

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה



## תוכן העניינים

1. הוכחות של משפטים נבחרים בקורס ..... 1
2. אי שוויונים ..... (ללא ספר)
3. גיאומטריה אנליטית ..... (ללא ספר)
4. חוקי חזקות ומשוואות מעריכיות ..... (ללא ספר)
5. לוגריתמים ..... (ללא ספר)
6. טריגונומטריה במשולש ישר זווית ..... (ללא ספר)
7. טריגונומטריה - זהויות ..... (ללא ספר)
8. טריגונומטריה - משוואות ..... (ללא ספר)
9. טריגונומטריה במישור ..... 3
10. הנגזרת ובעיות משיקים ..... (ללא ספר)
11. חקירת פונקציה - פולינום ..... (ללא ספר)
12. אינדוקציה מתמטית ..... 36

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 1 - הוכחות של משפטים נבחרים בקורס

תוכן העניינים

1. הוכחות של משפטים נבחרים ..... 1

## הוכחות של משפטים נבחרים

הוכח את המשפטים הבאים:

### גזירות גוררת רציפות

אם הפונקציה  $f(x)$  גזירה בנקודה  $x_0$ , אזי היא רציפה בנקודה זו.

### כלל השרשרת

תהי  $y = g(x)$  פונקציה גזירה בנקודה  $x$ , ותהי  $f(g(x))$  גזירה בנקודה  $g(x)$ . אזי הפונקציה המורכבת  $f(g(x))$  גזירה בנקודה  $x$ , ומתקיים

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

### כלל לופיטל

נניח ש- $g$  ו- $f$  פונקציות גזירות ובעלות נגזרות רציפות בנקודה  $x_0$ ,

ונניח כי  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  וכן  $g'(x_0) \neq 0$ , אז  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

### משפט לגראנז'

אם הפונקציה  $f(x)$

א. רציפה בקטע הסגור  $[a, b]$ ,

ב. גזירה בקטע הפתוח  $(a, b)$ ,

אז קיימת נקודה  $a < b < c$ , כך ש- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

### משפט פרמה

נניח ש- $f$  פונקציה המוגדרת בתחום המכיל את הנקודה  $x_0$ .  
 אם  $f$  גזירה בנקודה  $x_0$  וגם  $x_0$  נקודת מקסימום מקומית, אז  $f'(x_0) = 0$ .

### משפט רול

אם הפונקציה  $f(x)$

א. רציפה בקטע הסגור  $[a, b]$ ,

ב. גזירה בקטע הפתוח  $(a, b)$ ,

ג. מקיימת  $f(a) = f(b)$ ,

אז קיימת נקודה  $a < b < c$ , כך ש- $f'(c)$ .

### נגזרת הפונקציה ההפוכה

תהי  $y = f(x)$  פונקציה הפיכה ורציפה בסביבת הנקודה  $x_0$ .

אם  $f(x)$  גזירה בנקודה  $x_0$  וגם  $f'(x_0) \neq 0$ , אז גם הפונקציה ההפוכה שלה,

$$x = g(y), \text{ פונקציה גזירה בנקודה } y_0 = f(x_0), \text{ ומתקיים השוויון } g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

להוכחות המלאות היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 2 - אי שוויונים

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 3 - גיאומטריה אנליטית

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 4 - חוקי חזקות ומשוואות מעריכיות

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 5 - לוגריתמים

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 6 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 7 - טריגונומטריה - זהויות

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 8 - טריגונומטריה - משוואות

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

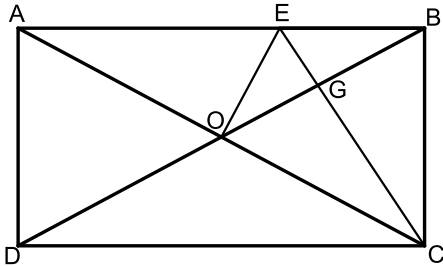
פרק 9 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

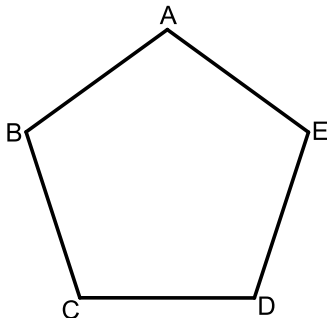
1. שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה ..... 3
2. שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש ..... 7
3. שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים ..... 16
4. שאלות מסכמות ..... 24

## שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

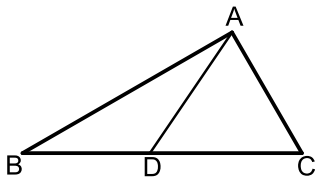
### שאלות:



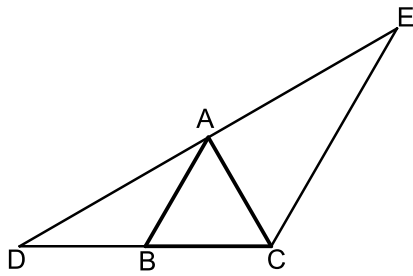
- 53) המרובע ABCD הוא מלבן.  
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.  
 הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן ומחלקת אותה כך ש-  $2BE = AE$ .  
 ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC ושווה ל-BE.  
 הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.  
 א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.  
 ב. הוכח כי מתקיים:  $4GE = AE$ .  
 ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.  
 חשב את שטח המלבן ABCD.



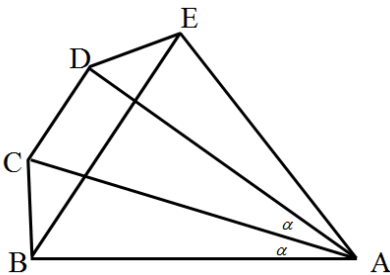
- 54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE (כל זוויותיו הן  $108^\circ$ ) בעל אורך צלע  $\alpha$ .  
 א. הבע באמצעות  $\alpha$  את אלכסון המחומש AD.  
 ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את רדיוס המעגל החוסם את המחומש.  
 ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את שטח המחומש.  
 ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.  
 חשב את שטח המחומש.



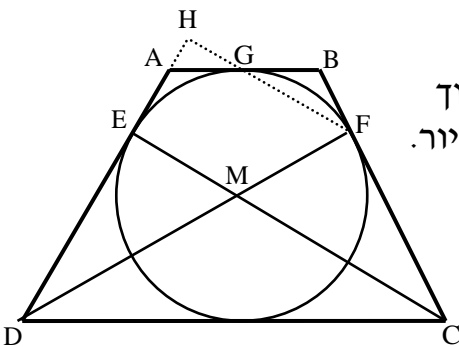
- 55) במשולש ABC הזווית C היא  $60^\circ$ .  
 מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים המשולשים ABD ו-ACD.  
 ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא:  $R_1 = \sqrt{3}$  ס"מ.  
 כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא:  $R_2 = 3$  ס"מ.  
 א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.  
 ב. היקף המשולש ABC הוא:  $12 + 4\sqrt{3}$  ס"מ = P.  
 חשב את שטח המשולש.



- 56) המשולש ABC הוא שווה צלעות. הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים שני משולשים ABD ו-ACE. ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE. א. הוכח:  $AB \parallel CE$ . ב. הוכח:  $BC \cdot DE = DC \cdot AE$ . ג. נתון:  $DC = 8$  ס"מ וכי:  $AC \perp DE$ . i. חשב את שטח המשולש DCE. ii. חשב את שטח המשולש ABD.

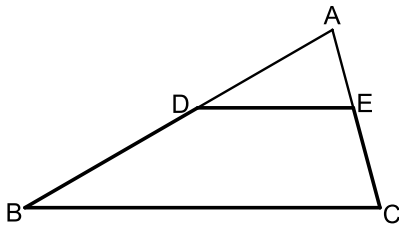


- 57) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB, AC, AD ו-AE כך שמתקיים:  $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$  ו- $AB = AE$ . מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE מתקיים:  $BE \parallel CD$ . ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה. א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים. ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש ( $AC = AD$ ). הוכח כי:  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ . ג. ידוע כי:  $\angle ADC = 3\alpha + 2.5$  ו- $\angle ADE = 3\alpha - 10$ . הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית. ד. נסמן:  $AB = m$ . i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE. ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE. iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).



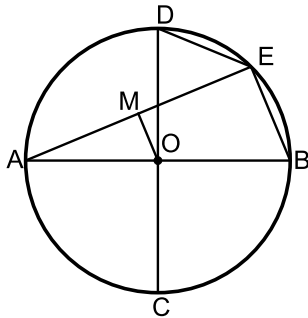
- 58) הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F ו-G כמתואר באיור. הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M. א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום. ב. חשב את זוויות הטרפז. ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.

חשב את היחס  $\frac{EM}{FH}$ .

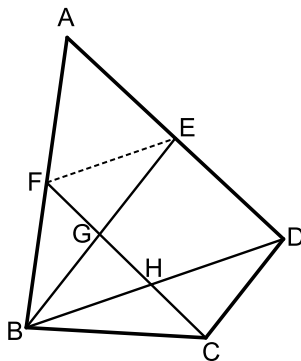


- (59)** המרובע BDEC הוא טרפז  $BC \parallel DE$ . המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = BC$ ). נתון:  $AB = 18$  ס"מ,  $\angle ADE = 30^\circ$ .
- סמן את אורך הבסיס DE ב- $x$ . ואת שטח הטרפז BDEC ב- $S$ . הבע את  $S$  באמצעות  $x$ .
  - על הקטע AD בונים ריבוע. ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.

חשב את היחס:  $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$ .



- (60)** במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו-CD. המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף המעגל המקיימת:  $BE + DE = 15$  ס"מ. מעבירים את המיתר AE. הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.
- הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.
  - מצא את אורך המיתר BE.
  - נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ"ר. מצא את רדיוס המעגל.
  - חשב את זווית B.



- (61)** BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD. הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AD ו-AB במרובע. מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$ . נתון כי הזוויות  $\angle A$  ו- $\angle BFE$  משלימות ל- $180^\circ$ .
- הוכח:  $\triangle ABCD \sim \triangle BFE$ .
  - נתון כי:  $BE = 7.5$  וכי:  $GE - HD = 17 \frac{1}{15}$ . חשב את אורך הקטע FE.
  - נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED הוא:  $R = 4.001$  ס"מ. מצא את זווית  $\angle EBD$ .

