - \alpha)}{\sin(25.84 + \alpha)}$$

$$(40) \quad \text{א.} \quad BD = \frac{k \sin 20}{\sin 100} \quad \text{ב.} \quad k = 7$$

$$(41) \quad \text{א.} \quad 5 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad S = 172.77$$

$$(42) \quad \text{א.} \quad BC = 3 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad AB = 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ג.} \quad R = \sqrt{\frac{37}{3}} \quad \text{ד.} \quad S = 18.18 \text{ סמ"ר}$$

$$R = a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a \quad \text{ב.י. (43)}$$

$$\text{ב.ii. } 45^\circ, 135^\circ$$

$$\cos \angle BCD = \frac{a^2 - 5b^2}{a^2 + 3b^2} \quad \text{א. (44)}$$

$$\text{ג. } 14.4 \text{ סמ"ר} = S$$

$$S = R^2 \tan 2\alpha \quad \text{א. (45)}$$

$$\text{ב. } 36\sqrt{3} \text{ סמ"ר} = S$$

$$58^\circ, 58^\circ, 64^\circ \quad \text{א. (48)}$$

$$\text{ב. } BE = 7.75$$

$$S = 2R^2 \sin \alpha \cos \beta \sin(90^\circ - \alpha + \beta) \quad \text{א. (49)}$$

$$\text{ב. } \alpha = 22.5^\circ$$

$$\frac{b \sin(135^\circ - \gamma)}{\sin 45^\circ}, \frac{b \sin(\gamma - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} \quad \text{א. (50)}$$

$$\text{ב. } \gamma = 75^\circ$$

$$S = R^2 \sin 2\alpha \quad \text{א. (51)}$$

$$\text{ב. } S = \frac{2R^2 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{ג. } \alpha = 26.56^\circ$$

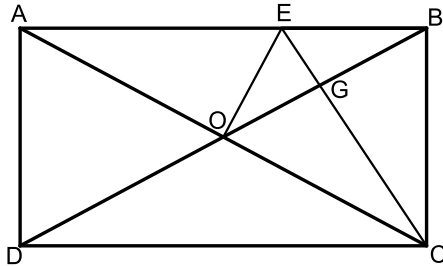
$$AE = 6k \sin \alpha \quad \text{א. (52)}$$

$$\text{ב. } P_{ACE} = k + 6k \sin \alpha + k\sqrt{25 - 24 \cos 2\alpha}$$

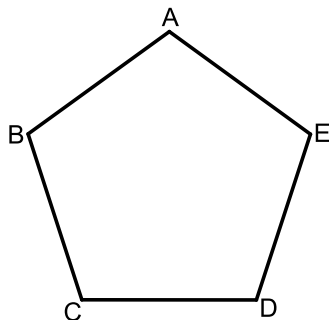
$$\text{ג. } \alpha = 14.47^\circ$$

שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

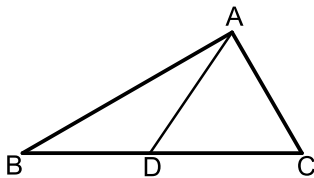
שאלות:



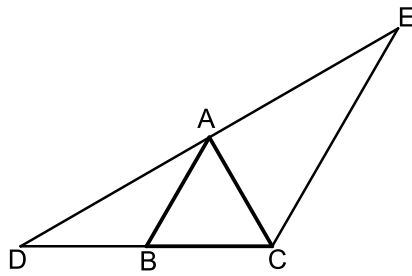
- (53) המרובע ABCD הוא מלבן.
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
 הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן ומחלקת אותה כך ש- $2BE = AE$.
 ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC ושווה ל-BE.
 הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.
 א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.
 ב. הוכח כי מתקיים: $4GE = AE$.
 ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.
 חשב את שטח המלבן ABCD.



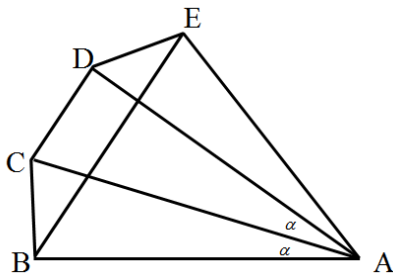
- (54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE (כל זוויותיו הן 108°) בעל אורך צלע α .
 א. הבע באמצעות α את אלכסון המחומש AD.
 ב. הבע באמצעות α את רדיוס המעגל החוסם את המחומש.
 ג. הבע באמצעות α את שטח המחומש.
 ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.
 חשב את שטח המחומש.



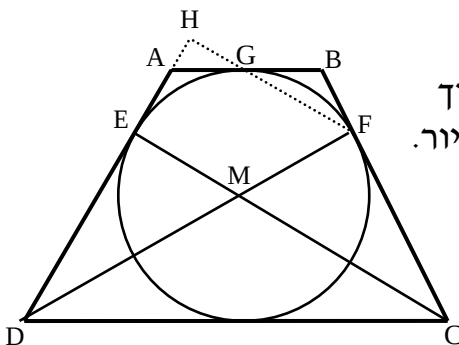
- (55) במשולש ABC הזווית C היא 60° .
 מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים המשולשים ABD ו-ACD.
 ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא: $R_1 = \sqrt{3}$ ס"מ.
 כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא: $R_2 = 3$ ס"מ.
 א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.
 ב. היקף המשולש ABC הוא: $12 + 4\sqrt{3}$ ס"מ.
 חשב את שטח המשולש.



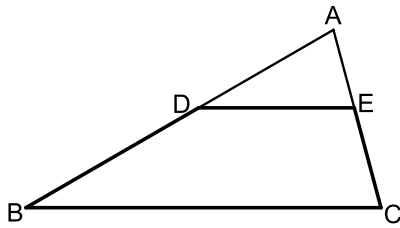
- (56)** המשולש ABC הוא שווה צלעות.
 הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים
 שני משולשים ABD ו-ACE.
 ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.
 א. הוכח: $AB \parallel CE$.
 ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$.
 ג. נתון: $DC = 8$ ס"מ.
 וכי: $AC \perp DE$.
 i. חשב את שטח המשולש DCE.
 ii. חשב את שטח המשולש ABD.



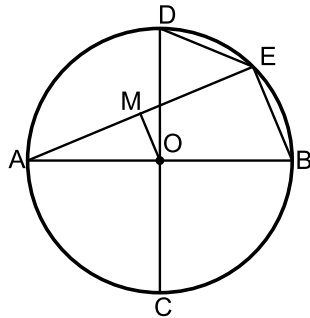
- (57)** מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB, AC, AD ו-AE.
 כך שמתקיים: $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$ ו- $AB = AE$.
 מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.
 מתקיים: $BE \parallel CD$.
 ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.
 א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.
 ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש ($AC = AD$).
 הוכח כי: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.
 ג. ידוע כי: $\angle ADC = 3\alpha + 2.5$ ו- $\angle ADE = 3\alpha - 10$.
 הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.
 ד. נסמן: $AB = m$.
 i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.
 ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.
 iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).



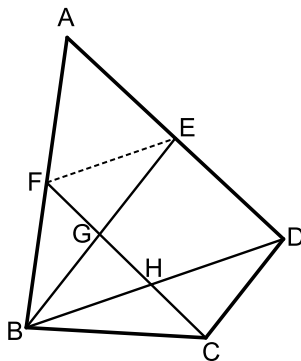
- (58)** הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F, G ו-H כמתואר באיור.
 הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M.
 א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.
 ב. חשב את זוויות הטרפז.
 ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.
 חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.



- (59)** המרובע BDEC הוא טרפז $BC \parallel DE$. המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = BC$). נתון: $AB = 18$ ס"מ, $\angle ADE = 30^\circ$.
 א. סמן את אורך הבסיס DE ב- x ואת שטח הטרפז BDEC ב- S .
 הבע את S באמצעות x .
 ב. על הקטע AD בונים ריבוע. ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.
 חשב את היחס: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.



- (60)** במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו-CD. המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף המעגל המקיימת: $BE + DE = 15$ ס"מ. מעבירים את המיתר AE. הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE. א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.
 ב. מצא את אורך המיתר BE.
 נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ"ר.
 ג. מצא את רדיוס המעגל.
 ד. חשב את זווית B.



- (61)** BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD. הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AD ו-AB במרובע. מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$. נתון כי הזוויות $\angle A$ ו- $\angle BFE$ משלימות ל- 180° .
 א. הוכח: $\triangle ABCD \sim \triangle BFE$.
 ב. נתון כי $BE = 7.5$ וכי: $GE - HD = 17\frac{1}{15}$. חשב את אורך הקטע FE.
 ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED הוא: $R = 4.001$ ס"מ. מצא את זווית $\angle EBD$.

תשובות סופיות:

(53) ג. 120 סמ"ר

(54) א. 1.618α ב. 0.85α ג. $1.72\alpha^2$ ד. $S = 85.57$

(55) ב. $S = 8\sqrt{3}$

(56) א. $S_{CDE} = 16\sqrt{3}$ ג. $S_{ABD} = 4\sqrt{3}$ ii.

(57) ד. $BC = 0.4663m$, $DE = 0.4663m$, $CD = 0.4776m$, $BE = 1.2175m$ i.

(62) ד. $0.7232m^2$ ii. ד. 8 ס"מ $m =$ iii.

(58) ב. 60° , 120° ג. $\frac{2}{3}$

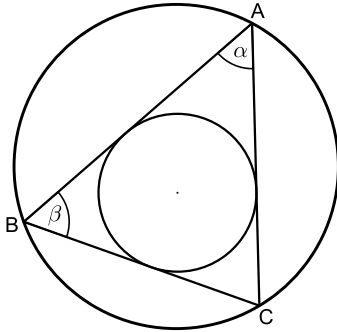
(59) א. $S = 81 - 0.25x^2$ ב. $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{81}$

(60) ב. $BE = 10$ ג. $R = 13$ ד. $\angle B = 67.38^\circ$

(61) ב. $FE = 4$ ג. 16.73°

שאלות מסכמות:

שאלות:



(1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו R .

