סטטיסטיקה



תוכן העניינים

1. הסקה סטטיסטית - הקדמה 1
2. התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי 4
3. מושגי יסוד באמידה 24
4. אמידה נקודתית 29
5. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) 59
6. רווח סמך לפרופורציה 70
7. רווח סמך להפרש פרופורציות 76
8. רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים 78
9. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים 84
10. רווח סמך לשונות וסטיית תקן 86
11. רווח סמך ליחס שונויות 91
12. שאלות מסכמות על רווחי סמך 93
13. בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן) 96
14. הלמה של ניימן פירסון 103
15. מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים 110
16. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) 116
17. בדיקת השערות על פרופורציה 143
18. בדיקת השערות על הפרש פרופורציות 156
19. בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים 160
20. בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים 171
21. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות 175
22. בדיקת השערות על שונויות 178
23. שאלות מסכמות בבדיקת השערות 196

תוכן העניינים

24. מבחני חי בריבוע 213
25. ניתוח שונות חד כיוונית 227
26. מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו 236
27. מדד הקשר פירסון 256
28. מבוא לרגרסיה 262
29. המשך מבוא לרגרסיה 265
30. רגרסיה פשוטה 268
31. רגרסיה מרובה 280
32. משתנה דמי 288
33. רגרסיה - שאלות ממבחנים 303

סטטיסטיקה

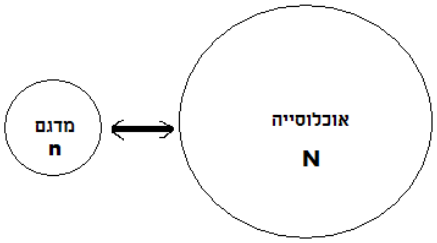
פרק 1 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

1. כללי 1

הסקה סטטיסטית – הקדמה:

רקע:



אוכלוסייה:
קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית.
למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.

מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה.
למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה.
הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

	סטטיסטי (מדגם)	פרמטר (אוכלוסייה)
ממוצע	$\overline{X}$	μ
פרופורציה (שכיחות יחסית)	$\hat{p}$	P

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים.
הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן".
נגדיר את X להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.

א. מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?

ב. מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר המשפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N=1000$	

3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.

א. מהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה באוכלוסייה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו הסטטיסטי?

תשובות סופיות:

1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.

2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים.
ב. $\bar{X}$ = ממוצע מדגם.

3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי.
ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 2 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי 4
2. התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי 12
3. התפלגות מספר ההצלחות במדגם - קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית 15
4. התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם 20

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$.
מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.
גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.
להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:
ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2.

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ.

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n.

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x}) = \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$.
יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.
אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?
ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?
ג. מה התוחלת ומהי סטית התקן של ממוצע המדגם?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2.

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$, $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק גדול $(n \geq 30)$ ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי: $\bar{x} \sim\!\!\succ N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מיהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו תוחלת ממוצע המדגם?

ו. מהי טעות התקן?

2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים:

מספר המשפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N=10000$	

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של X.

ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.

א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.

ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?

ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?

ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?

ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.

א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?

ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?

ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתחולת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?

ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.

א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?

ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?

ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?

7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.

א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?

ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?

ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?

ד. בקבוקיי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.

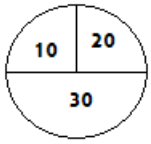
א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?

ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?

ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס׳ הבאים כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?

ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?

ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה״כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪.
מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים.
מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס״מ וסטיית תקן של 10 ס״מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס״מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס״מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס״מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

X	8	6	4	2
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50.
מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

14) נתון ש- $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם $\bar{X}$. לכן: $P\left(\bar{X}>\mu\right)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.
ב. 0.5.
ג. 1.
ד. לא ניתן לדעת.

15) נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת: μ ושונות σ^2.
החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $X \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ב. $\mu \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ג. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

16) נתון ש- $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$,
אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א. μ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.
ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$ קבוע.
ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.
ד. μ ו- $\bar{X}$ יהיו קבועים.

17) משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם. החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.

א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

18) משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20.
מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

19) מספר המכוניות הנכנסות לחניון "בציר" במשך היום מתפלג פואסונית עם קצב של מכונית אחת לדקה. שומר מסר נתונים על מספר המכוניות שנכנסות בכל שעה לגבי 40 שעות שאסף נתונים.
מה ההסתברות שממוצע מספר המכוניות שנכנסו לחניון לשעה בשעות אלה יהיה לפחות 63?

20) הוכיחו שאם משתנה מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2, ומבצעים מדגם בגודל n של תצפיות בלתי תלויות מהמשתנה, אזי מתקיימות התכונות הבאות לגבי ממוצע המדגם: $E(\bar{x})=\mu$ ו- $V(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
ה. 78. ו. 10.6.

2) א. להלן טבלה:

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0.05	0.25	0.35	0.3	0.05

ב. $\mu = 2.05$, $\sigma^2 = 0.9475$, $\sigma = 0.973$

ג. $\mu_{\bar{x}} = 2.05$, $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$, $\sigma\left(\overline{X}\right) = 0.486$

3) $\mu_{\bar{x}} = 3.5$, $\sigma\left(\overline{X}\right) = 1.21$.

4) א. 0.8413. ב. 0.0013. ג. 0. ד. 0.1974.

5) א. 0. ב. 0. ג. 0.9544. ד. 178.205.

6) א. 0.0465. ב. 27.71. ג. 0.2628. ד. התשובה הייתה קטנה.

7) א. 0. ב. 0.1587. ג. 0.1587. ד. 0.5.

8) א. 0.5468. ב. 0.6826.

9) א. להלן טבלה:

X	10	20	30
$P(X)$	0.25	0.25	0.5

ב. התוחלת: 22.5, השונות: 68.75.

ג. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75. ד. 0.8997.

10) 0.0475.

11) 0.1814.

12) א. 0.9772. ב. 0.0228. ג. 271.

13) 0.5.

14) ב'.

15) ד'.

16) ג'.

17) א. 2.429. ב. 0.25.

18) 0.6826.

19) 0.0071.

20) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם: $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה, כלומר, היו: $X_1,\ldots,X_n$ - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:

התוחלת והשונות של סכום התצפיות: $E(T)=n\mu$, $V(T)=n\sigma^2$.

דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

אם: $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, אזי: $Z=\frac{T-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$, $T\sim N\left(n\mu,n\sigma^2\right)$.

משפט הגבול המרכזי:

אם X מתפלג כלשהו וידוע כי: $V(X)=\sigma^2$,$E(X)=\mu$,

אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30): $T\sim\!\succ N\left(n\mu,n\sigma^2\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪.
נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורותיהם לסניף בנק.

1. מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
2. מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.

א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק"ג?

ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?

ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?

2) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.

א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?

ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר.
מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?

ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב' הייתה משתנה?

3) בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב-4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.

א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?

ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?

4) במגדל נבנו 40 יחידות דיור. כמו כן נבנו 135 מקומות חנייה לבניין.
להלן פונקציית ההסתברות של מספר המכוניות ליחידת דיור:

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

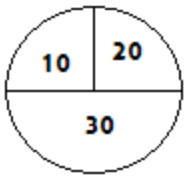
נניח שמספר המכוניות ליחידת דיור בלתי תלויות זו בזו ועם אותה פונקציית הסתברות לכל יחידת דיור (אין צורך בתיקון רציפות).

א. מהי ההסתברות שיהיה מקום בחניון המגדל לכל מכוניות הבניין?

ב. בהינתן ויש מקום במגדל לכל המכוניות, מה הסיכוי שבפועל מספר המכוניות נמוך מ-130?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בקזינו ישנה רולטה עליה מסומנים המספרים הבאים:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום.

א. אם האדם משחק 50 פעמים, מה ההסתברות שבסך הכול יזכה בסכום של 1050 ₪ ומעלה?

ב. האדם מגיע בכל יום לקזינו ומשחק 50 פעם, עד אשר מגיע היום בו הוא יזכה ב-1050 ₪ ומעלה. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הימים שיבלה בקזינו?

6) נתון ש- $X_i \sim \exp(\lambda=1)$, כאשר: $i=1,2...100$.

חשבו את הסיכוי: $P\left(\sum_i X_i \geq 115\right)$.

7) אורך חיי סוללה (בשעות) הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה: $0<x<1$, $f(x)=2x$. ברגע שסוללה מתרוקנת מחליפים אותה במיידית בסוללה אחרת. כמה סוללות יש להחזיק במלאי אם רוצים שבסיכוי של 90% לפחות המלאי יספיק עבור 35 שעות לפחות?

תשובות סופיות:

1) א. 0.6915 ב. 0.8413 ג. 0.5.

2) א. תוחלת: 3000 מ"ל, סטיית תקן: 40 מ"ל. ב. 0.0062.

ג. סעיף א' - לא משתנה, סעיף ב' - לא פתיר, התבסס על התפלגות נורמלית.

3) א. 0.0571 ב. 2036.8.

4) א. 0.883 ב. 0.7949.

5) א. 0.8997 ב. תוחלת 1.111, שונות 0.1239.

6) 0.0668.

7) 56.

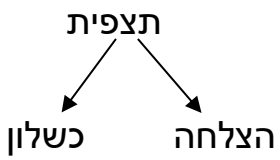
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

התפלגות מספר ההצלחות במדגם – קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית:

רקע:

תזכורת על התפלגות בינומית:

בפרק זה נדון בהתפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו).
את מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- Y.
מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.



כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים).
הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר p וכישלון יסומן ע"י הפרמטר: $q=1-p$.
מבצעים מדגם אקראי בגודל n: $Y \sim B(n,p)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא: $p(y=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$,

תוחלת: $E(y)=np$.

שונות: $V(y)=npq$.

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית:

אם לפנינו התפלגות בינומית: $Y \sim B(n,p)$, ומתקיים ש:

1. $n \cdot p \geq 5$.
2. $n \cdot (1-p) \geq 5$.

$$y \rightsquigarrow N(np, npq)$$

אז: $Z_y = \dfrac{y-np}{\sqrt{npq}}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות.
הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה.
על פי הכללים הבאים:

1. $p(Y=a) \cong p\left(a-\frac{1}{2} \le Y \le a+\frac{1}{2}\right)$.
2. $P(Y \le a) \cong P(Y \le a+0.5)$.
3. $P(Y \ge a) \cong P(Y \ge a-0.5)$.

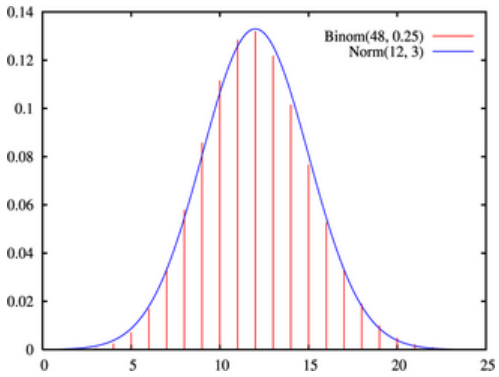
הערות:

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:
  1. $n \cdot p \ge 5$.
  2. $n \cdot (1-p) \ge 5$.
- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:
  1. $n \cdot p \ge 10$.
  2. $n \cdot (1-p) \ge 10$.
- וישנם מרצים שהתנאי שהם נותנים הוא: $(n \ge 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (הפתרון בהקלטה):
נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

1. מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
2. מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.

א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?

ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?

2) במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.

א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?

ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?

3) ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלנו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?

4) מטילים מטבע 50 פעמים.

א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?

ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?

5) במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אכן יגיע הוא 0.9.

א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?

ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?

6) מפעל לייצור ארטיקים טוען שהסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?

7) מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.201. ב. 0.3758. ג. התוחלת: 2, סטיית התקן: 1.2649.
2) א. 0.9332. ב. 0.6915.
3) 0.1611.
4) א. 0.9406. ב. בינומית - 0.0788, קירוב לנורמלית - 0.0778.
5) א. 0.015. ב. 398.
6) 0.9996.
7) 0.8643.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות הדגימה של פרופורציית המדגם.
Y - מספר ההצלחות במדגם (למשל, מספר המובטלים במדגם).

$\hat{p}=\frac{y}{n}$ - פרופורציית ההצלחות במדגם.

למשל, שיעור המובטלים במדגם - $n=200$:

מספר המובטלים : $Y=20$.

פרופורציית המובטלים במדגם : $\hat{p}=\frac{20}{200}=0.1$.

נסמן ב- p את שיעור ההצלחה באוכלוסייה וב- q את שיעור הכישלונות באוכלוסייה.
נבצע מדגם מקרי (הנחה שהתצפיות בלתי תלויות זו בזו) ונתבונן בהתפלגות של פרופורציית המדגם.

התוחלת, השונות וסטיית התקן של פרופורציית המדגם:

$$E\left(\hat{p}\right)=p\ \ ,\ V\left(\hat{P}\right)=\frac{pq}{n}\ .$$

משפט הגבול המרכזי עבור הפרופורציה המדגמית:

אם : $np\geq 5\ \&\ nq\geq 5$, אזי : $\hat{p}\sim\succ N\left(p,\frac{pq}{n}\right)$. $Z_{\hat{p}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$.

הערות:

- התנאים לקרוב הנורמאלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני.
  התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:
  1. $n\cdot p\geq 5$.
  2. $n\cdot(1-p)\geq 5$.
- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:
  1. $n\cdot p\geq 10$.
  2. $n\cdot(1-p)\geq 10$.
- וישנם מרצים המשתמשים בתנאי : $\left(n\geq 30\right)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור לנורמלית.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

- כיוון שפרופורציה אינה חייבת להיות מספר שלם בהכרח לא נהוג לבצע כאן תיקון רציפות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

לפי נתוני משרד החינוך בעיר ירושלים ל-60% מתלמידי התיכון זכאים לתעודת בגרות. נדגמו 200 תלמידי תיכון.

א. מה ההסתברות שהשכיחות היחסית $\left(\hat{p}\right)$ של הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 60%?

ב. מה ההסתברות שפרופורציית הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 70%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במדינה מסוימת 10% מכלל האוכלוסייה הינם מובטלים.
נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.

א. מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?

ב. מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?

ג. מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?

2) נניח כי 30% מהאוכלוסייה תומכים בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

ב. לכל היות 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

ג. יותר מ-27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

3) לפי נתוני משרד התקשורת 40% מהאוכלוסייה מחזיקים בטלפון נייד מסוג "סמארטפון". נדגמו 400 אנשים מהאוכלוסייה.

א. מה ההסתברות שבמדגם לכל היותר ל-40% יש סמארטפון?

ב. מה ההסתברות שבמדגם לרוב יש סמאטרפון?

ג. מה ההסתברות שפרופורציית בעלי הסמרטפון במדגם תסטה מהפרופורציה באוכלוסייה בלא יותר מ-4%?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?

4) נתון כי 80% מבתי האב מחוברים לאינטרנט. נדגמו 400 בתי אב אקראיים.

א. מה ההסתברות שלפחות 340 מהם מחוברים לאינטרנט?

ב. מה ההסתברות שפרופורציית המחוברים לאינטרנט במדגם תסטה מהפרופורציה האמיתית ביותר מ-4%?

ג. כמה בתי אב יש לדגום כדי שהסטייה בין הפרופורציה המדגמית לפרופורציה האמיתית לא תעלה על 3% בהסתברות של 90%?

ד. מהו העשירון התחתון של התפלגות פרופורציית המדגם?

5) נתון שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100.
ב"מועדון ה-700" נכללים נבחנים שמקבלים ציון מעל 700 בפסיכומטרי.
מה הסיכוי שבמועד בו נבחנו 2000 נבחנים אקראיים יהיו לפחות 3% המשתייכים למועדון?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) נתון ש-$X \sim B(n,p)$, ונגדיר את המשתנה הבא: $\hat{P} = \frac{X}{n}$.

א. הוכיחו ש: $V(\hat{P}) = \frac{P(1-P)}{n}$, $E(\hat{P}) = p$.

ב. מה p המביא את $V(\hat{P})$ להיות במקסימום?

תשובות סופיות:

1) א. התוחלת: 0.1, השונות: 0.00064. ב. 0.5. ג. 0.3446.

2) א. 0.0618. ב. 0.0618. ג. 0.8238.

3) א. 0.5. ב. 0. ג. 0.8968. ד. גדלה.

4) א. 0.0062. ב. 0.0456. ג. 481. ד. 0.77436.

5) 0.0154.

6) א. שאלת הוכחה. ב. 0.5.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 3 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

1. כללי 24

מושגי יסוד באמידה:

רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל - μ.
כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - p.
בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות θ ואומד ב-$\hat{\theta}$. $\hat{\theta}$ הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את θ.
- שגיאת אמידה: $\left|\hat{\theta}-\theta\right|$ - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

א. מה הפרמטר בדוגמה זו?

ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?

- $\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-θ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-θ: $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$.
- טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר: $\sigma\left(\hat{\theta}\right)=S.E$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:

ממוצע האוכלוסייה μ:

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$.

$E(\bar{x}) = \mu$ לכן $\bar{x}$ הינו אומר חסר הטיה ל- μ. כמו כן, טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$.

פרופורציה באוכלוסייה p:

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם: $\hat{p} = \frac{y}{n}$.

$E(\hat{p}) = p$, לכן $\hat{p}$ הינו אומר חסר הטיה ל- p. כמו כן טעות התקן: $\sigma(\hat{P}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$.

שונות האוכלוסייה σ^2:

האומד הנקודתי שלו יהיה: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$.

$E(S^2) = \sigma^2$ ולכן S^2 הינו אומד חסר הטיה ל- σ^2: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$.

הערה: אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.
להלן התוצאות שהתקבלו: 3, 1, 2, 5, 4, 1, 2, 3, 1, 2.
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד כשהמדגם בגודל 500?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה .
במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.

א. מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.

ב. מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.

ג. מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.

4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$, $\sum_{i=1}^{20} X^2_i = 1502.2$.

א. אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.

ב. אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.

5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?

א. סטיית התקן של האוכלוסייה.

ב. סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.

ג. סטיית התקן של המדגם.

ד. סטיית התקן של ממוצע המדגם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25 .
אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

א. 3.
ב. 2.5.
ג. 1.581.
ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, מחולק ב-$n-1$?

א. כאשר n קטן.
ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8) $X_1, X_2, ..., X_{16}$ מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע μ לא ידוע ושונות: $\sigma^2 = 64$. טעות התקן של האומד ל-μ היא:

א. 16.
ב. 8.
ג. 4.
ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.25 ב. 0.019 ג. 0.24 ד. 0.01
2) א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500.
ב. 100 ג. 2342 ד. 58
3) א. 177.9 ב. 64.1 ג. 0.4
4) א. 8.1 ב. 3.16
5) ד'.
6) ג'.
7) ד'.
8) ד'.
9) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 4 - אמידה נקודתית

תוכן העניינים

1. אומד חסר הטייה 29
2. אומד ניראות מקסימלית 36
3. MSE 44
4. שיטת המומנטים 47
5. אומד עקיב 50
6. אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית 52
7. שאלות מסכמות 54

אומד חסר הטייה:

רקע:

$\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-θ, אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-θ: $E(\hat{\theta})=\theta$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

המשתנה X הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

X	1	2	3
הסתברות	2θ	$1-60\theta$	4θ

מעוניינים לאמוד את θ על סמך שתי תצפיות מההתפלגות: X_1 ו-X_2.

א. הראו שהאומד: $T_1=\frac{2X_1+X_2}{2}$, הוא אומד מוטה ל-θ.

הטיה של אומד היא: $E(\hat{\theta})-\theta$. כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד T_1?

ג. תקנו את T_1, כך שיהיה אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא: $T_3=1.5X_1-X_2-1$.

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל-θ, אז $g(\hat{\theta})$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $g(\theta)$, רק אם g תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל: $P(X=3)$.

אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה σ^2: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$.

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של X.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תזכורות חשובות:

אם: $Y=aX+b$, אזי: $E(Y)=aE(X)+b$, $V(Y)=a^2\cdot V(X)$, $\sigma_Y=|a|\sigma_x$.

אם: $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ משתנים מקריים, אזי:

$$E(T)=E(X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots\ldots+E(X_n).$$

אם: $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T)=V(X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\ldots\ldots+V(X_n).$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) הציון במבחן מסוים של תלמידי כתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת μ, נלקח מדגם של 5 ציונים: $X_1,\ldots,X_5$.

שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

חוקר א' הציע: $T_1=\frac{X_1+\ldots+X_5}{5}$.

חוקר ב' הציע: $T_2=\frac{2X_1-X_3+X_4}{2}$.

חוקר ג' הציע: $T_3=\frac{2X_1+X_3}{2}$.

א. איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?

ב. הציעו תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.

ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 65, 78, 58, 82, 100.
חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.

ד. איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

2) כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של $2n$ נשים. נסמן את שונות הגובה ב- σ^2. הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם זה: $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $T_2=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$.

א. בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.

ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

3) $X\sim B(n,p)$. כלומר, X הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר P (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל n.

א. פתחו אומד חסר הטיה ל- P.

ב. מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד?

ג. מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$?

ד. מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) בתיק מניות שתי מניות. מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר לא ידוע: θ, $0 \le \theta \le 2$.
פונקציית ההסתברות של X - מספר המניות שיעלו ביום מסוים:
$P(X=2)=\frac{\theta}{6}$, $P(X=1)=\frac{\theta}{3}$, $P(X=0)=1-\frac{\theta}{2}$.

א. מְצאו אומד בלתי מוטה ל-θ, שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.

ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל-θ, שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום, במשך שלושה ימים - X_1, X_2, X_3 (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

5) בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ באופן הבא:
הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא 3θ,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא $1-4\theta$,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא θ.
במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת.

ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך 4 תצפיות.

ג. מהו האומדן לפרמטר θ על סמך תוצאות המדגם.

ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.

ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ, אז $5T$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר 5θ.

ב. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ, אז T^2 אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר θ^2.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא p , ובמכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא $2p$.
דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה.
נסמן ב- X את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה, וב- Y את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה.
איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- p ?

א. $\frac{X}{20}$.

ב. $\frac{Y}{20}$.

ג. $\frac{X+Y}{60}$.

ד. $\frac{2X+Y}{80}$.

8) יהיו T_1 ו- T_2 אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ .

א. מצאו אומד חסר הטיה ל- θ^2 , המתבסס על T_1 ו- T_2 .

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta(1-\theta)$, המתבסס על T_1 ו- T_2 .

9) נתון ש- X הינו משתנה מקרי עם תוחלת μ ושונות σ^2 .
נדגמו n תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסיה.

א. הראו ש- $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ אומד חסר הטייה ל- μ , כאשר : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות : $X_1 \cdot X_2$.
הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- μ^2 .

10) $X_i \sim N(\mu,1)$, כאשר : $i = 1,2...,n$.
נתון שהתצפיות הינן בלתי תלויות זו בזו.
מצאו אומד חסר הטיה ל- μ^2 .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

11) נתונות n תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות בעלת הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+\beta x}{2} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}.$$

א. הראו כי האומד $3\bar{X}$ הנו אומד בלתי מוטה ל-β.

ב. מצאו את השונות של האומד מהסעיף הקודם.

12) $X_1, X_2, ..., X_n$ הינם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}X\cdot A & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}.$$

א. בטאו את ערכו של A באמצעות θ, כדי שפונקציית הצפיפות תהיה לגיטימית.

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל-θ, על סמך n התצפיות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. T_1 ו- T_2. ב. $\frac{2}{3}T_3$. ג. $T_1=76.6\ ,T_2=110$ ד. T_1.

2) א. ראו בווידאו. ב. T_2.

3) א. $\frac{x}{n}$. ב. $1-\frac{x}{n}$. ג. X. ד. θ.

4) א. $\frac{3x}{2}$. ב. $\frac{3\overline{x}}{2}$.

5) א. $1-\frac{x}{2}$. ב. $1-\frac{1}{2}\overline{x}$. ג. 0.125. ד. $3\left(1-\frac{1}{2}\overline{x}\right)$.

ה. לשונות 0.917.

6) א. נכון. ב. לא נכון.

7) ב'.

8) א. $T_1\cdot T_2$. ב. $T_1-T_1\cdot T_2$.

9) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

10) $\overline{X}^2-\frac{1}{n}$.

11) א. שאלת הוכחה. ב. $V\left(3\overline{X}\right)=\frac{3-\beta^2}{n}$.

12) א. $A=\frac{2}{\theta^2}$. ב. $\theta=\frac{3}{2}\overline{X}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אומד נראות מקסימלית:

רקע:

להלן נלמד את שיטת הנראות המקסימלית למציאת אומדים.

נניח ש- X משתנה מקרי בדיד עם פונקציית הסתברות $P(x,\theta)$,

כאשר θ הפרמטר הבלתי ידוע.

יהיו: $X_1, X_2, ..., X_n$ תוצאות מדגם מקרי בגודל n הנלקח מאוכלוסייה זו.

נבנה את פונקציית ההסתברות המשותפת (פונקציית הדגימה).

אם אנו יודעים את תוצאות המדגם, ולא את הפרמטר, קוראים לפונקציית הנראות שהיא פונקציה של הפרמטר.

נגדיר את פונקציית הנראות:

$$L(\theta) = P(x_1,\theta)\cdot P(x_2,\theta)\cdot ...\cdot P(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i,\theta) .$$

פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את התצפית הראשונה (כפונקציה של θ), כפול ההסתברות לקבל את התצפית השנייה, וכולי. כלומר, המשמעות של פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את המדגם שהתקבל, כפונקציה של הפרמטר המבוקש θ.

אם מדובר במשתנה רציף, נכפיל את פונקציות הצפיפות ולא את פונקציות ההסתברות:

$$L(\theta) = f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdot ...\cdot f(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) .$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסיכוי של שחקן כדורסל לקלוע לסל הוא p (לא ידוע). השחקן זורק כדורים לסל עד שהוא קולע בפעם הראשונה. נניח כי הזריקות בלתי תלויות זו בזו.
הכדור נכנס לסל לראשונה בניסיון השלישי.
השחקן חוזר על התהליך שוב, והפעם הכדור נכנס לסל בניסיון החמישי.
מצאו את פונקציית הנראות של p.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אומד נראות מקסימלית עבור θ הוא האומד $\hat{\theta}$, שממקסם את פונקציית הנראות $L(\theta)$.
כלומר, אנו מחפשים את האומד שיגרום לכך שהמדגם המקרי שקיבלנו יהיה כמה שיותר סביר.

שלבים למציאת אומד נראות מקסימלית:

- לוקחים את פונקציית ההסתברות המשותפת של המדגם (או צפיפות משותפת אם המשתנה רציף).
- מציבים את תוצאות המדגם ומקבלים את פונקציית הנראות (פונקציה של הפרמטר הנחקר).
- מוצאים מקסימום לפונקציית הנראות (לעיתים כדאי להוסיף ln כדי להקל על המלאכה).

המשך דוגמה:

חשבו את אומדן הנראות המקסימלית עבור p.

משפט: אם $\hat{\theta}$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור θ, אזי $g\left(\hat{\theta}\right)$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור $g\left(\hat{\theta}\right)$, בהנחה והפונקציה היא חד-חד ערכית (אינווריאנטיות).

המשך דוגמה:

מצאו אומדן נראות מקסימלית לסיכוי של שחקן הכדורסל לקלוע לסל פעמיים ברצף.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא p (לא ידוע).
השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה.
נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.

א. חשבו את פונקציית הנראות של p, וציירו גרף שלה.

ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור p.

ג. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-p, אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים, עד אשר ניצח.

2) מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסוימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של λ לקוחות ביום.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל-λ, על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסוים.

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל-λ, על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב-n ימים מסוימים.

3) הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר λ.
דגמו 4 אנשים מקריים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם.
התוצאות שהתקבלו בדקות הן: 3, 7,5 ו-3.

א. פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר זה על סמך n תצפיות כלשהן.

ב. מהו האומדן לפרמטר?

4) משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער, ביום אחד, מתפלג אחיד: $U(0,q)$.

כדי לאמוד את θ, נשאלו ביום מסוים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי-בית באותו יום.

א. אלעד הכין ביום מסוים שעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של θ המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.

ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-θ על סמך התצפית.

ג. משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו 1,3,1.5.
מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-θ על סמך המדגם הזה.