## תשובות סופיות:

(53) ג. 120 סמ"ר

(54) א.  $1.618\alpha$

(55) ב.  $S = 8\sqrt{3}$

(56) ג. i.  $S_{CDE} = 16\sqrt{3}$

ג. ii.  $S_{ABD} = 4\sqrt{3}$

(57) ד. i.  $BC = 0.4663m$ ,  $DE = 0.4663m$ ,  $CD = 0.4776m$ ,  $BE = 1.2175m$

(62) ד. ii.  $0.7232m^2$

ד. iii.  $m = 8$  ס"מ

ג.  $\frac{2}{3}$

(58) ב.  $60^\circ$ ,  $120^\circ$

ב.  $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{81}$

(59) א.  $S = 81 - 0.25x^2$

ג.  $R = 13$

ד.  $\sphericalangle B = 67.38^\circ$

(60) ב.  $BE = 10$

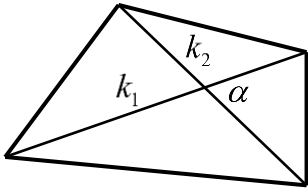
ג.  $16.73^\circ$

(61) ב.  $FE = 4$

## שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

סיכום כללי:

שטחים של משולשים ומרובעים:

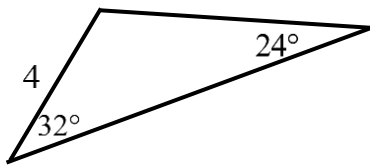


- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י:  $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסונו:  $S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$

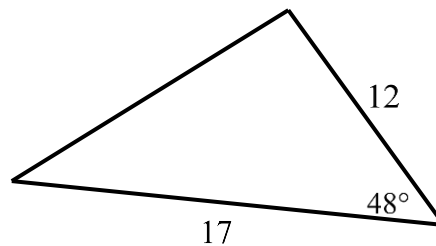
שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

ב.



א.



26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של  $15^\circ$  עם הבסיסים.

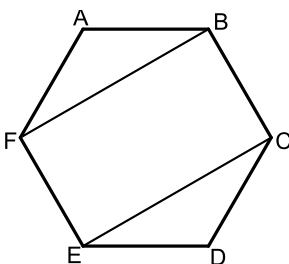
27) אורכו של מלבן הוא  $m$  ורוחבו  $n$ . הזווית שבין אלכסונו המלבן היא  $\theta$ .

$$\sin \theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad \text{הוכח כי מתקיים:}$$

28) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ),  $BD$  חוצה את הזווית  $\angle B$ .

נתון:  $\angle A = \alpha$ ,  $AB = m$ .

הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $m$  את שטח המשולש  $BCD$ .



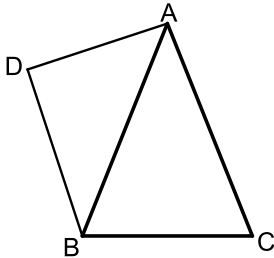
29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא  $S$ .

א. הבע באמצעות  $S$  את אורך צלע המשושה.

ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן  $BFEC$ .

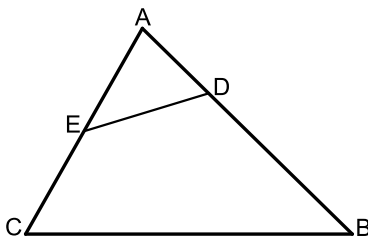
הבע באמצעות  $S$  את שטח המלבן.

**(30)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש  $\alpha$ ,  $(AB = AC)$ . אורך הבסיס BC הוא  $k$ .



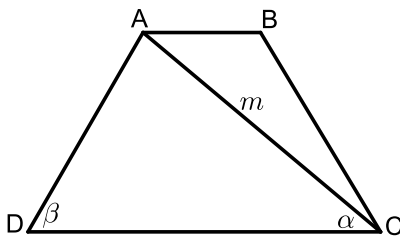
- על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו  $\angle D = 90^\circ$ .
- הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את אורך שוק המשולש ABC.
  - הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$ .
  - וכי:  $\angle ABD = 40^\circ$ . מצא את זוויות המשולש ABC.
  - חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי  $k = 6$ .

**(31)** במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.



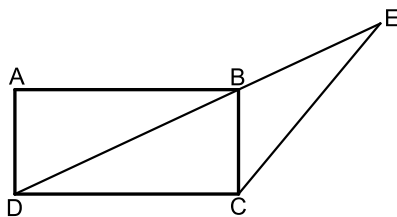
- הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D מקיימת:  $AD = 3$  ס"מ.
- ידוע כי:  $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$ .
- מצא את אורך הקטע DE.
  - חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
  - חשב את שטח המרובע BCED.

**(32)** המרובע ABCD הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ . הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.

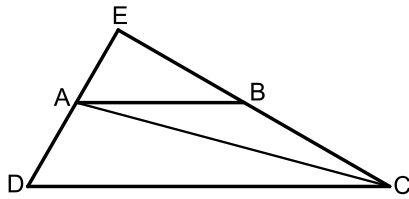


- מסמנים:  $AC = m$ ,  $\angle ACD = \alpha$ ,  $\angle ADC = \beta$ .
- הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $m$  את אורך הבסיס הגדול DC.
  - נתון כי האלכסון AC מקיים:  $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$ .
  - הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $m$  את הבסיס AB.
  - חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי:  $\beta = 60^\circ$ ,  $\alpha = 40^\circ$  ו- $m = 8$ .

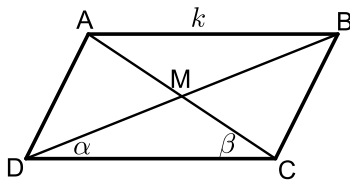
**(33)** המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.



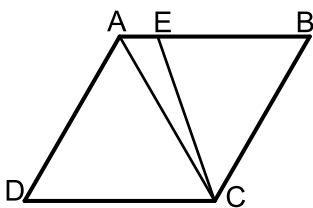
- מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C. ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא  $115^\circ$ .
- מצא את אורך הקטע CE.
  - מצא את אורך האלכסון BD.
  - חשב את שטח המשולש DCE.



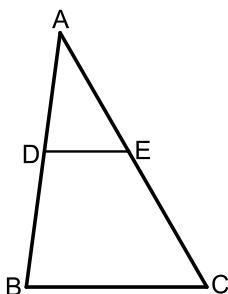
- (34)** המרובע ABCD הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ .  
 ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם  
 בנקודה E. ידוע כי:  $DE \perp CE$ .  
 מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C.  
 מסמנים את הבסיס הגדול DC ב- $k$  ואת:  $\angle ACD = \alpha$ .  
 א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את הבסיס הקטן AB.  
 ב. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.  
 ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $k = 12$  ס"מ.



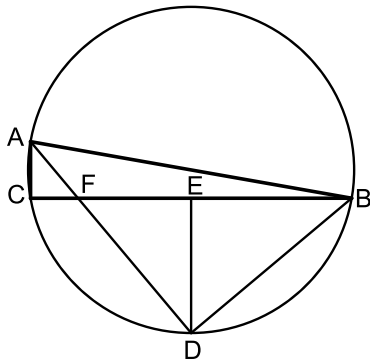
- (35)** נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים  
 את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים  
 בנקודה M כמתואר באיור.  
 מסמנים:  $AB = k$ ,  $\angle BDC = \alpha$ ,  $\angle ACD = \beta$ .  
 א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים:  
 $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ .  
 ב. ענה על השאלות הבאות:  
 i. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $k$  את שטח המשולש DMC.  
 ii. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $k$  את שטח המקבילית ABCD.  
 ג. נתון כי:  $\frac{AC}{BD} = 2$ . הראה כי שטח המקבילית הוא:  
 $\frac{4k^2 \sin^2 \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ .



- (36)** המרובע ABCD הוא מעוין ובו  $\angle D = 60^\circ$ .  
 מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE  
 כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת  
 אותה ביחס:  $\frac{BE}{AE} = 4$ .  
 א. חשב את זווית AEC.  
 ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.



- (37)** הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.  
 נתון כי:  $BC = 15$ ,  $CE = 13$ ,  $BD = \sqrt{129}$ .  
 ידוע כי זווית AED היא  $60^\circ$ .  
 א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע  
 ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.  
 ג. חשב את שטח המשולש ADE.



**(38)** המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.

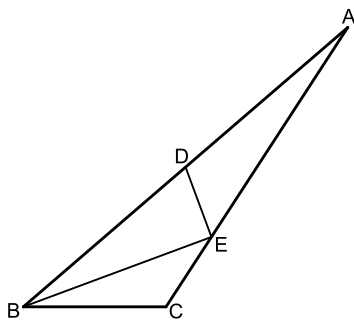
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC.

מסמנים:  $DE = k$  ונתון כי:  $\angle ABC = 10^\circ$ .

א. הבע באמצעות  $k$  את רדיוס המעגל.

ב. הבע באמצעות  $k$  את שטח המשולש ABF.

ג. מצא את  $k$  אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.



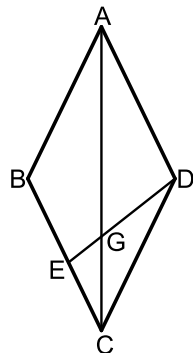
**(39)** במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.

הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת:  $DE = CE$ .

ידוע כי:  $BC = 6$ ,  $BE = 8$ ,  $BD = 9$ .

א. מצא את זווית B.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.



**(40)** נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.

א. חשב את זוויות המעוין.

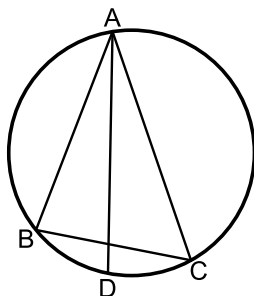
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא  $m$ .

הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.

הזווית EDC תסומן ב- $\alpha$ .

i. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את אורך הקטע CE.

ii. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש EGC.



**(41)** המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.

מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.

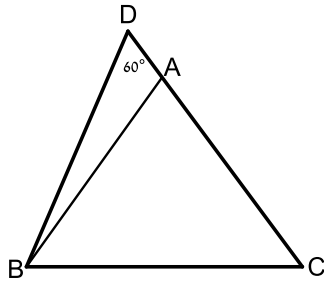
ידוע כי:  $\angle ACB = 60^\circ$ ,  $\angle BAC = 40^\circ$ .

מסמנים:  $AD = k$ .

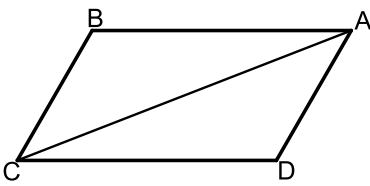
א. הבע באמצעות  $k$  את אורך המיתר BD.

ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.

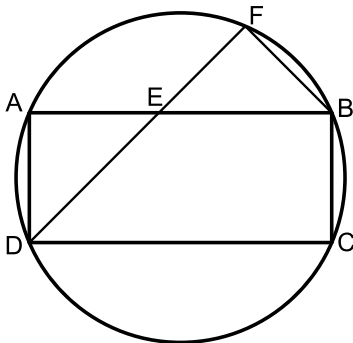
מצא את  $k$  (עגל למספר שלם).



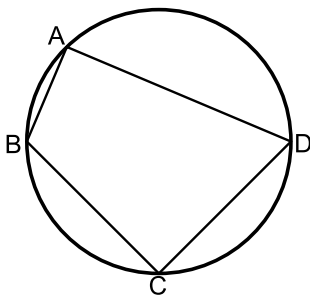
- (42)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ). ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD. ידוע כי:  $\angle D = 60^\circ$ . אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.  
א. מצא את אורך הקטע AD.  
ב. חשב את שטח המשולש ABC.