נתון כי $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

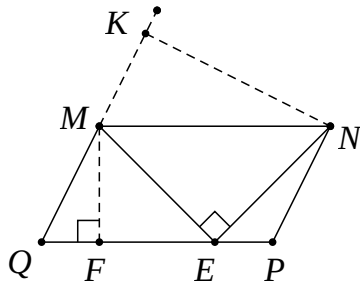
א. הבע את רדיוס המעגל החסום

במשולש בעזרת R , α , β .

ב. נתון כי: $\alpha = \beta = 60^\circ$.

חשב את רדיוס המעגל החסום

במשולש בעזרת R .

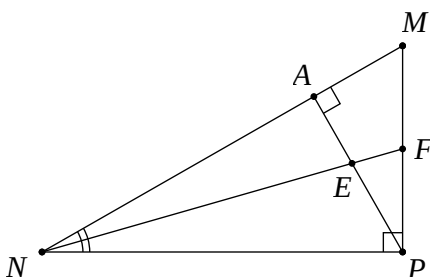


(2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על

הצלע PQ כך ש- $\angle MEN = 90^\circ$ (ראה ציור).

נתון: 12 ס"מ MQ , $\angle MQP = 70^\circ$, $\angle MNE = 40^\circ$.

מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



(3) במשולש ישר-זווית MNP, ($\angle P = 90^\circ$)

PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה

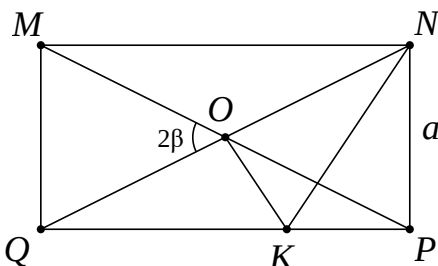
את הזווית $\angle MNP$.

PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

נתון: 24 ס"מ NP , $\angle MNP = 40^\circ$.

א. מצא את אורך הקטע NA.

ב. מצא את אורך הקטע EF.



(4) אלכסוני המלבן MNQP נחתכים בנקודה O.

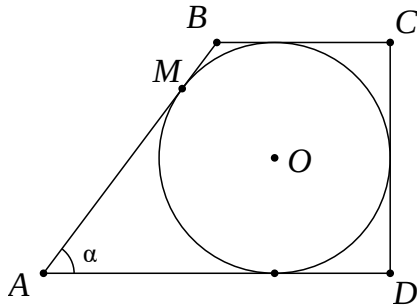
מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך

את QP בנקודה K (ראה ציור).

נתון: $\angle MOQ = 2\beta$, $NP = a$.

א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות β ו- a .

ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות β ו- a .



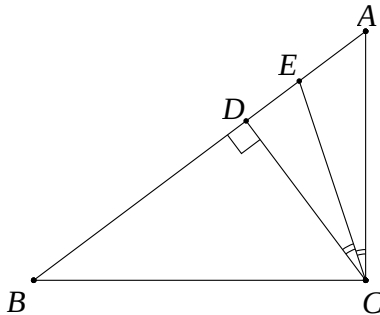
(5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.

נתון: $AM = 12$ ס"מ, $\angle BAD = \alpha$.

א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת α .

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת α .



(6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:

$\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 8$ ס"מ

CD הוא הגובה ליתר.

CE הוא חוצה-הזווית $\angle ACD$.

הבע את אורך הקטע AE באמצעות β .

(7) נתון מעגל שרדיוסו R. מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.

מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חוסם בתוך מעגל זה.

חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

(8) $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$) שאורך בסיסו 12 ס"מ.

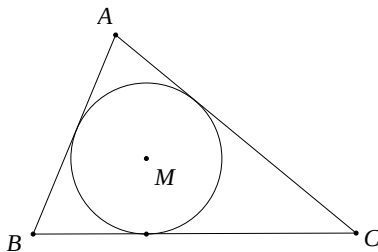
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.

שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\angle ABC = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$).

א. הבע את היחס $AO : DO$ באמצעות α .

ב. הראה כי בעבור $\alpha = 60^\circ$ הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות

הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.



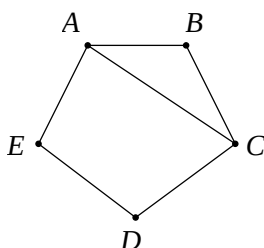
(9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M

ורדיוסו r (ראה ציור).

נתון: $\angle B = 62^\circ$, $\angle C = 46^\circ$.

א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC.

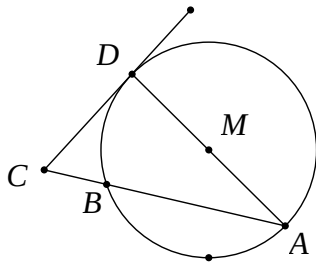
ב. נתון: $BC = 16$ ס"מ. מצא את r.



(10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)

אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.

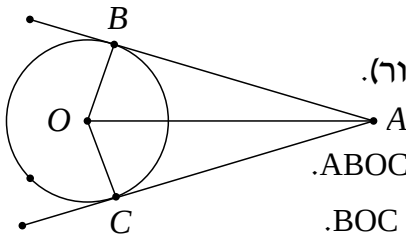
חשב את שטח המחומש.



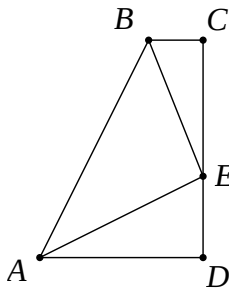
11) מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחיתך CBA למעגל (ראה ציור).

נתון: $CD = \frac{3}{5}R$.

- א. מצא את זוויות המשולש CAD.
 ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.



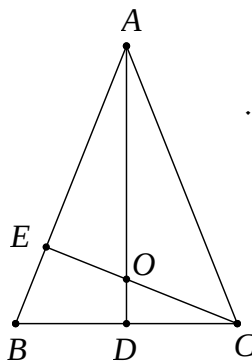
12) מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).
 נתון: $\angle BAC = 2\alpha$, $AO = 10$ ס"מ.
 א. הבע באמצעות α את S_1 , שטח המרובע ABOC.
 ב. הבע באמצעות α את S_2 , שטח המשולש BOC.
 ג. הראה שאם $\alpha = 30^\circ$, אזי $S_1 = 4 \cdot S_2$.



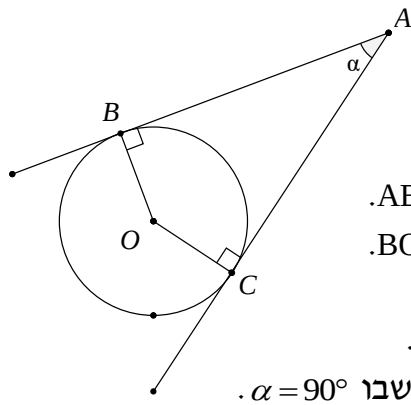
13) ABCD הוא טרפז ישר-זווית ($\angle C = \angle D = 90^\circ$).
 נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).
 נתון: $\angle AEB = 90^\circ$, $AE = BE = k$, ו- $\angle CBE = \beta$.
 הבע באמצעות k ו- β את שטח הטרפז.

14) ענה על השאלות הבאות:

- א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל.
 מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.
 ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'.
 מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.



15) ABC הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא β ואורך הבסיס BC הוא 2α . AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).
 א. הבע באמצעות α ו- β את אורכי הקטעים CO ו-CE.
 ב. הבע באמצעות β את היחס $\frac{CO}{CE}$.
 ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta = 60^\circ$, והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.



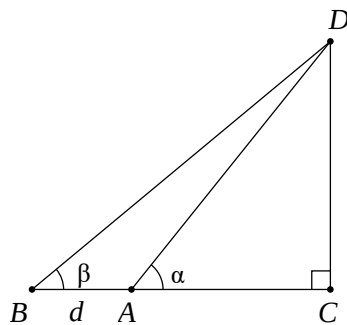
16 מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם m (כלומר: $AB = AC = m$). נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא $\angle BAC = \alpha$ (ראה ציור).

א. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש BOC.

ג. הבע באמצעות α את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.

ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha = 90^\circ$.



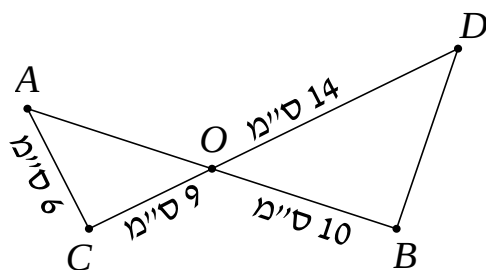
17 במשולש ישר-זווית DAC נתון $\angle DAC = \alpha$.

מאריכים את הניצב AC כך ש- $AB = d$.

נתון כי: $\angle DBA = \beta$ (ראה ציור).

סמן: $AC = x$.

הבע את x באמצעות d , α ו- β .



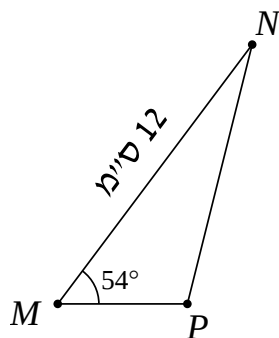
18 הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.

נתון כי: $\angle OAC = 60^\circ$,

$AC = 6$ ס"מ, $CO = 9$ ס"מ,

$OB = 10$ ס"מ, $OD = 14$ ס"מ.

חשב את $\angle ODB$.



19 במשולש MNP גודל הזווית M הוא 54° .

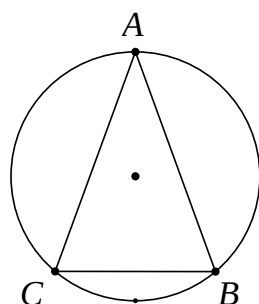
נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ

(ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP.