ד. מצאו באופן כללי אומד נראות מקסימלית ל-θ, על סמך מדגם של n בני נוער – $X_1,\ldots,X_n$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות σ^2 לא ידועה.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית עבור השונות על סמך מדגם $X_1,\ldots,X_n$ מתצפיות מהאוכלוסייה.

ב. נדגמו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 165, 174, 174. מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

6) פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר p בהתפלגות הבינומית, על סמך מדגם בגודל n, בו X הוא מספר ההצלחות במדגם.

7) X הוא משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות: $f(x)=\begin{cases}2\theta xe^{-\theta x^2} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל-θ על סמך n תצפיות בלתי תלויות: $X_1,\ldots,X_n$.

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל-θ^2.

8) בכד א' 10 כדורים שחורים ו-10 לבנים ובכד ב' 5 כדורים שחורים ו-15 לבנים. דוגמים באקראי כדור, בלי לדעת מאיזה כד.

א. מצא אומד נראות מקסימלית לכד שממנו הוצא הכדור על סמך הצבע של הכדור.

ב. מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

9) הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשבץ מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה. נתנו ליוסי לפתור חמישה תשבצים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.

א. מה אומדן הנראות המקסימלית לתוחלת זמן הפתרון של תשבץ על ידי יוסי (אין חובה לפתח).

ב. מה אומדן הנראות המקסימלית לסיכוי שייקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

10) מספר הלקוחות הממתינים בתור במוקד טלפוני הוא משתנה מקרי X, בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ, באופן הבא:

X	0	1	2
$P(X)$	$4\theta^2$	$4\theta-8\theta^2$	$1-4\theta+4\theta^2$

בחמישה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו: 0, 0, 0, 1, 0 לקוחות ממתינים בתור.

א. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית עבור הפרמטר θ, על-סמך המדגם הנתון.

ב. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסיכוי שלא יהיו לקוחות בתור.

11) אדם מחזיק בידו שני מטבעות: מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן – שהסיכוי לקבל בו תוצאה של עץ הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לך כמה פעמים הוא קיבל עץ. אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל: את ההוגן או את זה שאינו הוגן.

א. מצא אומד בשיטת הנראות המקסימלית לסוג המטבע שהוטל.

ב. מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עץ?

12) מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה.
דוגמים 50 אנשים אקראיים ומתקבל ש-4 מהם מובטלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

ב. מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה.

ג. מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

13) במשחק מחשב שלוש רמות משחק:
ברמה 1 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.9.
ברמה 2 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.7.
ברמה 3 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.4.
יוסי בחר ברמה מסוימת, אך אינו יודע באיזו רמה הוא בחר.
הוא משחק במשחק ברמה שבחר פעמיים.

א. הציעו א.נ.מ. לרמה של המשחק שיוסי שיחק, על סמך מספר הפעמים שסיים את המשחק.

ב. אם יוסי סיים את שני המשחקים, מה יהיה האומדן לרמה?

ג. מהו א.נ.מ. לסיכוי, שמתוך שני משחקים הוא יצליח בדיוק משחק אחד?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

14) $X_1, X_2, ..., X_n$ מתפלגים אחיד בקטע: $[-\theta, \theta]$.
מצא אומד נראות מקסימלית לפרמטר θ.

15) $X_1, X_2, ..., X_n$ מתפלגים בדיד לפי פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X=k)=\frac{\binom{2}{k}\cdot P^k\cdot(1-P)^{2-k}}{1-(1-P)^2} \qquad K=1,2$$

הוכח שא.נ.מ ל-P, הינו: $2-\frac{2}{\overline{X}}$.

16) במכשיר חשמלי יש 2 סוללות שפועלות באופן ב"ת זו בזו, והוא מפסיק לפעול ברגע שאחת הסוללות מפסיקה לעבוד. הסיכוי של סוללה לתפקד לפחות חודש הוא P. כאשר המכשיר מפסיק לפעול מחליפים את שתי הסוללות שלו. בתחילת הניסוי נלקחו 80 מכשירים כאלה עם סוללות חדשות ולאחר חודש נמצא ש-30 מהם עדיין פועלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית עבור P.

ב. רשמו את האומד שבו השתמשתם בחלק א' באופן כללי, עבור מדגם של n מכשירים שמתוכם נמצאו Y מכשירים שעדיין פועלים לאחר חודש אחד.

ג. בהנחה שאורך החיים (בחודשים) של סוללה בודדת הוא מעריכי, עם פי צפיפות: $f(t)=\theta e^{-\theta t}$ עבור $t>0$.
מצא א.נ.מ. עבור θ, המבוסס על Y.
מהו האומדן המתאים מן המדגם הנתון?

17) חיוג אוטומטי של מכשיר טלפון משדר אות אחת לשתי דקות. אם לאחר 20 דקות (10 אותות חיוג) המספר שאליו מטלפנים עדיין תפוס, החיוג האוטומטי נפסק.

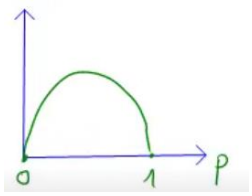
א. רשמו את פונקציית ההסתברות של המשתנה X – מספר הפעמים שהחייגן האוטומטי מחייג למספר הטלפון המבוקש, אם ההסתברות לקבלת צליל "פנוי" בשידור אחד של אות חיוג הוא P.

ב. מתוך 12 ניסיונות חיוג אוטומטי למשרד הרישוי בזמנים שונים במשך 5 ימים, התקבלו התוצאות הבאות: בשני ניסיונות הופסק החיוג האוטומטי ובשאר הניסיונות שבהם הצליח המטלפן להשיג את המספר המבוקש, מספר החיוגים האוטומטיים עד לקבל צליל "פנוי" היו: 1, 6, 2, 7, 3, 8, 2, 2, 1, 5.
מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור P, על סמך התוצאות שהתקבלו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $L(p)=(1-p)\cdot p$. להלן גרף:



ב. 0.5. ג. $\frac{2}{9}$.

2) א. X. ב. $\overline{X}$.

3) א. $\frac{1}{\overline{X}}$. ב. $\frac{2}{9}$.

4) א. 1. ב. 1. ג. 3. ד. $\hat{\theta}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$.

5) א. $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-170)^2}{n}$. ב. 40.2.

6) $\frac{x}{n}$.

7) א. $\frac{n}{\sum X_i^2}$. ב. $\left(\frac{n}{\sum X_i^2}\right)^2$.

8) א. ראה סרטון. ב. כד א'.

9) א. 32. ב. 0.3916.

10) א. 0.45. ב. 0.81.

11) א. ראה סרטון. ב. הוגן.

12) א. 0.08. ב. 0.92. ג. 11.5.

13) א. $\hat{\theta}=\begin{cases}3 & X=0,1\\ 1 & X=2\end{cases}$. ב. 1. ג. $\hat{p}=\begin{cases}2\cdot 0.4\cdot 0.6 & X=0,1\\ 2\cdot 0.9\cdot 0.1 & X=2\end{cases}$.

14) $\max|X_i|$.

15) שאלת הוכחה.

16) א. 0.6124. ב. $\hat{p}=\sqrt{\frac{y}{n}}$. ג. 0.49.

17) א. $P(x)=\begin{cases}(1-p)^{x-1}p & 1\le x\le 9\\ (1-p)^9 & x=10\end{cases}$. ב. 0.1818.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

נספח:
התפלגויות רציפות

ההתפלגות	פונקציית הצפיפות	פונקציית ההתפלגות המצטברת	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
$X \sim U(a,b)$	$f(x)=\frac{1}{b-a}$ $a \le x \le b$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$		$b=\max(X_i)$ $a=\min(X_i)$
$X \sim \exp(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$1-e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. λ - הוא ממוצע האירועים ביחידת זמן.	$\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}}$
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi(t)$	μ	σ^2	$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$	$\hat{\mu}=\bar{X}$ $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

התפלגויות בדידות

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות $P(X=k)$	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
בינומית $B(n,p)$ $0 \le p \le 1$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$	(1)	$\hat{P}=\frac{Y}{n}$
גיאומטרית $G(p)$ $0 < p \le 1$	$(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots,\infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	(2)	$\hat{P}=\frac{1}{\bar{X}}$
אחידה $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a+1}$ $K=a,\ldots,b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	(3)	$b=\max(X_i)$ $a=\min(X_i)$
פואסונית $P(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,\ldots,\infty$	λ	λ	(4)	$\hat{\lambda}=\bar{X}$

(1) מספר ההצלחות ב- n ניסויי ברנולי ב"ת. p - ההסתברות להצלחה.

(2) מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי ב"ת, p - ההסתברות להצלחה.

(3) בחירה אקראית של מספר בין a ו- b.

(4) מספר אירועים ביחידת זמן, λ - קצב האירועים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

קריטריון MSE – תוחלת ריבוע הטעות:

רקע:

הקריטריון הנפוץ ביותר כדי לבדוק את טיב האומד הוא קריטריון MSE:
Mean Squared Error – תוחלת ריבוע טעות האמידה.

$$MSE\left(\hat{\theta}\right)=E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2=V\left(\hat{\theta}\right)+\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2 .$$

כאשר: $V\left(\hat{\theta}\right)$ - הינה שונות האומד.

$E\left(\hat{\theta}\right)-\theta$ - הינה ההטיה של האומד.

אם T_1 ו- T_2 הינם אומדים לפרמטר θ, האומד העדיף יהיה זה עם MSE קטן יותר.
כלומר, אם: $MSE\left(T_1\right)>MSE\left(T_2\right)$, אז T_2 עדיף על T_1.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון משתנה X המתפלג אחיד רציף באופן הבא: $X\sim U\left(3,\theta\right)$.

מוצעים שני אומדים לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת: $T_1=2X-3$ ו- $T_2=\frac{3X-3}{2}$.

איזה אומד עדיף לאמידת הפרמטר θ?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת.
מוצעים שני אומדים אפשריים ממוצע של שתי תצפיות וממוצע של שלוש תצפיות.
לפי קריטריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE), איזה אומד עדיף? הסבירו.

2) בעיר מסוימת בשוויץ בכל θ דקות רכבת מגיעה לתחנה מסוימת.
דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת - X.

א. הצע אומד חסר הטיה ל-θ, על סמך X.

ב. סטטיסטיקאי הציע לאמוד את θ על סמך האומד: $1.5X$.
האם האומד הנ"ל מוטה?

ג. איזה אומד מבין האומדים בסעיפים א' ו-ב' עדיף?

3) חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחלות במחלת השפעת בחורף (להלן: הפרמטר P). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים, ומתבונן בסטטיסטי X - מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף.
הוא מתלבט בין שני אומדים: $T_1=\frac{X}{5}$ ו- $T_2=\frac{X+1}{7}$.

א. מי מבין האומדים הללו הוא חסר הטיה?

ב. מי מבין האומדים עדיף אם $P=0.5$?

ג. מי מבין האומדים עדיף אם $P=0.1$?

4) מספר השריפות המתרחשות בארץ בחודש אוקטובר מתפלג פואסונית עם תוחלת λ. נלקח מדגם של 10 חודשי אוקטובר. להלן שני אומדים אפשריים:
$\hat{\lambda}_1=\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i}{10}$ ו- $\hat{\lambda}_2=\frac{2\cdot\sum_{i=1}^{5}X_i+2\cdot\sum_{i=6}^{10}X_i}{10}$.
כאשר: X_i = מספר השריפות בחודש אוקטובר ה-i.
איזה מהאומדים עדיף, לצורך אמידת הפרמטר λ?

5) הוכח ש: $E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2=V\left(\hat{\theta}\right)+\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) שלוש תצפיות.

2) א. $2x$. ב. אומד מוטה. ג. סעיף ב.

3) א. T_1. ב. T_2. ג. T_1.

4) $\hat{\lambda}_1$.

5) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטת המומנטים:

רקע:

מומנט מסדר ראשון של משתנה X מוגדר להיות: $E(X)$.

מומנט מסדר שני של משתנה X מוגדר להיות: $E(X^2)$.

באופן כלל, מומנט מסדר r מוגדר להיות: $E(X^r)$.

מומנט מסדר ראשון של n תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות: $\frac{\sum X_i}{n}$ - זהו מומנט מסדר ראשון של המדגם.

מומנט מסדר שני של n תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות: $\frac{\sum X_i^2}{n}$ - זהו המומנט מסדר שני של המדגם.

באופן כללי, מומנט מסדר r של n תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות: $\frac{\sum X_i^r}{n}$ - זהו מומנט ה-r של המדגם.

השיטה: משווים את המומנט המתאים של ההתפלגות לפי המומנט המתאים של המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נגיד שמספר הפעמים שאדם מתעטש ביום מתפלג פואסונית על ידי פרמטר λ (קצב ההתעטשויות ביום). רוצים לאמוד את λ בשיטת המומנטים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) X מתפלג אחיד רציף מהערך המינימלי a לערך המכסימלי 20. מצא אומד לערך מינימלי a לפי שיטת המומנטים על סמך n תצפיות מההתפלגות.

2) דוגמים n תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות נורמאלית אשר תוחלתה היא μ והשונות שלה היא σ^2. מצא אומדים לפרמטרים אלה לפי שיטת המומנטים.

3) אדם מטיל מטבע רגיל n פעמים. יש לאמוד את מספר הפעמים שהוא מטיל את המטבע וזאת על סמך X – מספר העצים שהוא קיבל.

א. מצא אומד בשיטת המומנטים ל-n על סמך X בודד.

ב. מצא אומד בשיטת המומנטים ל-n על סמך חזרה של m פעמים על אותו תהליך בו מטילים את המטבע ההוגן n פעמים.

ג. מהו האומדן אם האדם חזר על התהליך שלוש פעמים:
פעם אחת קיבל 5 עצים, בפעם השנייה הוא קיבל 4 עצים ובפעם השלישית הוא קיבל 7 עצים.

4) נתון ש-$X_i \sim \exp(\lambda)$. מצא אומד בשיטת המומנטים לפרמטר λ על סמך מדגם של n תצפיות.

5) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x)=\begin{cases}\theta \cdot X^{\theta-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & else\end{cases}$.

א. בטא את $E(X)$ כפונקציה של הפרמטר θ.

ב. מצא אומד ל-θ על פי שיטת המומנטים.

6) הזמן בדקות להכנת לחם במאפייה מתפלג באופן הבא: $X_i \sim N(10,\sigma^2)$.
במדגם של הכנת ארבעה לחמים התקבלו התוצאות הבאות: 5, 10, 6, 4.

א. אמוד את σ^2 בשיטת המומנטים על סמך מדגם בגודל n.

ב. מצא את האומדן ל-σ^2. מה הבעייתיות בתשובה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) $\hat{a} = 2\bar{X} - 20$.

2) $\bar{X} = \hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2$.

3) א. $\hat{n} = 2X$. ב. $\hat{n} = 2\bar{X}_m$. ג. $\hat{n} = 10\frac{2}{3}$.

4) $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$.

5) א. $\frac{\theta}{\theta+1}$. ב. $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$.

6) א. $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - 100$. ב. -55.75.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אומד עקיב:

רקע:

יהי $\hat{\theta}_n$ אומד לפרמטר θ, המתבסס על n תצפיות.

אומד זה יקרא אומד עקיב, אם יתקיים ש: $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

אם $\hat{\theta}_n$ אומד חסר הטיה לפרמטר θ ומתקיים ש: $\lim_{n\to\infty} V\left(\hat{\theta}_n\right)=0$,

אזי $\hat{\theta}_n$ אומד עקיב ל-θ.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסבר מדוע $\overline{X}$ אומד עקיב ל-μ.

אם $\hat{\theta}_n$ אומד נראות מקסימלית לפרמטר θ, מתקיים ש: $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

כלומר, $\hat{\theta}_n$ אומד עקיב ל-θ.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסבר מדוע בהתפלגות גיאומטרית $\frac{1}{\overline{X}}$, אומד עקיב לפרמטר P.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נתון כי: $X_i \sim U(0,\theta)$, כאשר: $i=1,2...,n$.

$2\bar{X}$ מוצע להיות האומד ל-θ.

א. הראה שאומד זה הוא חסר הטיה.

ב. הסבר מדוע האומד הינו עקיב.

2) נתון ש-$X \sim B(n,p)$. כמו כן, נתון ש: $\hat{p}=\frac{X}{n}$ הינו אומד ל-p.

הוכח שאומד זה הינו אומד עקיב ל-p.

3) אורך חיי נורה מתפלג מעריכית עם קצב λ לשנה.

נגדיר את: $W_1,W_2,...,W_n$ כסדרת זמנים (בשנים) של n נורות בלתי תלויות.

א. מהו אומד הנראות המקסימלי עבור λ? האם האומד עקיב?

ב. מצא אומד עקיב לסיכוי שנורה כלשהי תישרף תוך פחות משנתיים.

4) נפח החלב בקרטון חלב מתפלג נורמלית עם תוחלת μ ושונות σ^2.

מצא אומד עקיב לפרמטר σ^2, המתבסס על n תצפיות בלתי תלויות.

תשובות סופיות:

1) א. שאלת הוכחה. ב. ראה סרטון.

2) שאלת הוכחה.

3) א. $\frac{1}{\bar{W}}$. ב. $1-e^{-\frac{2}{\bar{W}}}$.

4) $\frac{\sum_i (X_i-\bar{X})^2}{n}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית:

אומד חסר הטיה יעיל ביותר – MVUE (Minimum-variance unbiased estimator).

רקע:

T יהיה MVUE, אם מתקיים ש- T אומד חסר הטיה ל- θ, ובנוסף מתקיים ש:
$V(T)\le V\left(\hat{\theta}\right)$, לכל $\hat{\theta}$ חסר הטיה אחר.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

לרשת חנויות ישנם שני סניפים. מספר הלקוחות הנכנסים לכל סניף ביום מתפלג פואסונית עם קצב של λ בסניף A וקצב של 2λ בסניף B.
נדגמו n ימים מכל סניף, ונבדק בכל יום:

X_i - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף A ביום i.

Y_j - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף B ביום j.

על מנת לאמוד את λ, מוצע האומד: $\alpha\bar{X}+\beta\bar{Y}$.

א. מה התנאי, שצריך להתקיים על α ו- β, כדי שהאומד יהיה חסר הטיה?

ב. מה צריכים להיות α ו- β כדי שהאומד יהיה גם בעל שונות מינימלית?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) T_1 ו- T_2 הינם אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ.

כמו כן, נגדיר: $T = aT_1 + bT_2$.

א. מה צריך להיות התנאי על a ו- b, כדי ש- T יהיה אומד חסר הטיה?

ב. σ_1^2 ו- σ_2^2 הם השונויות של T_1 ו- T_2, בהתאמה.

מצאו a ו- b, כך ש- T יהיה אומד חסר הטיה ל- θ, ובעל שונות מינימלית.

2) במפעל 3 מכונות המייצרות את אותו חלק.

תוחלת הקוטר של החלקים המיוצרים בכל מכונה זהה.

השונויות של כל מכונה שונות, ומקיימות: $\sigma_2^2 = 2\sigma_1^2$, $\sigma_3^2 = 3\sigma_1^2$.

הוחלט לדגום n חלקים מכל מכונה, ולחשב את ממוצע הקוטר המתקבל.

$\overline{X}_i$ - יהיה הממוצע המתקבל במכונה i.

יהי: $W = \sum_{i=1}^{3} a_i \overline{X}_i$ האומד לתוחלת קוטר החלקים המיוצרים על ידי מכונה כלשהי.

א. מה התנאי שצריך להתקיים על המשקלים a_i, כדי שהאומד המוצע יהיה בלתי-מוטה?

ב. נניח ש- $a_1 = a_2$.

מה במקרה זה המשקלים המביאים את האומד להיות MVUE?

תשובות סופיות:

1) א. $a+b=1$.

ב. $a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$, $b = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

2) א. $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$.

ב. $a_1 = a_2 = 0.4$, $a_3 = 0.2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות מסכמות:

שאלות:

1) במפעל מייצרים מוצרים בשלוש מכונות שונות ובלתי תלויות.
במכונה הראשונה הסיכוי שמוצר יהיה תקין הוא P , במכונה השנייה ההסתברות שמוצר יהיה תקין הוא P^2 ובמכונה השלישית הסיכוי הוא $2P$.
דוגמים 20 מוצרים מכל מכונה.
נסמן ב- X את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה הראשונה,
ב- Y את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השנייה
וב- Z את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השלישית.

א. מהם הערכים האפשריים של הפרמטר P ?

ב. מצאו אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר P , על סמך X ו- Z .

ג. אם התקבל ש- $Y=3$, $X=6$, מהו אומדן נראות מקסימלית ל- P ?

2) מספר תאונות הדרכים בקטע כביש א' מתפלג פואסונית עם קצב של λ תאונות בחודש, ומספר תאונות הדרכים בקטע כביש ב' מתפלג פואסונית עם קצב של 2λ תאונות בחודש.
הוחלט לספור את כמות התאונות בחודש בכל אחד מקטעי הכביש.
נסמן ב- X את מספר התאונות בחודש בקטע א' וב- Y בקטע ב'.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטר λ, על סמך X ו- Y .

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית, לסיכוי שבקטע כביש א תהיה לפחות תאונה אחת בחודש.

ג. האם האומד שמצאת בסעיף א הוא חסר הטיה ל- λ ?

3) זמן הייצור של מוצר מסוים בתהליך ייצור מתפלג נורמאלית, עם תוחלת ושונות שאינן ידועות.

א. הציעו אומדים חסרי הטיה לתוחלת והשונות של זמן הייצור של המוצר.

ב. הציעו אומדי נראות מקסימלית לתוחלת ולשונות של זמן הייצור של המוצר.

ג. הציעו אומד נראות מקסימלית לריבוע התוחלת של זמן הייצור.

ד. האם האומד מהסעיף הקודם הוא גם חסר הטיה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) בקזינו משחק, ובו 4 תאים ממוספרים מ-1 עד 4.
מפעיל המשחק שם כסף באחד מארבעת התאים והאדם המשתתף צריך לנחש באיזה תא הכסף מוחבא. מפעיל הקזינו מודיע שהסיכוי להחביא את הכסף בכל אחד משלושת התאים הראשונים שווה, אך לא בהכרח שווה לסיכוי להחביא אותו בתא הרביעי.
יש לאמוד את הסיכוי להחביא את הכסף בתא הראשון: P.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפרמטר P.

יעל שיחקה את המשחק 3 פעמים וקיבלה שפעם אחת הכסף הוחבא בתא מספר 1 ובפעמים האחרות בתא מספר 2.

ב. מצאו אומדן ל-P על סמך התוצאות הללו בשיטת הנראות המקסימלית.

ג. מצאו אומד חסר הטיה ל-P. מהו האומדן לפי התוצאות של יעל?

ד. מצאו אומדן חסר הטיה ונראות מקסימלית לסיכוי שהכסף יוחבא בתא מספר 4 על סמך התוצאות של יעל.

5) יהי: $X_1, X_2, \ldots X_n$ מדגם מקרי מתוך ההתפלגות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\theta-1} & 0<x<\lambda,\ \theta>0\\ 0 & else\end{cases}$$

א. מצא אח"ה ל-λ (כאשר θ קבוע ידוע).

ב. מצא אנ"מ ל-θ (כאשר λ קבוע ידוע).

ג. מצא אנ"מ ל-λ (כאשר θ קבוע ידוע).

6) X - משך זמן הפרסומות בערוץ 2 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0,\theta)$.

Y - משך זמן הפרסומות בערוץ 10 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0,2\theta)$.

א. מצא אומד חסר הטיה ל-θ, המשתמש במשך זמן אקראי של פרסומת בודדת בערוץ 2 ופרסומת בודדת בערוץ 10.

ב. מוצע האומד: $T_2=X+0.5Y$. האם האומד הנ"ל הוא חסר הטיה?

ג. איזה אומד יותר עדיף זה של סעיף א או זה של סעיף ב'?

ד. מצא אומד נראות מקסימלית ל-θ על סמך X ו-Y.

7) נדגמו 2 תצפיות, X_1, X_2, בלתי תלויות מהתפלגויות אחידות רציפות התלויות בפרמטר θ.
ידוע כי: $X_1 \sim U(0,\theta)$, $X_2 \sim U(0,a\theta)$ (כאשר a קבוע ידוע וחיובי).

א. מצא אנ"מ ל-θ, על סמך 2 התצפיות הנ"ל.

ב. חשב את תוחלת ושונות האנ"מ מסעיף א'. האם האנ"מ מוטה?

ג. מצא אח"ה ל-θ על סמך סכומן של 2 התצפיות הנ"ל. מהי שונותו?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $0 \le P \le 0.5$. ב. $\hat{p} = \frac{x+z}{60}$. ג. 0.345.

2) א. $\frac{x+y}{3}$. ב. $1-e^{-\frac{x+y}{3}}$. ג. כן.

3) א. מאחר ולא התבקשתם לפתח, הרי שהאומד זהה לנוסחה הכללית (ראו נספח).
ב. כנ"ל. ג. כנ"ל (ראו הפרק על אומד נראות מקסימלי). ד. לא.

4) א. $0 \le P \le \frac{1}{3}$. ב. $\frac{1}{3}$. ג. 0.389. ד. -0.167.

5) א. אח"ה יהיה: $\hat{\lambda} = \frac{\theta+1}{\theta}\bar{x}$. ב. $\hat{\theta} = \frac{n}{n\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$.

ג. $\hat{\lambda} = X_{\max}$.

6) א. $T_1 = (x+y)\frac{2}{3}$. ב. כן. ג. ב'. ד. $\hat{\theta} = \max\left\{x, \frac{1}{2}y\right\}$.

7) א. $\hat{\theta} = \max\left(X_1, \frac{X_2}{a}\right)$. ב. $E(\hat{\theta}) = \frac{2}{3}\theta$, $V(\hat{\theta}) = \frac{1}{18}\theta^2$.

ג. $\tilde{\theta} = \left(\frac{2}{1+a}\right)(X_1 + X_2)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

נספח: אומדי נראות מקסימלית ואומדים חסרי הטיה בהתפלגויות השונות:

מודל בינומי

נתון מדגם של משתנה בינומי: $X \sim B(n,p)$.

א.נ.מ עבור p הוא: $\hat{p} = \frac{X}{n}$, והוא גם א.ח.ה.

מודל אחיד (בדיד)

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים אחידים: $X_i \sim U(1,N)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור N הוא: $\hat{N} = \max\{X_1, ..., X_n\}$, ואינו א.ח.ה.

מודל פואסוני

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים פואסוניים: $X_i \sim P(\lambda)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור λ הוא: $\hat{\lambda} = \overline{X}$ וגם א.ח.ה.

מודל גיאומטרי

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים גיאומטריים: $X_i \sim G(p)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור p הוא $\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$, אינו א.ח.ה. א.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{p}$, הוא $\overline{X}$ והינו א.ח.ה.

מודל נורמלי

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים נורמליים: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור μ, הוא: $\hat{\mu} = \overline{X}$.

כאשר μ ידוע, א.נ.מ עבור σ^2 הוא: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ (אומד חסר-הטיה).

כאשר μ לא-ידוע, א.נ.מ עבור σ^2 הוא: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ (אומד מוטה!!!).

אומד חסר-הטיה עבור σ^2:

כאשר μ ידוע: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$.

כאשר μ לא-ידוע: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מודל מעריכי

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים מעריכיים: $X_i \sim \exp(\theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור θ הוא: $\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$ - מהווה אומד מוטה, וא.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{\theta}$ הוא $\overline{X}$ א.ח.ה.

מודל אחיד (רציף)

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים אחידים: $X_i \sim U(0,\theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור θ הוא: $\hat{\theta} = \max\{X_1, ..., X_n\}$ אינו א.ח.ה.

בכל התפלגות:

א.ח.ה עבור μ הוא: $\hat{\mu} = \overline{X}$.

אומד חסר-הטיה עבור σ^2:

כאשר μ ידוע: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$.

כאשר μ לא-ידוע: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 5 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה 59
2. קביעת גודל מדגם 65
3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה 67

רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

ממוצע המדגם הוא אומד לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי.
מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.
נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר μ ייכלל בתוכו הוא: $1-\alpha$.
$1-\alpha$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש: $P(A\le\mu\le B)=1-\alpha$.
A - גבול התחתון של רווח הסמך.
B - הגבול העליון של רווח הסמך.
$L=B-A$ - אורך רווח הסמך.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590.
רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?
4. מהו רווח הסמך?
5. מה אורך רווח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת (μ) במקרה ש-σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד: μ.