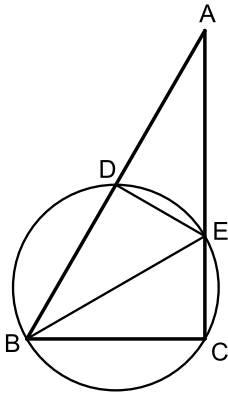
- (43)** במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא  $\sqrt{79}$  ס"מ. היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי:  $\angle B = 120^\circ$ .  
א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.  
ב. חשב את שטח המקבילית.  
ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



- (44)** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל. מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF החותך את הצלע AB בנקודה E. ידוע כי:  $\widehat{AF} = \widehat{CF}$ . הצלע AD של המלבן תסומן ב- $a$ .  
א. הוכח כי המשולש DAE שווה שוקיים.  
ב. נתון גם כי:  $BC = BF$ .  
i. הבע באמצעות  $a$  את רדיוס המעגל.  
ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות:  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$ . (אין צורך לסרטט אותן).



- (45)** המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור. ידוע כי:  $AB = b$ ,  $BC = a$ ,  $CD = a$ ,  $AD = 3b$ .  
א. הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את  $\cos \angle BCD$ .  
ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים:  $a = b\sqrt{5}$ .  
ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ. הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.

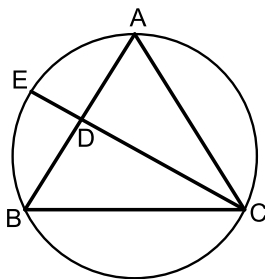


- (46) המשולש ABC הוא ישר זווית  $\sphericalangle C = 90^\circ$  ובו:  $\sphericalangle B = 2\alpha$ .  
 מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E. המיתר BE חוצה את זווית B.  
 א. הבע באמצעות R ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABE.  
 ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.  
 חשב את שטח המשולש ABE.

- (47) במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא  $\beta$ , BE חוצה את זווית B ו-CD הוא הגובה לשוק AB.

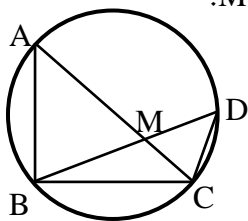
הוכח כי שטח המשולש ADE הוא:

$$S_{ADE} = -\frac{k^2 \sin \frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4 \sin \frac{3\beta}{2}}$$



- (48) נתון משולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) החסום במעגל. מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D. ידוע כי E היא אמצע הקשת  $\widehat{AB}$  והיחס בין הקטעים BD ו-CD הוא 4:7. מסמנים:  $\sphericalangle ACD = \alpha$ .

- א. מצא את זוויות המשולש ABC (עגל למספרים שלמים).  
 ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.



- (49) BD ו-AC הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M. זווית B היא זווית ישרה. נתון:  $\sphericalangle MCB = \beta$ ,  $\sphericalangle MBC = \alpha$ .

- א. הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את שטח המשולש BDC.

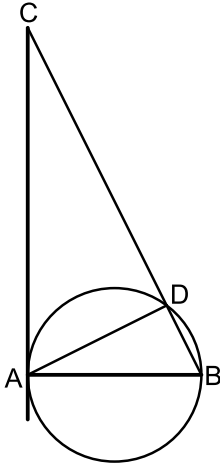
ב. נתון:  $\beta = 2\alpha$ ,  $S_{BDC} = \frac{1}{2}R^2$ .

- חשב את  $\alpha$ .

**50** בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא  $b$  והזווית שליד הבסיס הגדול היא  $\gamma$  נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות  $\gamma$  ו- $b$  את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את  $\gamma$  אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי  $\sqrt{3}$  מהבסיס הקטן.



**51** המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו  $R$  ו-AD הוא מיתר.

ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.

המשיק והמשך המיתר נגשים בנקודה C.

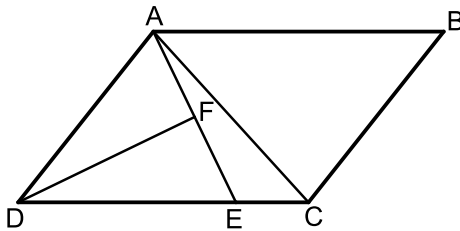
מסמנים:  $\angle BAD = \alpha$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $R$  את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $R$  את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את  $\alpha$  אם ידוע כי שטח המשולש ABD

קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



**52** המרובע ABCD הוא מקבילית.

הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים

המקיימים:  $3CE = DE$ .

מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.

ידוע כי:  $\angle ADF = \angle CDF = \alpha$ .

מסמנים:  $CE = k$ .

א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.

הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא  $4.5k$ . מצא את  $\alpha$ .

## תשובות סופיות:

$$(25) \quad S = 75.801 \text{ סמ"ר} \quad \text{א.} \quad S = 8.641 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.}$$

$$(26) \quad S = 16 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{ABCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)} \quad (27)$$

$$(28) \quad \text{א.} \quad \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}} \approx 0.62S \quad \text{ב.} \quad \frac{2}{3}S$$

$$(29) \quad \text{א.} \quad \frac{k}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{ב.} \quad 44.4^\circ, 67.78^\circ, 67.78^\circ \quad \text{ג.} \quad S = 37.18$$

$$(30) \quad \text{א.} \quad DE = \sqrt{1.6} = 1.26 \quad \text{ב.} \quad R = 2 \quad \text{ג.} \quad S = 21.48$$

$$(31) \quad \text{א.} \quad DC = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \quad \text{ב.} \quad AB = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{3 \sin \beta} \quad \text{ג.} \quad S_{ABCD} = 31.2$$

$$(32) \quad \text{א.} \quad 12.75 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 14.19 \text{ ס"מ} \quad \text{ג.} \quad 63.05 \text{ ס"מ}$$

$$(33) \quad \text{א.} \quad \frac{k \tan \alpha}{\tan 2\alpha} \quad \text{ב.} \quad \frac{k^2 \tan \alpha \sin 2\alpha}{2 \tan^2 2\alpha} \quad \text{ג.} \quad S = 7.754 \text{ ס"מ}$$

$$(34) \quad \text{א.} \quad \frac{k^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ב.} \quad \frac{2k^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ii.}$$

$$(35) \quad \text{א.} \quad 109.1^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 86.6$$

$$(36) \quad \text{א.} \quad 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 34.48 \text{ סמ"ר}$$

$$(37) \quad \text{א.} \quad R = \frac{k}{2 \sin^2 40} = 1.21k \quad \text{ב.} \quad S = \frac{k^2 \sin 10}{2 \sin 50 \sin^3 40} \quad \text{ג.} \quad k = 6$$

$$(38) \quad \text{א.} \quad 40.72^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 12.52$$

$$(39) \quad \text{א.} \quad 128.32^\circ; 51.68^\circ \quad \text{ב.} \quad 1.27m \sin \alpha \quad \text{ג.} \quad \frac{0.35m^2 \sin^2 \alpha \sin(128.32 - \alpha)}{\sin(25.84 + \alpha)}$$

$$(40) \quad \text{א.} \quad BD = \frac{k \sin 20}{\sin 100} \quad \text{ב.} \quad k = 7$$

$$(41) \quad \text{א.} \quad 5 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad S = 172.77$$

$$(42) \quad \text{א.} \quad BC = 3 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad AB = 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ג.} \quad S = 18.18 \text{ סמ"ר} \quad \text{ד.} \quad R = \sqrt{\frac{37}{3}}$$

ב.ii.  $45^\circ, 135^\circ$

(43) ב.i.  $R = a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a$

ג.  $S = 14.4$  סמ"ר

(44) א.  $\cos \sphericalangle BCD = \frac{a^2 - 5b^2}{a^2 + 3b^2}$

ב.  $S = 36\sqrt{3}$  סמ"ר

(45) א.  $S = R^2 \tan 2\alpha$

ב.  $BE = 7.75$

(48) א.  $58^\circ, 58^\circ, 64^\circ$

ב.  $\alpha = 22.5^\circ$

(49) א.  $S = 2R^2 \sin \alpha \cos \beta \sin(90^\circ - \alpha + \beta)$

ב.  $\gamma = 75^\circ$

(50) א.  $\frac{b \sin(135^\circ - \gamma)}{\sin 45^\circ}, \frac{b \sin(\gamma - 45^\circ)}{\sin 45^\circ}$

ג.  $\alpha = 26.56^\circ$

ב.  $S = \frac{2R^2 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$

(51) א.  $S = R^2 \sin 2\alpha$

ב.  $P_{ACE} = k + 6k \sin \alpha + k\sqrt{25 - 24 \cos 2\alpha}$

(52) א.  $AE = 6k \sin \alpha$

ג.  $\alpha = 14.47^\circ$

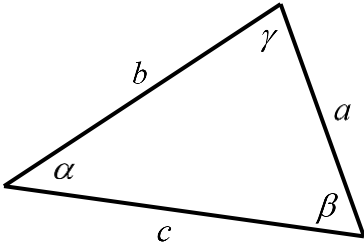
## שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

### סיכום כללי:

#### משפט הסינוסים:

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



#### משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן

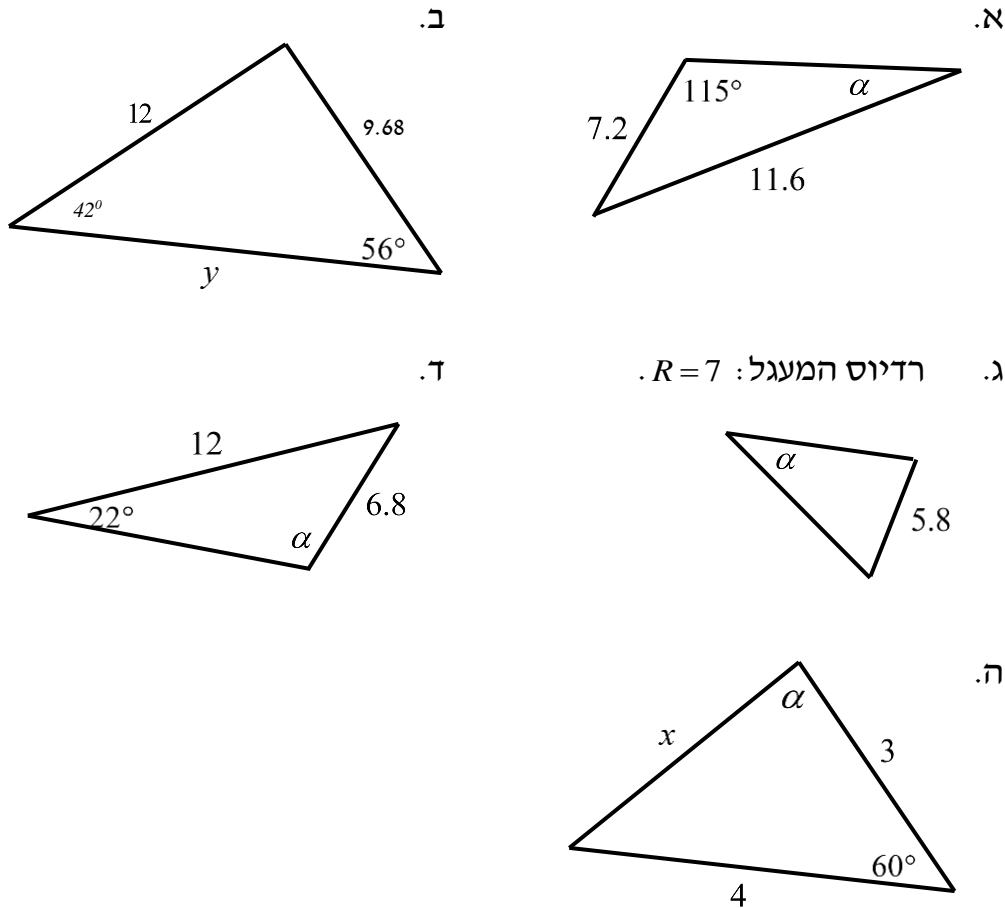
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{או} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