א. חשב את אורך הצלע NP.

ב. PA הוא תיכון לצלע MN.

חשב את שטח המשולש PAN.



20 המשולש השווה-שוקיים ABC ($AB = AC$)

חסום במעגל (ראה ציור).

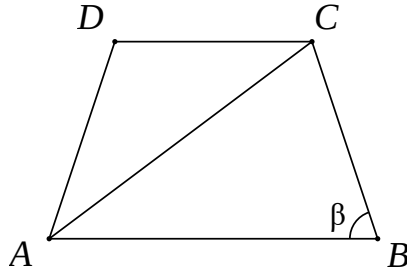
נתון: $\angle ABC = \beta$.

כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.

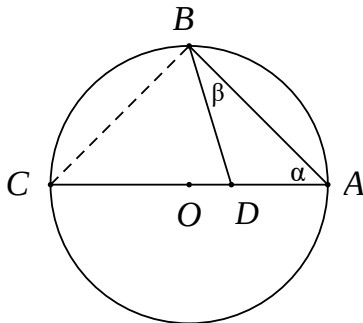
א. הבע בעזרת β את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור $\beta = 45^\circ$.

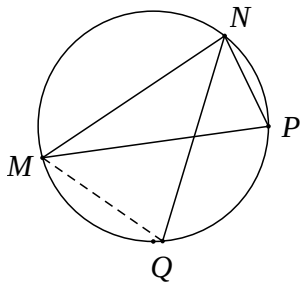
- (21) במשולש ABC הזווית $\angle C$ היא בת 60° , אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ, והיקף המשולש הוא $7 + \sqrt{13}$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.



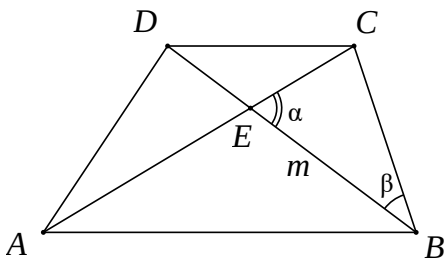
- (22) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AD = BC$) אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון. זווית הבסיס היא β ($\beta > 60^\circ$), (ראה ציור). הבע באמצעות β את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



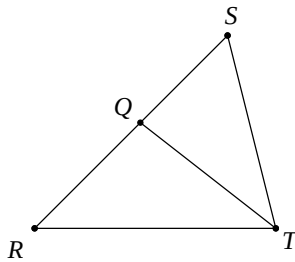
- (23) הקודקודים A ו-B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O. הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA. א. הבע בעזרת α ו- β את שטח המשולש ABD. ב. הבע בעזרת α ו- β את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



- (24) משולש MNP חסום במעגל. המיתר NQ חוצה את הזווית $\angle MNP$. נתון: $\angle MPN = 70^\circ$, $\angle MNP = 80^\circ$, $NP = 12$ ס"מ. חשב את אורך המיתר MQ.



- (25) נתון טרפז ABCD ($AB \parallel CD$). הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז. נתון: $BE = m$, $DC = BC$, $\angle CBD = \beta$, $\angle CEB = \alpha$. (ראה ציור). הבע את אורכי בסיס הטרפז: AB ו-CD באמצעות m , α ו- β .



26) במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית $\angle RTS$

(ראה ציור), $RQ = \sqrt{2}$, $QS = m$,

$\angle TRQ = 45^\circ$, $\angle RST = \alpha$.

א. הבע את $\sin \alpha$ באמצעות m .

ב. נתון כי: $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

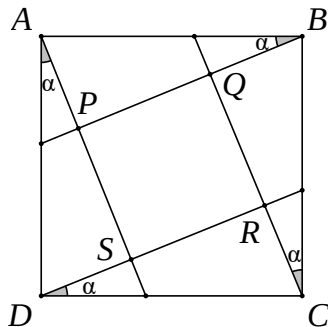
חשב את זוויות המשולש RST.

27) במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28) נתון משולש שצלעותיו t , $2t$, kt .

א. לאיזה ערכים של הקבוע k המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון $k = \sqrt{7}$. הבע ע"י t את אורך חוצה הזווית הקהה.



29) בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה

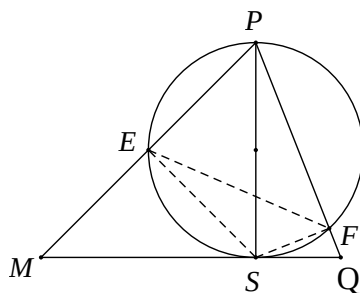
קטעים היוצרים את אותה זווית α

עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע

פנימי PQRS.

א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB} = \cos \alpha - \sin \alpha$.

ב. לאיזו זווית α מתקיים: $PR = AB$?



30) PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).

נתון $PS = h$, $\angle MPS = \alpha$, $\angle SPQ = \beta$.

א. הבע את שטח המשולש PMQ

באמצעות h , α ו- β .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את

הצלעות PM ו-PQ בנקודות E

ו-F בהתאמה (ראה ציור).

i. הבע באמצעות α ו- β את $\angle ESF$.

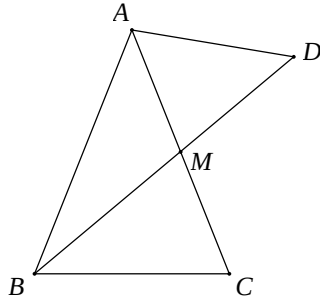
ii. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין

שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

31 במשולש ABC הצלעות הן a , b ו- c והזוויות שמונחות מולן הן: α , β ו- γ בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון m_a (התיכון לצלע a) באמצעות הצלעות b ו- c והזווית α .

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



32 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$),

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש

ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\angle BAC = 50^\circ$.

א. מצא את גודל הזווית BMC.

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D,

כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

מצא את שטח המשולש AMD.

33 משולש שווה שוקיים BCE ($BC = BE$) חסום במעגל שרדיוסו R.

זווית הבסיס של המשולש BCE היא α .

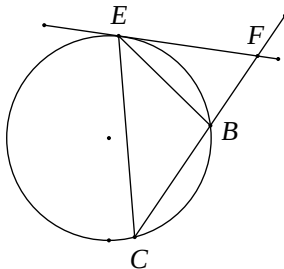
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את

המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו- α .

ב. מצא את הערך של α שבעבורו שטח

המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

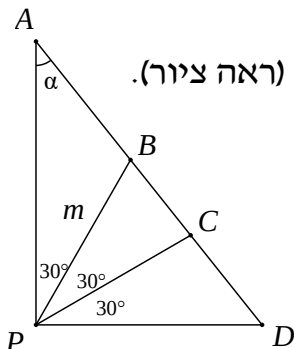


34 בטרפז BCDE ($BC \parallel ED$) אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.

הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא 80° .

אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית CBE.

חשב את היקף הטרפז.



35 במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה $\angle P$

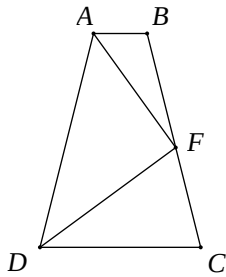
לשלוש זוויות שוות, כלומר $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = 30^\circ$ (ראה ציור).

נתון כי: $PB = m$, $\angle PAD = \alpha$.

א. היעזר במשפט הסינוסים,

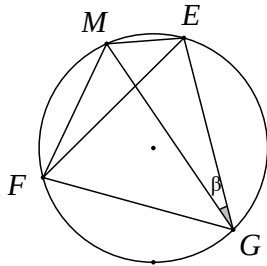
והבע את AB, AC, BD ו-CD באמצעות m ו- α .

ב. הוכח כי: $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$.



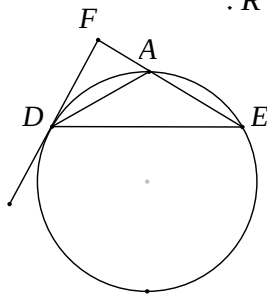
36) בטרפז שווה שוקיים ABCD ($AD = BC$, $AB \parallel DC$),

F היא נקודה על השוק BC, כך ש-DF חוצה את הזווית $\angle CDA$ ו-AF חוצה את הזווית $\angle DAB$ (ראה ציור). נתון: $\angle FAB = \beta$, $AB = b$. הבע באמצעות b ו- β את אורך הבסיס DC.



37) משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו R. M היא נקודה על המעגל. נתון: $\angle MGE = \beta$ (ראה ציור).

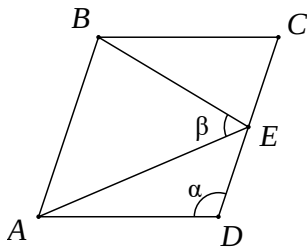
א. הוכח כי: $ME + MF = MG$.
 ב. אם $ME = R$ מה תוכל לומר על $\angle MGE$?



38) משולש שווה שוקיים ADE ($AD = AE$) חסום במעגל שרדיוסו R.

ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הצלע AE בנקודה F (ראה ציור). נתון: $\angle ADE = \alpha$ ($60^\circ < \alpha < 180^\circ$).

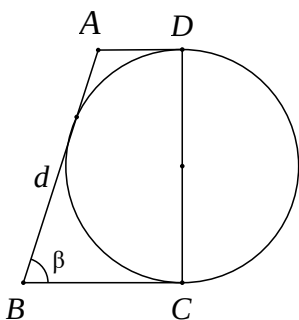
א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות R ו- α .
 ב. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.
 ג. חשב את α אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.



39) במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.

נתון: $\angle AEB = \beta$, $\angle ADC = \alpha$ (ראה ציור).

הוכח כי: $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$.