אומד נקודתי: $\bar{x}$.

תנאים לבניית רווח הסמך: $X \sim N$ או $n \geq 30$.

σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך: $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית: $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

ε - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$.
- ככל שמספר התצפיות (n) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון $(1-\alpha)$ גבוהה יותר, כך: $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.

א. מי האוכלוסייה במחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?

ד. מה רווח הסמך לפרמטר?

ה. מהי רמת הסמך לפרמטר?

ו. מה אורך רווח הסמך?

ז. מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?

2) מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.

3) מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.

ג. הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.

4) דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.

ב. מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?

ג. מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?

ד. אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:

א. ממוצע המדגם.

ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.

ג. רמת הסמך.

6) זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.

א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.

ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.

ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.

7) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $82 < \mu < 92$.
נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.

א. מהו ממוצע המדגם?

ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?

ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?

8) חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.

א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.

ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.

ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.

ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) חוקר בנה רווח סמך ל- μ וקיבל: $48 < \mu < 54$. מה נכון בהכרח:

א. $\mu = 51$.

ב. $\overline{X} = 6$.

ג. $\overline{X} = 51$.

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

10) איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

11) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $63 < \mu < 83$.
נתון שסטיית התקן בהתפלגות הייתה ידועה לו ושהמדגם התבסס על 40 תצפיות.

א. אם החוקר היה רוצה לבנות רווח סמך באורך 10.
כמה תצפיות עליו היה לדגום?

ב. רווח הסמך שנבנה על ידי החוקר היה ברמת סמך של 95%.
בנו את רווח הסמך שהיה מתקבל ברמת סמך של 98%.

12) נתון משתנה מקרי רציף מתפלג אחיד: $X_i \sim U(\mu - 0.5, \mu + 0.5)$.
נרצה לאמוד את μ. מצאו רווח סמך ל- μ ברמת-בטחון של 0.95 אם במדגם של 45 תצפיות התקבל: $\bar{x} = 74$.

(תזכורת על השונות בהתפלגות אחידה רציפה: $Var(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-₪. ג. μ. ד. $9200 < \mu < 9800$.
ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

2) $4920.6 < \mu < 4979.4$.

3) א. $223.42 < \mu < 236.58$. ב. $222.16 < \mu < 237.84$.
ג. ראה סרטון.

4) א. $9284 < \mu < 10,116$. ב. הסטיה המירבית בין $\bar{x}$ ל- μ היא 416 ₪ בביטחון של 95%.
ג. 800. ד. לא.

5) א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

6) א. $83.5 < \mu < 4.42$. ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

7) א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

8) ב'.

9) ג'.

10) ד'.

11) א. 160. ב. $61.13 < \mu < 84.87$.

12) 74 ± 0.084.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

קביעת גודל מדגם:

רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה: σ ברמת סמך של $1-\alpha$ ושגיאת אמידה שלא תעלה על ε מסוים, נציב בנוסחה הבאה: $n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$.

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12.
מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?

2) מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא.
מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5.
נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.

א. כמה מתגייסים יש לדגום?

ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?

3) יהי X משתנה מקרי עם ממוצע μ וסטיית תקן σ. חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- μ ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה 0.5σ.
מהו גודל המדגם הנדרש?

תשובות סופיות:

1) 780.

2) א. 139.

ב. הדבר יקטין את ε פי 2.

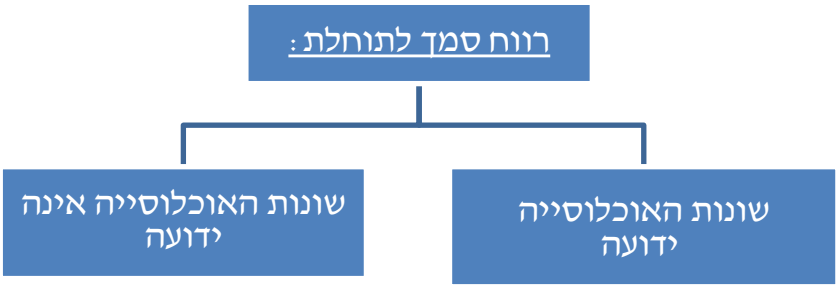
3) $n=62$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

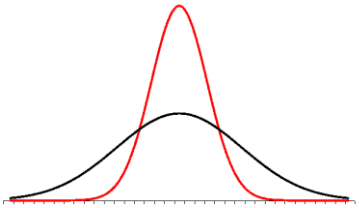


בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה $\left(\sigma^2\right)$ אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

התנאי: $X \sim N$ או שהמדגם גדול.

רווח סמך: $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.



האומד לשונות: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i - n\bar{X}^2}{n-1}$.

התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.
במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות שהתקבלו בדקות: 5.3, 4.6, 5.2, 4.7.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב.
ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89.
הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.

ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?

ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?

2) במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן: $S=13$ ס"מ.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?

3) אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.

א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?

4) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.

א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.

ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.

ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.

5) נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$, $\sum_{i=1}^{60} X^2_i = 643.19$.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו: $S=2$, $\bar{x}=13.8$.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.

7) שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר μ.
לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10.
שניהם קבעו אותה רמת סמך.
סטטיסטיקאי א: הניח $\sigma=20$ 2.
סטטיסטיקאי ב: חישב לפי המדגם וקיבל $S=20$.
למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?

א. סטטיסטיקאי א.

ב. סטטיסטיקאי ב.

ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.

ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.

8) נתון ש: $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10.
אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

תשובות סופיות:

1) א. $79.88 < \mu < 89.72$ ב. כן. ג. הוא היה גדל.

2) ראה בסרטון.

3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.

4) א. $96.63 < \mu < 107.37$. ב. $96.90< \mu <107.10$. ג. ראה בסרטון.

5) $3.149< \mu < 3.351$.

6) $13.42< \mu < 14.18$.

7) ב'.

8) 90%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 6 - רווח סמך לפרופורציה

תוכן העניינים

1. רווח הסמך לפרופורציה 70
2. קביעת גודל מדגם 73

רווח הסמך לפרופורציה:

רקע:

המטרה היא לאמוד את P – פרופורציה באוכלוסייה.

האומד הנקודתי:

$\hat{p}=\frac{y}{n}$ (Y - מספר ההצלחות שבמדגם).

רווח הסמך ל- p : $\hat{p}\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

תנאי לבניית רווח הסמך:

מדגם של לפחות 30 תצפיות (לעיתים נותנים תנאי של מספר הצלחות ומספר כשלונות לפחות 5 או לפחות 10).

האומד לטעות התקן: $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

מתקיים ש: $\hat{P}=\frac{A+B}{2}$, $L=2\varepsilon$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים, מתוכם התקבל ש-24 היו מובטלים.

א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסייה ברמת סמך של 95%.

ב. מהו האומד לטעות התקן?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נדגמו 200 דירות בעיר חיפה. 48 מתוכן נמצאו כבעלות ממ"ד.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז הדירות בחיפה עם ממ"ד.

ב. על סמך סעיף א' מה ניתן לומר על שגיאת האמידה המקסימאלית?

ג. בהנחה ובחיפה 80 אלף דירות, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% למספר הדירות בחיפה עם ממ"ד בפועל.

2) במדגם של 300 אנשי היי-טק התקבל ש-180 מהם אקדמאים.

א. בנו רווח סמך לפרופורציית אקדמאים ברמת סמך של 95% (בקרב אנשי הייטק).

ב. כיצד רווח הסמך של סעיף א' היה משתנה אם היינו מקטינים את רמת הסמך?

ג. כיצד רווח הסמך היה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?

3) במדגם של 400 נהגים התקבל רווח סמך לפרופורציית הנהגים החדשים: $0.08 < p < 0.18$.

א. כמה נהגים במדגם היו נהגים חדשים?

ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?

4) במסגרת מערכת הבחירות בארה"ב נשאלו 840 אנשים עבור איזה מועמד יצביעו. 510 אנשים ענו כי יצביעו בעד ברק אובמה. בסקר פורסם שתתכן סטייה של $\pm 3\%$ מתוצאות האמת. באיזו רמת ביטחון הסקר השתמש?

5) במדגם של 300 נשים בגילאי 35-40 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.

א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסייה הנחקרת.

ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לסיכוי שבאוכלוסייה הנחקרת תמצא אישה לא נשואה?

6) ביצעו מדגם באוכלוסייה. שיעור ההצלחות במדגם היה 10% ורווח הסמך ניבנה ברמת סמך של 95%. אורכו הינו 8.3156%. מהו גודל המדגם שנלקח?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $18.1\% < p < 29.9\%$.
ב. בביטחון של 95% שגיאת האמידה היא לכל היותר 0.059.
ג. $14,480 < \mu < 23,920$.

2) א. $0.545 \le p \le 0.655$. ב. האורך שלו היה קטן. ג. לא ניתן לדעת.

3) א. 52. ב. 0.997.

4) 0.925.

5) א. $22.5\% < p < 30.9\%$. ב. $45.91\% < p < 60.72\%$.

6) 200.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

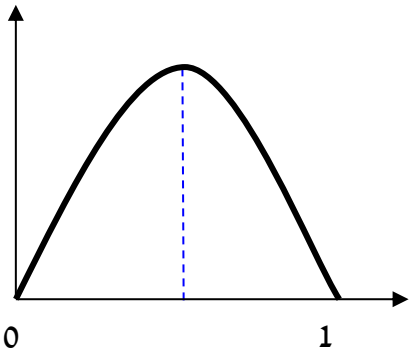
קביעת גודל מדגם:

רקע:

בפרק זה נדון איך קובעים גודל מדגם שבאים לאמוד פרופורציה באוכלוסייה מסוימת:
החוקר קובע מראש את רמת הסמך הרצויה: $1-\alpha$.
החוקר קובע מראש את הטעות הסטטיסטית המרבית שבה הוא מעוניין: ε
(או את אורך רווח הסמך).

$L=2\varepsilon$ - אורך רווח הסמך.
ε - טעות אמידה מרבית: המרחק המקסימאלי (הסטייה) בין הפרמטר (p) לאומד ($\hat{p}$).

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$



ויתעניין לדעת מהו גודל המדגם הרצוי לשם כך.

נקבל ש: $n \geq \left(\frac{2 \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{L} \right)^2$.

הבעיה שאין אנו יודעים את $\hat{p}$.

נתבונן בביטוי: $\hat{p}(1-\hat{p})$.

כיוון שאין לנו ידע מוקדם על $\hat{p}$ נציב את המקרה השמרני ביותר שממקסם את הביטוי עבור: $\hat{p}=0.5$.

$$n \geq \left(\frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.5 \cdot 0.5}}{L} \right) \Rightarrow n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{L} \right)$$

אך אם תהיה לנו אינפורמציה מוקדמת על הפרופורציה נציב את הערך הקרוב ביותר ל-0.5 האפשרי.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לאמוד את שיעור האבטלה במשק. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.

א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת?

ב. חזור לסעיף א' אם ידוע שהאבטלה לא אמורה לעלות על 20%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) הממשלה אומדת מדי חודש את אחוז התמיכה בה.
מהו גודל המדגם אשר יש לקחת אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמתי באוכלוסייה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?

2) משרד התקשורת מעוניין לדעת מה שיעור בתי האב עם אינטרנט.
א. כמה בתי אב יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 90% אורך רווח הסמך לא יעלה על 8%?
ב. חזרו על סעיף א' אם ידעו שלפני חמש שנים ל-80% מבתי האב היה אינטרנט וכיום יש להניח שיש ליותר אינטרנט.

3) ערוץ טלוויזיה מעוניין לאמוד את הרייטינג של הערוץ בפריים טיים.
המטרה שבביטחון של 95% הסטייה המרבית בין האומד לרייטינג האמתי לא תעלה על 4%.
א. כמה מכשירי PEOPLE METER יש להתקין לצורך האמידה?
ב. לפי הערכה מוקדמת הרייטינג של הערוץ לא יכול לעלות על 20%. בהנחה ומכשיר כזה עולה 500 ₪ ליחידה מה החיסכון הכספי מאינפורמציה זאת?

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. כמה אזרחים יש לדגום כדי לאמוד את אחוז התמיכה בממשלה עם אורך רווח הסמך שלא עולה על 9% ברמת סמך של 90%?
ב. בהנחה ובוצע מדגם שאת גודלו חישבתם בסעיף א והתקבל שאחוז התמיכה בממשלה במדגם הנו 42%. בנו רווח סמך לאחוז התמיכה בממשלה ברמת סמך של 95%.
ג. על סמך סעיף ב', האם תקבלו את הטענה שמיעוט האוכלוסייה תומך הממשלה?

5) משרד הבריאות מתכנן לבצע מדגם שמטרתו לבדוק את הסיכוי לחלות בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת. הוא מעוניין שבסיכוי של 98% טעות האמידה לא תעלה על 3%.
א. כמה מחוסנים יש לדגום?
ב. משרד הבריאות ביצע את המדגם שאת גודלו חישבת בסעיף הקודם וקיבל ש-15% מבין אלה שקיבלו חיסון נגד שפעת בכל זאת חלו במשך החורף בשפעת. בנו ברמת סמך של 98% את הסיכוי לחלות בחורף בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת.
ג. בהמשך לסעיף הקודם. מהי טעות האמידה המרבית בביטחון של 98%? מדוע הוא קטן מ-3%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) 1068.

2) א. 423. ב. 271.

3) א. 601. ב. ₪108,000.

4) א. 335. ב. $0.367 < p < 0.473$.
ג. בביטחון של 0.95 ניתן להגיד שמיעוט באוכלוסייה תומך בממשלה.

5) א. 1509. ב. 0.15 ± 0.02 ג. ראה סרטון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 7 - רווח סמך להפרש פרופורציות

תוכן העניינים

1. רווח סמך להפרש פרופורציות 76

רווח סמך להפרש פרופורציות:

רקע:

המטרה: לאמוד את $p_1 - p_2$: הפרש פרופורציות בין שתי אוכלוסיות שונות.

האומד הנקודתי: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.

התנאי לבניית רווח הסמך: כל מדגם מעל 30 או לבדוק שמספר ההצלחות ומספר הכישלונות בכל מדגם לפחות 5 בכל מדגם (יש כאלה שבודקים לפחות 10).

רווח סמך: $\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{n_2}}$.

רק שאפס נופל בתחומי רווח הסמך להפרש הפרופורציה נאמר שלא ניתן לקבוע שקיים הבדל מובהק בין הפרופורציות באוכלוסיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה להשוות בין שתי תרופות נדגמו 200 איש שלקחו תרופה X , מתוכם 180 טענו שהתרופה עזרה להם. כמו כן, נלקחו 300 איש שלקחו את תרופה Y . מתוכם 150 טענו שהתרופה עזרה להם. בנו רווח סמך להפרש אחוזי ההצלחה של התרופות ברמת סמך של 95%. מה ניתן לומר על סמך רווח הסמך על ההבדלים בין התרופות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מתוך 150 נשים שנדגמו באקראי 30% תמכו בהצעת חוק מסוימת.
מתוך 200 גברים שנדגמו באקראי 25% תמכו בהצעת החוק.

א. בנו רווח סמך לפער בין אחוזי התמיכה של הנשים לעומת הגברים ברמת סמך של 96%.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז התמיכה בהצעת החוק .

2) במחקר רפואי השתתפו 200 אנשים הסובלים מכאבים כרוניים. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות שוות בגודלן. קבוצה 1 קיבלה את תרופה A וקבוצה שנייה קיבלה את תרופה B. בקרב לוקחי תרופה A 90 טענו שמצבם השתפר. בקרב לוקחי תרופה B 70 טענו שמצבם השתפר.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין שיעורי ההצלחה של שתי התרופות.

ב. האם על סמך סעיף א' ניתן לקבוע שקיים הבדל בין התרופות מבחינת שיעורי ההצלחה?

3) נדגמו 200 משפחות מגוש דן. ל-70% מתוכן מכשיר DVD בבית.
נדגמו 300 משפחות מאזור הצפון ל-65% מתוכן מכשיר DVD בבית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 98% לפרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD בבית.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין פרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD לבין פרופורציות המשפחות בצפון עם DVD.

תשובות סופיות:

1) א. $-4.9\% < P_F - P_M < 14.9\%$.

ב. $22.5\% < p < 31.8\%$.

2) א. $0.093 < P_A - P_B < 0.307$.

ב. כן.

3) $0.625 < p < 0.7754$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 8 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסיה ידועות 78
2. כששונויות האוכלוסיה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות 80
3. כששונויות האוכלוסיה לא ידועות והמדגמים גדולים 82

בששונויות האוכלוסייה ידועות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. σ^2_1 , σ^2_2 ידועות.
2. X_1 , $X_2 \sim N$ או $n_1, n_2 > 30$.
3. שני מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך: $\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 100 תושבים מאזור A והמשכורת הממוצעת הייתה שם 9200 ₪.
כמו כן נדגמו 120 תושבים מאזור B וממוצע המשכורות שהתקבל שם 8700 ₪.
לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורות באוכלוסיית שני האזורים היא 1800 ₪. אמדו ברמת סמך של 90% את הפרש השכר הממוצע בין אזור A לאזור B.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508. בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?

2) ציוני IQ מתוכננים כך שיתפלגו נורמאלית עם סטיית תקן של 15. במדגם של 20 נבחנים ישראלים התקבל ממוצע ציונים 104. במדגם של 23 נבחנים אמריקאיים התקבל ממוצע ציונים 99.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער בין ישראל לארה"ב בממוצע הציונים במבחן ה-IQ.

ב. האם קיים הבדל בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים?

3) חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. ידוע שרמת הקשיות של ברגים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של 4 יחידות. במדגם של 15 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות ובמדגם של 12 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25. עבור אילו רמות בטחון יקבע שאין הבדל בין שני סוגי הברגים מבחינת ממוצע רמת הקשיות שלהם?

תשובות סופיות:

1) (-20,90).

2) א. $-3.99 < \mu_1 - \mu_2 < 13.99$.

ב. לא נוכל לטעון בביטחון של 95% שקיים הבדל בין ישראל לארה"ב.

3) רמות בטחון הגבוהות מ-0.9476.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$.
2. $X_1, X_2 \sim N$.
3. מדגמים בלתי תלויים.

השונות המשוקללת: כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי הנוסחה הבאה: $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

דרגות החופש: $d.f = n_1 + n_2 - 2$.

רווח סמך: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t^{n_1+n_2-2}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2_p}{n_1} + \frac{S^2_p}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים.להלן תוצאות המדגם שנעשה:

	תל אביב	באר שבע
מספר האקדמאים	20	10
ממוצע הכנסות של אקדמאים	11,000	9500
סטיית התקן של הכנסות אקדמאים	200	250

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים.
הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ.
להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

2) להלן 4 תצפיות על משתנה X שמתפלג: $N\left(\mu_x,\sigma^2\right)$, ומשתנה Y שמתפלג: $N\left(\mu_y,\sigma^2\right)$.

X	22	20	21	25
Y	18	25	17	12

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y-\mu_x$ ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

תשובות סופיות:

1) הנחות:
1. השונות שווה.
2. שהציונים מתפלגים נורמלית.
3. המדגמים אינם תלויים זה בזה.

$-5.52<\mu_1-\mu_2<17.52$.

2) $-9.6<\mu_y-\mu_x<1.6$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות והמדגמים גדולים:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1-\mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1-\bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. מדגמים גדולים.
2. מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך: $\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s^2_1}{n_1}+\frac{s^2_2}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

יבואן רכב מעוניין להשוות בין רכבים יפנים לעומת רכבים אמריקאים מבחינת תצרוכת הדלק שלהם. נדגמו 40 רכבים מכל סוג. לכל רכב נבדק כמות הק"מ שהמכונית נסעה עבור 1 ליטר דלק במהירות של 100 קמ"ש. התוצאות שהתקבלו במדגם הם: ברכבים היפנים ממוצע 12.5 עם סטיית תקן 1.5 וברכבים האמריקאים הממוצע 11.3 עם סטיית תקן של 1.4.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער הממוצעים של צריכת הדלק של מכוניות יפניות לעומת אמריקאיות.

ב. האם על סמך רווח הסמך ניתן לקבוע שקים הבדל בין שני סוגי הרכבים מבחינת צריכת הדלק?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במדגם של 45 תלמידים הלומדים משפטים התקבל שבשבוע הם לומדים בממוצע 4 שעות עם סטיית תקן 2 שעות מעבר לשעות הלימוד בכיתה.
במדגם של 55 תלמידים הלומדים הנדסה התקבל שבשבוע הם לומדים בממוצע 10 שעות עם סטיית תקן של 3 שעות.

א. אמדו את הפרש ממוצעי שעות הלמידה של סטודנטים למשפטים לעומת סטודנטים להנדסה ברמת בטחון של 90%.

ב. האם קיים הבדל בין סטודנטים למשפטים ולסטודנטים להנדסה מבחינת ההשקעה שלהם מעבר לשעות הלימוד בכיתה?

2) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלו נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה. במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות וסטיית תקן של 0.7 שעות. במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות וסטיית תקן של 1.1 שעות.
מצאו רווח סמך לפער בין ממוצע שעות הצפייה בטלוויזיה בין שני האזורים בביטחון של 95%.

תשובות סופיות:

1) א. $-6.83 < \mu_1 - \mu_2 < -5.17$. ב. כן.

2) כן, בביטחון של 90% סטודנטים להנדסה לומדים יותר מסטודנטים למשפטים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 9 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים 84

רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים:

רקע:

מדגם מזווג: מדגם אחד שבו יש n צמדים. כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים: X ו- Y.
ניצור משתנה חדש: $D = x - y$.

הפרמטר שנרצה לאמוד: μ_D.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. $x, y \sim N$.
2. המדגם מזווג.

נוסחת רווח הסמך: $\bar{D} \pm t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$.

כאשר דרגות החופש: $df = n-1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב.
לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

הקובץ	1	2	3	4	5
הזמן בתוכנה הראשונה	25	48	49	46	38
הזמן בתוכנה השנייה	27	46	42	40	48

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית.
מִצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.
להלן הציונים בסמסטר א' ו-ב':

סמסטר א'	74	68	90	75	82
סמסטר ב'	80	84	87	76	100

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?

ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?

2) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה.
להלן התוצאות:

חברה/ מדינה	**ארה"ב**	**קנדה**	**הולנד**	**פולין**	**מצרים**	**סין**	**יפן**
בזק - X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
קווי זהב - Y	1.4	2	1.9	3.1	3.3	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה,
בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.

תשובות סופיות:

1) א. $-19 < \mu_0 < 38$. ב. בביטחון של 95% לא קיים הבדל.
ג. ראה הסבר בסרטון.

2) $-0.013 < \mu < 0.185$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 10 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

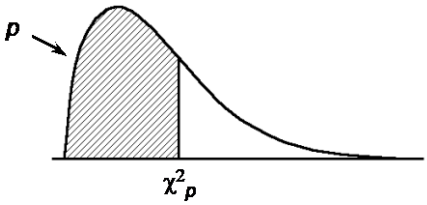
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן 86

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה.
התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית,
למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול.
רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש.
דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



רווח הסמך לשונות: $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}$.

כאשר: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i - n\cdot\bar{X}^2}{n-1}$ אומד לשונות הלא-ידועה.
אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמאלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות.
להלן התוצאות בשניות: 5.3, 4.6, 5.2, 4.7.
בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2.

$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ = זמן תגובה (בשניות).

תוצאות מדגם: $n=4$.

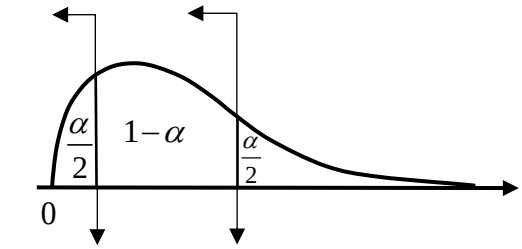
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$$\bar{X}=\frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4}=4.95$$

$$d.f=n-1=4-1=3$$

נציב: $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i-n\cdot\bar{X}^2}{n-1}$

$$S^2=\frac{4.7^2+5.2^2...-4\cdot4.95^2}{4-1}=0.123$$



$$X^2{}_{0.025}=0.216 \quad X^2{}_{0.975}=9.35$$

$$1-\alpha=0.95$$
$$\alpha=0.05$$
$$\frac{\alpha}{2}=0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

נציב: $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}$

$$\frac{(4-1)\cdot0.123}{9.35}<\sigma^2<\frac{(4-1)\cdot0.123}{0.216}$$

$$0.039<\sigma^2<1.708$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 28, 26, 21, 17, 18.
בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1.
בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5.

נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$, $\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080$.

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.

ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.

ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.

ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$, $\sum_{i=1}^{10} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 = 900$.

נתון ש: $X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) $8.4 < \sigma^2 < 194.2$.

2) א. $30.285 < \mu < 31.315$. ב. $0.836 < \sigma < 1.606$.

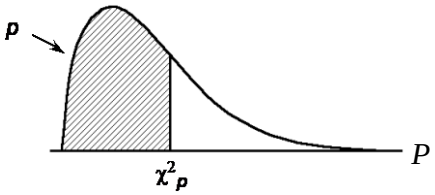
3) א. ממוצע: 104, שונות: 100. ב. $99.32 \le \mu \le 108.68$. ג. $7.94 < \sigma < 13.7$.

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

4) א. $68.75 < \mu < 82.15$. ב. $47.4 < \sigma^2 < 333.3$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה $\chi^2 p$:



df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 11 - רווח סמך ליחס שונויות

תוכן העניינים

1. רווח סמך ליחס שונויות 91

רווח סמך ליחס שונויות:

רקע:

נרצה לאמוד את ההבדל בין שתי שונויות משתי אוכלוסיות שונות.

הפרמטר יהיה: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$: כלומר היחס בין השונויות.

התנאים:

- $X_1, X_2 \sim N$ או מדגמים גדולים.
- מדגמים בלתי תלויים.

רווח הסמך יבנה על סמך התפלגות הנקראת התפלגות F. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ומושפעת משתי דרגות החופש, זו של המונה וזו של המכנה.



$$df_1 = n_1 - 1$$
$$df_2 = n_2 - 1$$

רווח הסמך יהיה: $\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר סוציולוגי מעוניין לחקור את הרגלי הבילויים בקבוצות גיל שונות:
במדגם שנעשה על סטודנטים בגילאי 21-26 התקבל אומד חוסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 10,000. כמות הסטודנטים שנדגמו 16.
במדגם שנעשה על 11 מבוגרים בשנות השלושים התקבל אומד חסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 490,000.
נניח שההוצאה החודשית לבילוי בכל קבוצת גיל מתפלג נורמאלית.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% ליחס בין השונויות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בתחום הבינוי משתמשים בשני סוגי מתכות: מתכת A ומתכת B. מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין שני סוגי המתכות מבחינת שונות החוזק שלהן. דגמו מספר יחידות מתכת מכל סוג והתקבלו התוצאות הבאות:

סוג המתכת	A	B
N	8	10
$\sum X_i$	16	30
$\sum X_i^2$	60	198

יש להניח שרמת החוזק של המתכות מתפלגת נורמאלית.

א. בנו רווח סמך ליחס השונויות של רמות החוזק בין שני סוגי המתכות ברמת סמך של 90%.

ב. בנו רווח סמך ליחס סטיות התקן של רמות החוזק בין שני סוגי המתכות ברמת סמך של 90%.

2) מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמני ביצוע המשימה: $\sum(y_i-\bar{y})^2=204$. במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות: $\sum(x_i-\bar{x})^2=200$.

אמוד ברמת ביטחון של 95% פי כמה גדולה השונות של הגברים באוכלוסייה מהשונות של הנשים.

מה יש להניח לצורך פתרון?

תשובות סופיות:

1) א. $0.1013<\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}<1.2267$. ב. $0.318<\frac{\sigma_A}{\sigma_B}<1.108$.

2) $0.39\le\frac{\sigma_m^2}{\sigma_F^2}\le 5.26$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 12 - שאלות מסכמות על רווחי סמך

תוכן העניינים

1. שאלות מסכמות על רווחי סמך 93

שאלות מסכמות על רווחי סמך:

שאלות:

1) מהירות הגלישה באינטרנט במקום מסוים מתפלגת נורמאלית. בדקו את מהירות הגלישה ב-30 זמנים אקראיים. מהירות הגלישה נמדדה ב-Mbps.
מהירות מתחת ל-10Mbps מוגדרת על ידי החברה כנמוכה.
התוצאות שהתקבלו במדגם: ממוצע היה 87 עם סטיית תקן 17 ו-12 פעמים המהירות הייתה נמוכה.
בנו רווחי סמך ברמת סמך של 95% לפרמטרים הבאים:

א. תוחלת מהירות הגלישה.