#### מתי נשתמש בכל משפט:

- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  - א. נתונות שתי זוויות וצלע.
  - ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  - ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  - א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  - ב. נתונות שלוש צלעות.
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

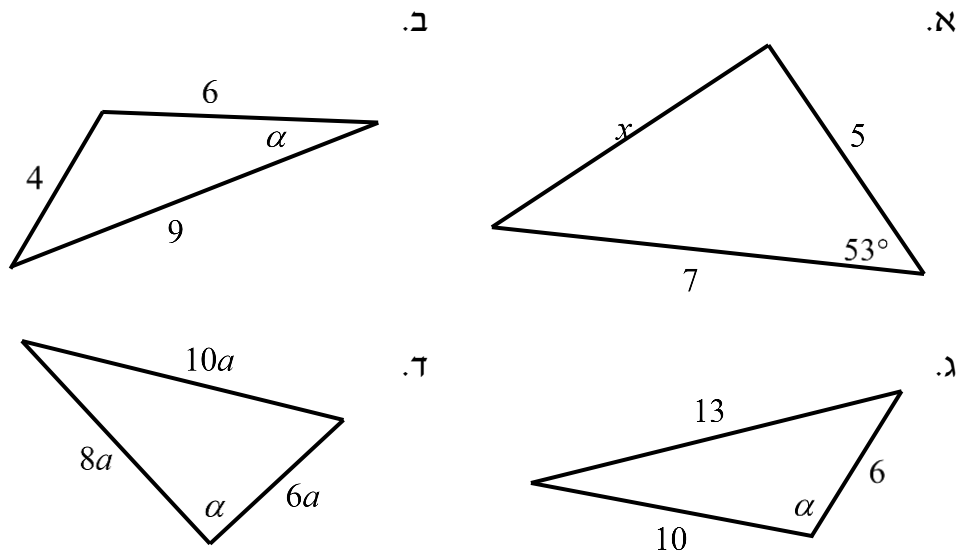
**שאלות:**

1 מצא את ערכו של  $a/x/y$  במשולשים הבאים (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):

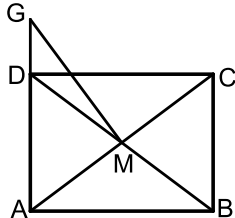


רדיוס המעגל:  $R = 7$ .

2 מצא את ערכו של  $\alpha/x$  במשולשים הבאים:

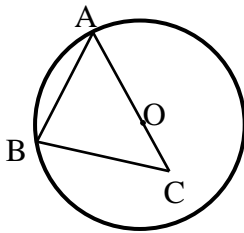


- (3) נתון משולש שווה שוקיים  $ABC$  ( $AB=AC$ ) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא  $70^\circ$ .  $CD$  הוא חוצה זווית הבסיס  $C$ . מצא את אורכו של הקטע  $AD$ .



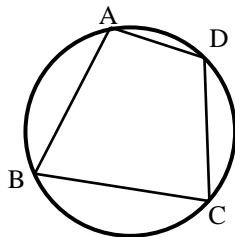
- (4) אלכסוני המלבן  $ABCD$  נפגשים בנקודה  $M$ . הנקודה  $G$  נמצאת על המשך הצלע  $AD$ . נתון:  $AD = 3$  ס"מ,  $AB = 4$  ס"מ,  $DG = 1.2$  ס"מ. מצא את גודלו של הקטע  $GM$ .

- (5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ. חשב את זוויות המרובע.

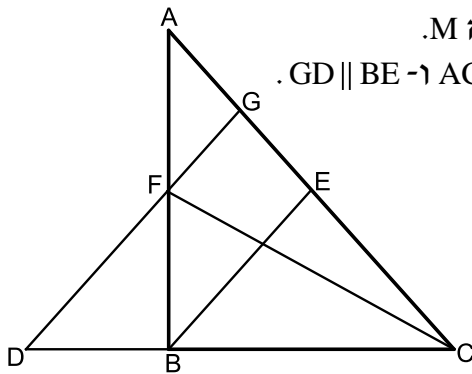


- (6) הצלע  $AB$  במשולש  $ABC$  היא מיתר במעגל שמרכזו  $O$ . הצלע  $AC$  עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט. נתון:  $BC = 9$  ס"מ,  $OC = 3$  ס"מ,  $\angle BAC = 38^\circ$ . מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע  $AB$ .

- (7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של  $30^\circ$  עם צלע אחת של המקבילית וזווית של  $61.05^\circ$  עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה. חשב את היקף המקבילית.



- (8) המרובע  $ABCD$  חסום במעגל. נתון:  $AB = 6$  ס"מ,  $BC = 9$  ס"מ,  $CD = 10$  ס"מ ו- $AD = 4$  ס"מ. מצא את אורכם של האלכסון  $AC$  ושל רדיוס המעגל.



9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.

מהנקודה F מעבירים קטע GD  $\parallel$  BE ו-AC = DC כך שמתקיים:  $GD \parallel BE$ .

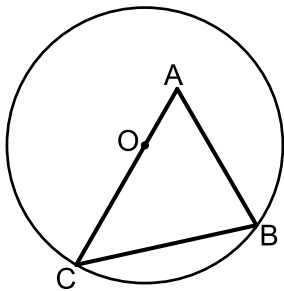
א. הוכח:  $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$ .

ב. נתון כי: 4 ס"מ = ME.

חשב את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי:  $\angle ACD = 48.189^\circ$ .

הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.



10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC

נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על

הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך

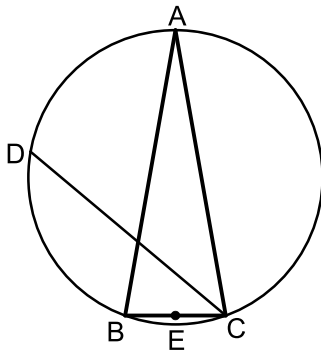
הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא  $60^\circ$ .

א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD

כך שנוצר המשולש ADB.

חשב את זווית ADB.



11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ )

החסום במעגל שרדיוסו R.

הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D

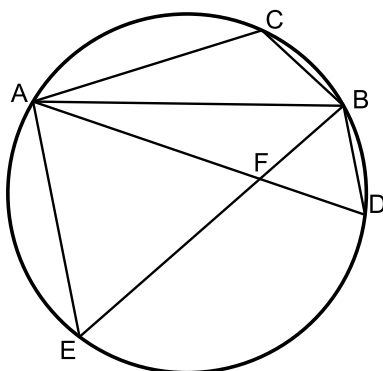
היא אמצע הקשת  $\widehat{AB}$ .

ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא  $80^\circ$ .

א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

ב. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED.

הבע באמצעות R את r.



12) AB, AC ו-AD הם מיתרים במעגל המקיימים:  $\widehat{BC} = \widehat{BD}$ .

מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את

המיתרים AE ו-BE.

המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F.

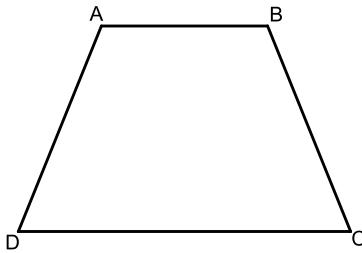
נתון כי:  $AC = AF = EF$ .

א. הוכח:  $\triangle ABF \cong \triangle ABC$ .

ב. נתון גם:  $\angle CAB = 3 \cdot \angle DAE$ .

הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

13) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ( $AB \parallel CD, AD = BC$ ).

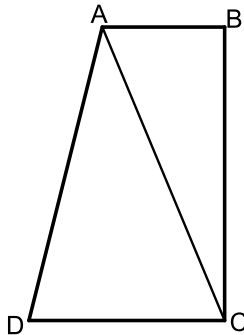


מידות הטרפז הן:

$AB = 6$  ס"מ,  $BC = 8$  ס"מ,  $CD = 12$  ס"מ.

- מצא את זווית C (עגל למספר שלם).
- מצא את אורך אלכסון הטרפז.
- חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

14) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $AB \parallel CD, \angle B = 90^\circ$ ).

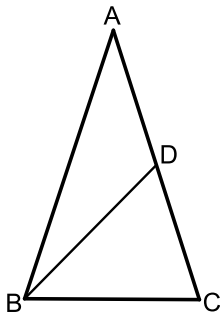


מסמנים את הבסיס:  $AB = t$  וידוע כי:  $AD = 3t, DC = 1.6t$ .  
היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.

- הבע באמצעות  $t$  את אורך האלכסון AC.
- ידוע גם כי:  $\angle D = 60^\circ$ .
- i. חשב את אורך הקטע AC.
- ii. חשב את שטח הטרפז.

15) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) בעל זווית

ראש  $36^\circ$  החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.



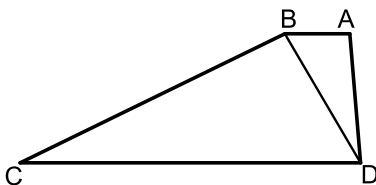
- מצא את אורך הבסיס BC במשולש.
- חשב את אורך התיכון BD.
- מסמנים:

$r_1$  - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.  
 $r_2$  - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

$$\frac{r_1}{r_2} = 2 \cos 36^\circ$$

הוכח את היחס הבא:

16) המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).



מעבירים את האלכסון BD המקיים:  $\angle BCD = \angle ADB$ .  
נתון כי:  $AB = 5$  ס"מ,  $AD = 10$  ס"מ,  $CD = 20$  ס"מ.  
כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

- הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.
- חשב את זווית C.
- ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.  
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

17) באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.

ידוע כי:  $\angle D = 90^\circ$ .

נסמן את הצלעות באופן הבא:  $AB = 6x$ ,  $BC = 5x$ ,  $CD = 8x$ ,  $AD = 3x$ .

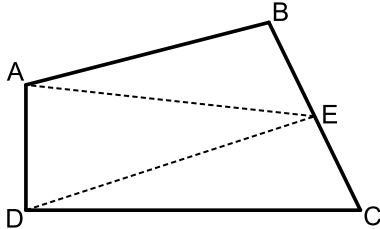
א. חשב את זווית BCD.

ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.

מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך

ש-DE מקביל ל-AB.

חשב את היחס הבא:  $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$ .



18) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA, OB, OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- $\alpha$ .

המשולש COD הוא ישר זווית  $\angle CDO = 90^\circ$ .

נתונים האורכים:  $BO = 9$ ,  $DO = 10$ .

מסמנים:  $BC = 1.4m$ ,  $CD = 1.5m$ .

א. הבע באמצעות m את  $\sin \alpha$ .