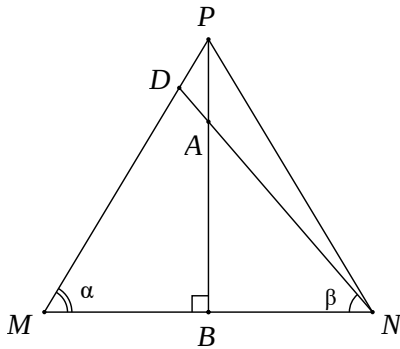
40) נתון טרפז ABCD ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.

השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו-BC משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו-C בהתאמה (ראה ציור). נתון כי: $AB = d$, $\angle B = \beta$.

א. הבע באמצעות d את סכום בסיסיו של הטרפז.
 ב. הבע באמצעות d ו- β את היקף הטרפז ואת השטח של הטרפז.

ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.

חשב את הזווית החדה β .



41) במשולש שווה שוקיים PMN ($PM = PN$),

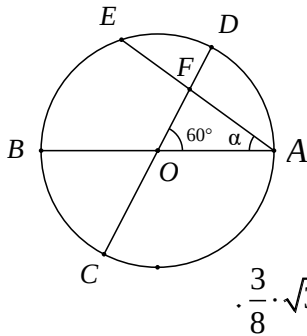
A היא נקודה על הגובה PB , כך ש- $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$.

הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D (ראה ציור).

נתון: $\angle DNB = \beta$, $\angle DNM = \alpha$ ו- $BN = \alpha$.

א. חשב את היחס $\tan \beta : \tan \alpha$.

ב. חשב את היחס $PM:DM$.



42) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני

קטרים AB ו- CD הנחתכים בזווית של 60° .

מיתר AE , היוצר זווית α עם הקוטר AB ,

חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש ACF באמצעות R ו- α .

ב. הוכח שכאשר $\alpha = 30^\circ$, שטח המשולש ACF הוא $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$.

תשובות סופיות:

$$r = \frac{2R \sin(\alpha + \beta) \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

ב. $\frac{1}{2}R$

$$KN = 21.52 \text{ ס"מ}, MF = 11.28 \text{ ס"מ} \quad (2)$$

$$EF = 5.975 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad NA = 18.385 \text{ ס"מ} \quad (3)$$

$$OK = \frac{a}{2 \cos \beta} \quad \text{א.} \quad (4)$$

ב. $\frac{a}{2 \sin \beta} \cdot \left[1 + \tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right]$

$$12 \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

ב. $24 \cdot \left(1 + \tan \frac{\alpha}{2} \right)^2$

$$AE = 8 \sin \beta \cdot \left[\tan \beta - \tan \left(\frac{1}{2} \beta \right) \right] = 8 \tan \beta \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \beta \right) \quad (6)$$

$$2 \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} \approx 1.132 \quad (7)$$

$$-2 \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha - 1 \quad \text{א.} \quad (8)$$

ב. מתקיים: $AO = 2 \cdot DO$ (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

$$r = \frac{16}{\tan 59^\circ + \tan 67^\circ} \approx 3.98 \quad \text{ב.} \quad BC = r \cdot (\tan 59^\circ + \tan 67^\circ) \approx 4.02 \cdot r \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$S = 147.86 \text{ סמ"ר} \quad (10)$$

$$S \approx 0.0495 \cdot R^2 \quad \text{ב.} \quad \angle C = 73.3^\circ, \angle D = 90^\circ, \angle A = 16.7^\circ \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$S_1 = 100 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 50 \cdot \sin 2\alpha \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$S_2 = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \quad \text{ב.}$$

$$S = \frac{1}{2} k^2 \cdot (1 + 2 \sin \beta \cos \beta) \quad \text{א.} \quad (13)$$

ב. 27 יח"ש.

$$r \approx 5.548 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (14)$$

ב. $90.45 \text{ סמ"ר} \approx S$

$$CE = 2a \cdot \sin \beta, \quad CO = \frac{a}{\sin \beta} \quad \text{א.} \quad (15)$$

ב. $\frac{CO}{CE} = \frac{1}{2 \sin^2 \beta}$

ג. היחס הוא: $\frac{2}{3}$ (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

$$S_{\triangle ABOC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \quad \text{א.} \quad (16)$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} : \text{יחס השטחים}$$

ד. במקרה זה $\triangle ABOC$ הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 ($\tan^2 45^\circ = 1$).

$$AC = x = d \cdot \frac{\tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} \quad (17)$$

$$\angle ODB \approx 44.7^\circ \quad (18)$$

$$S_{\triangle PAN} = 8.2 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad NP = 10.38 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$S = 800 \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin 2\beta \quad \text{א.} \quad (20) \quad \text{ב. } 400 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{\triangle ABC} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5.196 \text{ סמ"ר} \quad (21)$$

$$(22) \quad \text{יחס השטחים הוא: } 1 - 4 \cos^2 \beta : \left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} \right) \text{ או כל תשובה שקולה.}$$

$$S_{\triangle ABD} = 288 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{א.} \quad (23) \quad \text{ב. } \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \alpha}$$

$$MQ \approx 15.43 \text{ ס"מ} \quad (24)$$

$$DC = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AB = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \quad (25)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{m} \quad \text{א.} \quad (26) \quad \text{ב. } 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \text{ או } 45^\circ, 120^\circ, 15^\circ$$

$$\alpha \approx 20.7 \quad (27)$$

$$\frac{2}{3} \cdot t \approx 0.667t \quad \text{ב.} \quad 1 < k < \sqrt{3} \quad \text{או} \quad \sqrt{5} < k < 3 \quad \text{א.} \quad (28)$$

$$\alpha = 15^\circ \quad (29)$$

$$S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \quad \text{א.} \quad (30) \quad \text{ב. i. } \angle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$S_{\triangle EFS} : S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{4} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \quad \text{ב. ii.} \quad (31)$$

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \quad \text{ב.} \quad (31) \quad \text{א.} \quad m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

$$S_{\triangle AMD} = 54.1 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad (32) \quad \angle BMC = 79.5^\circ \quad \text{א.}$$

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle BEF} = \frac{2R^2 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \quad \text{א. (33)}$$

$$P_{BCDE} = 51.09 \quad (34)$$

$$, BD = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \cos \alpha}, AB = \frac{m}{2 \cdot \sin \alpha}, AC = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha} \quad \text{א. (35)}$$

$$\text{ב. הוכחה.} \quad CD = \frac{m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha}$$

$$DC = \frac{-b \cdot \tan \beta}{\tan 3\beta} \quad (36)$$

$$\text{ב. MG הוא קוטר במעגל. (37)}$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADF}} = -\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ADF} = \frac{-2R^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\cos(1.5\alpha)} \quad \text{א. (38)}$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{ג.}$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \beta, P = 2d + d \sin \beta \quad \text{ב.} \quad AD + BC = d \quad \text{א. (40)}$$

$$\beta = 30^\circ \quad \text{ג.}$$

$$PM : DM = \frac{9}{8} = 1.125 \quad \text{ב.} \quad \tan \beta : \tan \alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \quad \text{א. (41)}$$

$$. S = \frac{3R^2 \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{4 \cdot \sin(60^\circ + \alpha)} \quad \text{א. (42)}$$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 12 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

190	1. הגדרת המספר המרוכב
193	2. המספר הצמוד
196	3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת
197	4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב
201	5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב
203	6. שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים
204	7. שאלות שונות עם מספרים מרוכבים

הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i = \sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z = a + bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b . המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\text{Re}(z)$ (מלשון: Real).

b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\text{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

שאלות:

(1) רשום עם i :

א. $\sqrt{-1} =$	ב. $\sqrt{-4} =$	ג. $\sqrt{-25} =$
ד. $\sqrt{-3} =$	ה. $\sqrt{-5} =$	

(2) חשב:

א. $i =$	ב. $i^2 =$	ג. $i^3 =$
ד. $i^4 =$	ה. $i^5 =$	ו. $i^{17} =$

(3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. -4	ו. 0

(4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\text{Re}(z) = -3$, $\text{Im}(z) = 2$.

ב. $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 4$ ו- $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = -1$. מצא את z .

(6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2 = -1$ ב. $x^2 + 36 = 0$ ג. $x^2 - 2x + 5 = 0$

(7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2 + x + 1 = 0$.

(8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2 + iz + 6 = 0$.

(9) נתון: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 2i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1 + z_2 =$ ב. $z_1 - z_2 =$ ג. $z_1 \cdot z_2 =$

(10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2 + 6i) + (1 - i)$ ב. $(4 + 4i) - \left(3 + \frac{1}{2}i\right)$
 ג. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ד. $5 - (3 - 2i)$
 ה. $(i - 3) + 6i$ ו. $(i + 2) - (3i - 2) + (7 - 5i)$

(11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1 + 4i) \cdot (8 - 2i)$ ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
 ג. $(4i - 3) \cdot (4i + 3)$ ד. $i \cdot (i - 1)$
 ה. $(2i + 3) \cdot i$ ו. $(5i - 1)^2$

(12) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$.

ידוע כי $z_1 + z_2$ הוא ממשי וכי $z_1 - z_2$ הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2 .

ב. הראה כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

תשובות סופיות:

- (1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$
- (2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i
- (3) א. $a = 2, b = 5$ ב. $a = 3, b = -1$ ג. $a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = -\frac{1}{2}$ ד. $a = 0, b = 7$ ה. $a = -4, b = 0$ ו. $a = 0, b = 0$
- (4) א. $z = -3 + 2i$ ב. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- (5) $z = 1.5 + 2.5i$
- (6) א. $x = \pm i$ ב. $x = \pm 6i$ ג. $x = 1 + 2i, 1 - 2i$
- (7) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- (8) $z = 2i, -3i$
- (9) א. $7 + i$ ב. $-3 + 5i$ ג. $16 + 11i$
- (10) א. $-1 + 5i$ ב. $1 + 3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2 + 2i$ ה. $-3 + 7i$ ו. $11 - 7i$
- (11) א. $16 + 30i$ ב. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1 - i$
- (12) א. $a_1 = a_2, b_1 = -b_2$ ב. הוכחה. ג. $-2 + 3i$ ו. $-24 - 10i$

המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z = a + bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z} = a - bi$.