ב. סטיית תקן של מהירות הגלישה.

ג. הסיכוי שמהירות הגלישה תהיה נמוכה.

2) 200 אנשים נשאלו כמה פעמים ביום הם שותים כוס קפה.
להלן התפלגות התשובות:

מספר פעמים	0	1	2	3	4	5
מספר אנשים	86	34	28	22	20	10

א. תנו רווח סמך לממוצע מספר כוסות הקפה שאנשים נוהגים לשתות ביום. $\alpha = 0.05$.

ב. אדם השותה לפחות 4 כוסות קפה ביום נקרא "מכור לקפה". בנו רווח סמך לאחוז "המכורים לקפה". $\alpha = 0.1$.

3) חוקר בנה רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת בשנה. רווח הסמך שהתקבל הוא: $81 < p < 91$. רווח הסמך הנ"ל התבסס על מדגם של 500 איש.

א. כמה אנשים במדגם טענו שכלל לא התקררו השנה?

ב. באיזו רמת סמך נבנה רווח הסמך?

ג. בנו רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת השנה ברמת סמך של 96% על סמך תוצאות המדגם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם תוחלת 100. במדגם של 20 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 2040 \text{ , } \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 210740 .$$

א. אמדו ברמת ביטחון של 90% את ממוצע ציוני בחינת ה-IQ בישראל – מהי ההנחה הדרושה לפתרון?

ב. על סמך רווח הסמך של סעיף א' האם תקבלו את הטענה שבישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב?

ג. מה היה קורה לרווח הסמך אם היינו מגדילים את רמת הסמך שלו?

5) להלן תוצאות מדגם שבדק עבור כל משפחה האם יש לה בבית מכשיר טאבלט:

אזור מגורים	גוש דן	שאר הארץ
גודל המדגם	200	240
מספר משפחות בעלי טאבלט	160	168

א. בנו רווח סמך להבדל בין אחוז המשפחות עם טאבלט בגוש דן ואחוז המשפחות בעלי טאבלט בשאר חלקי הארץ. ברמת סמך של 98%.

ב. בנו רווח סמך לפרופורציות משפחות בעלות טאבלט בכלל הארץ ברמת סמך של 95%.

6) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית במדגם של 25 מתגייסים.
התקבלו התוצאות הבאות: $\bar{x} = 176.2\text{cm}$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832\text{cm}^2$.

א. אמדו את הגובה הממוצע של המתגייסים ברמת סמך של 98%.

ב. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הגובה של מתגייסים של צה"ל.

7) בנק מתלבט האם לפתוח סניף באזור A או באזור B. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורת באזור A היא 1200 ובאזור B 1500. הבנק דגם 50 אנשים מאזור A, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,800 ₪. כמו כן, נדגמו 40 אנשים מאזור B, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,600 ₪.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש הממוצעים של המשכורות בשני האזורים. האם על סמך רווח הסמך ניתן להמליץ לבנק היכן לפתוח את הסניף. אם כן, היכן?

ב. בנו רווח סמך לתוחלת המשכורת באזור A ברמת סמך של 95%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) להלן מדגם של שכר הדירה ב-₪ של 5 דירות שלושה חדרים בשכונת בבלי בתל אביב:

שנת 2012	8000	7500	7000	6500	7500
שנת 2013	8000	8200	7800	6800	7700

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת עליית שכר הדירה משנת 2012 לשנת 2013 בשכונת בבלי. ניתן להניח ששכר הדירה בשכונה מתפלג נורמלית.

תשובות סופיות:

1) א. $80.65 \le \mu \le 93.35$. ב. $13.5 < \sigma < 22.9$. ג. $0.225 \le p \le 0.575$.

2) א. $1.21 \le \mu \le 1.65$. ב. $10.85\% \le p \le 19.15\%$.

3) א. 70. ב. 0.9988. ג. $83\% < p < 89\%$.

4) א. $97.4 \le \mu \le 106.6$. ב. לא. ג. יגדל.

5) א. $0.5\% \le p_1 - p_2 \le 19.5\%$. ב. $0.704 \le p \le 0.786$.

6) א. $170.8 \le \mu \le 181.6$. ב. $8.8 \le \sigma \le 14.3$.

7) א. $-372 \le \mu_A - \mu_B \le 772$, לא. ב. $6467 \le \mu_A \le 7133$.

8) $-21 \le \mu_D \le 821$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 13 - בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן) 96

בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן):

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.
בתהליך זה ישנן שתי השערות שנבדקות:

1. השערת האפס: המסומנת ב- H_0.
2. השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר): המסומנת ב- H_1.

בדרך כלל השערת האפס מסמנת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה הנורמה ואילו ההשערה האלטרנטיבית את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה.

דוגמה:

ישנה תרופה קיימת למחלה A אשר גורמת ל-10% מהמשתמשים בה לתופעות לוואי. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שיעילה באותה מידה, אך מקטינה את הסיכוי לתופעות הלוואי. לכן יש לבצע מחקר שעל סמך תוצאותיו ננסה להכריע איזה השערה נקבל:

H_0: התרופה החדשה הנה קונבנציונאלית וגורמת ל-10% תופעות לוואי.

H_1: התרופה החדשה מקטינה את אחוז הסובלים מתופעות לוואי מתחת ל-10%.

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים:

1. אזור דחייה: דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה).
2. אזור קבלה: קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה.
המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם.
אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת, אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):
(לדחות H_0 | H_0 נכונה) $= P_{H_0}$ (לדחות את H_0) $= \alpha$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:
(לקבל H_0 | H_1 נכונה) $= P_{H_1}$ (לקבל את H_0) $= \beta$.

רמת בטחון:
(לקבל H_0 | H_0 נכונה) $= P_{H_0}$ (לקבל את H_0) $= (\alpha - 1)$.

עוצמה:
(לקבל H_0 | H_1 נכונה) $= P_{H_1}$ (לדחות את H_0) $= (\beta - 1) = \pi$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכד יש 10 כדורים. יתכן ש-5 מהם לבנים והיתר שחורים (כד א' – השערת האפס)
או ש-7 מהם לבנים והיתר שחורים (כד ב' – השערה אלטרנטיבית).
כדי להחליט איזה מהכדים ברשותנו, הוחלט להוציא כדור ולהשתמש בכלל
ההחלטה הבא: אם הכדור שהוצא הוא לבן שזהו כד ב' H_1.

א. חשבו את רמת המובהקות ואת רמת הביטחון של המבחן המוצע.

ב. חשבו את הסיכוי לטעות מסוג שני והעוצמה של המבחן המוצע.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) אדם חשוד בביצוע פשע. מהן הטעויות האפשריות בהכרעת הדין?

2) ילד קנה שקית סוכריות אטומה שבה ציפה ל-10 סוכריות תות ו-5 לימון.
ישנה שקית אחרת אותה הוא לא רצה בה 6 סוכריות תות ו-9 לימון.
הוא החליט להוציא באקראי סוכרייה, אם היא תהיה לימון הוא יחזיר את השקית לחנות. מה הסיכויים לכל סוג של טעות בהכרעתו?

3) יהי X מספר שלם הנבחר באקראי מבין המספרים השלמים. הסיכוי ש- X יקבל ערך כלשהו נתון על ידי הנוסחה: $p(X=k)=\frac{1}{n}$ עבור $k=1,2,.....,n$.
נתונות ההשערות הבאות לגבי התפלגות של X: $H_1: n=6$, $H_0: n=4$.
כמו כן נתון כלל ההכרעה הבא: נדחה את השערת האפס אם: $X>3$.
חשבו את הסיכוי לטעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני ואת העוצמה?

4) איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד.
להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל / איכות	מצוין	טוב	בינוני	ירוד
"היוצר"	0.6	0.2	0.2	0
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4

בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע.
על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).

א. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "טוב" נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?

ב. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "בנוני" או גרוע מכך נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מה מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?

ג. איזה כלל החלטה עדיף? נמקו!

5) במטרה לבדוק האם מטבע תקין הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל-7 כולל יוחלט שהמטבע תקין, אחרת נחליט שהמטבע מזויף.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה ההסתברות לטעות מסוג ראשון?

ג. מהי עצמת המבחן אם במציאות אכן המטבע אינו תקין כי הסיכוי לעץ בו הוא 20%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) להלן השערות:

$H_0 : X \sim t(5)$ - התפלגות T עם חמש דרגות חופש.

$H_1 : X \sim Z$ - התפלגות נורמלית.

כלל החלטה: נדחה את השערת האפס אם X גדול מ-2.015.

א. מהי רמת המובהקות של כלל ההחלטה?
ב. מהי העוצמה של כלל ההחלטה?

7) במפעל מסוים נפלטים לאוויר חומרים רעילים. במצב שיגרה העוצמה הממוצעת של החומר הרעיל אמורה להיות 6,000 יחידות עם סטיית תקן 900. במצב חירום העוצמה הממוצעת היא 7,000 עם סטיית תקן 900. במפעל מערכת התראה נתמכת על ידי 9 חיישנים. אם ממוצע העוצמה של החומר הרעיל לפי תשעת החיישנים עולה על 6,600 יחידות מופעלת מערכת ההתראה. נתון שעוצמת הזיהום מתפלגת נורמאלית.

א. מה הסיכוי להתראת שווא? (באיזה סוג טעות מדובר)?
ב. מה הסיכוי שבמצב חירום מערכת ההתראה לא תפעל? (באיזה סוג טעות מדובר)?
ג. מה ההסתברות שאם המצב הוא מצב חירום מערכת ההתראה תפעל? (איך קוראים להסתברות זו)?
ד. בסעיפים הבאים נשנה בכל סעיף נתון מסוים. כל סעיף עומד בפני עצמו, כיצד השינוי ישנה את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני?
   i. המפעל יקנה עוד 4 חיישנים.
   ii. מצב חרום מוגדר כעת בתוחלת של 7,500 יחידות.
   iii. מערכת ההתראה תופעל אם ממוצע של תשעת החיישנים יהיה מעל 6,700.

8) במטרה לבדוק האם במקום עבודה מסוים פרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות נדגמו באקראי 10 עובדים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 2 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות.

א. מה רמת המובהקות של כלל ההכרעה הנ"ל?
ב. מהי העצמה בהנחה ובחברה 30% בנים?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) זמן ההשפעה של משכך הכאבים "אופטלנוס" מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 40 דקות וסטיית תקן של 12 דקות. חברת התרופות המייצרת את התרופה מנסה לשפר את התרופה כך שתוחלת הזמן עד להשפעה תתקצר. לצורך כך, דגמו 25 מטופלים שיקבלו את התרופה "אופטלנוס פורטה", ממוצע זמן התגובה של המטופלים היה 34.5 דקות. חברת התרופות החליטה מראש שאם ממוצע הזמן עד להשפעה יהיה נמוך מ-35 דקות, היא תמשיך בתהליך שיווק "אופטלנוס פורטה".

א. מהי רמת המובהקות של המבחן המוצע?

ב. על סמך תוצאות המדגם, מהי המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. מהי עצמת המבחן המוצע אם במציאות התרופה "אופטלנוס פורטה" מפחיתה את התוחלת לכדי 32 דקות?

ד. כיצד תשתנה התשובה לסעיף ג' אם החברה הייתה מחליטה שהיא תמשיך בתהליך שיווק התרופה החדשה כאשר ממוצע המדגם יהיה נמוך מ-36 דקות?

10) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 120.
מכון טוען שלימודים אצלו מעלים את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. נלקחו 20 שלמדו במכון ו-20 שניגשו לבחינה בלמידה עצמית. הוחלט במשרד פרסום לקבל את טענת המכון רק אם במדגם ממוצע הציונים של אלה שלמדו במכון יהיה גבוהה בלפחות 50 נקודות מאלה שלא היו.

א. מהי רמת המובהקות של המחקר?

ב. מה הסיכוי לעשות טעות מסוג שני II בהנחה שהמכון מעלה את ממוצע הציונים ב-60 נקודות?

ג. כיצד התשובות לסעיף א ו ב' היו משתנות אם מסתבר שסטיית התקן בציוני הפסיכומטרי הינה 100. הסבירו ללא חישוב.

11) קו ייצור נחשב תקין אם יש בו לכל היותר 4% פגומים, ונחשב שאינו תקין אחרת. מנהל האיכות דוגם בכל יום מקו הייצור 500 מוצרים. אם במדגם יהיה לפחות 30 מוצרים פגומים יפסיקו באותו היום את קו הייצור.

א. מה ההסתברות להפסיק את קו הייצור כשהוא תקין. איך קוראים להסתברות זאת?

ב. מה ההסתברות להמשיך ביום מסוים את קו הייצור למרות שאינו תקין כי היו 8% פגומים בקו הייצור. איך קוראים להסתברות זאת?

12) מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

13) מספר המכוניות הנכנסות לחניון "עזרים" מתפלג פואסונית. בשנה שעברה המכוניות נכנסו לחניון בקצב של 2 מכוניות לדקה. בעקבות תלונות על עומס יתר בכניסה לחניון מעוניין מנהל החניון לבדוק האם קצב כניסת המכוניות לחניון גדל השנה. מנהל החניון החליט לספור את מספר המכוניות שיכנסו לחניון בדקה אקראית. אם מספר המכוניות שיספרו יהיה לפחות 4 יפתח מנהל החניון שער נוסף לחניון.

א. רשמו את השערות מנהל החניון ואת כלל ההחלטה שלו. האם כלל ההכרעה הגיוני?

ב. מהי רמת המובהקות של כלל ההכרעה?

ג. מהי העוצמה של כלל ההחלטה, אם כיום קצב כניסת המכוניות לחניון גדל ל-4 מכוניות בדקה?

14) עודד עובד במפעל שבו מתחילים לעבוד בשעה 8:00. עודד בדרך כלל מאחר לעבודה והמנהל החליט לרשום את שעת הגעתו. המנהל טוען שמשך האיחור של עודד (בדקות), X, הוא משתנה אחיד $U(0,60)$. עודד טוען שהוא לא מגיע באיחור כה גדול, אלא שהתפלגות X היא בעלת התפלגות מעריכית עם תוחלת איחור של 20 דקות.

לבדיקת טענת המנהל (H_0) כנגד טענת עודד (H_1), המבוסס על משך האיחור של חגי ביום אחד. מוצאים שני ככלי הכרעה:

כלל 1: דחה את השערת האפס אם משך האיחור יהיה לפחות 40 דקות.

כלל 2: דחה את השערת האפס אם משך האיחור יהיה לכל היותר 20 דקות.

חשבו את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני לכל אחת מכללי ההכרעה. מי עדיף?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) ראה סרטון וידאו.

2) $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{2}{5}$.

3) $\alpha=0.25$, $\beta=0.5$.

4) א. $\alpha=0.2$, $\beta=0.8$. ב. $\alpha=0.2$, $\beta=0.3$. ג. כלל ב'.

5) א. השערות: H_0 -מטבע תקין. ב. 0.00781250. ג. 0.1678.
H_1 -מטבע לא תקין.

6) א. 0.05. ב. 0.022.

7) א. 0.0228. ב. 0.0918. ג. 0.9082.
ד. i. α,β יקטנו. ד. ii. α לא משתנה, β קטנה.
ד. iii. α קטנה, β גדלה.

8) א. 0.055. ב. 0.383.

9) א. 0.0188. ב. טעות מסוג I. ג. 0.8944.
ד. העוצמה תגדל.

10) א. 0.2981. ב. 0.3974. ג. קטן.

11) א. 0.0113. ב. 0.0495.

12) חוקר א'.

13) א. ראה סרטון וידאו. ב. 0.1428. ג. 0.566.

14) להלן טבלת טעויות, ממנה ניתן להסיק שכלל 2 עדיף.

כלל	α	β
1	$\frac{1}{3}$	0.865
2	$\frac{1}{3}$	0.368

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 14 - הלמה של ניימן פירסון

תוכן העניינים

1. כללי 103

הלמה של ניימן פירסון:

רקע:

שיטה זו עוזרת לנו לבנות מבחנים בעלי עוצמה מקסימאלית עבור α נתונה.
הלמה של ניימן פירסון אומרת שמבחן בעל עוצמה מקסימלית מתקבל כאשר אזור הדחיה שלו כולל את התוצאות שעבורן יחס הנראות הוא הגבוה ביותר.

נגדיר את יחס הנראות: $x_1, x_2, ..., x_n$ - תוצאות הניסוי.

ההשערות: $H_1 : x_i \sim p_1$, $H_0 : x_i \sim p_0$.

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{p_{H1}(x_1, x_2, ..., x_n)}{p_{H0}(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

המשמעות של יחס הנראות היא פי כמה H_1 יותר סבירה מ- H_0 .

עבור משתנים שמתפלגים בדיד:

שלב א: עבור כל תוצאות המדגם האפשריים מחשבים את הסיכויים בהנחת השערת האפס ובהנחת ההשערה האלטרנטיבית.

שלב ב: מחלקים את הסיכויים באופן הבא: $\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{p_{H1}(x_1, x_2, ..., x_n)}{p_{H0}(x_1, x_2, ..., x_n)}$.

ומקבלים את יחס הנראות.

שלב ג: מסדרים את תוצאות הניסוי על פי סדר יורד מהתוצאה שמניבה את ערך יחס הנראות הגבוה ביותר עד התוצאה שמניבה את ערך יחס הנראות הנמוך ביותר.

שלב ד: מכניסים את התוצאה שמניבה את יחס הנראות הגבוה ביותר לאזור הדחיה ובודקים תחת השערת האפס מהי רמת המובהקות המתקבלת . צוברים את התוצאות לפי העיקרון שהוצג עד שרמת המובהקות לא תעלה על ה- α הרצויה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד.
להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל / איכות	מצוין	טוב	בינוני	ירוד
"היוצר"	0.6	0.15	0.25	0
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4

בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית). צרו כלל הכרעה לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא תעלה על 20%.

עבור משתנים שמתפלגים רציף:

שלב א: בונים את פונקציית הצפיפות המשותפת בהנחת השערת האפס ובהנחת ההשערה האלטרנטיבית.

שלב ב: מחלקים את שלב א באופן הבא: $\lambda(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{f_{H1}(x_1,x_2,...,x_n)}{f_{H0}(x_1,x_2,...,x_n)}$.

ומקבלים את פונקציית יחס הנראות.

שלב ג: מזהים את האזור עבורו יחס הנראות הוא הגבוה ביותר.

שלב ד: לפי ההתפלגות של השערת האפס מוצאים את הערכים הקריטיים באזור שנקבע בסעיף הקודם כך שרמת המובהקות תהיה ה- α שנקבעה מראש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון: $X\sim\exp(\lambda)$.

ההשערות הן: $H_1:\lambda=2$, $H_0:\lambda=1$.

מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות של 5% על סמך תצפית בודדת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) איכות של מוצר מסווגת ל-5 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני, ירוד ופסול.
להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל / איכות	מצוין	טוב	בינוני	ירוד	פסול
"היוצר"	0.4	0.2	0.1	0.1	0.2
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4	0

בוחרים משלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע.
על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).

א. חשבו את יחס הנראות עבור כל תוצאות המדגם האפשריים.

ב. צרו כלל הכרעה לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא תעלה על 25%.

ג. מהי עוצמת המבחן שיצרת בסעיף הקודם?

2) מטבע הוטל 3 פעמים ומתבוננים במספר הפעמים שהתקבלה התוצאה ראש.
נסמן ב- p את הסיכוי בהטלה בודדת לקבל את התוצאה ראש.
ההשערות הן: $H_0: p=0.5$, $H_1: p=0.25$.
מצאו מבחן ברמת מובהקות שלא תעלה על 30% עם עוצמה מקסימלית.
מהי העוצמה?

3) בכד א' 7 כדורים לבנים ו-8 שחורים. בכד ב' 8 כדורים לבנים ו-7 שחורים.
אדם בוחר כד וממנו מוציא באקראי 4 כדורים ללא החזרה. הוא מתבוננן במספר הכדורים הלבנים שהוצאו ומודיע לך את המספר המתקבל.
יש לבנות כלל הכרעה על סמך המספר המתקבל שיכריע האם מדובר בהוצאה מכד א' (השערת האפס) או מכד ב' (השערה אלטרנטיבית).

א. בנו כלל הכרעה בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות שלא תעלה על 10%.

ב. מהי רמת המובהקות של כלל ההכרעה שבנית בסעיף הקודם?

ג. מה הסיכוי לטעות מסוג שני של כלל ההכרעה שבנית?

4) בצרור מפתחות 5 מפתחות שרק אחד פותח את הדלת. על סמך מספר הניסיונות לפתיחת הדלת יש להחליט האם הניסיונות נעשו ללא החזרה (השערת האפס) או עם החזרה (השערה אלטרנטיבית) של המפתחות לצרור.
מצאו מבחן לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא עולה על 0.25.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) מספר תאונות הדרכים בכביש 4 מתפלג פואסונית עם קצב של תאונה ביממה.
לאחרונה התעורר החשד שתוחלת מספר התאונות בכביש עלתה לקצב של שתי תאונות ביממה. דגמו 4 ימים אקראיים וקיבלו את מספר התאונות הבאות לימממה: 1, 0, 3, 3.

א. נסחו את הבעיה ובנו מבחן MP עם $\alpha \le 0.1$.

ב. מהי מסקנתך ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. מה הסיכוי להכריע שכיום קצב תאונות הדרכים בכביש מספר 4 עלה לשתי תאונות ביממה שאכן כך הדבר באמת?
פתרו על סמך המבחן של סעיף א'.

6) התפלגות זמן ההמתנה לקופה בסופרמרקט מתפלג מעריכית.
בעל הסופרמרקט טוען שתוחלת זמן ההמתנה היא 5 דקות אך הלקוחות חושדים שהתוחלת גבוהה יותר ושווה ל-10 דקות.

א. רשמו את השערות המחקר וחשבו את פונקציית יחס הנראות על סמך זמן המתנה של לקוח אקראי לקופה.

ב. מה כיוון אזור הדחייה של השערת האפס?

ג. מצאו את אזור הדחייה עבור רמת מובהקות של 5%.

ד. בהמשך לסעיף הקודם, מה הסיכוי להכריע לטובת בעל הסופרמרקט בטעות?

7) יהי X תצפית בודדת מפונקציית הצפיפות הבאה, כאשר θ פרמטר חיובי:

$$f_\theta(x)=\begin{cases}2\theta X+1-\theta & 0\le x\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ההשערות הן: $H_1:\theta=1$, $H_0:\theta=0$.

א. הוכיחו שמבחן MP (עוצמה מקסימלית) עם רמת מובהקות α יהיה: $C=\{X>1-\alpha\}$.

ב. הוכיחו שהעוצמה של המבחן שנמצאה היא: $2\alpha-\alpha^2$.

ג. מצאו את כלל ההכרעה והעוצמה עבור: $\alpha=0.05$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) מחשב חניון "אתרים" רושם את זמן כניסת כל מכונית לחניון. ישנו חשד שעקב תקלה המחשב מבצע את הרישום לכל מכונית שניה. נסמן ב- X את הזמן בדקות בין רישום לרישום.

אם הרישום הוא תקין, ההתפלגות היא מעריכית: $f_0(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}$.

אם הרישום הוא לפי החשד, פונקציית הצפיפות היא: $f_1(x)=\lambda^2\cdot x\cdot e^{-\lambda x}$.

כאשר מדובר באותו פרמטר λ.

א. רשמו את ההשערות.

ב. מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית כדי לבדוק את ההשערות.

ג. פתרו עבור רמת מובהקות של 5% ו- $\lambda=1$.

ד. רשמו את איזו הדחייה עבור שתי תצפיות אקראיות של X.

9) יהי $X_1,...,X_n$ מדגם מקרי מהתפלגות בעלת פונקציית הצפיפות הבאה, כאשר θ פרמטר חיובי: $f_\theta(x)=\begin{cases}\theta e^{1-\theta x} & x\geq\frac{1}{\theta}\\ 0 & otherwise\end{cases}$.

א. מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימאלית לבדיקת ההשערות: $H_0:\theta=1$

כנגד: $H_1:\theta=2$, על סמך תצפית בודדת (ברמת מובהקות 5%).

ב. מהי עוצמת המבחן שמצאת?

ג. כעת נשנה את הערך תחת האלטרנטיבה ל-3 במקום 2.

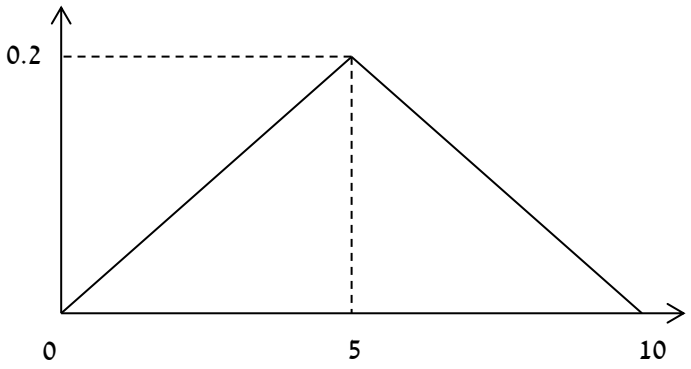
בחרו בתשובה הנכונה ונמקו:

i. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תגדל.

ii. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תקטן.

iii. יש לחשב כדי להחליט.

10) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה שנסמנה ב- $f_1(x)$:



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

כמו כן נתון ש: $f_0(x)=\begin{cases}0.1 & 0\le x\le 10\\ 0 & else\end{cases}$.

א. עבור השערות: $H_0: f=f_0$ כנגד: $H_1: f=f_1$, מצאו את צורת אזור הדחיה של מבחן בעל עצמה מקסימלית, על סמך תצפית בודדת.

ב. בהינתן: $\alpha=0.05$, מצאו את כלל הכרעה מתאים בעל עוצמה מקסימלית.

11) X הוא משתנה רציף המוגדר בין 0 ל-20.

להלן השערות מחקר: $H_1: f(X)=\frac{e^{-\frac{X}{4}}}{4\left(1-e^{-5}\right)}$, $H_0: X\sim U(0,20)$.

יש לבנות מבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות של 10% על סמך הממוצע 100 תצפיות אקראיות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה: ב. ראה סרטון. ג. 0.7.

המפעל	ירוד	בינוני	טוב	מצוין	פסול
H_0	0.1	0.1	0.2	0.4	0.2
H_1	0.4	0.3	0.2	0.1	0
$\gamma(x)$	4	3	1	0.25	0

2) $C=\{X=0\}$, עוצמה $\frac{27}{64}$.

3) א. $C=\{X=4\}$. ב. 0.0256. ג. 0.9487.

4) $C=\{X=1 \ or \ X\geq 6\}$.

5) א. נדחה את השערת האפס אם מספר התאונות הכולל ב-4 הימים יהיה לפחות 8 תאונות. ב. נקבל את השערת האפס (טעות מסוג שני). ג. 0.5471.

6) א. H_0: התוחלת של זמן ההמתנה 5 דקות.

H_1: התוחלת של זמן המתנה 10 דקות.

פונקציית יחס הנראות: $0.5e^{0.1x}$.

ב. $c=\{x\geq k\}$. ג. $c=\{x\geq 14.98\}$. ד. 0.776.

7) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $c=\{x>0.95\}$, 0.0975.

8) א. השערת האפס: שומר הלילה רושם כל מבקר אשר ניכנס לבניין.
ההשערה האלטרנטיבית: שומר הלילה מדלג ברישום על מבקר, רושם אחד כן ואחד לא.

ב. אזור הדחייה יהיה היכן שיחס הנראות הינו גבוה לכן הוא יהיה מאינסוף ועד ערך k מסוים.

ג. נדחה את השערת האפס אם: $x>2.996$. ד. $x_1\cdot x_2>k$.

9) א. נדחה את H_0 עבור: $\frac{1}{2}\leq x\leq 1.0513$. ב. חישוב עוצמת המבחן: 0.668.

ג. i. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תגדל.

10) א. $c=\{|x-5|\leq a\}$. ב. $c=\{4.75\leq x\leq 5.25\}$.

11) כלל ההכרעה הוא נדחה את השערת האפס אם: $\bar{D}\leq 9.26$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 15 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

1. הקדמה 110
2. סוגי טעויות 114

הקדמה:

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.
בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

שלב א: נזהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.
השערת האפס המסומנת ב- H_0.
בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.
השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1.
ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. **אזור דחייה:**
   דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. **אזור קבלה:**
   קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחיה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- α.