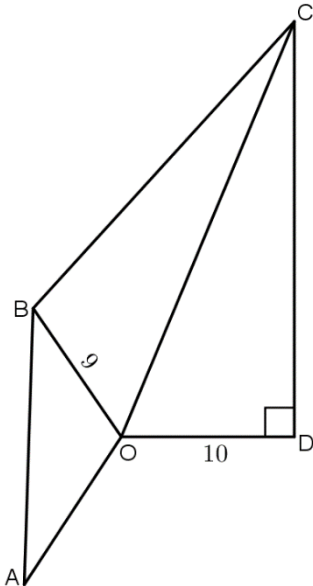
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי:  $AB = m$ .

מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם

את המשולש AOB הוא  $8\frac{2}{3}$ .

ג. חשב את זווית BOC.



19) במשולש ABC הזווית A היא בת  $60^\circ$ .

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית:  $\angle ADB = 60^\circ$ .

ידוע כי  $AB = \sqrt{28}$  וכי הצלע AD במשולש ABD

גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

א. מצא את אורך הצלע BD.

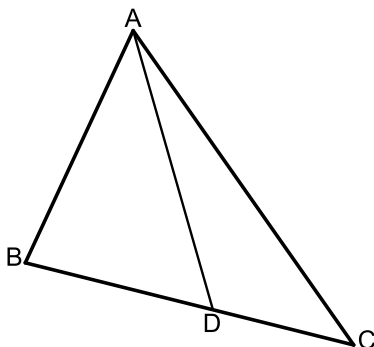
ב. היקף המשולש ABC הוא:  $P = 5\sqrt{7} + 7$ .

i. סמן:  $DC = t$  והבע באמצעות t

את אורך הצלע AC.

ii. מצא את t.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.



**(20)** מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.

הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.

הנקודות C, E ו-F נמצאות על אותו הישר.

ידוע כי המשולשים ABD, DEF ו-DCE הם

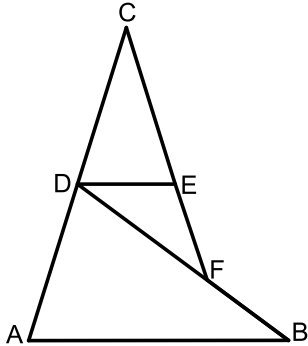
שווי שוקיים ( $AB = BD, DC = CE, EF = DE$ ).

נתון כי:  $AD = 8$ .

א. חשב את אורך הקטע BF.

ב. מחברים את הנקודות B ו-C.

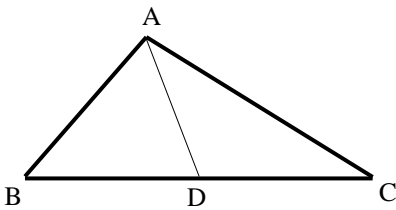
חשב את אורך הצלע BC.



**(21)** בשרטוט נתון:  $AB = 6$  ס"מ,  $AC = 8$  ס"מ,

$AD = 5$  ס"מ. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.

חשב את אורך הקטע BC.



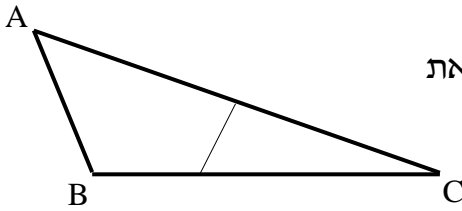
**(22)** הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת

על הצלע BC כך שמתקיים  $DC = 2BD$ .

נתון:  $BC = b, AB = a$ .

הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.

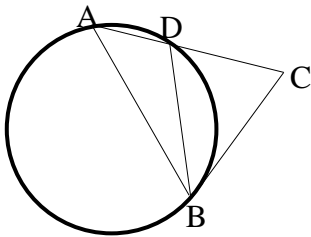


**(23)** המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.

המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B

נפגשים בנקודה C. נתון:  $\angle C = \alpha, \angle ADB = \beta$ .

הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורך הקטע BC.

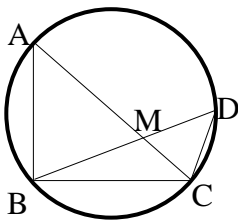


**(24)** AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R,

שנפגשים בנקודה M. זווית  $\angle B$  היא זווית ישרה.

נתון:  $DC = q, DM = p, AB = k$ .

הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.

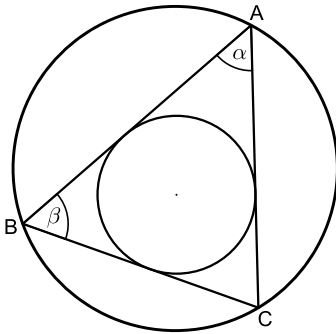


## תשובות סופיות:

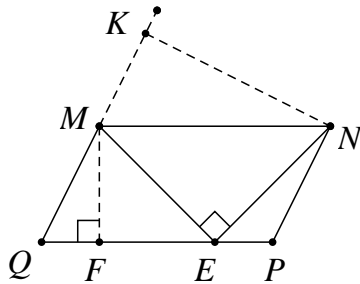
- א.  $\alpha = 34.231^\circ$     ב.  $14.33$  ס"מ =  $y$     ג.  $\alpha = 155.526^\circ$  או  $\alpha = 24.474^\circ$     (1)
- ד.  $\alpha = 41.382^\circ$  או  $\alpha = 138.618^\circ$     ה.  $3.606$  ס"מ =  $x$ ,  $\alpha = 73.898^\circ$
- א.  $5.646$  ס"מ =  $x$     ב.  $\alpha = 20.742^\circ$     ג.  $\alpha = 105.962^\circ$     ד.  $\alpha = 90^\circ$     (2)
- AD =  $13.064$  ס"מ    (3)
- GM =  $3.360$  ס"מ    (4)
- $66.444^\circ$ ,  $113.556^\circ$ ,  $41.810^\circ$ ,  $138.190^\circ$     (5)
- $R = 9.242$  ס"מ,  $AB = 14.56$  ס"מ    (6)
- $P = 22$  ס"מ    (7)
- $R = 5.395$  ס"מ,  $AC = 10.790$  ס"מ    (8)
- $DG = 18$     (9)
- $R = 10.5$  ס"מ    ב.  $24.32^\circ$     (10)
- א.  $DE = 1.48R$ ,  $CD = R\sqrt{3}$     ב.  $r = 1.15R$     (11)
- א.  $68^\circ$     ב.  $11.66$  ס"מ    ג.  $R = 6.29$  ס"מ    (13)
- א.  $AC = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$     ב. i.  $13$  ס"מ    ii.  $78$  סמ"ר    (14)
- א.  $9.4$  ס"מ    ב. i.  $10$  ס"מ    (15)
- א.  $\sphericalangle C = 28.9^\circ$     ב.  $R = 13.77$     ג.    (16)
- א.  $64.04^\circ$     ב.  $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}} = 0.817$     (17)
- א.  $\sin \alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$     ב.  $m = 16$     ג.  $56.94^\circ$     (18)
- א.  $4$     ב. i.  $1.5\sqrt{28} + 3 - t$     ii.  $3$     ג.  $S = 18.18$     (19)
- א.  $4.94$  ס"מ    ב.  $17.19$  ס"מ    (20)
- BC =  $10$  ס"מ    (21)
- $DE = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$     (22)
- $MC = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$     (24)
- $BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$     (23)

## שאלות מסכמות:

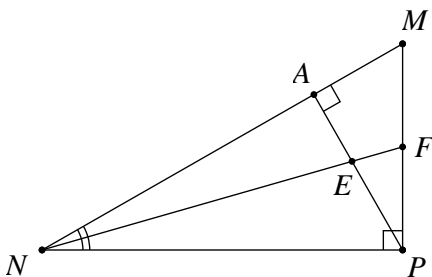
### שאלות:



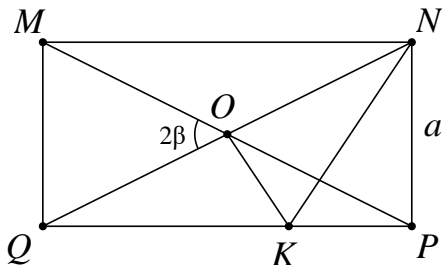
- (1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו  $R$ . נתון כי  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ .  
 א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת  $R$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .  
 ב. נתון כי:  $\alpha = \beta = 60^\circ$ . חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת  $R$ .



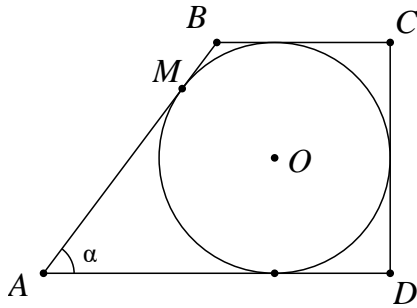
- (2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על הצלע PQ כך ש- $\angle MEN = 90^\circ$  (ראה ציור). נתון:  $12$  ס"מ  $MQ$ ,  $\angle MNE = 40^\circ$ ,  $\angle MQP = 70^\circ$ . מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



- (3) במשולש ישר-זווית MNP, ( $\angle P = 90^\circ$ ) PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה את הזווית  $\angle MNP$ . נתון:  $24$  ס"מ  $NP$ ,  $\angle MNP = 40^\circ$ .  
 א. מצא את אורך הקטע NA.  
 ב. מצא את אורך הקטע EF.



- (4) אלכסוני המלבן MNPQ נחתכים בנקודה O. מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך את QP בנקודה K (ראה ציור). נתון:  $NP = a$ ,  $\angle MOQ = 2\beta$ .  
 א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות  $\beta$  ו- $a$ .  
 ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות  $\beta$  ו- $a$ .



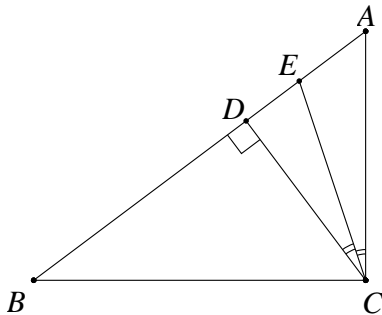
5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.

נתון:  $AM = 12$  ס"מ,  $\angle BAD = \alpha$ .

א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת  $\alpha$ .

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת  $\alpha$ .



6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:

$\angle ABC = \beta$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 8$  ס"מ.

CD הוא הגובה ליתר.

CE הוא חוצה-הזווית  $\angle C$ .

הבע את אורך הקטע AE באמצעות  $\beta$ .

7) נתון מעגל שרדיוסו R. מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.

מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה.

חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

8)  $\triangle ABC$  הוא משולש שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ) שאורך בסיסו 12 ס"מ.

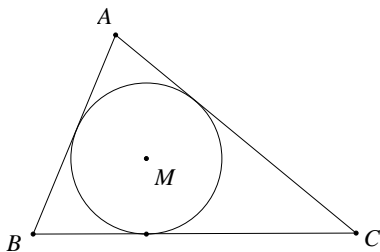
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.

שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון:  $\angle ABC = \alpha$  ( $\alpha > 45^\circ$ ).

א. הבע את היחס  $AO : DO$  באמצעות  $\alpha$ .

ב. הראה כי בעבור  $\alpha = 60^\circ$  הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות

הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.



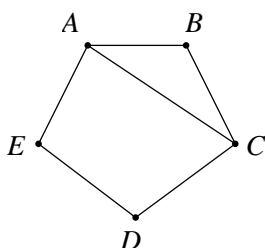
9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M

ורדיוסו r (ראה ציור).