שאלות:

(13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. -4	ו. 0

(14) חשב:

א. $\frac{11 + 2i}{2 - i}$	ב. $\frac{3 + 7i}{2 - 5i}$	ג. $\frac{19 - 9i}{2 - 3i}$
----------------------------	----------------------------	-----------------------------

(15) נתון מספר $z = 5 - 2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$	ב. $\frac{z}{z + 3}$	ג. $\frac{z + i}{z - i}$
------------------	----------------------	--------------------------

(16) המספר $\frac{3 + 4i}{a - i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a .

(17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

(18) פתור את המשוואה הבאה: $3z - 11 = iz - 7i$.

(19) פתור את המשוואה הבאה : $iz + 5 = 4i$.

(20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים) :
$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

(21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים :

$$\text{א. } 2a - 3i = 10 + bi \quad \text{ב. } 3a - 8 + 5bi = 2b - ai - 3i$$

(22) פתור את המשוואה הבאה : $2z + 7i = iz + \bar{z} - 3$.

(23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים :

$$\text{א. } \sqrt{5-12i} \quad \text{ב. } \sqrt{8+6i}$$

(24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

$$\text{א. } (1-i)z^2 - 2z + i + 1 = 0$$

$$\text{ב. } (-2+i)z^2 - (6+12i)z + 10 - 25i = 0$$

(25) פתור את המשוואה הבאה : $iz^2 - 2(1-i)z + 6 + 15i = 0$.

(26) פתור את המשוואה הבאה : $z^2 - i\bar{z} + 6 = 0$.

תשובות סופיות:

- (13) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0
- (14) א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $5+3i$
- (15) א. $\frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17} - \frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17} + \frac{5}{17}i$
- (16) $a = -\frac{3}{4}$
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) $z = 4-i$
- (19) $z = 4+5i$
- (20) $z = 2-3i$, $w = 5+i$
- (21) א. $a = 5$, $b = -3$ ב. $a = 2$, $b = -1$
- (22) $z = -\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}i$
- (23) א. $z = \pm(3-2i)$ ב. $z = \pm(3+i)$
- (24) א. $z_{1,2} = i, 1$ ב. $z_{1,2} = -2-i, 2-5i$
- (25) $z_1 = -2-5i$, $z_2 = 3i$
- (26) $z_1 = -3i$, $z_2 = 2i$

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

(27) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2 - 2(m+2i)z + 1 = 0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

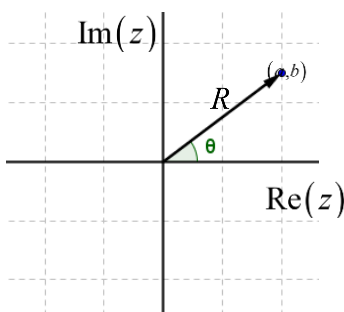
תשובות סופיות:

(27) א. $m = -i$ ב. $m = -2i$.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- x מייצג את a , גודל הערך הממשי של z , וציר ה- y מייצג את b , גודל הערך המדומה של z . מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג (a, b) או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0, 0)$) והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס. הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב ויסומן: (R, θ) . מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$$z = R \cos \theta + i \cdot R \sin \theta = R(\cos \theta + i \sin \theta) = R \operatorname{cis} \theta$$

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R \cos \theta$, $b = R \sin \theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1 \cdot z_2 = (R_1 \operatorname{cis} \theta_1) \cdot (R_2 \operatorname{cis} \theta_2) = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \operatorname{cis} \theta_1}{R_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.

שאלות:

(28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60^\circ$	ב. $6\text{cis}135^\circ$	ג. $4\text{cis}330^\circ$
ד. $4\text{cis}(-30^\circ)$	ה. $4\text{cis}690^\circ$	ו. $8\text{cis}90^\circ$
ז. $3\text{cis}270^\circ$	ח. $\text{cis}180^\circ$	ט. $\text{cis}0^\circ$

(29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$	ב. $\sqrt{3}-i$	ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
ד. $3+4i$	ה. $6i$	ו. $-i$
ז. 4	ח. -1	ט. 1
י. 0		

(30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120^\circ \cdot 3\text{cis}60^\circ$	ב. $\text{cis}210^\circ \cdot 5\text{cis}(-40^\circ)$
ג. $\frac{12\text{cis}315^\circ}{3\text{cis}90^\circ}$	ד. $\frac{1}{2\text{cis}40^\circ}$
ה. $6\text{cis}30^\circ + 2\text{cis}210^\circ$	

(31) נתון המספר המרוכב $z = R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו- θ את המספרים:

א. $\bar{z}$	ב. $1/z$	ג. $-z$
ד. $-\frac{1}{z}$	ה. iz	ו. $z \cdot \bar{z}$

(32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z + \bar{z}$	ב. $z \cdot \bar{z}$	ג. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$
------------------	----------------------	--

(33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2 - \bar{z}^2$	ב. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$
----------------------	--------------------------------------

(34) הוכח את הטענות הבאות :

$$\text{א. } z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz} \quad \text{ב. } z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

(35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

(36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא 30° חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה. קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו :

$$\text{א. } \bar{z} \quad \text{ב. } \frac{1}{z} \quad \text{ג. } \frac{z}{\bar{z}} \quad \text{ד. } z \cdot \bar{z}$$

תשובות סופיות:

- (28) א. $1 + \sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3} - 2i$ ד. $2\sqrt{3} - 2i$
- ה. $2\sqrt{3} - 2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1
- (29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45^\circ$ ב. $2\text{cis}330^\circ$ ג. $\text{cis}240^\circ$ ד. $5\text{cis}53.13^\circ$
- ה. $6\text{cis}90^\circ$ ו. $\text{cis}270^\circ$ ז. $4\text{cis}0^\circ$ ח. $\text{cis}180^\circ$ ט. $\text{cis}0^\circ$
- (30) א. -6 ב. $5\text{cis}170^\circ$ ג. $4\text{cis}225^\circ$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40^\circ)$
- ה. $4\text{cis}30^\circ$
- (31) א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180^\circ + \theta)$
- ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180^\circ + \theta)$ ה. $R\text{cis}(90^\circ + \theta)$ ו. R^2
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35) $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$
- (36) $-\sqrt{3}+i, -1-\sqrt{3}i, \sqrt{3}-i$
- (37) $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2$
- (38) $1+\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i, 2$
- (39) א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל. ג. על המעגל. ד. מחוץ למעגל.

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $(R \operatorname{cis} \theta)^n = R^n \operatorname{cis}(n\theta)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n -י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0 \operatorname{cis} \theta_0$

$$z^n = z_0 = R_0 \operatorname{cis} \theta_0 \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{R_0} \cdot \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) : 1 \leq k \leq n$$

נבצע:

שאלות:

(40) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $(2 \operatorname{cis} 30^\circ)^3$	ב. $(2 \operatorname{cis} 14^\circ)^5$	ג. $(1+i)^4$
ד. $(\sqrt{3}-i)^3$	ה. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$	

(41) פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36 \operatorname{cis} 120^\circ$	ב. $z^4 = (9 \operatorname{cis} 80^\circ)^2$	ג. $z^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
--	--	--

(42) מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

(43) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

(44) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z - 3i| = 5$.

(45) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס

המתקבל בעבור המשוואה: $|z + i| + |\bar{z} + i| = |1 + 3i|$.

תשובות סופיות:

(40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70^\circ$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1 .

(41) א. $z_0 = 6\text{cis}60^\circ, z_1 = 6\text{cis}240^\circ$.

ב. $z_0 = 3\text{cis}40^\circ, z_1 = 3\text{cis}130^\circ, z_2 = 3\text{cis}220^\circ, z_3 = 3\text{cis}310^\circ$.

ג. $z_0 = \text{cis}12^\circ, z_1 = \text{cis}84^\circ, z_2 = \text{cis}156^\circ, z_3 = \text{cis}228^\circ, z_4 = \text{cis}300^\circ$.

(42) סכום: 0 , מכפלה: -1 .

(43) $x^2 + y^2 = 4$.

(44) $x^2 + (y - 3)^2 = 25$.

(45) $\frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{5} = 1$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

(46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13 + 3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3 = 5 - 9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

(47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32 + 16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2 - 4i$.
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.
ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

(48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

$$S_{10} = 100 - 15i \quad (46)$$

$$a_1 = 2 + i, q = -2i \quad \text{א.} \quad S_5 = 20 + 25i \quad \text{ב.} \quad (47)$$

$$2, 2i, -2 \quad \text{או} \quad 2, 4 - 2i, 6 - 8i \quad (48)$$

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

(49) פתור את המשוואה: $z - \bar{z} + |z| = |2 - i|^2 - 4i + \operatorname{Im}(z)$.

(50) פתור את המשוואה: $|2 - 3^{x^2-x-1}i| = \sqrt{13}$.

(51) פתור את המשוואה: $z^3 = \bar{z}$.

(52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

(53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים. הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

(54) נתון מספר מרוכב z , שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.

הוכח כי אם $z - \frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

(55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot R_2 \operatorname{cis} \theta_2 = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.

(56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.

נתון: $|z^4 - z^3| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

(57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.

מצא את ערך הביטוי $z + iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

(58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$.
 הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\angle z_1 O z_2$ (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

(49) $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -3 - 4i$

(50) $x = 2$, -1

(51) $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, $z_4 = 1$, $z_5 = -1$

(52) שאלת הוכחה.

(53) שאלת הוכחה.

(54) שאלת הוכחה.

(55) שאלת הוכחה.