שלב ה: בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

שלב ו: להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם.
משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$n=20$, $\overline{X}=3120$, $S=280$.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים.
משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.

2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22.
מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.

4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.
ב. ציון.
ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=72 \\ H_1:\mu>72 \end{matrix}$.

2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
ב. נפח משקה בסמ"ק.
ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=500 \\ H_1:\mu<500 \end{matrix}$.

3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
ג. אחוז הקבלה.
ד. $\begin{matrix} H_0:p=0.25 \\ H_1:p<0.25 \end{matrix}$.

4) א. אזרחים בוגרים במשק.
ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
ג. אחוז האבטלה כיום.
ד. $\begin{matrix} H_0:p=0.08 \\ H_1:p\neq 0.08 \end{matrix}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סוגי טעויות:

רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי .
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.
לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה מסקנת המחקר?

ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?

2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.

א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?

ב. מה סוג הטעות האפשרית?

3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מה השערות המחקר?

ה. מה מסקנת המחקר?

ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

תשובות סופיות:

1) א. $\begin{matrix} H_0:\mu=500 \\ H_1:\mu<500 \end{matrix}$. ב. לא דחינו את H_0. ג. טעות מסוג שני.

2) א. לא ניתן לדעת. ב. טעות מסוג ראשון.

3) א. משפחות כיום. ב. מס' הילדים.

ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום. ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=2.3 \\ H_1:\mu<2.3 \end{matrix}$.

ה. לא לדחות את H_0. ו. טעות מסוג שני.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

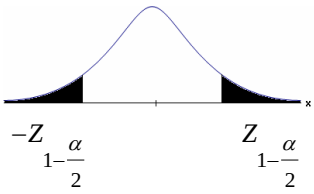
פרק 16 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה 116
2. סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסיה ידועה) 120
3. קביעת גודל מדגם (ששונות האוכלוסיה ידועה) 126
4. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה) 129
5. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה 134
6. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה) 138
7. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) 141

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu\geq\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu\leq\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$Z_{\bar{x}}<-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}}>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}}<-Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}}>Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן: $Z_{\bar{x}}=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

פיתרון:

<u>אוכלוסייה</u>: עגבניות.

<u>המשתנה</u>: X = יבול העגבניות בטון לעונה.

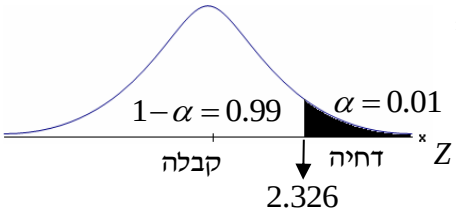
<u>הפרמטר</u>: μ = תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

<u>השערות</u>: $H_0 : \mu = 10$
$H_1 : \mu > 10$

<u>תנאים</u>:

1. $X \sim N$.
2. $\sigma = 2.5$.

<u>כלל הכרעה</u>:



נדחה את H_0 אם $Z_{\bar{x}} > 2.326$

<u>תוצאות</u>: $n = 4$, $\bar{x} = 12.5$

<u>סטטיסטי המבחן</u>: $Z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

<u>נציב</u>: $Z_{\bar{X}} = \dfrac{1.25 - 10}{\dfrac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

<u>מסקנה</u>:

לא נדחה H_0 (נקבל H_0).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?

3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ.
מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג.
יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.

5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ.
במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ.
קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט.
הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.

6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון?
בחרו בתשובה הנכונה.

א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.

ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.

ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס.
אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

א. השערת האפס הייתה נדחית.
ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות: $H_0:\mu=\mu_0$ כנגד $H_1:\mu>\mu_0$,
עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.
שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

א. אם חוקר א' החליט לדחות את H_0, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את H_0, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

תשובות סופיות:

1) נקבל H_0, ברי"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.
2) א. נדחה H_0, ברי"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.
ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של H_0 והמסקנה לא תשתנה.
3) נדחה H_0, ברי"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.
4) נדחה H_0, ברי"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.
5) נקבל H_0, ברי"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.
6) א'.
7) ג'.
8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

(לדחות H_0 | H_0 נכונה) $= P_{H_0}$ (לדחות את H_0) $= \alpha$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

(לקבל H_0 | H_1 נכונה) $= P_{H_1}$ (לקבל את H_0) $= \beta$.

רמת בטחון:

(לקבל H_0 | H_0 נכונה) $= P_{H_0}$ (לקבל את H_0) $= P(H_0) = (\alpha - 1)$.

עוצמה:

(לדחות H_0 | H_1 נכונה) $= P_{H_1}$ (לדחות את H_0) $= P(H_0) = \pi = (\beta - 1)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
חישוב β:	$P_{\mu_1}\left(\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{X}<\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$P_{\mu_1}\left(\bar{X}>\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$P_{\mu_1}\left(\bar{X}<\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

התפלגות ממוצע המדגם: $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

התקנון: $Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

דוגמה:

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

פתרון:

א. אוכלוסייה: משלמי חשבון טלפון סלולאר כיום.

המשתנה: X = חשבון הטלפון החודשי בשקלים.

הפרמטר: μ.

השערות: $\begin{matrix} H_0: \mu = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{matrix}$.

תנאים:

1. $\mu = 200$.

2. $n = 36$.

$K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\alpha = 0.05$$
$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

נציב: שקלים $K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07$.

כלל ההכרעה: דחה את H_0 אם שקלים $\bar{X} < 178.07$.

ב. ברמת מובהקות של 5% נכריע שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

ג. השערות: $\begin{matrix} H_0: \mu_0 = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{matrix}$.

כלל ההכרעה: נדחה את H_0 אם $\bar{X} < 178.07$.

$H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right)$.

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1}\left(\begin{matrix}\text{לקבל את} \\ H_0\end{matrix}\right) = P_{H_1}\left(\bar{X} > 178.07\right) = 1 - \phi(136) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת α מגדילה את β.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נתון ש: $X \sim N\left(\mu, \sigma^2 = 1\right)$.

להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר μ: $H_1: \mu = 7$, $H_0: \mu = 5$.

מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.

א. עבור אילו ערכים של X שידגם נדחית השערת H_0?

ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ג. אם במדגם התקבל ש-$X = 6.9$ מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

2) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות.
במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 5%.

ב. בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

3) להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$n = 225$, $\sigma = 30$, $H_1: \mu \neq 200$, $H_0: \mu = 200$.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.

ב. בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?

ג. הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

4) מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומודדים את קוטרם, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.

א. רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.

ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?

ג. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.

ד. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) להלן השערות של מחקר: $H_1:\mu=58$, $H_0:\mu=50$.
מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.

א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%.
מהי רמת המובהקות?

ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?

i. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.

ii. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלהלן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:

6) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.

ב. העוצמה של המבחן גדלה.

ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.

ד. תשובות א' ו-ב' נכונות.

7) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

8) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

	α	$1-\beta$
א.	גדולה	גדולה
ב.	גדולה	קטנה
ג.	קטנה	גדולה
ד.	קטנה	קטנה

9) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:

א. הן α, והן $1-\beta$, יקטנו.

ב. α יישאר ללא שינוי ואילו $1-\beta$ יגדל.

ג. α יגדל ואילו $1-\beta$ יקטן.

ד. הן α והן $1-\beta$ יגדלו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

10) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר.
מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

א. טעות מסוג ראשון.

ב. טעות מסוג שני.

ג. טעות מסוג שלישי.

ד. אין טעות במסקנתו.

תשובות סופיות:

1) א. מעל 6.645. ב.0.3594.

ג. דחינו את H_0, תתכן טעות מסוג ראשון.

2) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 2.24$. ב. נדחה H_0. ג. 1.

3) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} > 203.29$ או $\bar{X} < 196.71$. ב. 0.8051. ג. תקטן.

4) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 48.9$. ב. 0.0885. ג. תקטן. ד. תקטן.

5) א. 0.0033. ב. i. רמת המובהקות הייתה קטנה.

ב. ii. רמת המובהקות הייתה גדלה.

6) ד'.

7) ג'.

8) ג'.

9) א'.

10) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

קביעת גודל מדגם (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

השערות המחקר הן: $H_1:\mu=\mu_1$, $H_0:\mu=\mu_0$.

סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה σ ומעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β.

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי: $n\geq\left(\frac{\left(Z_{1-\alpha}+Z_{1-\beta}\right)\times\sigma}{\mu_0-\mu_1}\right)^2$.

דוגמה:

משרד החינוך מפעיל בגן חובה שיטת חינוך שפותחה בשנת 1995. לפי שיטת חינוך זו תוחלת הציון במבחן אוצר מילים לגיל הרך הוא 70. אנשי חינוך החליטו לבדוק שיטת חינוך שפותחה בהולנד הנותנת שם תוחלת ציון אוצר מילים של 80.
נניח שציוני מבחן זה מתפלגים נורמאלית עם $\sigma=17$.
כדי לבדוק האם גם בישראל הפעלת שיטת החינוך ההולנדית תעבוד בגנים, רוצים לבנות מחקר ברמת מובהקות של 5%. כמו כן, מעוניינים שאם בהפעלת השיטה ההולנדית תוחלת הציונים תעלה לכדי 80, המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90%.
כמה ילדי גן חובה דרושים למחקר?

פתרון:

<u>האוכלוסייה</u>: ילדי גן חובה.

<u>המשתנה</u>: X = ציון במבחן אוצר מילים.

<u>הפרמטר</u>: μ.

<u>השערות</u>: $\begin{matrix}H_0:\mu=70\\H_1:\mu=80\end{matrix}$.

$X\sim N\left(\mu,\sigma^2=17^2\right)$.

אם בהפעלת השיטה ההולנדית התוחלת תעלה ל80, נגלה זאת בסיכוי 90%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$$n \geq \left(\frac{\left(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta} \right) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

$$\alpha = 0.05$$

$$1-\beta = 0.9$$

$$\mu_0 = 70$$

$$\mu_1 = 80$$

$$\sigma = 17$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$
$$Z_{1-\beta} = Z_{0.9} = 1.282$$

נציב: $n \geq \left(\frac{(1.645+1.282) \times 17}{70-80} \right)^2 = 24.76$

לכן, $n_{\min} = 25$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במבחן אינטליגנציה הציונים מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 8 וממוצע 100. פסיכולוג מעוניין לבדוק את הטענה שבאוכלוסיות במצב סוציו אקונומי נמוך תוחלת הציונים היא 95.
אם מעוניינים לגלות את הטענה בהסתברות של לפחות 99% כשרמת המובהקות היא 5% מהו גודל המדגם הדרוש?

2) משרד התקשורת טוענים שאדם מדבר בממוצע 180 דקות בחודש בטלפון הסלולרי. חברות הטלפון הסלולרי טוענות שאינפורמציה זו אינה נכונה ואדם מדבר בממוצע פחות: כ-160 דקות. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של זמן השיחה החודשי ידוע ושווה ל-60 דקות. כמה אנשים יש לדגום כך שאם טענת משרד התקשורת נכונה נדחה אותה בסיכוי של 5% (איך קוראים להסתברות זאת?) כמו כן אם טענת חברות הטלפון הסלולרית נכונה המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90% (איך קוראים להסתברות זאת?).

3) השערות המחקר הן: $H_1:\mu=\mu_1$, $H_0:\mu=\mu_0$.
כמו כן נתון שהמשתנה מתפלג נורמלית עם סטיית התקן ידועה σ מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β. הוכיחו שגודל המדגם הרצוי לכך יהיה: $n\geq\left(\frac{\left(Z_{1-\alpha}+Z_{1-\beta}\right)\times\sigma}{\mu_0-\mu_1}\right)^2$.

תשובות סופיות:

1) 41.

2) 78.

3) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v.

את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$, דוחים את H_0.

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבה:**	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול		
p-value	אם $\bar{x}>\mu_0 \Rightarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X}\ge\bar{x}\right)$ אם $\bar{x}<\mu_0 \Rightarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X}\le\bar{x}\right)$	$P_{H_0}(\bar{X}\le\bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X}\ge\bar{x})$

כאשר בהנחת השערת האפס: $\bar{X}\sim N\left(\mu_0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, $Z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

פתרון:

א. <u>אוכלוסייה</u>: המתגייסים לצבא כיום.

<u>משתנה</u>: X = משקל בק"ג.

<u>פרמטר</u>: μ.

<u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0:\mu=65 \\ H_1:\mu>65 \end{matrix}$.

<u>תנאים</u>:

1. $X\sim N$.
2. $\sigma=12$.

<u>תוצאות מדגם</u>:

$n=16$

$\bar{X}=71$

$$P_V=P_{H_0}\left(\begin{matrix}\text{לתוצאות}\\ \text{המדגם}\\ \text{וקיצוני}\end{matrix}\right)=P_{H_0}\left(\bar{X}\geq 71\right)=1-\phi\left(2\right)=1-0.9772=0.0228$$

$$Z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{71-65}{\frac{12}{\sqrt{16}}}=2$$

$\alpha_{\min}=0.0228$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן השערות של מחקר: $H_0:\mu=70$, $H_1:\mu>70$.
המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20.
במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $\bar{x}=74$, $n=100$.
מהי מובהקות התוצאה?

2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?

3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם.
חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה.
לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?

ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?

ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמאלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?

ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?

ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.

5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) בבדיקת השערות התקבל שה- $p-value=0.02$.
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?
בחרו בתשובה הנכונה.

א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.

ב. ידחה את השערת האפס מקרה.

ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.

ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.

ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.

ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.

ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל: $p\ value=0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):

א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .

ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .

ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .

ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) 0.0228.

2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.

3) א. $\begin{matrix} H_0:\mu=100 \\ H_1:\mu<100 \end{matrix}$. ב. 0.1056. ג. 0.1056.

ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.

4) א. 0.0006. ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיול.

5) נכון.

6) א'.

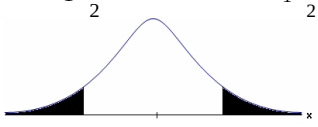
7) א'.

8) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

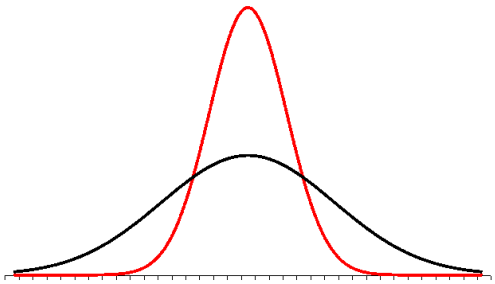
השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	1. σ אינה ידועה 2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$t_{\bar{x}}>t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{x}}<-t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}}<-t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  $-t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}}>t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  $t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0
חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X}>\mu_0+t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}<\mu_0-t^{n-1}_{1-\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}>\mu_0+t^{n-1}_{1-\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$

סטטיסטי המבחן: $t_{\bar{x}}=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$.

$S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i-n\bar{X}^2}{n-1}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

התפלגות T:



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס״מ.

כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס״מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 125, 80, 100, 95, 90 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע.
במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$
$$\bar{x} = 3120$$
$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$
$$\sum_{i=1}^{10} \left(X_i - \bar{X} \right)^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.
בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80 .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה.
כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.
רוני השתמשה בטבלה של התפלגות t.
מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.

ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.

ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.

ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

6) נתון ש: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $\begin{matrix} H_0:\mu=\mu_0 \\ H_1:\mu<\mu_0 \end{matrix}$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
בחר בתשובה הנכונה:

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

תשובות סופיות:

1) נדחה H_0.

2) נדחה H_0.

3) נקבל H_0.

4) נקבל H_0.

5) ב'.

6) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$ דוחים את H_0.

מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \ne \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
תנאים:	1. σ אינה ידועה או 2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$		
p-value	אם $\bar{x} > \mu_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$ אם $\bar{x} < \mu_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$	$P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$	$P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 27, 32, 30, 40, 34.
הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

<u>אוכלוסייה</u>: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

<u>משתנה</u>: X = זמן נסיעה בדקות.

<u>תנאים</u>: $X \sim N$.

<u>פרמטר</u>: μ.

א. <u>השערות</u>:
$$\begin{matrix} H_0: \mu = 40 \\ H_1: \mu < 40 \end{matrix}.$$

ב. <u>תוצאות המדגם</u>:

$$n=5\ ,\ \bar{X}\ \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34+40+...}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^{\,2} - n\cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2+40^2-...-5\cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6-40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = \left(\bar{X} \le 32.6\right) = P\left(t \le -3.39\right)$$

$$d.f = 5-1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$, לכן דוחים את H_0.

<u>מסקנה</u>: ברי"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים:
997, 996, 1005, 1008, 1024.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

2) חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות.
מהי ה- α המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

3) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:
$\sum(x_i-\bar{x})^2=2832$, $\bar{x}=176.2$.
מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק.
מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

תשובות סופיות:

1) א. $H_0:\mu=1000$, $H_1:\mu\neq1000$. ב. $20\%\le P_v\le 50\%$.

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

2) 10%.

3) 1.01, נקבל את H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע):

רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות α על μ :

$H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu\neq\mu_0$.

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- μ :

אם μ_0 נופל ברווח ← נקבל את H_0 .

אם μ_0 לא נופל ברווח ← נדחה את H_0 .

דוגמה:

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו:

$H_0:\mu=80$, $H_1:\mu\neq80$, $\alpha=5\%$.

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל: $79<\mu<84$.

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

פתרון (פתרון מלא בהקלטה):

רווח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רווח הסמך יגדל ויכיל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% נקבל H_0 .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות: $H_1:\mu\neq 90$, $H_0:\mu=90$.
החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: $(87,97)$.
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.

2) חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.

א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.

ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.

3) יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצלין היא 200 מ"ג לקפסולה.משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצלין בקפסולה מתפלגת נורמלית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצלין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

תשובות סופיות:

1) נקבל השערת.

2) א. $112.87\leq\mu\leq 118.13$.

ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.

3) א. $191.8\leq\mu\leq 200.2$. ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

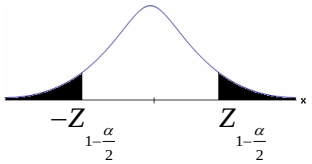
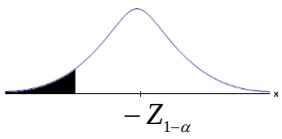
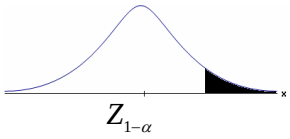
פרק 17 - בדיקת השערות על פרופורציה

תוכן העניינים

1. התהליך 143
2. סיכוי לטעויות ועוצמה 146
3. קביעת גודל מדגם 150
4. מובהקות התוצאה - אלפא מינימלית 152

התהליך:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \;\&\; n(1-p_0) \geq 5$		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  H_0 את דוחים-	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$  H_0 את דוחים-	$Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$  H_0 את דוחים-

סטטיסטי המבחן: $Z_{\hat{p}} = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל ההכרעה – אזור הדחייה של H_0:		
$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$ $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22.
ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?

2) במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת.
לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק?
בדקו ברמת מובהקות של 10%.

3) הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ.
האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?

4) קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.

א. רשמו את ההשערות.

ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.

ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?

5) חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.

א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.

6) שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות: $H_0: p = p_0$, $H_1: p > p_0$.
חוקר א' השתמש ברמת מובהקות α_1 וחוקר ב' ברמת מובהקות α_2 החוקר הראשון דחה את H_0 ואילו החוקר השני קיבל את H_0.
שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם. בחר בתשובה הנכונה:

א. $\alpha_1 = \alpha_2$.

ב. $\alpha_1 > \alpha_2$.

ג. $\alpha_1 < \alpha_2$.

ד. המצב המתואר לא אפשרי.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) נדחה H_0.

2) נדחה H_0.

3) נקבל H_0.

4) א. $\begin{matrix} H_0 : p = 0.2 \\ H_1 : p \neq 0.2 \end{matrix}$. ב. נקבל H_0. ג. המסקנה לא תשתנה.

5) א. נדחה H_0. ב. המסקנה לא תשתנה.

6) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סיכוי לטעויות ועוצמה:

רקע:

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):
(לדחות H_0) $= P_{H_0}$ (H_0 נכונה $\mid$ לדחות את H_0) $= P(H_0$ לדחות את $\mid H_0$ נכונה$) = \alpha$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:
(לקבל H_0) $= P_{H_1}$ (H_1 נכונה $\mid$ לקבל את H_0) $= P(H_0$ לקבל את $\mid H_0$ נכונה$) = \beta$.

רמת בטחון:
(לקבל H_0) $= P_{H_0}$ (H_0 נכונה $\mid$ לקבל את H_0) $= P(H_0$ לקבל את $\mid H_0$ נכונה$) = (1-\alpha)$.

עוצמה:
(לדחות H_0) $= P_{H_1}$ (H_1 נכונה $\mid$ לדחות את H_0) $= P(H_0$ לדחות את $\mid H_0$ נכונה$) = \pi = (1-\beta)$.

	הכרעה		
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \;\&\; n(1-p_0) \geq 5$		
כלל ההכרעה: **אזור הדחייה של H_0:**	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ או $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חישוב β :
$P_{H_1}\left(\hat{p} < p_0 + Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$
$P_{H_1}\left(p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < \hat{p} < p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$
$P_{H_1}\left(\hat{p} > p_0 - Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$

כאשר: $\hat{P} \sim N\left(p\ , \frac{p(1-p)}{n}\right)$.

והתקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

רופאי שיניים טוענים שיותר ממחצית האוכלוסייה הבוגרת בארץ אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע, כנדרש. כדי לבדוק טענה זו, נערך סקר בקרב 150 אנשים בוגרים.

א. רשמו את ההשערות וכלל הכרעה ברמת מובהקות של 10%.

ב. מהי עוצמת המבחן אם מסתבר ש 60% מהאוכלוסייה אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) משרד הבריאות פרסם ש-10% מתושבי המדינה סובלים ממחלת האסטמה. מחקר דורש לבדוק האם בחיפה, בגלל זיהום האוויר, שיעור הסובלים מאסטמה גבוה יותר. לצורך המחקר נבדקו 260 מתושבי חיפה.

א. רשמו את השערות המחקר, וצרו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקתן.

ב. מהי עצמת המבחן של סעיף א' בהנחה ובחיפה 16% מהתושבים סובלים מאסטמה?

ג. כיצד תשנה התשובה לסעיף ב' אם מסתבר שבחיפה 18% סובלים מאסטמה?

ד. בהמשך לסעיף א' האם נכון לומר שבהסתברות של 5% ההשערה שבחיפה 10% מהתושבים סובלים מאסטמה אינה נכונה?

2) אחוז הסובלים מתופעות הלוואי מתרופה מסוימת הוא 15%. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שאמורה לצמצם את אחוז הסובלים מתופעות לוואי. לצורך בדיקת הטענה הוחלט לבצע מחקר שיכלול 120 חולים שיקבלו את התרופה הנבדקת.
נניח שהתרופה נבדקת אכן מורידה את פרופורציות הסובלים מתופעות הלוואי ל-10%, מהי עצמת המבחן עבור רמת מובהקות של 5%?

3) בעיר מסוימת היו 20% אקדמאים. בעקבות פתיחת מכללה בעיר לפני כמה שנים מעוניינים לבדוק האם אחוז האקדמאים גדל. מעוניינים שהמחקר יכלול 200 אנשים והוא יהיה ברמת מובהקות של 5%.

א. חשבו את הסיכוי לבצע טעות מסוג שני בהנחה והיום יש 28% אקדמאים.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?

4) מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?

5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן (בחרו בתשובה הנכונה):

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

6) קבעו אם הטענה הבאה נכונה: בבדיקת השערות לא ניתן לבצע בו זמנית טעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $\begin{matrix} H_0 : p = 0.1 \\ H_1 : p > 0.1 \end{matrix}$. ב. 0.9015 ג. תגדל. ד. טענה לא נכונה.

2) 0.4404.

3) א. 0.1446 ב. תקטן.

4) חוקר א'.

5) ג'.

6) נכונה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

קביעת גודל מדגם:

רקע:

השערות המחקר הן: $H_0 : p = p_0$, $H_1 : p = p_1$

מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β.

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי: $n \geq \left(\frac{Z_{1-\alpha}\sqrt{p_0 q_0} + Z_{1-\beta}\sqrt{p_1 q_1}}{p_0 - p_1} \right)^2$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

רוצים לבדוק האם אחוז האנשים השוהים בשמש ללא הגנה ירד בעקבות הפרסומת על נזקי השמש.
בעבר 60% מהאוכלוסייה שהתה בשמש ללא הגנה. מה גודל המדגם המינימלי שיש לקחת כדי לבדוק שהאחוז הנ"ל ירד ל-48% אם מעוניינים שהסיכוי לטעות מסוג ראשון יהיה 5% והסיכוי לטעות מסוג שני יהיה 1%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) משרד התמ"ת פרסם שאחוז האבטלה במשק היום עומד על 8%.
לעומתו, משרד הפנים טוען שחלה עלייה בשיעור האבטלה עד לכדי 11%.
כדי לבדוק מי מבניהם צודק, מה צריך להיות גודל המדגם שיענה על שני התנאים הבאים:

א. אם משרד התמ"ת צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 10%.

ב. אם משרד הפנים צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 4%.

2) מפעיל קזינו מפרסם שהסיכוי לזכות במכונת מזל הינו 0.42.
אדם טוען שהסיכויים לזכות במשחק נמוכים יותר.
כמה פעמים יש לשחק את המשחק כדי שאם טענת מפעיל הקזינו נכונה נקבל את טענת האדם בסיכוי של 1% ואם במציאות הסיכוי לזכות במכונה הוא 0.3 נקבל את מפעיל הקזינו בסיכוי של 8%?

תשובות סופיות:

1) 891.

2) 224.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מובהקות התוצאה – אלפא מינימלית:

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:
באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v.
את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.
המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

אם $p_v \le \alpha$ דוחים את H_0.

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.
לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:
לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \ne p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$
תנאים:	$np_0 \ge 5 \& n(1-p_0) \ge 5$		
p-value	אם $\hat{p} > p_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \ge \hat{p})$ אם $\hat{p} < p_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \le \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{P} \le \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{P} \ge \hat{p})$

כאשר בהנחת השערת האפס: $\hat{P} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$.

התקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה):

ישנה טענה שיש הבדל בין אחוז הבנים ואחוז הבנות הפונים ללמוד להנדסאי מחשבים. לשם כך נלקח מדגם מקרי של 200 תלמידים הלומדים מחשבים והתברר כי 112 מהם בנים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?

2) נהוג לחשוב ש-60% מהילדים בגיל שלוש קמים מהמיטה במהלך הלילה לפחות פעם אחת. ישנה טענה שללא שנת צהריים פחות מ-60% מהילדים בגיל זה יקומו לפחות פעם אחת במהלך הלילה. נדגמו 80 ילדים בגיל 3 אשר אינם ישנים בצהריים מתוכם התקבל ש-41 קמו במהלך הלילה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה תתקבל הטענה במחקר?

ב. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה לא תתקבל טענת המחקר?

ג. עבור אילו רמות מובהקות נקבל את טענת המחקר?

ד. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 6%?

3) במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן מטילים אותו 80 פעמים. התקבל ש-60 מההטלות הראו עץ. רשמו את השערות המחקר, חשבו את מובהקות התוצאה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.

4) בבדיקת השערות על פרופורציה התקבל שה- $p\text{-}value = 0.02$.
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 5% :
(בחרו בתשובה הנכונה)

א. יקבל את השערת האפס

ב. ידחה את השערת האפס.

ג. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

5) קבעו אם הטענה הבאה נכונה :
"במבחן לבדיקת השערות חד-צדדי התקבל ערך $p-value$ של 3%,
לכן אם היינו מבצעים מבחן דו-צדדי (כאשר יתר הנתונים ללא שינוי),
היינו מקבלים ערך $p-value$ של 6%".

6) במפעל 10% מהעובדים נפגעים לפחות פעם אחת בשנה מתאונות עבודה.
לאור זאת, המפעל החליט לצאת בתוכנית לצמצום שיעור הנפגעים. תכנית זו נוסתה על 100 עובדים. מתוכם 12 נפגעו בתאונות עבודה במשך השנה.
מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוחלט שהתכנית יעילה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.0455.

ב. ברמת מובהקות של 1% : לא דוחים את H_0.

ברמת מובהקות של 5% : נדחה את H_0.

2) א. 0.0548. ב.0.0548. ג. מעל 0.0548.