נתון:  $\angle B = 62^\circ$ ,  $\angle C = 46^\circ$ .

א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC.

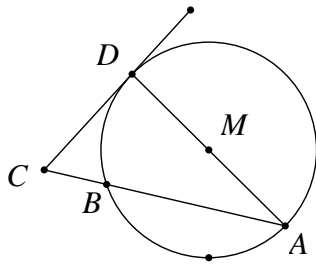
ב. נתון:  $BC = 16$  ס"מ. מצא את r.



10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)

אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.

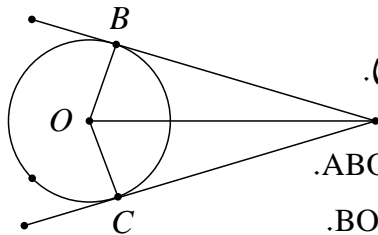
חשב את שטח המחומש.



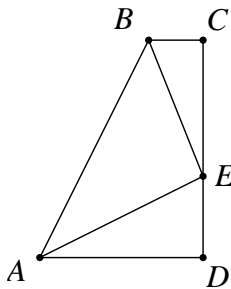
**11** מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחיתך CBA למעגל (ראה ציור).

נתון:  $CD = \frac{3}{5}R$ .

- א. מצא את זוויות המשולש CAD.  
ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.



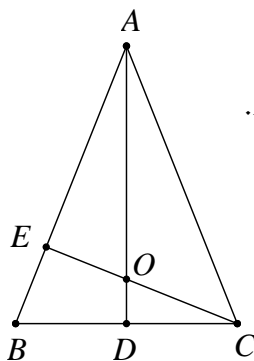
**12** מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור). נתון:  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $AO = 10$  ס"מ.  
א. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $S_1$ , שטח המרובע ABOC.  
ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $S_2$ , שטח המשולש BOC.  
ג. הראה שאם  $\alpha = 30^\circ$ , אזי:  $S_1 = 4 \cdot S_2$ .



**13** ABCD הוא טרפז ישר-זווית ( $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ). נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור). נתון:  $\angle AEB = 90^\circ$ ,  $AE = BE = k$ , ו- $\angle CBE = \beta$ . הבע באמצעות k ו- $\beta$  את שטח הטרפז.

**14** ענה על השאלות הבאות:

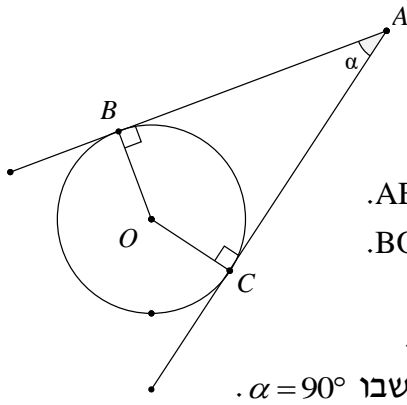
- א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל. מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.  
ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'. מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.



**15** ABC הוא משולש שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא  $\beta$  ואורך הבסיס BC הוא  $2\alpha$ . AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

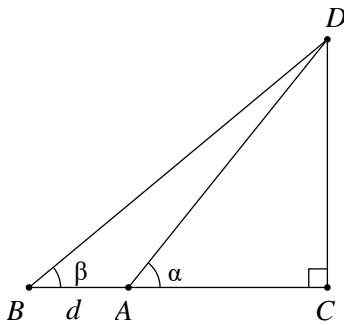
- א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורכי הקטעים CO ו-CE.  
ב. הבע באמצעות  $\beta$  את היחס  $\frac{CO}{CE}$ .

ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר  $\beta = 60^\circ$ , והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.

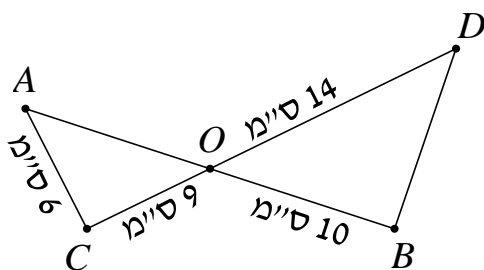


**16** מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם  $m$  (כלומר:  $AB = AC = m$ ). נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא  $\angle BAC = \alpha$  (ראה ציור).

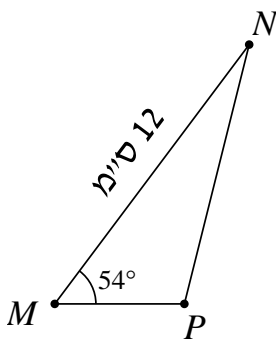
- הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.
- הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש BOC.
- הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.
- בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו  $\alpha = 90^\circ$ .



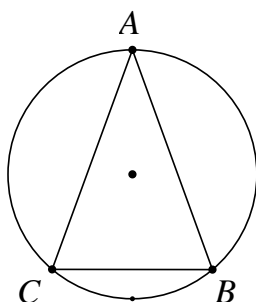
**17** במשולש ישר-זווית DAC נתון  $\angle DAC = \alpha$ . מאריכים את הניצב AC כך ש-  $AB = d$ . נתון כי:  $\angle DBA = \beta$  (ראה ציור). סמן:  $AC = x$ . הבע את  $x$  באמצעות  $d$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .



**18** הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O. נתון כי:  $\angle OAC = 60^\circ$ ,  $AC = 6$  ס"מ,  $CO = 9$  ס"מ,  $OB = 10$  ס"מ,  $OD = 14$  ס"מ. חשב את  $\angle ODB$ .

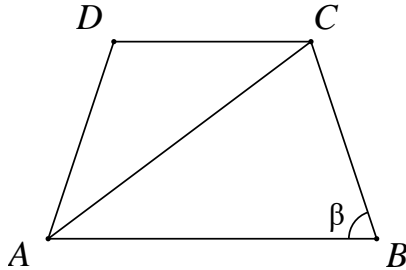


**19** במשולש MNP גודל הזווית M הוא  $54^\circ$ . נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ (ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP. א. חשב את אורך הצלע NP. ב. PA הוא תיכון לצלע MN. חשב את שטח המשולש PAN.

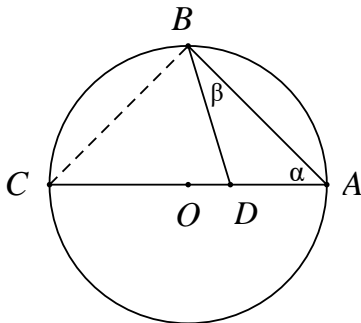


**20** המשולש השווה-שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) חסום במעגל (ראה ציור). נתון:  $\angle ABC = \beta$ . כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ. א. הבע בעזרת  $\beta$  את שטח המשולש ABC. ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור  $\beta = 45^\circ$ .

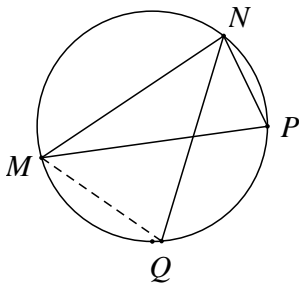
**(21)** במשולש ABC הזווית  $\sphericalangle C$  היא בת  $60^\circ$ , אורך הצלע AB הוא  $\sqrt{13}$  ס"מ, והיקף המשולש הוא  $7 + \sqrt{13}$  ס"מ. חשב את שטח המשולש.



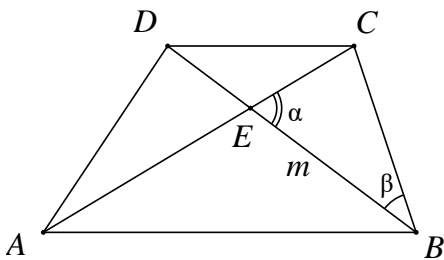
**(22)** בטרפז שווה-שוקיים ABCD ( $AD = BC$ ) אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון. זווית הבסיס היא  $\beta$  ( $\beta > 60^\circ$ ), (ראה ציור). הבע באמצעות  $\beta$  את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



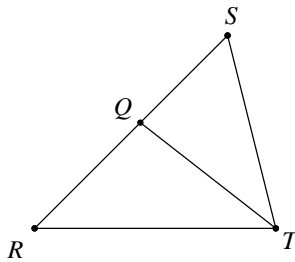
**(23)** הקודקודים A ו-B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O. הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA. א. הבע בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את שטח המשולש ABD. ב. הבע בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



**(24)** משולש MNP חסום במעגל. המיתר NQ חוצה את הזווית  $\sphericalangle MNP$ . נתון:  $\sphericalangle MPN = 70^\circ$ ,  $\sphericalangle MNP = 80^\circ$ ,  $NP = 12$  ס"מ. חשב את אורך המיתר MQ.



**(25)** נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ). הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז. נתון:  $BE = m$ ,  $DC = BC$ ,  $\sphericalangle CEB = \alpha$ ,  $\sphericalangle CBD = \beta$  (ראה ציור). הבע את אורכי בסיס הטרפז: AB ו-CD באמצעות  $m$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .



26 במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית  $\angle RTS$

(ראה ציור),  $RQ = \sqrt{2}$ ,  $QS = m$ ,

$\angle TRQ = 45^\circ$ ,  $\angle RST = \alpha$ .

א. הבע את  $\sin \alpha$  באמצעות  $m$ .

ב. נתון כי:  $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

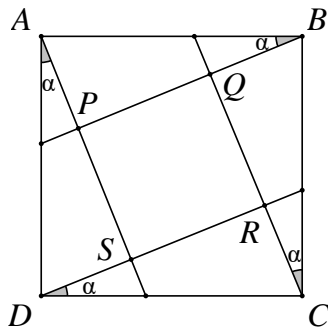
חשב את זוויות המשולש RST.

27 במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28 נתון משולש שצלעותיו  $t$ ,  $2t$ ,  $kt$

א. לאיזה ערכים של הקבוע  $k$  המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון  $k = \sqrt{7}$ . הבע ע"י  $t$  את אורך חוצה הזווית הקהה.



29 בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה

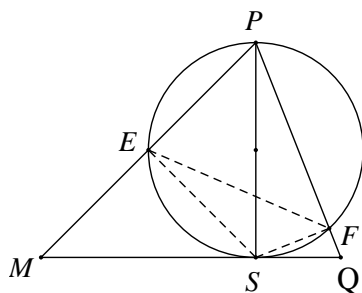
קטעים היוצרים את אותה זווית  $\alpha$

עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע

פנימי PQRS.

א. הוכח כי:  $\frac{PQ}{AB} = \cos \alpha - \sin \alpha$ .

ב. לאיזו זווית  $\alpha$  מתקיים:  $PR = AB$ ?



30 PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).

נתון  $PS = h$ ,  $\angle MPS = \alpha$ ,  $\angle SPQ = \beta$ .

א. הבע את שטח המשולש PMQ

באמצעות  $h$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את

הצלעות PM ו-PQ בנקודות E

ו-F בהתאמה (ראה ציור).

i. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את  $\angle ESF$ .