(56) $\arg(z) = 30^\circ$

(57) $z + iz = \sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$

(58) 2θ

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 13 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

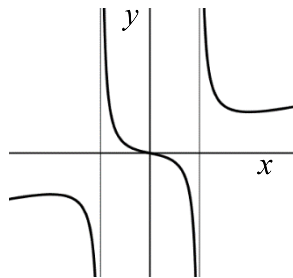
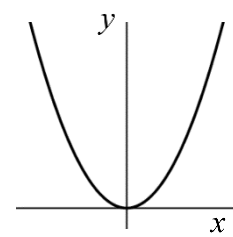
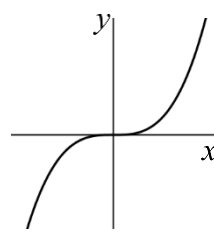
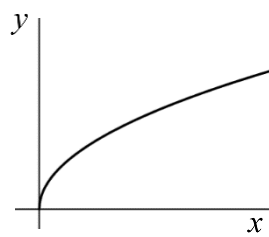
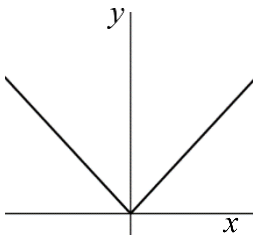
206	1. הקדמה כללית
207	2. גזירת פונקציות
213	3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
214	4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה
217	5. שאלות עם פרמטרים
219	6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית

הקדמה כללית:

סיכום כללי:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x) = x^2$: הפונקציה $f(x) = x^3$: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$: הפונקציה $f(x) = |x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:

שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1, y_1)$, כלומר: $m = f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

גזירת פונקציות:

סיכום כללי:

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$ | ב. $f(x) = x^7$ | ג. $f(x) = x^2$ |
| ד. $f(x) = x$ | ה. $f(x) = x^{-3}$ | ו. $f(x) = x^{-1}$ |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

2) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$ | ב. $f(x) = 3x^7$ | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x$ | ו. $f(x) = 3x^{-2}$ |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = 12 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{7}{8}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$$

$$\text{ג. } f(x) = 7x^2 + 23x - 6 \quad \text{ד. } f(x) = 6x^2 + 8x + 4$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^4}{8} + 67$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{ב. } f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ג. } f(x) = 3(x - x^2)^2$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$$

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב. } f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{2}{3-x}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{6}{x+5}$$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{ב. } f(x) = (5x+1)^3(x-3)$$

$$\text{ג. } f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ד. } f(x) = 3x^2 \cdot x$$

$$\text{ה. } f(x) = x^2 \cdot x^3 \quad \text{ו. } f(x) = x(3x+7)$$

$$\text{ז. } f(x) = 3x^3(3x-1) \quad \text{ח. } f(x) = (x-2)(2x^2+3)$$

$$\text{ט. } f(x) = (3x-2)(x^2+10x) \quad \text{י. } f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$$

$$\text{יא. } f(x) = x(x-2)(3x-4)$$

(8) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = (x^2 - 4)^2 & \text{ב. } f(x) = 2x^3(3x + 5)^2 \\ \text{ג. } f(x) = (x^3 + 2)^2(x - 1)^3 & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)^3(2x - 1)^2 \end{array}$$

(9) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x} & \text{ב. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12} & \text{ג. } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \\ \text{ד. } f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1} & \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x} & \text{ו. } f(x) = \frac{3}{x^3} \\ \text{ז. } f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x + 1} & \text{ח. } f(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2 - 2} & \text{ט. } f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2(1 - x)} \\ \text{י. } f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4} \end{array}$$

(10) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x} & \text{ב. } f(x) = 4\sqrt{x + 1} & \text{ג. } f(x) = \sqrt{x^3 - 1} \\ \text{ד. } f(x) = (3x + 1)\sqrt{x} & \text{ה. } f(x) = x^2\sqrt{x + 3} & \text{ו. } f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

(11) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x + 1} & \text{ב. } f(x) = \sqrt{2x} \\ \text{ג. } f(x) = \sqrt{3x^2 + 1} & \text{ד. } f(x) = \sqrt{10 - 3x} \\ \text{ה. } f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x} & \text{ו. } f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x} \\ \text{ז. } f(x) = x^2\sqrt{1 - 2x} & \text{ח. } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} \\ \text{ט. } f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 4}}{2} & \text{י. } f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \text{יא. } f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} & \text{יב. } f(x) = \sqrt{\frac{3 - x}{x}} \\ \text{יג. } f(x) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x}} & \text{יד. } f(x) = \frac{x^2 + 7}{\sqrt{x^2 - 5}} \end{array}$$

$$\text{טז. } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$\text{טו. } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

(12) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{ג. } f(x) = \frac{x-2a}{x-4a}$$

$$\text{ב. } f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c$$

$$\text{א. } f(x) = ax^4 - bx$$

$$\text{ד. } f(x) = a\sqrt{bx^2 + c}$$

(13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$\text{ב. } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$\text{ו. } f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$$

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$$

$$\text{ג. } f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$
- ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
- (2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8
- ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$
- (3) א. 0 ב. 0
- (4) א. $3x^2 + 4x - 3$ ב. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$ ג. $14x + 23$ ד. $12x + 8$ ה. $x - 3x^2$ ו. $0.5x^3$
- (5) א. $15(5x - 2)^2$ ב. $15x^2(x^3 + 6)^4$ ג. $6(x - x^2)(1 - 2x)$
- ד. $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$
- (6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$
- ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$
- (7) א. $10x - 14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$
- ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x+7$ ז. $36x^3-9x^2$ ח. $6x^2-8x+3$
- ט. $9x^2+56x-20$ י. $36x^5+75x^4+24x^3-24x^2-40x-8$ יא. $9x^2-20x+8$
- (8) א. $4x(x^2-4)$ ב. $30x^2(x+1)(3x+5)$ ג. $3(x-1)^2(x^3+2)(3x^3-2x^2+2)$
- ד. $2(2x-1)(x^2+1)^2(8x^2-3x+2)$
- (9) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$
- ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$
- ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$

$$(10) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ד. } \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ה. } \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$$

$$\text{ו. } \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{ב. } \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{ג. } \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \quad \text{ד. } -\frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \quad \text{ה. } \frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$$

$$\text{ו. } 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \quad \text{ז. } \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{ח. } -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ט. } \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} \quad \text{י. } \frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$$

$$\text{יא. } 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} \quad \text{יב. } -\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}} \quad \text{יג. } \frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{יד. } \frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}} \quad \text{טו. } -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \quad \text{טז. } -\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$$

$$(12) \quad \text{א. } 4ax^3 - b \quad \text{ב. } \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \quad \text{ג. } \frac{-2a}{(x-4a)^2} \quad \text{ד. } \frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$$

$$(13) \quad \text{א. } f'(x) = \frac{2x^2-8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3}$$

$$\text{ג. } f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$\text{ד. } f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$$\text{ה. } f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

$$\text{ו. } f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = \frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$$

מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

(15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ בנקודה בה $x = -2$.

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

תשובות סופיות:

$$m = 17 \quad (14)$$

$$m = 4 \quad (15)$$

$$m = 2 \quad (16)$$

מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x = -1$.

(18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y = 2$.

(19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

(21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$ בנקודה שבה $x = 1$.

(22) נתון כי הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = 3\sqrt{x}$. מצא את נקודת ההשקה.

(23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

(24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 4$.

(25) נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

(26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ ששיפועו -2.

(27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

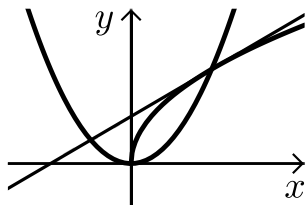
(28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית של 135° .

(29) מצא את משוואות המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y = x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y = 2x$.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$.



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

(17) $y = 24x + 22$

(18) $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

(19) $y = 6x - 24, y = -6x - 12$

(20) $y = 2x - 3$

(21) $y = -12x + 9$

(22) $(1, 3)$

(23) $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

(24) $y = 22x - 56$

(25) א. $y = 3x - 1$ ב. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

(26) $y = -2x + 8$

(27) $y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8}$

(28) $y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3}$

(29) $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

(30) א. $(1, 2)$ ב. $y = -1.5x + 3.5$ ג. $S = 4\frac{1}{12}$

(31) א. $(0, 0), (1, 1)$ ב. $y = 0.5x + 0.5$ ג. $(-0.5, 0.25)$

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

(32) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ בנקודה שבה $x = 3$ הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(33) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, $(a > 0)$.

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר a .

(34) נתונה הפונקציה: $y = x^3 + a\sqrt{x}$ (a פרמטר). שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 5. מצא את ערך הפרמטר a .

(35) נתונה הפונקציה: $y = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$ (A פרמטר). שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2. מצא את ערך הפרמטר A .

(36) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(37) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(38) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- c .

(39) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(40) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה (1, 6) הוא -6.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

(41) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$ לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$?
לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

(42) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו.
מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות:

$$a = 2, y = 8x - 18 \quad (32)$$

$$a = 2 \quad (33)$$

$$a = 4 \quad (34)$$

$$A = 1 \quad (35)$$

$$(-1, 5), y = 4x + 9 \quad (36)$$

$$a = 2, y = -4x - 2 \quad (37)$$

$$a = -\frac{1}{8}, c = 4 \quad (38)$$

$$b = 4, (4, 12) \quad (39)$$

$$b = 2, a = 6, y = -6x + 12 \quad (40)$$

$$k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right) \text{ או } k = 6 : (1, 1) \quad (41)$$

$$(1, 1), k = 1.5 \quad (42)$$

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

שאלות:

43) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה שבה $x = t$.
- ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1, 1)$.

44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 5x - x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3, 7)$.

45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = x^2 + 5x - 6$ העוברים דרך הנקודה $(0, -10)$.