ד. נכריע לטובת טענת המחקר.

3) $p_v = 0$, נדחה את H_0.

4) ב'.

5) הטענה נכונה.

6) 0.7486.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 18 - בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

תוכן העניינים

1. כללי 156

בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 \neq 0$	$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 < 0$	$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 > 0$
תנאים:	1.מדגמים בלתי תלויים	2. מדגמים גדולים	
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של:	$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ H_0 דוחים את - ■	$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ H_0 דוחים את - ■	$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ H_0 דוחים את - ■

סטטיסטי המבחן: $$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} \underset{H_0}{=} \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

כאשר הפרופורציה המשוקללת: $$\hat{p} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0	
$\hat{p}_1-\hat{p}_2>0+Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_2}}$ או $\hat{p}_1-\hat{p}_2<0-Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_2}}$	$\hat{p}_1-\hat{p}_2<0-Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_2}}$
$\hat{p}_1-\hat{p}_2>0+Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_2}}$	

התפלגות של $\hat{p}_1-\hat{p}_2$:

$$\hat{p}_1-\hat{p}_2\sim N(p_1-p_2,\frac{p_1\cdot q_1}{n_1}+\frac{p_2\cdot q_2}{n_2})$$

תקנון:

$$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}}$$

$$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\underset{H_0}{=}\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

נדגמו 80 סטודנטים שנבחנו במיקרו-כלכלה. מתוכם 60 עברו את הבחינה.
נדגמו 100 סטודנטים שנבחנו בסטטיסטיקה א'. מתוכם 82 עברו את הבחינה.
האם שיעור העוברים את הבחינה בסטטיסטיקה גבוה מאשר מהבחינה במיקרו כלכלה? בדקו ברמת מבוהקות של 10%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) במדגם של 200 גברים, 8% היו מובטלים. במדגם של 180 נשים, 10% מהן היו מובטלות.
האם קיים הבדל מובהק בין פרופורציית המובטלים לפרופורציית המובטלות?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.

2) אחוז בעלי רישיון נהיגה בקרב האוכלוסייה הבוגרת הינו 60%. במדגם של 300 בוגרים מתל אביב 204 היו בעלי רישיון נהיגה.
במדגם של 220 בוגרים מירושלים 100 היו בעלי רישיון נהיגה.

א. ברמת מובהקות של 5% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון בתל אביב גבוה מהאחוז הארצי?

ב. ברמת מובהקות של 10% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון נהיגה בתל אביב גבוה מאחוז בעלי רישיון הנהיגה בירושלים?

3) נדגמו 500 בוגרים מתוכם 200 גברים והיתר נשים. במדגם התקבל: מתוך הגברים ל-48% תעודת בגרות. מתוך הנשים ל-58% תעודת בגרות. מטרת המחקר היא לבדוק האם שיעור הזכאיות לבגרות גבוה משיעור הזכאים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?

4) במדגם שנערך על 100 פרות מחוות בדרום הארץ התקבל כי 20 פרות נושאות וירוס מסוים. במדגם שנערך על 200 פרות מחוות בצפון הארץ התקבל כי 10 מתוכן נושאות וירוס גם כן.

א. בנו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקת הטענה כי הוויורוס תקף את פרות הדרום באופן משמעותי יותר מאשר את הפרות בצפון הארץ.

ב. מהי המסקנה לבדיקת הטענה של סעיף א ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. מהי עוצמת המבחן אם שיעור הפרות בדרום עם הוויורוס גבוה ב-10% משיעור הפרות בצפון עם הוויורוס?

ד. כיצד העוצמה תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) לא נדחה את H_0.

2) א. נדחה H_0. ב. נדחה H_0.

3) א. 0.0139 ב. נדחה H_0.

4) א. ראה סרטון. ב. נדחה H_0. ג. 0.8238

ד. תגדל.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

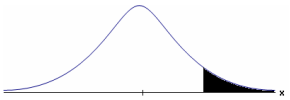
פרק 19 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסייה ידועות 160
2. כששושונויות האוכלוסייה אינן ידועות והמדגמים גדולים 164
3. כששוניויות האוכלוסיה לא ידועות ומניחים שהן שוות 167

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונויות של האוכלוסייה ידועות – רקע

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2\neq c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2<c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2>c$
תנאים:	מדגמים בלתי תלויים ידועות σ_1,σ_2 $X_1,X_2 \sim N$ או מדגמים מספיק גדולים		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ H_0 דוחים את ■	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ H_0 דוחים את ■	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ H_0 דוחים את ■

סטטיסטי המבחן: $$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ **או** $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	

התפלגות הפרש הממוצעים: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

התקנון: $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשנת 2004 הפער בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000₪ לטובת הגברים.
מעוניינים לבדוק האם כיום הצטמצם הפער בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע.
נדגמו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072₪. נדגמו 80 עובדות, שכרן הממוצע היה 7809₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ושוות ל-2000₪ באוכלוסיית הנשים ו-3000₪ באוכלוסיית הגברים.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלה נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה.
במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות.
במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות.
לצורך פתרון הניחו שבכל אזור, סטיית התקן היא שעה 1 ביום.
בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.

2) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות.
במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508.
במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.

3) במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים.

א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקה האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית.

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?

4) במחקר מקיף שנעשה באירופה נקבע שגברים גבוהים מנשים ב-8 ס״מ בממוצע. מחקר ישראלי מתעניין לבדוק האם בישראל הפער גדול יותר. לצורך המחקר נדגמו 40 גברים ו 40 נשים באקראי. כמו כן, נניח שסטיות התקן של הגברים והנשים ידועות ושוות ל-6 ס״מ אצל הנשים ו-12 ס״מ אצל הגברים.

א. מהן השערות המחקר ומהו כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 10%?

ב. אם בישראל הפער בין גברים לנשים מבחינת הגובה הממוצע הוא 11 ס״מ, מה ההסתברות שהמחקר לא יגלה זאת? איך קוראים להסתברות הזאת?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) נדחה H_0.

2) לא נדחה את H_0.

3) א. 0 ב. נדחה את H_0.

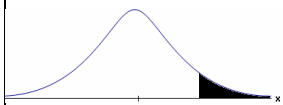
4) א. נדחה את H_0, אם במדגם הגברים יהיו גבוהים בממוצע מהנשים ביותרמ-10.72 ס״מ.

ב. 0.6331

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונויות של האוכלוסייה לא ידועות והמדגמים גדולים – רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2\neq c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2<c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2>c$
תנאים:	1. מדגמים בלתי תלויים 2. σ_1,σ_2 לא ידועות 3. מדגמים מספיק גדולים		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}<-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ■ -דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}<-Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ ■ -דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}>Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ ■ -דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן: $$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-c}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$ **או** $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

נרצה לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. במדגם של 46 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543 וסטיית תקן 123. במדגם של 50 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508 וסטיית תקן 178. מה המסקנה ברמת מובהקות 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים.
במדגם של 35 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות וסטיית תקן 4, ובמדגם של 45 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25 וסטיית תקן 6 .
האם על סמך תוצאות המדגם יש הבדל בין סוגי הברגים מבחינת רמת הקשיות שלהם? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

2) כדי לבדוק האם נהגים השותים תחת השפעת אלכוהול נוהגים מהר יותר מאלו שאינם שותים בוצע מדגם שבו בדקו את המהירות המקסימאלית של כל נהג בקמ"ש. להלן התוצאות:

	גדול מדגם	$\bar{X}$	S
נהגים השותים אלכוהול	70	80	20
נהגים שאינם שותים אלכוהול	100	60	15

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקת של 5%?

תשובות סופיות

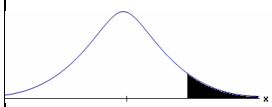
1) נדחה את H_0.

2) א. 0 ב. נדחה את H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2\neq c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2<c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2>c$
תנאים:	1. מדגמים בלתי תלויים 2. σ_1, σ_2 לא ידועות אך שוות 3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית		
אזור הדחייה של H_0:	$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  H_0 דוחים את ■	$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\alpha}$  H_0 דוחים את ■	$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\alpha}$  H_0 דוחים את ■

סטטיסטי המבחן: $$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-c}{\sqrt{\frac{S_p{}^2}{n_1}+\frac{S_p{}^2}{n_2}}}$$

השונות המשוקללת: $$S_p{}^2=\frac{(n_1-1)S_1{}^2+(n_2-1)S_2{}^2}{n_1+n_2-2}$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1-\bar{x}_2 > c+t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$ **או** $\bar{x}_1-\bar{x}_2 < c-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1-\bar{x}_2 < c-t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1-\bar{x}_2 > c+t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$	

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשתמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2=200$.

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2=260$.

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

2012	120	94	90	130	95	112	120
2013	100	82	91	105	74	69	

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

3) להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

הקבוצה	60W	100W
$\bar{x}$	1007	956
S	80	72
n	13	15

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.

ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W 60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?

ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W 60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) נדחה את H_0.

2) הנחות:

1. סטיות התקן שוות.
2. המשתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את H_0.

3) א. נדחה את H_0. ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.

ג. לא נדחה את H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

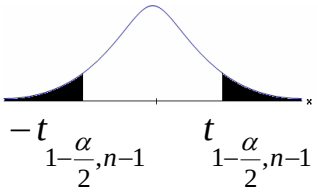
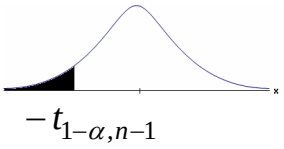
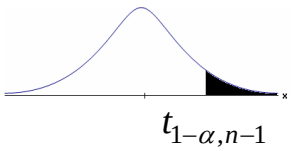
פרק 20 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים 171

בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D \neq C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D < C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D > C$
תנאים:	1. σ_D אינה ידועה 2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  ■ - דוחים את H_0
חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ או $\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$

סטטיסטי המבחן: $t_{\bar{D}} = \dfrac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$, $S_D^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחיריה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל".
לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות.
להלן המחירים:

המוצר / רשת	מגה בעיר	שופרסל
שמפו	17	18
ג'ל כביסה	48	57
עוגת גבינה	35	35
לחם	12	10
קפה נמס	49	47
בקבוק יין	113	142
גבינה בולגרית	20	26

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

חברה/ מדינה	ארה"ב	קנדה	הולנד	פולין	מצרים	סין	יפן
X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
Y	1.4	2	1.9	3.1	3.2	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים בממוצע?

2) מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	506	470	420	640	670	390	500	590
אחרי	570	540	430	610	680	510	520	580

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

3) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

סטטיסטיקה א'	74	68	90	75	82
סטטיסטיקה ב'	80	84	87	76	100

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ 5 נקודות?

ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ- 5 נקודות?

ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

4) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	4.5	9.6	0.7	2.5
משקל במכשיר 2	3.5	6.9	1.7	0.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0.

2) לא נדחה H_0.

3) א. $0.25 \le pv \le 0.5$ ב. 0.5 ג. לא נדחה H_0.

4) ד'.

5) ד'.

6) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 21 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות

תוכן העניינים

1. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות 175

הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות

רקע

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות α על $\mu_1-\mu_2$:

$H_0:\mu_1-\mu_2=C,\qquad H_1:\mu_1-\mu_2\neq C$.

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- $\mu_1-\mu_2$:

אם C נופל ברווח ← נקבל את H_0 .

אם C לא נופל ברווח ← נדחה את H_0 .

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג.

להלן השערותיו : $\alpha=5\%$ $\qquad H_1:\mu_D\neq 80,\qquad H_0:\mu_D=80,$.

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%, $78<\mu_D<83$.

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.
להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב':

סמסטר א	סמסטר ב
74	80
68	84
90	87
75	76
82	100

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א'. האם יש אמת בפרסום?

2) הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה X ואצל מרצה Y. נבחרו באקראי 6 סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה X ו-3 סטודנטים של מרצה Y, עבורם התקבלו הציונים הבאים:

מרצה X	82	90	68
מרצה Y	68	81	64

א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.

ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

שאלות רב-ברירה:

3) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.
הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$.
אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות:
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ברמת מובהקות 0.05, מסקנתו תהיה:

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05 .

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו : $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$, רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
לכן מסקנת המחקר היא :

א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.

ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.

ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D.

תשובות סופיות

1) א. $-3.8 \le \mu_D \le 19$ ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

2) א. $-8.5 \le \mu_X - \mu_Y \le 26.5$ ב. נכריע שאין הבדל.

3) ג.

4) א.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

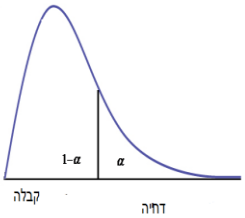
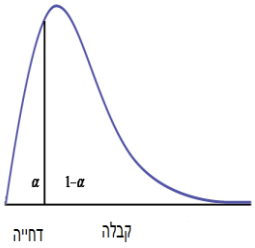
פרק 22 - בדיקת השערות על שונויות

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על שונות וסטיית תקן 178
2. בדיקת השערות על שתי שונויות 183

בדיקת השערות על שונויות

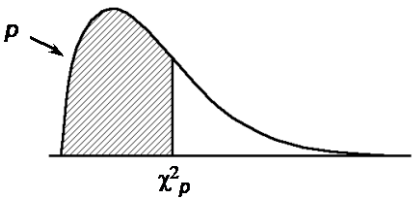
בדיקת השערות על שונות האוכלוסייה כאשר התוחלת לא ידועה – רקע

השערת האפס:	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$
השערה אלטרנטיבית:	$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$	$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$
תנאים:	$X\sim N$		
נדחה את השערת האפס אם:	 $\chi^2<\chi^{2(n-1)}_{\frac{\alpha}{2}}$ או $\chi^2>\chi^{2(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$	 $\chi^2<\chi^{2(n-1)}_{\alpha}$	$\chi^2>\chi^{2(n-1)}_{1-\alpha}$

סטטיסטי המבחן: $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

התפלגות חי בריבוע:

אם $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$, והפרמטר μ אינו ידוע, מתקיים ש: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^{2(n-1)}$.



התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף.
התפלגות זו תלויה בדרגות החופש.
אם μ אינו ידוע, אז: $d.f=n-1$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמאלית עם $\sigma=15$. מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאמריקה.

במדגם של 20 ישראלים התקבל: $\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=3420$.

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

<u>האוכלוסיה:</u> נבחנים ישראלים במבחן I.Q

<u>המשתנה:</u> X = ציון I.Q

<u>פרמטר:</u> σ^2

<u>השערות:</u>
$$H_0:\sigma^2=15^2=225$$
$$H_1:\sigma^2\neq 225$$

<u>הנחה:</u> $X\sim N$

<u>כלל הכרעה:</u> $d.f=n-1=20-1=19$

נדחה את H_0 אם $X^2>32.9$ או $X^2<8.91$

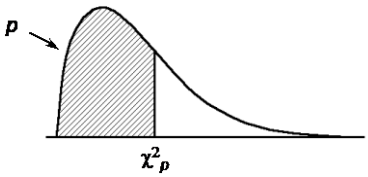
<u>תוצאות המדגם:</u> $n=20$

$$\sum(X_i-\bar{X})^2=3420$$
$$S^2=\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}=\frac{3420}{20-1}=180$$
$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{19\cdot 180}{225}=15.2$$

<u>מסקנה:</u> לא נדחה את H_0, לא נסיק ששונות הציונים של נבחנים ישראלים במבחן I.Q שונה מזו של אמריקאים. ($\alpha=5\%$)

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה $\chi^2 p$



							p						
df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) חברה אורזת סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באריזה מתפלג נורמאלית. החברה החליפה את מכונות האריזה במטרה לדייק יותר במשקל הנארז. (רוצים שסטיית התקן תהיה קטנה יותר).
לצורך בדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן (בגרם): 997, 996, 1005, 1024, 1008.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

2) זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו: 38, 50, 72, 90, 110.

א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א', אם נגדיל את רמת המובהקות?

ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נקטין את רמת המובהקות?

ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נוסיף תצפית שערכה 70?

3) הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5%, האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה, בבחירת המבחן המתאים הסתמך על המסקנה מסעיף א'.

4) השערות המחקר הן: $H_o:\sigma^2=100 \quad H_1:\sigma^2>100$
מתכננים לבצע מדגם בגודל 10 תצפיות. רמת המובהקות היא 5%.

א. מה תהיה עוצמת המבחן אם $\sigma_1^2=150$?

ב. איזו השערה אלטרנטיבית תיתן עוצמה של 90%?

5) השערות המחקר הן: $H_o:\sigma=2$, $H_1:\sigma<2$.
במדגם של 21 תצפיות התקבל סטיית תקן 1.143.
תנו הערכה למובהקות התוצאה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_o.

2) א. נדחה את H_o. ב. לא תשתנה. ג. לא ניתן לדעת.
ד. לא תשתנה.

3) א. נדחה את H_o. ב. לא נדחה את H_o.

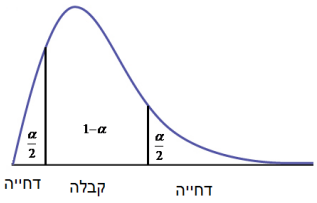
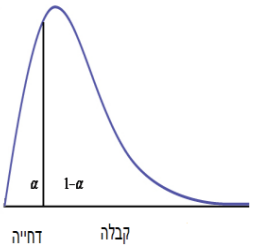
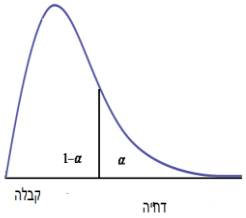
4) א. בין 25% ל-50%. ב. 405.3.

5) $0 < P_v < 0.005$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בדיקת השערות על שונויות

בדיקת השערות על שונות האוכלוסייה כאשר התוחלת לא ידועה – רקע

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$
תנאים:	$X\sim N$		
נדחה את השערת האפס אם:	 $\chi^2<\chi^{2(n-1)}_{\frac{\alpha}{2}}$ או $\chi^2>\chi^{2(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$	 $\chi^2<\chi^{2(n-1)}_{\alpha}$	 $\chi^2>\chi^{2(n-1)}_{1-\alpha}$

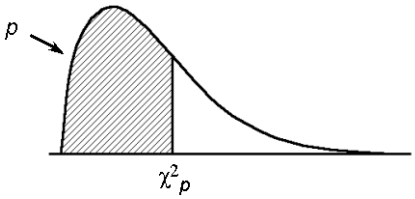
סטטיסטי המבחן: $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

התפלגות חי בריבוע:

אם $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$, והפרמטר μ אינו ידוע, מתקיים ש: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^{2(n-1)}$.

התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף. התפלגות זו תלויה בדרגות החופש.

אם μ אינו ידוע, אז: $d.f=n-1$.



דוגמה (פתרון בהקלטה):

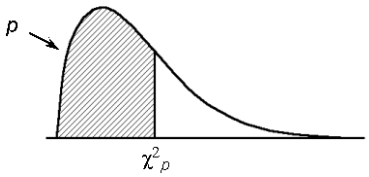
ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמאלית עם $\sigma=15$. מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאמריקה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

במדגם של 20 ישראלים התקבל: $\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=3420$.

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל



טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה $\chi^2 p$

	p												
df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) חברה אורזת סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באריזה מתפלג נורמאלית. החברה החליפה את מכונות האריזה במטרה לדייק יותר במשקל הנארז. (רוצים שסטיית התקן תהיה קטנה יותר).
לצורך בדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן (בגרם): 997, 996, 1005, 1024, 1008.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

2) זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו: 38, 50, 72, 90, 110.
א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית?
ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א',אם נגדיל את רמת המובהקות?
ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נקטין את רמת המובהקות?
ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נוסיף תצפית שערכה 70?

3) הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.
א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5%, האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה, בבחירת המבחן המתאים הסתמך על המסקנה מסעיף א'.

4) השערות המחקר הן: $H_o:\sigma^2=100 \quad H_1:\sigma^2>100$
מתכננים לבצע מדגם בגודל 10 תצפיות. רמת המובהקות היא 5%.

א. מה תהיה עוצמת המבחן אם $\sigma_1^2=150$?

ב. איזו השערה אלטרנטיבית תיתן עוצמה של 90%?

5) השערות המחקר הן: $H_o:\sigma=2$, $H_1:\sigma<2$.
במדגם של 21 תצפיות התקבל סטיית תקן 1.143.
תנו הערכה למובהקות התוצאה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_o.

2) א. נדחה את H_o. ב. לא תשתנה. ג. לא ניתן לדעת.
ד. לא תשתנה.

3) א. נדחה את H_o. ב. לא נדחה את H_o.

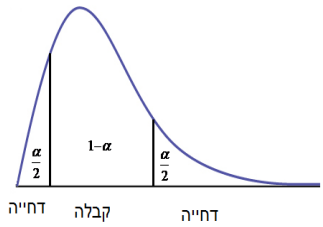
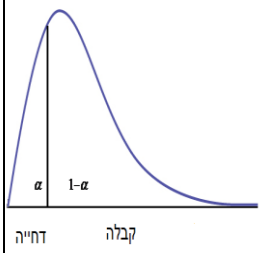
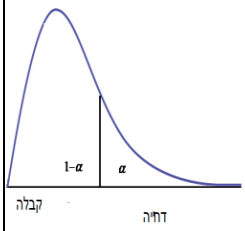
4) א. בין 25% ל-50%. ב. 405.3.

5) $0 < P_v < 0.005$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בדיקת השערות על שונויות

בדיקת השערות על שתי שונויות - רקע

השערת האפס:	$H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$	$H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$	$H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$
השערה אלטרנטיבית:	$H_1:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\neq 1$	$H_1:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1$	$H_1:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}>1$
תנאים:	1.מדגמים בלתי תלויים	2. $X_1, X_2 \sim N$	
נדחה את השערת האפס אם:	 או $F \geq f_{1-\alpha/2}^{(n_1-1,n_2-1)}$ $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha/2}^{(n_2-1,n_1-1)}}$	 $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}^{(n_2-1,n_1-1)}}$	 $F \geq f_{1-\alpha}^{(n_1-1,n_2-1)}$

סטטיסטי המבחן: $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$

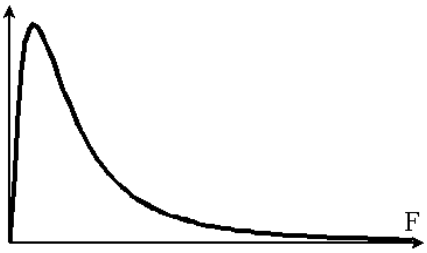
התפלגות F:

אם $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma^2)$ ו- $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma^2)$ אזי: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$.

התפלגות F הינה התפלגות אסימטרית חיובית התלויה בדרגות חופש של המונה ושל המכנה.

כמו כן בהתפלגות F מתקיימת התכונה הבאה: $F_\alpha(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{1-\alpha}^{(n_2-1,n_1-1)}}$.

$df_1 = n_1 - 1$
$df_2 = n_2 - 1$



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמני ביצוע המשימה: $\sum(y_i-\bar{y})^2=204$.

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות: $\sum(x_i-\bar{x})^2=200$.

בדקו ברמת מובהקות של 2% האם קיים הבדל בין השונויות? מה יש להניח?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת התפלגות F

ערכי החלוקה F_p של התפלגות $F(m,n)$

m — דרגות חופש המונה; n — דרגות חופש המכנה

		m										
p												
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	
15	20	30	60	120	∞							
.95	1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	
244	246	248	250	252	253	254						
.975		648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	
977	985	993	1001	1010	1014	1018						
.99		4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6
106	6157	6209	6261	6313	6339	6366						
.995		16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24
426	24630	24836	25044	25253	25359	25464						
.95	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	
19.41	19.43	19.45	19.46	19.48	19.49	19.50						
.975		38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	
39.41	39.43	39.45	39.46	39.48	39.49	39.50						
.99		98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	
99.42	99.43	99.45	99.47	99.48	99.49	99.50						
.995		198.50	199.01	199.16	199.24	199.30	199.33	199.36	199.38	199.39	199.39	
199.42	199.43	199.45	199.48	199.48	199.49	199.51						
.95	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	
8.74	8.70	8.66	8.62	8.57	8.55	8.53						
.975		17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	
14.34	14.25	14.17	14.08	13.99	13.95	13.90						
.99		34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	
27.05	26.87	26.69	26.50	26.32	26.22	26.13						
.995		55.55	49.80	47.47	46.20	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.68	
43.39	43.08	42.78	42.47	42.15	41.99	41.83						
.95	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	
5.91	5.86	5.80	5.75	5.69	5.66	5.63						
.975		12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	
8.75	8.66	8.56	8.46	8.36	8.31	8.26						
.99		21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.
3714.	2014.02	13.84	13.65	13.56	13.46							
.995		31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.98	21.62	21.35	21.14	20.97	20.
7020.	4420.17	19.89	19.61	19.47	19.32							
.95	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	
4.68	4.62	4.56	4.50	4.43	4.40	4.37						
.975		10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	
6.52	6.43	6.33	6.23	6.12	6.07	6.02						
.99		16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	
9.89	9.72	9.55	9.38	9.20	9.11	9.02						

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

.995		22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.
3813.15	12.90	12.66	12.40	12.27	12.14							
.95	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	
4.00	3.94	3.87	3.81	3.74	3.70	3.67						
.975		8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	
5.37	5.27	5.17	5.07	4.96	4.90	4.85						
.99		13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	
7.72	7.56	7.40	7.23	7.06	6.97	6.88						
.995		18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.
039.81	9.59	9.36	9.12	9.00	8.88							
.95	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	
3.57	3.51	3.44	3.38	3.30	3.27	3.23						
.975		8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	
4.67	4.57	4.47	4.36	4.25	4.20	4.14						
.99		12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	
6.47	6.31	6.16	5.99	5.82	5.74	5.65						
.995		16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	
8.18	7.97	7.75	7.53	7.31	7.19	7.08						
.95	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	
3.28	3.22	3.15	3.08	3.01	2.97	2.93						
.975		7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	
4.20	4.10	4.00	3.89	3.78	3.73	3.67						
.990		11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	
5.67	5.52	5.36	5.20	5.03	4.95	4.86						
.995		14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	
7.01	6.81	6.61	6.40	6.18	6.06	5.95						

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

m

p	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	15	20	30	60	120	∞					
.95	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
3.07	3.01	2.94	2.86	2.79	2.75	2.71					
.975		7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
3.87	3.77	3.67	3.56	3.45	3.39	3.33					
.99		10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
5.11	4.96	4.81	4.65	4.48	4.40	4.31					
.995		13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42
6.23	6.03	5.83	5.62	5.41	5.30	5.19					
.95	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
2.91	2.85	2.77	2.70	2.62	2.58	2.54					
.975		6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
3.62	3.52	3.42	3.31	3.20	3.14	3.08					
.99		10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85
4.71	4.56	4.41	4.25	4.08	4.00	3.91					
.995		12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85
5.66	5.47	5.27	5.07	4.86	4.75	4.64					
.95	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
2.69	2.62	2.54	2.47	2.38	2.34	2.30					
.975		6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
3.28	3.18	3.07	2.96	2.85	2.79	2.72					
.99		9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
4.16	4.01	3.86	3.70	3.54	3.45	3.36					
.995		11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09
4.91	4.72	4.53	4.33	4.12	4.01	3.90					
.95	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
2.48	2.40	2.33	2.25	2.16	2.11	2.07					
.975		6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
2.96	2.86	2.76	2.64	2.52	2.46	2.40					
.99		8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
3.67	3.52	3.37	3.21	3.05	2.96	2.87					
.995		10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42
4.25	4.07	3.88	3.69	3.48	3.37	3.26					
.95	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
2.28	2.20	2.12	2.04	1.95	1.90	1.84					
.975		5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
2.68	2.57	2.46	2.35	2.22	2.16	2.09					
.99		8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
3.23	3.09	2.94	2.78	2.61	2.52	2.42					
.995		9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85
3.68	3.50	3.32	3.12	2.92	2.81	2.69					
.95	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
2.09	2.01	1.93	1.84	1.74	1.68	1.62					
.975		5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51
2.41	2.31	2.20	2.07	1.94	1.87	1.79					
.99		7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
2.84	2.70	2.55	2.39	2.21	2.11	2.01					
.995		9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34
3.18	3.01	2.82	2.63	2.42	2.30	2.18					
.95	60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
1.92	1.84	1.75	1.65	1.53	1.47	1.39					

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

.975		5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27
2.17	2.06	1.94	1.82	1.67	1.58	1.48					
.99		7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
2.50	2.35	2.20	2.03	1.84	1.73	1.60					
.995		8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90
2.74	2.57	2.39	2.19	1.96	1.83	1.69					
.95	120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91
1.83	1.75	1.66	1.55	1.43	1.35	1.25					
.975		5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16
2.05	1.94	1.82	1.69	1.53	1.43	1.31					
.99		6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47
2.34	2.19	2.03	1.86	1.66	1.53	1.38					
.995		8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71
2.54	2.37	2.19	1.98	1.75	1.61	1.43					
.95	∞										
3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67
1.57	1.46	1.32	1.22	1.00							
.975		5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05
1.94	1.83	1.71	1.57	1.39	1.27	1.00					
.99		6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32
2.18	2.04	1.88	1.70	1.47	1.32	1.00					
.995		7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52
2.36	2.19	2.00	1.79	1.53	1.36	1.00					

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) להלן נתונים על שטחי דירות במ״ר עבור דירות חדשות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013:

2012	120	94	90	130	95	112	120
2013	100	82	91	105	74	69	

א. בדקו ברמת מובהקות של 10% את ההשערה ששונויות שטחי הדירות החדשות בשנת 2012 ובשנת 2013 שוות. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע הבדיקה?