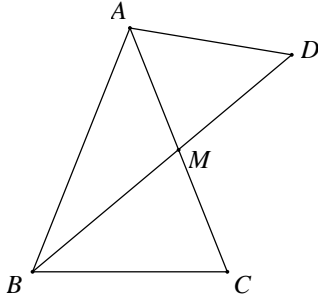
ii. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס בין

שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

**31** במשולש ABC הצלעות הן  $a$ ,  $b$  ו- $c$  והזוויות שמונחות מולן הן:  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $\gamma$  בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון  $m_a$  (התיכון לצלע  $a$ ) באמצעות הצלעות  $b$  ו- $c$  והזווית  $\alpha$ .

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



**32** במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ),

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\angle BAC = 50^\circ$ .

א. מצא את גודל הזווית  $\angle BMC$ .

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D,

כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

מצא את שטח המשולש AMD.

**33** משולש שווה שוקיים BCE ( $BC = BE$ ) חסום במעגל שרדיוסו R.

זווית הבסיס של המשולש BCE היא  $\alpha$ .

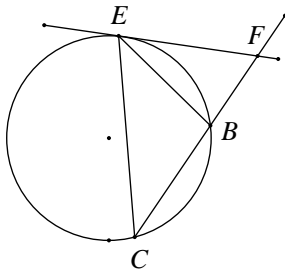
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את

המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו- $\alpha$ .

ב. מצא את הערך של  $\alpha$  שבעבורו שטח

המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.



**34** בטרפז BCDE ( $BC \parallel ED$ ) אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.

הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא  $80^\circ$ .

אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית  $\angle CBE$ .

חשב את היקף הטרפז.

**35** במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה  $\angle P$

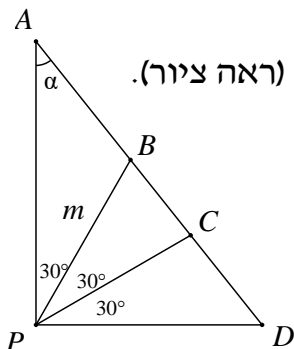
לשלוש זוויות שוות, כלומר  $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = 30^\circ$  (ראה ציור).

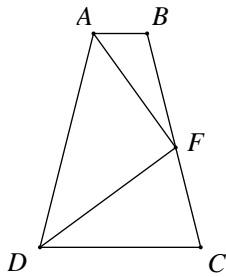
נתון כי:  $PB = m$ ,  $\angle PAD = \alpha$ .

א. היעזר במשפט הסינוסים,

והבע את AB, AC, BD ו-CD באמצעות m ו- $\alpha$ .

ב. הוכח כי:  $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$



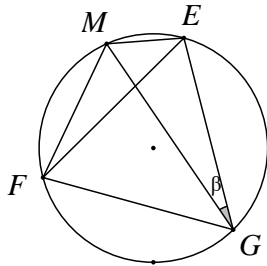


36) בטרפז שווה שוקיים  $ABCD$  ( $AD = BC$ ,  $AB \parallel DC$ ),

$F$  היא נקודה על השוק  $BC$ , כך ש- $DF$  חוצה את הזווית  $\sphericalangle CDA$  ו- $AF$  חוצה את הזווית  $\sphericalangle DAB$  (ראה ציור).

נתון:  $\sphericalangle FAB = \beta$ ,  $AB = b$

הבע באמצעות  $b$  ו- $\beta$  את אורך הבסיס  $DC$ .

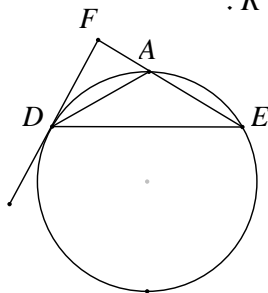


37) משולש שווה צלעות  $EFG$  חסום במעגל שרדיוסו  $R$ .

$M$  היא נקודה על המעגל. נתון:  $\sphericalangle MGE = \beta$  (ראה ציור).

א. הוכח כי:  $ME + MF = MG$

ב. אם  $ME = R$  מה תוכל לומר על  $\sphericalangle MGE$ ?



38) משולש שווה שוקיים  $ADE$  ( $AD = AE$ ) חסום במעגל שרדיוסו  $R$ .

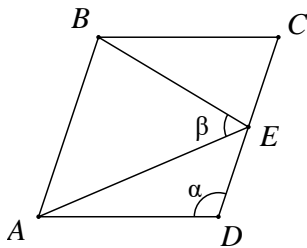
ישר המשיק למעגל בנקודה  $D$  חותך את המשך הצלע  $AE$  בנקודה  $F$  (ראה ציור).

נתון:  $\sphericalangle AEF = \alpha$  ( $60^\circ < \alpha < 180^\circ$ ).

א. הבע את שטח המשולש  $ADF$  באמצעות  $R$  ו- $\alpha$ .

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס שבין שטח המשולש  $ADE$  ובין שטח המשולש  $ADF$ .

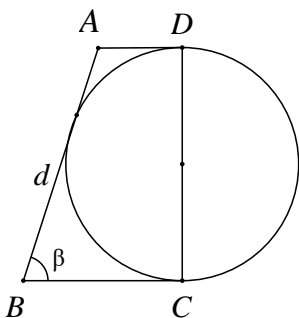
ג. חשב את  $\alpha$  אם שטח המשולש  $ADE$  שווה לשטח המשולש  $ADF$ .



39) במעוין  $ABCD$  הנקודה  $E$  היא אמצע הצלע  $CD$ .

נתון:  $\sphericalangle AEB = \beta$ ,  $\sphericalangle ADC = \alpha$  (ראה ציור).

הוכח כי:  $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$



40) נתון טרפז  $ABCD$  ונתון מעגל. השוק  $DC$  הוא קוטר המעגל.

השוק  $AB$  משיקה למעגל, והבסיסים  $AD$  ו- $BC$  משיקים גם הם למעגל בנקודות  $D$  ו- $C$  בהתאמה (ראה ציור).

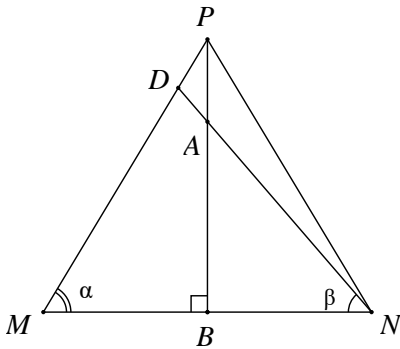
נתון כי:  $AB = d$ ,  $\sphericalangle B = \beta$

א. הבע באמצעות  $d$  את סכום בסיסיו של הטרפז.

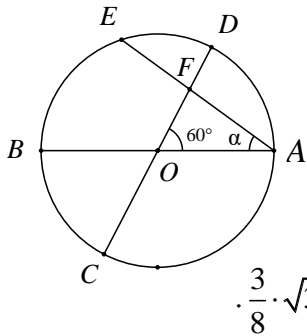
ב. הבע באמצעות  $d$  ו- $\beta$  את היקף הטרפז ואת השטח של הטרפז.

ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.

חשב את הזווית החדה  $\beta$ .



- (41)** במשולש שווה שוקיים  $PMN$  ( $PM = PN$ ),  
 $A$  היא נקודה על הגובה  $PB$ , כך ש-  $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$ .  
 הישר  $NA$  חותך את השוק  $PM$  בנקודה  $D$  (ראה ציור).  
 נתון:  $\angle DNB = \beta$ ,  $\angle DNM = \alpha$  ו-  $BN = \alpha$ .  
 א. חשב את היחס  $\tan \beta : \tan \alpha$ .  
 ב. חשב את היחס  $PM:DM$ .



- (42)** במעגל שמרכזו  $O$  ורדיוסו  $R$  מעבירים שני  
 קטרים  $AB$  ו-  $CD$  הנחתכים בזווית של  $60^\circ$ .  
 מיתר  $AE$ , היוצר זווית  $\alpha$  עם הקוטר  $AB$ ,  
 חותך את הקוטר  $CD$  בנקודה  $F$  (ראה ציור).  
 א. הבע את שטח המשולש  $ACF$  באמצעות  $R$  ו-  $\alpha$ .  
 ב. הוכח שכאשר  $\alpha = 30^\circ$ , שטח המשולש  $ACF$  הוא  $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$ .

**תשובות סופיות:**

$$\frac{1}{2}R \quad \text{ב.} \quad r = \frac{2R \sin(\alpha + \beta) \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$KN = 21.52 \text{ ס"מ} , MF = 11.28 \text{ ס"מ} \quad (2)$$

$$EF = 5.975 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad NA = 18.385 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\frac{a}{2 \sin \beta} \cdot \left[ 1 + \tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right] \quad \text{ב.} \quad OK = \frac{a}{2 \cos \beta} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$24 \cdot \left( 1 + \tan \frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad \text{ב.} \quad 12 \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$AE = 8 \sin \beta \cdot \left[ \tan \beta - \tan \left( \frac{1}{2} \beta \right) \right] = 8 \tan \beta \cdot \tan \left( \frac{1}{2} \beta \right) \quad (6)$$

$$2 \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} \approx 1.132 \quad (7)$$

$$-2 \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha - 1 \quad \text{א.} \quad (8)$$

ב. מתקיים:  $AO = 2 \cdot DO$  (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

$$r = \frac{16}{\tan 59^\circ + \tan 67^\circ} \approx 3.98 \quad \text{ב.} \quad BC = r \cdot (\tan 59^\circ + \tan 67^\circ) \approx 4.02 \cdot r \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$S = 147.86 \text{ סמ"ר} \quad (10)$$

$$S \approx 0.0495 \cdot R^2 \quad \text{ב.} \quad \sphericalangle C = 73.3^\circ , \sphericalangle D = 90^\circ , \sphericalangle A = 16.7^\circ \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$S_1 = 100 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 50 \cdot \sin 2\alpha \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$S_2 = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \quad \text{ב.}$$

$$\text{ב. 27 יח"ש.} \quad S = \frac{1}{2} k^2 \cdot (1 + 2 \sin \beta \cos \beta) \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$S \approx 90.45 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad r \approx 5.548 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$\frac{CO}{CE} = \frac{1}{2 \sin^2 \beta} \quad \text{ב.} \quad CE = 2a \cdot \sin \beta , CO = \frac{a}{\sin \beta} \quad \text{א.} \quad (15)$$

ג. היחס הוא:  $\frac{2}{3}$  (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{ב.} \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \quad \text{א. (16)}$$

$$\text{ג. יחס השטחים: } \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

ד. במקרה זה ABOC הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 ( $\tan^2 45^\circ = 1$ ).