46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 12x - x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2, 24)$.

47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3, 0)$.

48) מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2, 3)$.

תשובות סופיות:

ב. $t = 0, -2$. (43) $y = 2tx - t^2 + 1$ א.

(44) $y = x + 4$, $y = -3x + 16$

(45) $y = 9x - 10$, $y = x - 10$

(46) $y = 12x$, $y = -15x + 54$

(47) $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

(48) $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

(49) $y = -x + 5$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

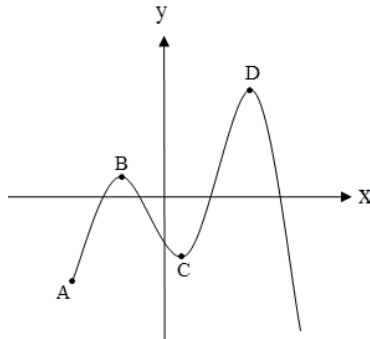
פרק 14 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

221	1. נקודות קיצון של פונקציות
224	2. חקירת פונקציה פולינומית
228	3. פונקציה זוגית ואי-זוגית

נקודות קיצון של פונקציות:

סיכום כללי:



נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית.
- נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

2) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

- מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.
 מצא את ערכו של הפרמטר a .
- (6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון.
 מצא את הקבוע a .
- (7) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה: $(2, 3)$.
 מצא את ערכי הפרמטרים A, B .
- (8) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$ יש נקודת קיצון ב- $x = -1$ ו- $x = 4$.
 מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- y של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון.
 מצא את הפרמטרים a, b .
- (10) לפונקציה $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2, 3)$.
 מצא את ערכי הפרמטרים a, b .

תשובות סופיות:

(1) $\max(5, 25)$

(2) א. $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$ ב. עולה: $x > 2$, $x < -2$ יורדת: $-2 < x < 2$

(3) א. $\max(0, 9)$, $\min(\sqrt{5}, -16)$, $\min(-\sqrt{5}, -16)$

ב. עולה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$ יורדת: $0 < x < \sqrt{5}$, $x < -\sqrt{5}$

(4) א. $\min(3, 5)$ ב. עולה: $x > 3$ יורדת: $x < 3$

(5) $a = 3$

(6) $a = -\frac{2}{3}$

(7) $A = -1$, $B = 3$

(8) $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{3}{2}$, $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$, $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$

(9) $b = 6$, $a = -4$

(10) $a = 2$, $b = -16$

חקירת פונקציה פולינומית:

שאלות:

(11) נתונה הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(14) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15 נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

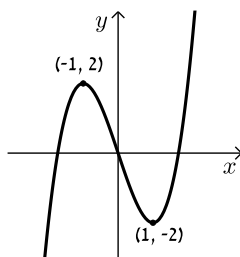
16 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$.

- לאילו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הצב בפונקציה $a = 6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , סרטוט.

17 נתונה הפונקציה: $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$ (d פרמטר).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 2$.

- מצא את d .
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



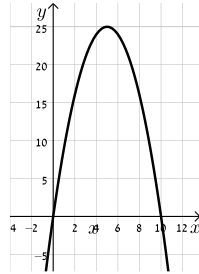
18 לפי גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:

- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?
- האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

תשובות סופיות:

11) א. כל x ב. $\max(5, 25)$ ג. עלייה: $x < 5$, ירידה: $x > 5$

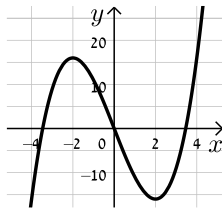
ד. $(0, 0)$, $(10, 0)$.



ה. להלן גרף:

12) א. כל x ב. $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$ ג. עלייה: $x > 2$, $x < -2$, ירידה: $-2 < x < 2$

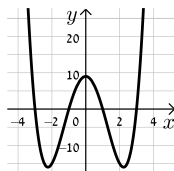
ד. $(0, 0)$, $(\sqrt{12}, 0)$, $(-\sqrt{12}, 0)$.



ה. להלן גרף:

13) א. כל x ב. $\max(0, 9)$, $\min(\sqrt{5}, -16)$, $\min(-\sqrt{5}, -16)$ ג. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$, ירידה: $x < -\sqrt{5}$, $0 < x < \sqrt{5}$

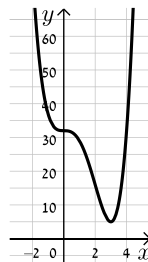
ד. $(0, 9)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 3, 0)$.



ה. להלן גרף:

14) א. כל x ב. $\min(3, 5)$ ג. תחומי עלייה: $x > 3$, תחומי ירידה: $x < 3$

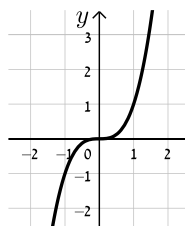
ד. $(0, 32)$.



ה. להלן גרף:

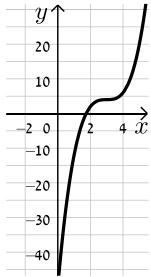
15) א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x

ד. $(0, 0)$.



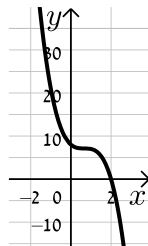
16) א. $-6 < a < 6$ ב. תחום הגדרה: כל x , נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל x ,

תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0, -50)$, להלן גרף:



17) א. $d = 8$ ב. לא. ג. יורדת בתחום $x \neq \frac{2}{3}$

ד. $(0, 8)$ ה. להלן גרף:



18) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k > 2, k < -2$

ה. $k = \pm 2$ ו. $-2 < k < 2$ ז. לא.

פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

הגדרות:

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x) = f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x) = -f(x)$.

שאלות:

(1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x) = 3x - 5$

ב. $f(x) = 3x^2$

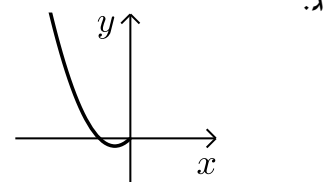
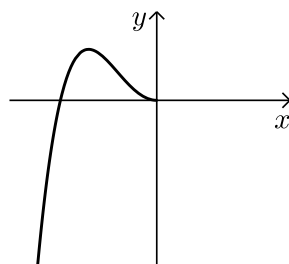
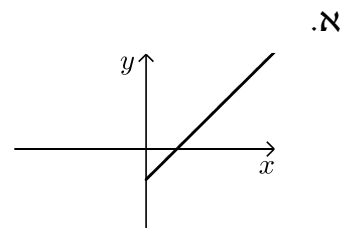
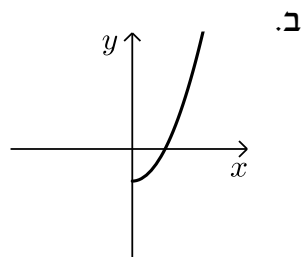
ג. $f(x) = 2x^3$

ד. $f(x) = x^3 - 2x^2$

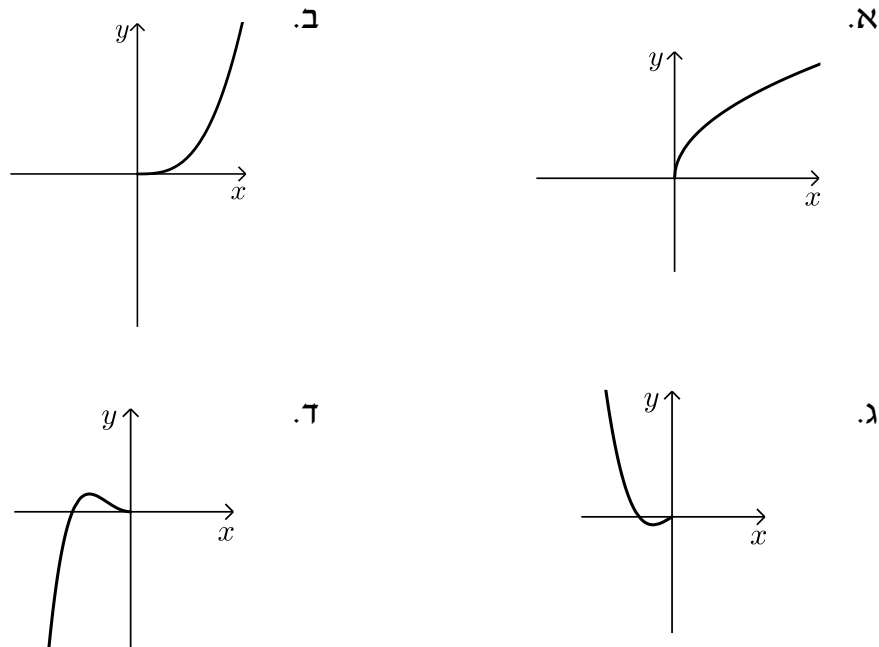
ה. $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

ו. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

(2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה זוגית:



(3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



- (4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^4 - 4x^2$ בתחום: $[0:3]$.
- תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
- ג. התבסס על ממצאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

(5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y , מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.
- ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

(6) לפניך הפונקציה: $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$, פרמטר a .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
- ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

(7) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 3x^3 - 9x$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

- (8) לפינך הפונקציה הבאה : $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$, פרמטר b .
 ידוע כי הישר $y = 2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה
 שמקיימות : $f'(x) = 0$.
- א. מצא את b וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חקור את הפונקציה בתחום : $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים :
- תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.
נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
 - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

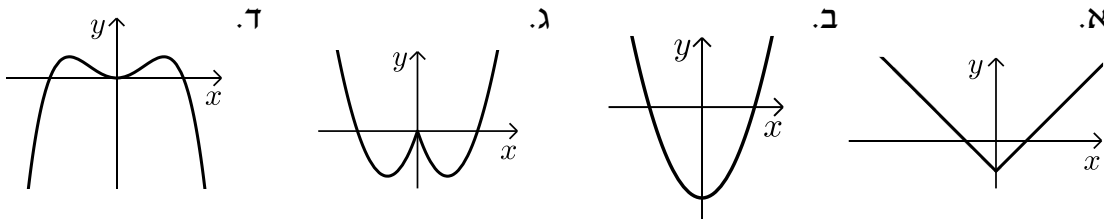
(9) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום : $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים :
- תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן
(בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?
נמק ע"י חישוב מתאים.
 - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