ב. האם וכיצד הייתה משתנה המסקנה מהסעיף הקודם אם מסתבר שחלה טעות ברישום ויש להפחית 10 מ״ר מכל הדירות שמופיעות במדגם?

2) בתחום הבינוי משתמשים בשני סוגי מתכות: מתכת A ומתכת B. מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין שני סוגי המתכות מבחינת החוזק שלהן. דגמו מספר יחידות מתכת מכל סוג והתקבלו התוצאות הבאות:

סוג המתכת	A	B
n	8	10
$\sum X_i$	16	30
$\sum X_i^2$	60	198

יש להניח שרמת החוזק של המתכות מתפלגת נורמאלית.

א. האם קיים הבדל בין שונויות החוזק של מתכות?

ב. האם קיים הבדל בין תוחלות החוזק של מתכות? בכל סעיף רמת מובהקות של 10% .

3) מחקר סוציולוגי מעוניין לחקור את הרגלי הבילויים בקבוצות גיל שונות. ידוע כי בקרב האוכלוסייה הבוגרת (מעל 18) ההוצאה החודשית על בילויים מתפלגת נורמאלית עם תוחלת של 500₪ וסטיית תקן של 300₪.
במדגם שנעשה על סטודנטים בגילאי 21-26 התקבל אומד חוסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 10,000₪. כמות הסטודנטים שנדגמה 16.
במדגם שנעשה על 11 מבוגרים בשנות השלושים התקבל אומד חסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 490,000₪.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ההוצאה על בילויים בקרב סטודנטים בקבוצת גילאי 21-26 נמוכה מהשונות אצל כלל המבוגרים.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 1% האם הפיזור של ההוצאה החודשית לבילויים גדולה יותר בקבוצת גיל ה-30 מאשר בקבוצת גיל 21-26.

4) נתון $X_i \sim N(\mu_x, \sigma^2)$, וכמו כן $Y_i \sim N(\mu_y, \sigma^2)$.
מאוכלוסייה X נדגמו 7 תצפיות ומאוכלוסיה Y נדגמו 13 תצפיות.

א. כיצד $\frac{S_x^2}{S_Y^2}$ מתפלג?

ב. מה ההסתברות ש-S_x^2 גדולה ביותר מפי 3 מאשר S_Y^2 ?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. לא נדחה את H_0.
ב. מסקנה לא תשתנה.

2) א. לא נדחה את H_0.
ב. לא נדחה את H_0.

3) א. נדחה את H_0.
ב. נדחה את H_0.

4) א. $F(6,12)$
ב. 5%

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 23 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות

תוכן העניינים

1. שאלות פתוחות מסכמות 196
2. שאלות רב ברירה (אמריקאיות) 200

שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים

שאלות

1) שני חוקרים נתבקשו לבדוק את ההשערות הבאות: $H_1:\mu>520$, $H_0:\mu=520$.
כל חוקר בדק מדגם של 225 נחקרים. ידוע ש- $\sigma=20$.
חוקר א' קבע את כלל ההכרעה לפי $\alpha=0.05$.
חוקר ב' מחליט לדחות H_0 אם $\bar{X}>522$.

א. למי מהחוקרים הסתברות לטעות מסוג ראשון קטנה יותר?

ב. מהי ההסתברות לטעות מסוג שני של חוקר ב' עבור $\mu_1=525$.

ג. הסבר ללא חישוב נוסף, האם ההסתברות לטעות מסוג שני עבור $\mu_1=525$, של חוקר א' שווה/קטנה/גדולה לזו של חוקר ב'.

ד. חוקר א' קיבל במדגם שלו $\bar{X}=523$. מהי מסקנתו?

2) ידוע כי תוחלת מספר הלייקים היומי של דנה היא 12 עם סטיית תקן 5.
דני טוען שהוא יותר פופולארי מדנה בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום. על-מנת לבדוק זאת ספר דני כמה לייקים הוא קיבל בכל יום במהלך 7 שבועות (כלומר, ב $-$ 49 ימים) וקיבל סך-הכול 637 לייקים. נניח כי סטיית התקן של מספר הלייקים שדני מקבל ביום זהה לסטיית התקן של דנה.

א. מהי רמת המובהקות שכדאי לדני לדרוש, כדי שדנה תשתכנע בצדקת טענתו (שדני פופולרי יותר בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום).

ב. אם דני משער שתוחלת מספר ה"לייק"ים שהוא מקבל ביום היא 14 וקובע רמת מובהקות 2.5%, מהי עוצמת המבחן של דני?

3) ברצוננו להשוות בין רשתות A לבין B. לשם כך בחרנו 4 מוצרים, ובדקנו את מחיריהם בשתי הרשתות. להלן התוצאות:

מוצר / רשת	A	B
1	5	5
2	4	5
3	5	3
4	7	4

הניחו כי המחירים מתפלגים נורמלית.
אם יש הנחות נוספות כדי לבצע את המבחן הפרמטרי רשמו אותן.

א. בדקו האם קיים הבדל בין הרשתות מבחינת תוחלת המחירים. רמת מובהקות של 5%.

ב. חזרו על הסעיף הקודם בהנחה ונבחרו בכל רשת מוצרים באקראי ולא בהכרח אותם מוצרים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) במדגם של 10 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$$n=10,\quad \sum X_i=1020,\quad \sum X_i^2=105120.$$

במדגם של 14 אמריקאים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$$n=14,\quad \sum X_i=1386,\quad \sum X_i^2=138644.$$

נתון שציוני הבחינה מתפלגים נורמלית בכל מדינה.

א. בדקו ברמת מובהקות של 10% האם קיים שוויון שונויות בין אוכלוסיית אמריקה לאוכלוסיית ישראל?

ב. בדקו האם קיים הבדל בממוצע הציונים בבחינת ה-IQ בין ישראל לארה"ב. ברמת מובהקות של 5%?

5) במטרה לבדוק האם סטודנטים הלומדים במכללות משקיעים יותר זמן ללימודים מאשר סטודנטים באוניברסיטאות נדגמו 12 סטודנטים ובדקו לכל סטודנט את הזמן שהוא משקיע ביום ללימודים. הזמנים נמדדו בדקות:

סטודנטים באוניברסיטאות	176	156	189	171	140	180
סטודנטים במכללות	180	190	191	186	204	150

א. נסחו את ההשערות ובדוק אותן ברמת מובהקות של 5%. רשום את כלל ההכרעה ואת ההנחות הדרושות לביצוע המבחן הפרמטרי.

ב. חשבו את p-value.

ג. ישנה טענה שממוצע זמן ההשקעה בלימודים במכללות הוא 3.5 שעות ביום. בדוק את הטענה כאשר רמת המובהקות הינה 5%.

6) במדינת טרפפו המשכורות במשק מתפלגות נורמלית עם ממוצע של 1 אלף דולר וסטיית תקן של 0.2 אלף דולר. בוצע מדגם מקרי בו השתתפו 5 נשים ו 5 גברים במדינת שומקום שבה המשכורות מתפלגות נורמאלית גם כן. להלן משכורותיהם באלפי דולר:

גברים	2	0.9	0.7	1.2	1.1
נשים	1.4	1.1	1.9	1.8	1.2

א. בדקו את הטענה שממוצע משכורותיהם של אזרחי שומקום גבוה מאשר ממוצע משכורותיהם של אזרחי טרפפו ברמת מובהקות של 5%. בהנחה שסטיית התקן זהה בשתי המדינות.

ב. חזרו על הסעיף הקודם ללא ההנחה הנ"ל.

ג. ישנה טענה שסטיית התקן במדינת שומקום גבוהה מזו של טרפפו. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) במטרה להשוות בין אחוזי הצפייה של גברים ונשים בתוכנית טלוויזיה מסוימת בוצע סקר ובו התקבלו תוצאות הבאות:

	צופים	לא צופים
נשים	320	42
גברים	72	120

א. האם יש הבדל בין אחוזי הצפייה של גברים ונשים ברמת מובהקות של 1%?

ב. עבור רמת מובהקות של 5% בדוק טענה שמבין הצופים בתוכנית הטלוויזיה אחוז הנשים גדול פי 2 מאחוז הגברים.

8) בשנת 2000 ל-60% היה מדיח כלים בבית. מחקר רוצה לבדוק האם כיום פרופורציית המשפחות עם מדיח כלים עלה. הוחלט לבצע מדגם אקראי של 150 משפחות.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה היא מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5% אם במדגם ל-102 משפחות היה מדיח כלים.

ג. מהי הטעות האפשרית במסקנה מהסעיף הקודם.
האם ניתן לדעת את הסתברותה?

9) נערך מחקר על הקשר בין עישון ויתר לחץ דם. נבדק מדגם מקרי של 200 מעשנים ונמצא כי 30 סבלו מיתר לחץ דם.
ידוע שבאוכלוסייה 18% סובלים מיתר לחץ דם.

א. בדקו ברמת מובהקות 0.1 את ההשערה כי אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שאחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.

ג. מהי עצמת המבחן, אם אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב אוכלוסיית המעשנים היא בפועל 25%.

10) להלן התפלגות מספר הנסיעות לחופשה השנתית במדגם של משפחות ישראליות. בדקו ברמת מובהקות של 5%:

מספר הנסיעות	0	1	2	3	4
מספר המשפחות	84	102	26	20	12

א. באיטליה משפחות נוסעות בממוצע פעמיים בשנה לחופשה. האם בישראל משפחות נוסעות פחות מאשר באיטליה?

ב. בהולנד 80% מהמשפחות נוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה, האם בישראל אחוז המשפחות שנוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה נמוך מאשר בהולנד?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

11) נתון כי: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$.
מעוניינים לבדוק את ההשערות: $H_1: \mu > 40, \quad H_0: \mu = 40$.
דגמו 25 תצפיות מהאוכלוסייה והתקבל $\bar{X} = 45$.
א. חשבו את p-value (מובהקות התוצאה).
ב. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu < 40$
ג. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu \neq 40$

12) ציוני בחינת הבגרות במתמטיקה מתפלגים נורמלית עם שונות 150. במדגם של 16 נבחנים מתל אביב התקבלה שונות מדגמית-190. במדגם של 25 ירושלמים התקבלה שונות מדגמית 118.
א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם שונות הציונים במתמטיקה בקרב נבחני תל אביב גבוהה מהשונות בכלל הארץ.
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ציונים במתמטיקה בקרב תלמידי תל אביב גבוהה מאשר בקרב תלמידי ירושלים.

תשובות סופיות

1) א. חוקר א' ב. 0.0122 ג. גדלה. ד. נדחה H_0.
2) א. לפחות 0.0808 ב. 0.7995.
3) א. לא נדחה H_0. ב. לא נדחה H_0.
4) א. לא נדחה H_0. ב. לא נדחה H_0.
5) א. לא נדחה H_0. ב. בין 5% ל-10%. ג. נדחה H_0.
6) א. נדחה H_0. ב. נדחה H_0. ג. נדחה H_0.
7) א. נדחה H_0. ב. נדחה H_0.
8) א. $H_0: p = 0.6$, $H_1: p > 0.6$ ב. נדחה H_0. ג. טעות מסוג ראשון בסיכוי של 0.05.
9) א. לא נדחה H_0. ב. 0.8643 ג. 0.8749.
10) א. נדחה H_0. ב. נדחה H_0.
11) א. 0.0062 ב. 0.9938 ג. 0.0124.
12) א. לא נדחה H_0. ב. לא נדחה H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות סיכום – שאלות רב ברירה על בדיקת השערות

1) בבדיקת השערה חד-צדדית ימנית ברמת מובהקות $\alpha = 0.01$, נדחתה השערת האפס. מה הייתה המסקנה לו נבדקה אותה ההשערה באמצעות אותם נתונים ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$?

א. השערת האפס הייתה נדחית.

ב. השערת האפס לא הייתה נדחית.

ג. ההשערה המחקרית הייתה נדחית.

ד. בהעדר נתונים נוספים, לא ניתן לדעת.

2) על מנת לבדוק האם ההסתברות ללידת בן הינה חצי, נבחר מדגם מקרי של 200 ילדים, ונמצא שישנם 120 בנים.
מהן ההשערות האלטרנטיבית להשערת האפס?

א. $H_1 : p = 0.5$

ב. $H_1 : p = 0.6$

ג. $H_1 : p > 0.5$

ד. $H_1 : p \neq 0.5$

3) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמיתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן Tלמדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

4) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות:
מהן ההשערות הנבדקות?(ההפרש חושב $X - Y$)

לפני הנישואין- X	69	93	82	68
לאחר הנישואין- Y	80	88	84	71

א. $H_1 : \mu_d < 0, \quad H_0 : \mu_d = 0$

ב. $H_1 : \mu_X - \mu_Y < 0, \quad H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$

ג. $H_1 : \mu_X - \mu_Y < 0, \quad H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$

ד. $H_1 : \mu_d > 0, \quad H_0 : \mu_d = 0$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

6) ידוע כי ילד בגיל שנתיים ישן בממוצע 9 שעות בלילה. במדגם של 20 תינוקות בני שנתיים המתגוררים בצפון נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 10 עם סטיית תקן של 1.1 במדגם של 10 תינוקות בדרום נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 7.9 עם סטיית תקן של 1.1. על מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהצפון לבין זה של כלל הילדים יש לערוך _____, ועל מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהדרום לזה של ילדים המתגוררים בצפון יש לערוך _____.
יש להניח שההנחות הדרושות מתקיימות.

א. מבחן Z למדגם יחיד ; מבחן T למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים תלויים.

ג. מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים בלתי תלויים ; מבחן T לממוצע יחיד.

7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם:

א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.

ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.

ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.

ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

8) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות:

לפני הנישואין	69	93	82	68
לאחר הנישואין	80	88	84	71

באיזה התפלגות משתמשים לבדיקת ההשערות, ובכמה דרגות חופש:

א. ההתפלגות Z ללא דרגות חופש.

ב. ההתפלגות T ו-3 דרגות חופש.

ג. ההתפלגות T ו-6 דרגות חופש.

ד. ההתפלגות χ^2 ו-3 דרגות חופש.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) שני סטטיסטיקאים בודקים השערות ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$ על סמך אותו מדגם. סטטיסטיקאי א' בודק את ההשערה: $H_0 : \mu = 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1 : \mu \neq 20$ ומחליט לא לדחות את השערת האפס.

סטטיסטיקאי ב' בודק את ההשערה $H_0 : \mu \leq 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1 : \mu > 20$ מה יחליט סטטיסטיקאי ב'?

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. ללא נתונים נוספים אי אפשר לדעת מה יחליט.

10) חוקר בדק השערה מסוימת והחליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות 5%. מה נכון לומר?

א. הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.

ב. הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.

ג. הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% וברמת מובהקות 2%.

ד. הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.

11) רמת הכולסטרול בדמם של אנשים מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 180 מ"ג (ל 100 סמ"ק דם). וסטיית תקן של 10 מ"ג. מעוניינים לבדוק את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר.
נניח שסטיית התקן אצל צמחונים זהה לסטיית התקן של כלל האנשים.
במדגם של 20 צמחונים התקבל ממוצע רמת כולסטרול 174.5 מ"ג.
אם הוחלט לקבל את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

א. טעות מסוג ראשון.

ב. טעות מסוג שני.

ג. טעות מסוג שלישי.

ד. לא ניתן לדעת כיוון שאנו לא יודעים מה התוחלת האמתית אצל הצמחוניים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

12) בסקר שנערך התקבל ש 60% מתוך 220 נשאלים מבקרים אצל השיננית לפחות פעם אחת בשנה. עבור אילו רמות מובהקות ניתן יהיה לקבוע שרוב האוכלוסייה מבקרת אצל השיננית לפחות פעם בשנה?

א. רמת מובהקות הגדולה מ-5%.

ב. רמת מובהקות הקטנה מ-5%.

ג. רמת מובהקות הגדלה מ-0.0015.

ד. רמת מובהקות הקטנה מ-0.0015.

13) שני חוקרים העוסקים בתחום מחקרי משותף החליטו להסתמך על נתונים של מדגם שפורסם על ידי הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה.
חוקר א' ניסח השערה דו צדדית ואילו חוקר ב' ניסח השערה חד צדדית.
מסקנתו של איזה מבין המשפטים הבאים הוא הנכון בנוגע למסקנות החוקרים?

א. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס לא ניתן לדעת מה יחליט חוקר ב' באותה רמת מובהקות.

ב. אם חוקר א' יקבל את השערת האפס גם חוקר ב' יקבל את השערת האפס באותה רמת מובהקות.

ג. אם חוקר ב' ידחה את השערת האפס גם חוקר א' ידחה את השערת האפס באותה רמת מובהקות.

ד. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס גם חוקר ב' ידחה את השערת האפס בתנאי שרמת המובהקות כפולה בגודלה.

14) ידוע מנתוני העבר כי תוחלת הציונים בבחינה בפסיכולוגיה היא 79. הועלתה השערה כי תוחלת הציונים בקרב העולים החדשים נמוכה יותר. לצורך בדיקת הטענה נלקח מדגם מקרי של 47 סטודנטים עולים ונמצא ממוצע של 75.
מה משמעות הפרמטר בניסוח ההשערות?

א. תוחלת ציוני העולים באוכלוסייה.

ב. ממוצע ציוני העולים במדגם.

ג. תוחלת ציוני האוכלוסייה מנתוני העבר.

ד. ממוצע ציוני שאר האוכלוסייה במדגם.

15) חוקר ביצע מחקר וידוע כי עשה טעות מסוג 1. מה מהבאים נכון?

א. החוקר דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה נכונה.

ב. החוקר דחה את השערת H_1 כאשר היא הייתה נכונה.

ג. החוקר לא דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה לא נכונה.

ד. המדגם של החוקר שייך בפועל להתפלגות הדגימה של H_1.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

16) חוקר ביקש לבחון האם תאומים זהים אשר הופרדו בילדותם שונים מתאומים זהים אשר גדלו יחדיו מבחינת מידת הפער בין התאומים בלחץ הדם. הוא דגם 20 זוגות תאומים מכל אוכלוסייה ומדד את הפרש בין לחץ הדם בכל זוג תאומים. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

א. מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 38 דרגות חופש.

ב. מבחן T למדגמים מזווגים, עם 39 דרגות חופש.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 39 דרגות חופש.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים עם 38 דרגות חופש.

17) בינואר השנה פורסם שהשכר הממוצע במשק הוא ₪8,900. במדגם שנעשה בחודש יוני על 60 עובדים נרשם עבור כל עובד במדגם האם השכר שלו נמוך או לא נמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר. מהו המבחן המתאים כדי לבדוק שרוב העובדים בחודש יוני קיבלו שכר הנמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר?

א. מבחן Z על פרופורציה.

ב. מבחן T על תוחלת אחת.

ג. מבחן T על שתי תוחלות במדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T על שתי תוחלות במדגמים תלויים.

18) שלושה חוקרים רצו לבדוק את השפעתו של שידור פרסומות נגד תאונות דרכים על מהירות הנהיגה של נהגים בישראל (השונות של מהירות הנהיגה בישראל אינה ידועה). עידו השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים אחת, חודש לפני שידור הפרסומות וחודש לאחר שידור הפרסומות.
רון השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שראו את הפרסומות, למהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שלא ראו את הפרסומות.
יואב השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים בחודש בו שודרו הפרסומות, למהירות הנהיגה הממוצעת בישראל על פי נתוני משרד התחבורה.
המבחנים בהם צריכים החוקרים להשתמש הם:

א. שלושתם במבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ב. עידו במבחן T למדגמים מזווגים, ורון ויואב במבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ג. עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון במבחן T למדגמים בלתי תלויים ויואב במבחן T למדגם יחיד.

ד. עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון ויואב במבחן T למדגם יחיד.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

19) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5%.
מה תמיד נכון?

א. הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

20) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס. אם החוקר היה עורך מבחן חד צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

א. השערת האפס הייתה נדחית.
ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

21) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.
רוני השתמשה בטבלה של התפלגות T.
מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם?

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

22) נתון ש $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_1:\mu<\mu_0$, $H_0:\mu=\mu_0$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%
לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

23) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
ב. העוצמה של המבחן גדלה.
ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
ד. תשובות א ו-ב נכונות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

24) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

25) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

	α	$1-\beta$
א.	גדולה	גדולה
ב.	גדולה	קטנה
ג.	קטנה	גדולה
ד.	קטנה	קטנה

26) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:

א. הן α, והן $(1-\beta)$, יקטנו.

ב. α יישאר ללא שינוי ואילו $(1-\beta)$ יגדל.

ג. α יגדל ואילו $(1-\beta)$ יקטן.

ד. הן α והן $(1-\beta)$ יגדלו.

27) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

א. טעות מסוג ראשון.

ב. טעות מסוג שני.

ג. טעות מסוג שלישי.

ד. אין טעות במסקנתו.

28) בבדיקת השערות התקבל שה- $p-value=0.02$.

מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?

בחר בתשובה הנכונה:

א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.

ב. ידחה את השערת האפס מקרה.

ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.

ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

29) מובהקות התוצאה (PV) היא גם:

א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.

ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.

ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.

ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

30) בבדיקת השערות מסוימת התקבל $p\ value = 0.0254$, לכן:

א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0.

ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0.

ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0.

ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0.

31) רמת המובהקות במחקר הייתה 2% לכן.

א. בסיכוי של 2% נדחה את השערת האפס.

ב. בסיכוי של 2% לא נדחה את השערת האפס.

ג. בסיכוי של 2% השערת האפס לא נכונה.

ד. אף תשובה לא נכונה.

32) נתון ש: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_1: \mu < \mu_0, \quad H_0: \mu = \mu_0$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%. אם הוא היה מגדיל את רמת המובהקות ל-10% אזי:

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

33) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. מספר דרגות החופש במבחן הוא:

א. 9

ב. 19

ג. 18

ד. 8

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

34) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	4.5	9.6	0.7	2.5
משקל במכשיר 2	3.5	6.9	1.7	0.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית.
המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.
ב. מבחן T למדגם יחיד.
ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

35) כדי להשוות בין שני אצים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים.
המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.
ב. מבחן T למדגם יחיד.
ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

36) סטטיסטיקאי ערך מבחן סטטיסטי. הוא חישב את עוצמת המבחן וקיבל 0.
המשמעות של תוצאה זו היא:

א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.
ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
ד. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

37) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים. הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$. אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$,
ברמת מובהקות 0.05 מסקנתו תהיה:

א. לדחות את השערת האפס.
ב. לא לדחות את השערת האפס.
ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.
ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

38) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ״ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בנו רווח סמך למוצע ההפרשים וקיבלו: $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
לכן מסקנת המחקר היא:

א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.

ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.

ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D.

39) אם רמת מובהקות של מבחן סטטיסטי הינה 0, הכוונה היא:

א. תמיד נדחה H_0 כאשר היא נכונה, אך לא תמיד נדחה אותה כאשר היא לא נכונה.

ב. לא נדחה את H_0 אף פעם.

ג. לא נדחה את H_0 כאשר היא נכונה אך יתכן ונדחה אותה כאשר היא לא נכונה.

ד. כל התשובות לא נכונות.

40) חוקר ביצע ניסוי. הוא ניסח את ההשערות הבאות: $H_1: \mu \neq 10, \quad H_0: \mu = 10$.
לצורך בדיקה הוא לקח מדגם מקרי בגודל 5 מתוך אוכלוסייה המתפלגת נורמאלית עם שונות לא ידועה. על סמך תוצאות המדגם הוא חישב וקיבל: $t_{\bar{x}} = -2.63$. לכן המסקנה היא:

א. הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1 אך לא כן ברמת מובהקות 0.05.

ב. הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.05 אך לא כן ברמת מובהקות 0.025.

ג. הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.025 אך לא כן ברמת מובהקות 0.01

ד. הוא לא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1.

41) האיגוד האמריקני לרפואת ילדים מפרסם הנחיות חדשות הקובעות כי יש ליטול תוספת יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מחסור במינרל זה עלול לגרום לפגיעה מוחית אצל העובר והתינוק. החלטה זו נקבעה על סמך מחקר בו השתתפו 1050 נשים שנטלו יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה.
מתוך הנשים שהשתתפו במחקר, רק ל-21 נמצאו ילדים בעלי פגיעה מוחית לעומת 3% באוכלוסייה הכללית. בנוסף, פורסם שהאיגוד האמריקאי מגיע למסקנותיו על סמך רמת מובהקות של 0.5%. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון במחקר?

א. 0.005

ב. 0.03

ג. 0.0287

ד. 0.05

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

42) חוקרת שיערה, כי משקלן של נשים כשנה לאחר החתונה גבוה ממשקלן בעת החתונה. החוקרת דגמה 15 נשים, ובדקה את משקלן בשתי נקודות הזמן (בעת החתונה, ושנה לאחריה), אך לא מצאה הבדל מובהק ברמת מובהקות 0.01. בהנחה, כי **במציאות** השערתה של החוקרת נכונה, סביר כי אם היא תגדיל את גודל המדגם, אזי:

א. יקטן הסיכוי לטעות מסוג שני (β).

ב. תגדל רמת הביטחון ($1-\alpha$).

ג. אף תשובה לא נכונה.

ד. כל התשובות נכונות.

43) איזה מהמשפטים הבאים נכון תמיד?

א. $\text{POWER}+\alpha+\beta=1$

ב. $\text{POWER}=0.5-\beta$

ג. $\text{POWER}+\alpha=1$

ד. $\beta+\alpha=1$

ה. הכול לא נכון.

44) מה נכון לומר לגבי הנחת שיוויון השונויות במבחן T למדגמים בלתי תלויים?

א. היא אומרת שהשונויות המדגמיות שוות.

ב. בלעדיה אין שום דרך לבדוק השערה על הפרש בין תוחלות.

ג. היא חשובה הן עבור מדגמים מזווגים והן עבור מדגמים בלתי תלויים.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

45) חוקר החליט לא לדחות השערה ברמת מובהקות של α. במידה וחוקר זה היה בודק השערה זו ברמת מובהקות של 2α על סמך אותם נתונים, האם ההשערה תדחה?

א. ההשערה תדחה.

ב. ההשערה לא תדחה.

ג. התשובה תלויה בעוצמת המבחן.

ד. לא ניתן לדעת בוודאות אם ההשערה תדחה או לא.

46) חוקרת שיערה, כי בגילאי הגן בנות יותר תקשורתיות מבנים. אם החוקרת תדגום אקראית 30 בנים ו-30 בנות, ובמדגם יתקבל אותו ממוצע של ציון תקשורת. סטטיסטי המבחן יהיה:

א. אפס

ב. חיובי

ג. שלילי

ד. לא ניתן לדעת

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

47) עוצמה שווה ל-1 פרושה:

א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.

ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.

ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

48) מה מהבאים **<u>נכון</u>** לגבי מבחן T מדגמים מזווגים?

א. כל התצפיות במחקר אינן תלויות זו בזו.

ב. כל התצפיות במחקר תלויות זו בזו.

ג. כל הצמדים של תצפיות במחקר אינם תלויים זה בזה.

ד. התצפיות בתוך כל צמד אינן תלויות זו בזו.

49) לבדיקת ההשערה החד צדדית על התוחלת של התפלגות נורמלית $H_0:\mu\geq 10$, $H_1:\mu<10$. נלקח מדגם והתקבלה רמת מובהקות מינימאלית לדחיית השערת האפס 0.058. לו רצינו לבדוק את ההשערה הדו צדדית $H_0:\mu=10,\quad H_1:\mu\neq 10$, אז על סמך תוצאת אותו המדגם ברמת מובהקות 0.05:

א. ניתן להכריע בין ההשערות רק אם שונות האוכלוסייה נתונה.