$$AC = x = d \cdot \frac{\tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} \quad (17)$$

$$\sphericalangle ODB \approx 44.7^\circ \quad (18)$$

$$S_{\Delta PAN} = 8.2 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad NP = 10.38 \text{ ס"מ} \quad \text{א. (19)}$$

$$S = 800 \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin 2\beta \quad \text{א. (20)} \quad \text{ב. 400 סמ"ר}$$

$$S_{\Delta ABC} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5.196 \text{ סמ"ר} \quad (21)$$

$$(22) \quad \text{יחס השטחים הוא: } 1 - 4 \cos^2 \beta = \left( -\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} \right) \quad \text{או כל תשובה שקולה.}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \alpha} \quad \text{ב.} \quad S_{\Delta ABD} = 288 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{א. (23)}$$

$$MQ \approx 15.43 \text{ ס"מ} \quad (24)$$

$$DC = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AB = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \quad (25)$$

$$45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \text{ או } 45^\circ, 120^\circ, 15^\circ \quad \text{ב.} \quad \sin \alpha = \frac{1}{m} \quad \text{א. (26)}$$

$$\alpha \approx 20.7 \quad (27)$$

$$\frac{2}{3} \cdot t \approx 0.667t \quad \text{ב.} \quad 1 < k < \sqrt{3} \text{ או } \sqrt{5} < k < 3 \quad \text{א. (28)}$$

$$\alpha = 15^\circ \quad (29)$$

$$\sphericalangle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad \text{ב. i.} \quad S_{\Delta MPQ} = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \quad \text{א. (30)}$$

$$S_{\Delta EFS} : S_{\Delta MPQ} = \frac{1}{4} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \quad \text{ב. ii.}$$

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \quad \text{ב.} \quad m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha} \quad \text{א. (31)}$$

$$S_{\Delta AMD} = 54.1 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad \sphericalangle BMC = 79.5^\circ \quad \text{א. (32)}$$

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle BEF} = \frac{2R^2 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \quad \text{א. (33)}$$

$$P_{BCDE} = 51.09 \quad \text{(34)}$$

$$, BD = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \cos \alpha}, AB = \frac{m}{2 \cdot \sin \alpha}, AC = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha} \quad \text{א. (35)}$$

$$\text{ב. הוכחה.} \quad CD = \frac{m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha}$$

$$DC = \frac{-b \cdot \tan \beta}{\tan 3\beta} \quad \text{(36)}$$

$$\text{ב. MG הוא קוטר במעגל. (37)}$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADF}} = -\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ADF} = \frac{-2R^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\cos(1.5\alpha)} \quad \text{א. (38)}$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{ג.}$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \beta, P = 2d + d \sin \beta \quad \text{ב.} \quad AD + BC = d \quad \text{א. (40)}$$

$$\beta = 30^\circ \quad \text{ג.}$$

$$PM : DM = \frac{9}{8} = 1.125 \quad \text{ב.} \quad \tan \beta : \tan \alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \quad \text{א. (41)}$$

$$.S = \frac{3R^2 \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{4 \cdot \sin(60^\circ + \alpha)} \quad \text{א. (42)}$$

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 10 - הנגזרת ובעיות משיקים

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 11 - חקירת פונקציה - פולינום

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 12 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

36	1. שאלות העוסקות בתכונות התחלקות
39	2. סדרות
41	3. עצרת
42	4. שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים
43	5. שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים
44	6. שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה
46	7. שאלות כוללות ומסכמות
48	8. מושג הסכימה וכתובה מקוצרת של אינדוקציות

## שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

**סיכום כללי:**

**מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:**

**בדיקה:**

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור  $n=1$  (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור  $n=2,3$ ).

**הנחת האינדוקציה:**

נניח כי עבור  $n=k$  (טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

**הוכחת האינדוקציה:**

נוכיח כי עבור  $n=k+1$  טענת האינדוקציה מתקיימת.

**סיכום:**

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור  $n=1$  והראנו כי נכונות הטענה עבור  $n=k$  גוררת את נכונותה עבור  $n=k+1$ , לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל  $n$  טבעי.

## שאלות:

- (1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $8^n - 3^n$  מתחלק ב-5 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $11^n - 4^n$  מתחלק ב-7 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $8 \cdot 7^n + 4^{n+2}$  מתחלק ב-24 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $5 \cdot 3^{2n} - 5^{n+1}$  מתחלק ב-20 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (5)  $a_n$  הוא האיבר במקום ה- $n$  בסדרה החשבונית:  $1, 3, 5, 7, \dots$  הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $2^{a_n} + 4$  מתחלק ב-12 ללא שארית לכל  $n$  טבעי הגדול מ-1.
- (6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $n^2 + n$  מתחלק ב-2 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $n^3 + 5n$  מתחלק ב-6 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $3^n - 2n - 1$  מתחלק ב-4 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $9(9^n - 1) - 40n$  מתחלק ב-32 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $7^n + 5^n - 2^n(2^n + 1)$  מתחלק ב-6 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.

**(11)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $7^n + 2^{2n}$  מתחלק ב-11 ללא שארית לכל  $n$  טבעי אי זוגי.

**(12)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $a^n - b^n$  מתחלק ב- $(a+b)$  ללא שארית לכל  $n$  טבעי זוגי.

**(13)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $7^{n+2} + 1$  מותיר שארית 2 בחלוקתו ב-3 לכל  $n$  טבעי.

**תשובות סופיות:**

שאלות הוכחה.

## סדרות:

### סיכום כללי:

#### תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , כאשר  $n$  הוא מיקום האיבר בסדרה ו- $a_n$  הוא ערך האיבר העומד במקום ה- $n$  בסדרה.

○ סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.

○ סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- $S_n$

והוא מקיים:  $S_n = a_1 + \dots + a_n$ .

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא:  $a_n = a_1 + d(n-1)$  כאשר  $d$  הפרש הסדרה.

○ סכום  $n$  האיברים הראשונים הוא:  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$ .

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא:  $a_n = a_1 q^{n-1}$  כאשר  $q$  היא מנת הסדרה.

○ סכום  $n$  האיברים הראשונים הוא:  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ .

## שאלות:

14 הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי

$$.1+2+3+4+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1) \quad \text{מתקיים:}$$

15 הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי

$$.4+7+10+13+\dots+(3n+1) = \frac{n}{2}(3n+5) \quad \text{מתקיים:}$$

16 נתונה סדרה שבה:  $a_n = n(n+2)$

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  $S_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

17 הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\cdot \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

18 הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\cdot \frac{6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

19 הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4} [3^n (2n-1) + 1]$$

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## עצרת:

### סיכום כללי:

#### תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .  
 מגדירים:  $0! = 1$  ותמיד מתקיימים השוויונות:  $n! = n \cdot (n-1)!$ ,  $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ .

### שאלות:

(20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

(21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{4} + \frac{3 \cdot 4!}{8} + \dots + \frac{n(n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$$

(22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$p! + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + \dots + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

(23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \dots \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{n!}$$

(24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1 \cdot 4} - \frac{11}{4 \cdot 7} + \frac{17}{7 \cdot 10} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (6n-1)}{(3n-2)(3n+1)} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

### שאלות:

(25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  

$$1+2+3+4+\dots+2n=n(2n+1)$$

(26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

(27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\dots+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

### שאלות:

(28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = 2n(2n+1)$$

(29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

(30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

(31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

(32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

### שאלות:

(33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+1}$$

(34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

(35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

(36) נתונה סדרה שבה:  $a_n = n^n$ . נגדיר:  $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$ .

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  $T_n \leq n^{\frac{n}{2}(n+1)}$ .

(37) נתון אי-השוויון:  $2^n > n^2$ . מצא את ה- $n$  המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי החל מה- $n$  שמצאת.

(38) נתון אי-השוויון:  $4^n > 5n^2 + 1$ . מצא את ה- $n$  המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי החל מה- $n$  שמצאת.

(39) נתון אי-השוויון:  $n^3 - n < 5^{n-1}$ . מצא את ה- $n$  המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי החל מה- $n$  שמצאת.

(40) נתון אי-השוויון:  $3^n + 4^n + 5^n < 6^n$ . מצא את ה- $n$  המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי החל מה- $n$  שמצאת.

**(41)** נתון אי-השוויון:  $n^n \geq n!$ . הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.

**(42)** נתון אי-השוויון:  $a^n + b^n < (a+b)^n$ ,  $(a, b > 0)$ . הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי הגדול מ-1.

**תשובות סופיות:**

שאלות הוכחה.

## שאלות כוללות ומסכמות:

### שאלות:

$$(43) \text{ נתון השוויון: } 4+7+10+13+\dots = \frac{n}{2}(3n+5)$$

- א. מצא את האיבר במקום ה- $n$ .  
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.  
 ג. חשב את הסכום:  $37+40+43+\dots+85$ .

$$(44) \text{ נתון השוויון: } \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$$

- (45) נתון השוויון:  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots = \frac{n}{4n+1}$   
 א. מצא את האיבר במקום ה- $n$ .  
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.

$$\text{ג. חשב את הסכום: } \frac{1}{25 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 33} + \frac{1}{33 \cdot 37} + \dots + \frac{1}{89 \cdot 93}$$

$$(46) \text{ נתון השוויון: } (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.  
 ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום:  $26^2 + 27^2 + 28^2 + \dots + 48^2$ .

$$(47) \text{ נתון השוויון: } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.  
 ב. הבע באמצעות  $n$  את הסכום:  $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (4n)^2$ .

(48) נתונים השוויונים הבאים:

$$\text{א. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7}{3}(n^2 + 3n - 1)$$

$$\text{ב. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = n^2 + 11n - 5$$

$$\text{ג. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7n}{2}(n+1)$$

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל  $n$  טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

$$(49) \text{ נתון השוויון: } n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = an(2n+b)$$

- א. נתון כי השוויון נכון עבור  $n=1$  ו- $n=2$ . מצא את ערכי  $a$  ו- $b$ .  
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.

$$(50) \text{ נתון אי-השוויון: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי הגדול מ-2.  
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים:  $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{18} > \frac{1}{2}$

$$(51) \text{ נתון אי-השוויון: } n^2 < 2^n$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי הגדול מ-4.  
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים:  $5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot \dots \cdot 20^2 < 2^{200}$

$$(52) \text{ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום: } 9 + 27 + 81 + \dots + 3^{3n+1}$$

מתחלק ב-117 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.

(53) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $n^3 + 5n$  מתחלק ב-6 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.  
 ב. נתון כי  $a+b$  מתחלק ב-6 ללא שארית.  
 הוכח כי  $a^3 + b^3$  מתחלק ב-6 ללא שארית.

(54) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח את הטענה: אם ל- $n$  טבעי מסוים  $3^n + 5^n$  מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם  $3^{n+2} + 5^{n+2}$  מתחלק ב-16 ללא שארית.  
 ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי  $3^n + 5^n$  מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל  $n$  טבעי אי-זוגי?  
 ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $3^n + 5^n$  מתחלק ב-8 ללא שארית לכל  $n$  טבעי אי-זוגי.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## מושג הסכימה וכתובה מקוצרת של אינדוקציות:

### סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא:  $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים

בערך המצוין בתחתית הסימון  $\left(\sum_{k=1}^n\right)$  עד לערך המצוין בחלקו העליון  $\left(\sum_{k=1}^n\right)$ .

### דוגמאות:

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\bullet \sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2 + 4^2 + \dots + 12^2$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n+1}$$

### שאלות:

$$(1) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$(2) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(3) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

$$(4) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$$

$$(5) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{3}{4^{k-1}} = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$(6) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} k = 1 \frac{1}{2} n(3n+1)$$

$$(7) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} (4k-1) = 3n(6n+1)$$

$$(8) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n (n+k) = \frac{n}{2}(3n+1)$$

$$(9) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 3^{n+k} = \frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$$

**תשובות סופיות:**

שאלות הוכחה.