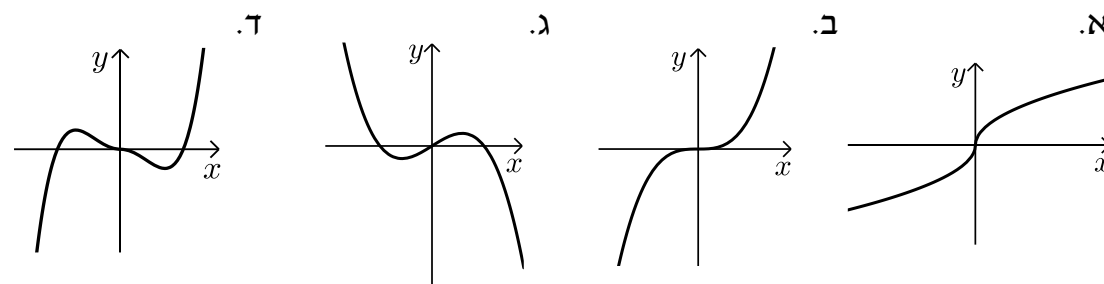
תשובות סופיות:

(1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

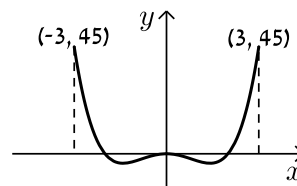
(2) להלן הגרפים:



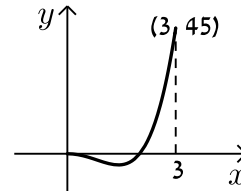
(3) להלן הגרפים:

(4) א. i. $0 \leq x \leq 3$ ii. $(0,0), (2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min(\sqrt{2}, -4)$.iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה. $\max(0,0)$ קצה.

סרטוט עבור סעיף ג:

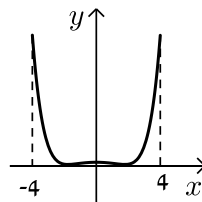


סרטוט עבור חלק v:

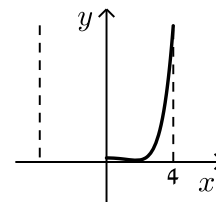
(5) א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 4$, חיתוך עם ציר ה- y : $(0,3)$,נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$ ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

סרטוט עבור סעיף ג:



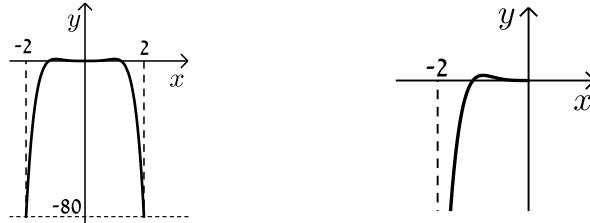
סרטוט עבור סעיף א:



6) א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2 \leq x \leq 0$, חיתוך עם הצירים:
 נקודות קיצון: $(-1.225, 0)$, $(0, 0)$, $\min(-2, -80)$ קצה, $\max(-1, 1)$ קצה, $\min(0, 0)$ קצה,

עולה: $-1 < x < -2$, יורדת: $-1 < x < 0$. ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ד:

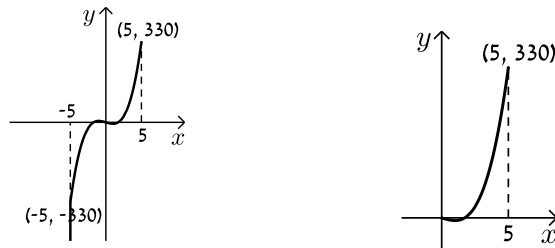


7) א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 5$, חיתוך עם הצירים: $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$,

נקודות קיצון: $\max(5, 330)$ קצה, $\min(1, -6)$ קצה, $\max(0, 0)$ קצה,

עולה: $1 < x < 5$, יורדת: $0 < x < 1$. ב. אי-זוגית.

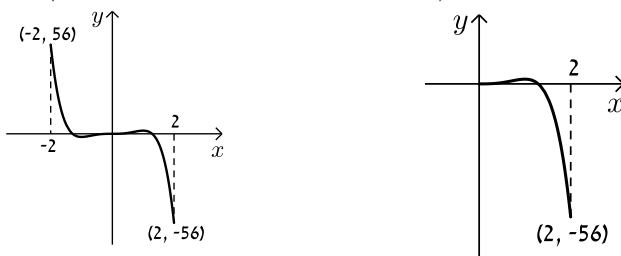
סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ג:



8) א. $b=0$ ב. $0 \leq x \leq 2$ ii. $(0, 0)$, $(1.29, 0)$ iii. $\min(2, -56)$ קצה,

$\max(1, 2)$ קצה. iv. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $1 < x < 2$.

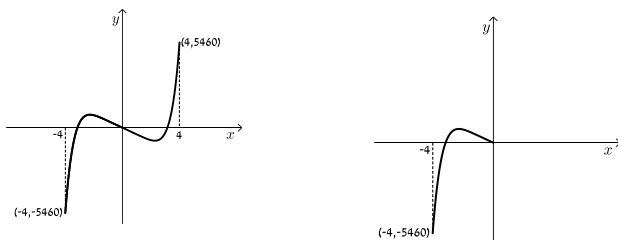
ג. אי-זוגית. סרטוט עבור חלק v: סרטוט עבור סעיף ד:



9) א. $-4 \leq x \leq 0$ ii. $(-1, 0)$, $(0, 0)$ iii. $\min(0, 0)$ קצה, $\max(-0.723, 0.207)$ קצה,

$\min(-4, -5460)$ קצה. iv. עולה: $-4 < x < -0.723$, יורדת: $-0.723 < x < 0$.

ג. אי-זוגית. סרטוט עבור חלק v: סרטוט עבור סעיף ד:



סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 15 - חשבון דיפרנציאלי - חילוק פולינומים ופתרון משוואות
פולינומיות

תוכן העניינים

234	1. חילוק פולינומים
235	2. פתרון משוואות

חילוק פולינומים:

סיכום כללי:

בחילוק פולינום $p(x)$ בפולינום $q(x)$ (נכתב: $q(x) \overline{) p(x)}$) יש לבצע 4 שלבים:

- (1) חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$ באיבר במעלה הגבוהה ביותר של $p(x)$.
- (2) רישום תוצאת החילוק בצד והכפלתה בכל הפולינום המחלק $q(x)$.
- (3) חיסור של תוצאת ההכפלה בפולינום המחולק $p(x)$.
- (4) חזרה לשלב הראשון כאשר מבצעים את חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$ בתוצאת החיסור.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לחלק עוד.
במידה ותוצאת החיסור האחרונה מניבה ביטוי שמעלתו קטנה משל האיבר המחלק ב- $q(x)$ אז נתייחס לביטוי זה כאל שארית החלוקה.

שאלות:

בצע את חילוק הפולינומים הבאים:

$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + 3x - 5 \\ x - 1 \end{array}$	(2)	$\begin{array}{r} x^2 - 5x - 14 \\ x + 2 \end{array}$	(1)
$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 9 \\ x - 3 \end{array}$	(4)	$\begin{array}{r} x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3 \\ x + 3 \end{array}$	(3)
$\begin{array}{r} x^3 - x^2 + x - 1 \\ x - 1 \end{array}$	(6)	$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 - 4x - 20 \\ x + 5 \end{array}$	(5)
$\begin{array}{r} 4x^2 + x - 1 \\ x - 2 \end{array}$	(8)	$\begin{array}{r} 4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10 \\ x^2 - x + 10 \end{array}$	(7)

תשובות סופיות:

$x^2 - x - 3$	(4)	$x^3 - 2x^2 + 5x - 1$	(3)	$x^2 + 2x + 5$	(2)	$x - 7$	(1)
$4x + 9 + \frac{17}{x - 2}$	(8)	$4x^2 + 10x + 1$	(7)	$x^2 + 1$	(6)	$x^2 - 4$	(5)

פתרון משוואות:

סיכום כללי:

משפטים כלליים:

- לכל משוואה פולינומאלית ממעלה n יש בדיוק n שורשים.
- אם לפולינום שורש מרוכב $a+bi$ אז גם המספר הצמוד $a-bi$ הוא שורש שלו.
- יהי $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ פולינום שכל מקדמיו מספרים שלמים. אם לפולינום שורש שהוא מספר שלם, אז הוא מחלק את האיבר החופשי a_0 .
- אם $x=a$ שורש של פולינום $p(x)$, אז הפולינום $p(x)$ מתחלק ב- $x-a$ ללא שארית.
- אם $p(x)$ פולינום ואם $p(a)=0$ וגם $p'(a)=0$ אז $x=a$ הוא שורש כפול.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (2) \quad k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0$$

$$(3) \quad k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (4) \quad k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0$$

$$(5) \quad k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (6) \quad k^3 - k^2 + k - 1 = 0$$

$$(7) \quad k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad k_1 = 1, k_2 = -2, k_3 = 3, k_4 = -5 \quad (2) \quad k_1 = -4, k_{2,3} = 1 \pm 2i$$

$$(3) \quad k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = -1, k_4 = -1, k_5 = -1 \quad (4) \quad k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 2$$

$$(5) \quad k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -1, k_5 = 1, k_6 = -1 \quad (6) \quad k_1 = 1, k_{2,3} = \pm i$$

$$(7) \quad k_1 = 1, k_2 = 2, k_{3,4} = \pm 2i$$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 16 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)