ב. מקבלים את השערת האפס.

ג. דוחים את השערת האפס.

ד. לא ניתן להכריע בין ההשערות שכן חסרים נתונים.

50) לבדיקת ההשערה החד צדדית ימנית $H_0:\mu=55,\quad H_1:\mu=65$, נלקח מדגם מקרי בגודל n מאוכלוסייה בעלת התפלגות נורמלית ושונות σ^2. רמת המובהקות היא 5%. נמצא שהעוצמה היא 0.9. להלן 3 טענות:

- עבור מדגם בגודל n וברמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות: $H_0:\mu=55,\quad H_1:\mu=60$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל $2n$ ורמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות: $H_0:\mu=55,\quad H_1:\mu=65$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל n ורמת מובהקות 10% לבדיקת ההשערות: $H_0:\mu=55,\quad H_1:\mu=65$ העוצמה תהיה קטנה מ-0.9.

א. שלושת הטענות אינן נכונות.

ב. טענות 2 ו-3 אינן נכונות וטענה 1 נכונה.

ג. טענות 1 ו-2 נכונות וטענה 3 אינה נכונה.

ד. טענות 1 ו-3 אינן נכונות וטענה 2 נכונה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

שאלה	תשובה		שאלה	תשובה
1	א		26	א
2	ד		27	ב
3	ד		28	א
4	א		29	א
5	ג		30	ג
6	ג		31	ד
7	א		32	א
8	ב		33	א
9	ג		34	ד
10	א		35	ג
11	א		36	א
12	ג		37	ג
13	א		38	א
14	א		39	ג
15	א		40	א
16	א		41	א
17	א		42	א
18	ג		43	ה
19	א		44	ד
20	ג		45	ד
21	ב		46	א
22	ג		47	ד
23	ד		48	ג
24	ג		49	ב
25	ג		50	ד

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 24 - מבחני חי בריבוע

תוכן העניינים

1. מבחן טיב התאמה 213
2. מבחן טיב התאמה והקשר שלו לבדיקת השערות על פרופורציה אחת 218
3. מבחן לאי תלות 220
4. קשר בין מבחן אי תלות לבדיקת השערות להפרש פרופרוציות 225

מבחן טיב התאמה – רקע

מבחן זה בא לבדוק האם אוכלוסייה מסוימת מתפלגת לפי התפלגות נתונה.
המשתנה הנחקר מחולק למספר קטגוריות ויש לבדוק האם תוצאות המדגם תואמות להתפלגות הנתונה.

מבנה המבחן:

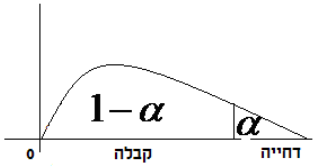
השערות:

המשתנה מתפלג לפי התפלגות מסוימת - H_0.

אחרת - H_1.

כלל הכרעה:

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש. $d.f = K-1$, כאשר K - מספר הקטגוריות.



הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha,K-1}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $K-1$.

אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,K-1}$, דוחים את השערת האפס.

סטטיסטי המבחן: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$.

O_i - השכיחות שנצפתה במדגם בקטגוריה i.

p_i - הסתברות לקטגוריה i לפי השערת האפס.

$E_i = np_i$ - שכיחות צפויה במדגם לקטגוריה i בהנחת השערת האפס.

הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i. במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

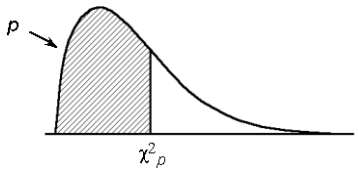
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במדינה מסוימת שלוש מפלגות. בפרלמנט הנוכחי התפלגות מספר המושבים היא 30% למפלגה A, 60% למפלגה B ו-10% למפלגה C.
לקראת הבחירות המתוכננות בשבוע הבא נעשה סקר שכלל 300 אזרחים.
בסקר התקבל ש40% יצביעו למפלגה A, 50% למפלגה B ו-10% למפלגה C.
האם תוצאות הסקר תואמות להתפלגות המושבים בפרלמנט הנוכחי?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה



	p												
df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) במטרה לבדוק האם קובייה הוגנת, מטילים אותה 120 פעמים.
התקבל 17 פעמים 1, 23 פעמים 2, 20 פעמים 3, 25 פעמים 4, 18 פעמים 5 ו-17 פעמים 6. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

2) מפעל מייצר סוכריות בצבעים כחול, אדום, ירוק וכתום. מעוניינים לבדוק שפרופורציית הסוכריות הכחולות גדולה פי 2 מכל צבע אחר. לצורך כך נדגמו באקראי 200 סוכריות והתקבל: 70 כחולות, 50 אדומות, 40 ירוקות והיתר כתומות.
מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

3) משרד החינוך טוען שבקרב השכירים במשק היחס בין השכירים בעלי השכלה נמוכה, תיכונית ואקדמאית הוא 1:2:1 בהתאמה. במדגם של 200 שכירים התקבלו 56 אנשים בעלי השכלה נמוכה, 105 בעלי השכלה תיכונית והיתר בעלי השכלה גבוהה.

א. על סמך תוצאות המדגם, האם התפלגות ההשכלה היא כמו שמשרד החינוך מפרסם? בדוק ברמת מובהקות של 5%.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפרופורציית השכירים במשק בעלי השכלה אקדמאית.

4) 200 איש נתבקשו לבחור ספרה באקראי והנה התוצאות שהתקבלו:
18 איש בחרו בספרה 0, 24 איש בחרו בספרה 1, 17 איש בחרו בספרה 2, 19 איש בחרו בספרה 3, 20 איש בחרו בספרה 4, 18 איש בחרו בספרה 5, 22 איש בחרו בספרה 6 והיתר בחרו בספרות 7-9.

א. על סמך התוצאות הללו האם בחירת הספרות אקראית? בדקו ברמת מובהקות של 2.5%.

ב. תנו הערכה למובהקות התוצאה.

ג. אם נגדיל את גודל המדגם פי 2 ונשמור על אותם יחסים של כמות האנשים במדגם שבחרו בספרות, כיצד הדבר ישפיע על ערכו של הסטטיסטי χ^2? מה תהיה המסקנה במקרה זה?

5) מעוניינים לבדוק האם קובייה היא הוגנת. הטילו את הקובייה פעמיים והתבוננו בסכום הוצאות. חזרו על התהליך 72 פעמים.
להלן התוצאות שהתקבלו במדגם:
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

סכום התוצאות	מספר הטלות
2-5	20
6-8	17
9-10	20
11-12	15

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) בפנס יש 4 סוללות. בבדיקה שנערכה ב-400 פנסים נמצאו סוללות פגומות לפי השכיחויות הבאות:

מספר הסוללות הפגומות	0	1	2	3 ומעלה
שכיחות	276	104	12	8

מעוניינים לבדוק על סמך תוצאות מדגם אלה האם הסיכוי לסוללה פגומה הוא 20%. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהסיכוי לסוללה פגומה אינו 20%?

7) מטילים מטבע עד שלראשונה מתקבל "ראש". חוזרים על התהליך 120 פעמים. נסמן ב- X את מספר ההטלות עד קבלת הראש. להלן התוצאות שהתקבלו:

x	1	2	3	4	5	6
מספר החזרות על התהליך	54	20	16	22	6	2

א. בהנחה והמטבע הוגן, מהי ההתפלגות של X?

ב. בדקו האם המטבע הוגן, על סמך תוצאות המדגם ברמת מובהקות של 5%.

8) להלן השערות מחקר: $H_1 : else$, $H_0 : X \sim N(40, 2^2)$.

תוצאות המדגם הן:

X	מתחת 36	36-40	40-44	מעל 44
מספר הדגימות	3A	50A	45A	2A

מהו ערכו המקסימלי של A עבורו נקבל את H_0 ברמת מובהקות של 5%?

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0.

2) לא נדחה H_0.

3) א. לא נדחה H_0. ב. $(0.14,0.25)$.

4) א. לא נדחה H_0. ב. בין 0.95 ל-0.975

ג. יגדל פי 2; המסקנה לא תשתנה.

5) נכריע שהקובייה אינה הוגנת.

6) 0.005.

7) א. $X \sim G(0.5)$ ב. נסיק שהמטבע לא הוגן.

8) 14.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הקשר בין מבחן טיב התאמה לבדיקת השערות על הפרופורציה – רקע

אם אנו רוצים לבצע מבחן טיב התאמה על משתנה שיש לו שתי קטגוריות בלבד (משתנה דיכוטומי), הדבר זהה לתהליך של בדיקת השערות דו צדדית על פרופורציה בודדת.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

הטילו מטבע 80 פעמים וקיבלו 48 פעמים את התוצאה "ראש".
בדקו האם המטבע הוא הוגן ברמת מובהקות של 5%.

א. באמצעות מבחן טיב התאמה.

ב. באמצעות מבחן Z לפרופורציה בודדת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) בסקר שנעשה על 320 נשאלים, 43.75% טענו שהחיה המועדפת עליהם היא כלב. עד היום היה נהוג לחשוב ש40% מהאנשים מעדיפים כלבים.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסקר יישנה את הסברה שהייתה נהוגה עד היום לגבי העדפת כלב.

א. באמצעות מבחן טיב התאמה.

ב. באמצעות מבחן על פרופורציה.

2) לסוכנות מכוניות שלושה סניפים ברחבי הארץ. המכוניות נמכרות בסניפים השונים. מתוך 100 מכוניות נמצא ש-65 נמכרו בסניף תל-אביב, 23 בסניף ירושלים והיתר בסניף חיפה.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שיעור המכוניות שנמכרות בסניף ת"א גדול פי 2 מכל סניף אחר.

ב. בדקו באמצעות מבחן טיב התאמה האם 60% מהמכוניות נהוגות להימכר בסניף תל אביב. האם יש דרך אחרת לבדוק את ההשערה?

3) בתחרות ריצה בית ספרית שלושה מסלולי ריצה.
ב-50 תחרויות בדקו באיזה מסלול היה הניצחון.
התוצאות שהתקבלו מסוכמות בטבלה הבאה:

המסלול	1	2	3
מספר הניצחונות	20	15	15

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש מסלול מועדף לניצחון.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסיכוי לנצח במסלול מספר 1 גבוה מ-$\frac{1}{3}$.

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0.

2) א. נדחה H_0. ב. לא נדחה H_0.

3) א. לא נדחה H_0. ב. לא נדחה H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבחן חי בריבוע לאי תלות בין משתנים – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים.
שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

מבנה המבחן:

השערות:

אין תלות בין המשתנים H_0.

יש תלות בין המשתנים H_1.

כלל הכרעה:

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש $d.f=(r-1)(c-1)$.

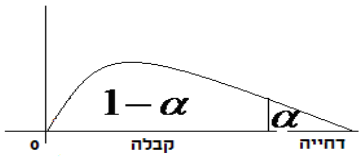
כאשר: r - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות.

c - מספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $(r-1)(c-1)$. אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}$ אז דוחים את השערת האפס.

סטטיסטי המבחן: $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$.

כאשר:



O_i - השכיחות נצפית במדגם בתא i.

E_i - שכיחות צפויה במדגם בתא i בהנחת השערת האפס.

$$E_i=\frac{f(x)\cdot f(y)}{n}$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i. במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.
תנאי חלופי: אין E קטן מ-1 וגם אין ביותר מ 20% מהתאים E קטן מ-5.

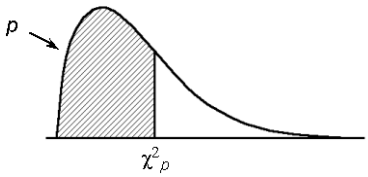
דוגמה (הפתרון בהקלטה):

האם יש תלות בין המגדר לבין דעה מסוימת?
יש לבדוק ברמת מובהקות של 5% על סמך תוצאות הסקר:

המגדר / דעה	בעד	נגד	נמנע	סה"כ
גברים	50	40	10	
נשים	20	60	20	
סה"כ				

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה $\chi^2 p$



df	p .005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) נבדקה התלות בין גודל הארגון לבין שביעות הרצון של העובדים.
להלן התוצאות:

שביעות רצון גודל המפעל	נמוכה	בינונית	גבוהה	סה"כ
גדול	182	203	215	600
קטן	154	110	136	400
סה"כ	336	313	351	1000

מה המסקנה ברמת מובהקות של 2.5%?

2) מפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מן המשמרות לפי מדגם שנעשה:

	יום	ערב	לילה
פגומים	50	60	70
תקינים	600	700	800

האם יש הבדל בין שיעורי הפגומים במשמרות השונות?
הסיקו עבור רמת מובהקות $\alpha = 0.05$.

3) נדגמו 50 מוצרים ממפעל מסוים מתוך 30 מוצרים שיוצרו ביום 17 נבחרו לייצוא מתוך המוצרים שיוצרו בלילה 10 נבחרו לייצוא.
האם יש קשר בין היות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר?
בדקו ברמת בטחון של 95%.

4) במטרה לבדוק האם השתנו דפוסי ההצבעה למפלגות השונות בין שבוע שעבר לשבוע נלקחו שני סקרים אחד מהשבוע שעבר והאחר מהשבוע.
להלן דפוסי ההצבעה שהתקבלו בסקרים אלה.

א. מהי רמת המובהקות המינמלית עבורה ניתן להחליט שהשתנו דפוסי ההצבעה משבוע שעבר לשבוע באופן מובהק?

ב. כיצד הייתה התשובה לסעיף א משתנה אם כל השכיחויות בטבלה של תוצאות המדגם היו מוכפלות פי 2?

ג. בנו רווח סמך לשיעור המצביעים למפלגה א השבוע ברמת סמך של 95%.

	מפלגה א	מפלגה ב	מפלגות אחרות	סה"כ
שבוע שעבר				
השבוע	143		253	550
סה"כ	243	314		1050

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בחנות בגדים A בדקו את התפלגות הצבעים של הבגדים הנמכרים ביום מסוים. כמו כן בדקו את התפלגות הצבעים בחנות שכנה B:

מספר פריטים / צבע	שחור	לבן	אדום	כחול
חנות A	15	20	15	50
חנות B	60	20	10	20

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם התפלגות הצבעים בחנות A היא ביחס של 3:1:1:1 לטובת הכחול.

ב. בדוק ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים הבדל בין החניות מבחינת התפלגות הצבעים של הפריטים הנמכרים.

6) סטודנט קיבל בבדיקת השערות ערך χ^2 (chi-square) השוו לאפס.
הסטודנט הסיק כי לא קיימת תלות בין שני המשתנים שבדק, בכל רמת מובהקות. נכון / לא נכון? נמקו.

7) להלן טבלת O של שני משתנים שהתקבל במדגם כלשהו:

$f(x)$	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	
200					X_1
200					X_2
	160	120	60	60	$f(y)$

מה צריכות להיות השכיחויות בתוך הטבלה כדי שמובהקות התוצאה (PV) תהיה 100%?

תשובות סופיות

1) נסיק שיש קשר בין גודל הארגון לשביעות הרצון של העובדים.

2) נסיק שאין הבדל מובהק בין שיעור הפגומים במשמרות השונות.

3) נסיק שאין קשר בין היות מוצא לייצוא למועד שבו הוא יוצר.

4) א. 10% ב. קטן ג. (0.223,0.297)

5) א. נסיק שהתפלגות הצבעים בחנות היא כמו שמצוין.
ב. נסיק שיש הבדל בין החנויות מבחינת התפלגות הצבעים.

6) נכון

7) להלן טבלה:

$f(x)$	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	
200	80	60	30	30	X_1
200	-8	60	30	30	X_2
400	160	120	60	60	$f(y)$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הקשר בין מבחן לאי תלות ובדיקת השערות להפרש פרופורציות – רקע

מבחן לאי תלות שבו לכל משתנה יש שתי קטגוריות שקול לבדיקת השערות דו צדדית על הפרש פרופורציות כאשר השערת האפס היא שהפרופורציות שוות. כל זאת, כמובן, אם התנאים למבחנים מתקיימים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בקרב מדגם של 200 נשים 120 טענו שהן תצבענה למועמד R לראשות העיר. בקרב מדגם של 200 גברים 80 טענו שהם יצביעו למועמד R האם קיים הבדל בין דפוס ההצבעה של הנשים ושל הגברים? האם אפשר לבדוק זאת גם על ידי מבחן לאי תלות וגם על ידי בדיקת השערות לשתי פרופורציות?

שאלות

1) בקרב מדגם של 200 נשים 120 טענו שהן תצבענה למועמד R לראשות העיר. בקרב מדגם של 200 גברים 80 טענו שהם יצביעו למועמד R האם קיים הבדל בין דפוס ההצבעה של הנשים ושל הגברים?
בדוק ברמת מובהקות של 5%.

א. על ידי מבחן לאי תלות.

ב. על ידי בדיקת השערות לשתי פרופורציות.

2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.

ב. האם ניתן להגיד שהסיכוי להימצא במצב בריאותי תקין גבוה יותר כאשר עוסקים בפעילות גופנית סדירה לעומת המצב שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה? בדוק ברמת בטחון של 90%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) נדחה את השערת האפס לפירוט הדרך ראה וידאו.

2) א. להלן טבלה: ב. נדחה את השערת האפס.

פעילות/מצב בריאותי	תקין	לא תקין	
סדירה	50	10	60
לא סדירה	90	50	140
	140	60	200

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 25 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

1. כללי 227

ניתוח שונות חד כיוונית

רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיווני) הוא מבחן להשוואת תוחלות $(\mu_{1..},\mu_k)$ של k אוכלוסיות שונות.
לכן, בניתוח שונות, <u>השערות</u> המחקר הן:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ (התוחלות של כל האוכלוסיות שוות)

$H_1:$ אחרת (לפחות שתיים מהתוחלות שונות)

ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

2) בכל אוכלוסייה מתוך k האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.
3) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות σ^2.
4) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם k רמות (levels).
כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה:
נסמן ב- n_i את גודל המדגם בקבוצה i.

$n = \sum_{1}^{k} n_i$ - מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).

$\overline{X}_1$ - ממוצע המדגם הראשון,....., $\overline{X}_k$ -ממוצע המדגם ה- k -י.

$\overline{X}$ - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

סכום ריבועים בין הקבוצות: $SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i \left[\overline{X}_i - \overline{X}\right]^2$

סכום ריבועים בתוך הקבוצות: $SS_W = \sum_{i=1}^{k} n_i \left[n_i - 1\right] \bullet \hat{S}_i^2$

סכום ריבועים כללי: $SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \overline{X}]^2$

$$SST = SSB + SSW$$

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה:

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מקור השונות	סכום הריבועים SS	דרגות חופש df	ממוצע הריבועים MS	F
בין הקבוצות - B	SSB	$k-1$	$\frac{SSB}{k-1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
בתוך הקבוצות - W	SSW	$n-k$	$\frac{SSW}{n-k}$	
סה"כ - T	SST	$n-1$		

$$F=\frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}}\sim F\left(k-1,n-k\right)$$

אזור דחיית H_0 : $1-\alpha$: $F>F_{(k-1,n-k)}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש: קבוצה 1קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן".
כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.

א. מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
מהו ה"גורם" וכמה רמות יש לו?

ב. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.

ג. מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

2) בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה.
להלן הציונים שהתקבלו:

"המתמיד"	"רבין"	"הס"
78	98	85
65	62	83
70	55	74
90	80	85
56		75

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.

ב. מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?

ג. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.

ד. מלאו את טבלת ANOVA.

ה. רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.

ו. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

3) מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות.
בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

השיטה	A	B	C	D
גודל המדגם	12	14	8	12
הממוצע	178	172	180	182
סטיית התקן	4	8	5	3

א. רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.

ב. מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

ג. האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.
האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.

האופה	ניר	מוזס	שלום
סכום הזמנים	206	212	182
סכום ריבועי הזמנים	10644	11250	8982

5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים.
השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם : 10 מ״ג, 20 מ״ג ו-30 מ״ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה ניבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

ANOVA

pulse

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000
Within Groups	126.000	12	10.500		
Total	540.400	14			

pulse

Tukey HSD[a]

dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
30.00	5	71.0000	
20.00	5		80.2000
10.00	5		83.4000
Sig.		1.000	.299

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

pulse
Tukey HSD

(I) dosage	(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
10.00	20.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675	8.6675
	30.00	12.40000*	2.04939	.000	6.9325	17.8675
20.00	10.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675	2.2675
	30.00	9.20000*	2.04939	.002	3.7325	14.6675
30.00	10.00	-12.40000*	2.04939	.000	-17.8675	-6.9325
	20.00	-9.20000*	2.04939	.002	-14.6675	-3.7325

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.

ב. הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.

ג. האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!

ד. לטבלת הANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת ״טוקי״. ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים:

א. כמה בתי ספר יש בעיר?

ב. כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?

ג. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%

ד. בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

Oneway

ANOVA

grade

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Homogeneous Subsets

grade

Scheffe[a]

school	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
3.00	5	45.0000	
4.00	5	45.4000	
2.00	5		76.4000
1.00	5		81.8000
5.00	5		84.4000
Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. משתנה בלתי תלוי: סוג התרופה.
משתנה תלוי: הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ב. ניתוח שונות חד כיווני
$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1: otherwise$

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.
$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1: otherwise$
הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. משתנים מתפלגים נורמלית.
3. שוויון שונות.

ב. גודל המדגם: 14. משתנה ב"ת: בית הספר, בעל 3 רמות.

ג. $\bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93$, $\bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29$, $\bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46$.

ד. להלן טבלה:

מקור השונות	SS	df	MS	F
B	200.6	2	100.3	
W	1904.75	11	173.2	
סה"כ	2105.35	13		0.58

ה. $F > 3.98$.

ו. נקבל את H_0 .

3) א. $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
$H_1: otherwise$

ב. נדחה את H_0 .

ג. כן.

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) נקבל את H_0 : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

5) $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
$H_1 : otherwise$

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את H_0 : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

6) להלן טבלה:

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450 ב 2		178.725 ג	18.36 ה	.000
Within Groups	165.5 א	17	9.735 ד		
Total	522.950	19			

7) א. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1 : otherwise$

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. משתנים מתפלגים נורמלית.
3. שוויון שונות.

נדחה את H_0 : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

ב. ראה וידאו. ג. כן. ד. $\mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30}$.

8) א. 5 ב. 25

ג. נדחה את H_0 : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

ד. $(\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 26 - מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

תוכן העניינים

1. מקדם המתאם הלנארי (פירסון) 236
2. חישוב מקדם המתאם הלנארי (פירסון) 247
3. בדיקת השערות על מקדם המתאם הלנארי 252

מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים.
שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים.
מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה.
בדרך כלל המשתנה המוצג כ- Y הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- X הוא המשתנה הבלתי תלוי.
תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- X ושיעור ה- Y שלה.
דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

מספר חדרים בדירה	2	2	3	2	3	3	4	4
מספר הנפשות בדירה	0	1	2	2	3	4	4	5

1) כמה תצפיות ישנן בדוגמה?

2) כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?

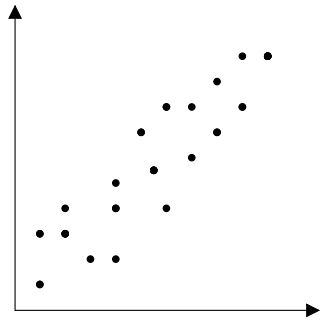
3) שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.

4) מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

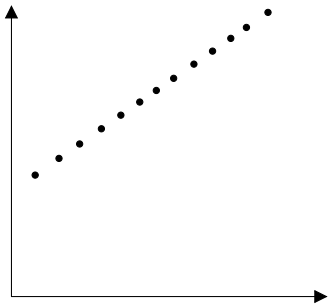
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

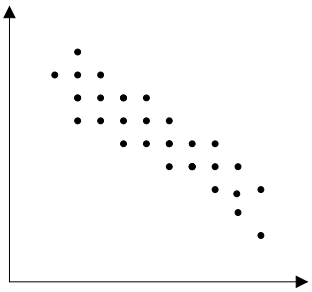
קשר לנארי חיובי חלקי



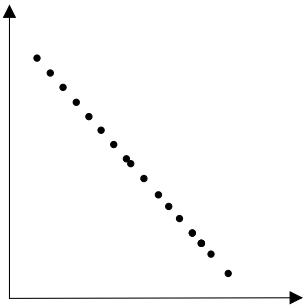
קשר לנארי חיובי מלא



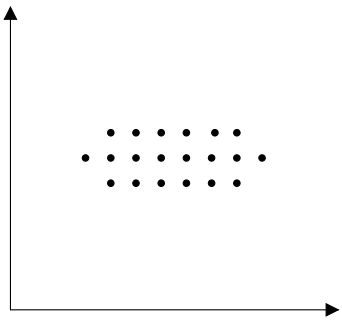
קשר לינארי שלילי חלקי



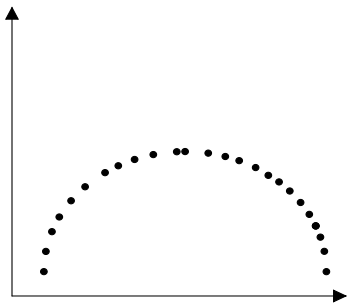
קשר לינארי שלילי מלא



אין קשר



אין קשר לינארי



משמעות מקדם המתאם:

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון.

מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

-1 0 1

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מקדם מתאם 1-או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם-1) מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a שלילי.

מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלנארי, ואת כיוון הקשר.

מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר ρ.

קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את X ב- Y התוצאה תהיה זהה.

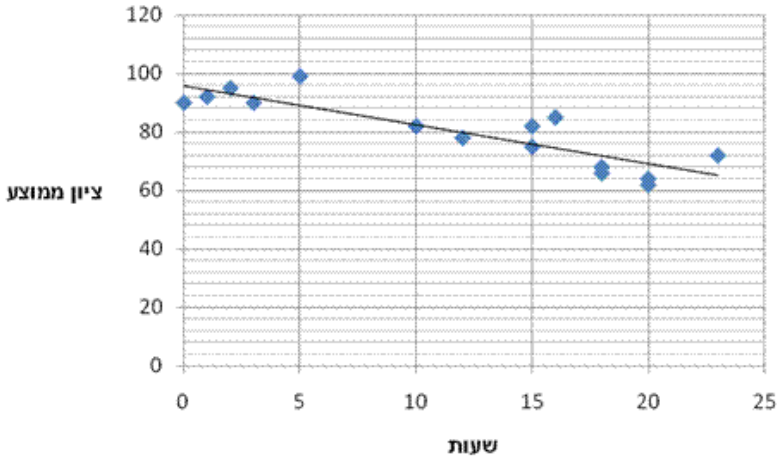
דוגמה (פתרון בהקלטה):

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:



א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?

ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?

2) להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

	ספורט	לשון	מתמטיקה
ספורט	?	-0.7	?
לשון	?	?	0.6
מתמטיקה	-0.1	?	?

א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.

ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

3) במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

שעות תרגול	ציון סופי
20	90
25	90
30	95
15	60
30	90
20	85
10	50

א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?

ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.

ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?

ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

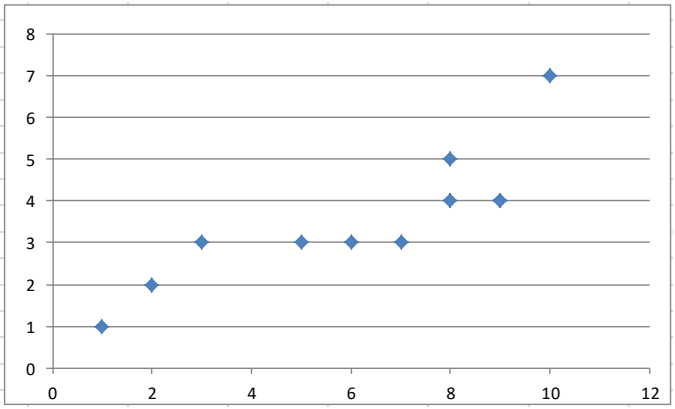
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ״מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

א. השלימו את המשפט:
בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.

ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו להשוות אותה לנתונים מארה״ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$.
כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנייט לכמות המשקעים במ״מ?

5) להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:



א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי _____ (מלא\ חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי \שלילי).

ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה- X שלה הוא 4 וערך ה- Y שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה _____ (גדל\ קטן\ לא משתנה).

שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):

6) חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:

א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.

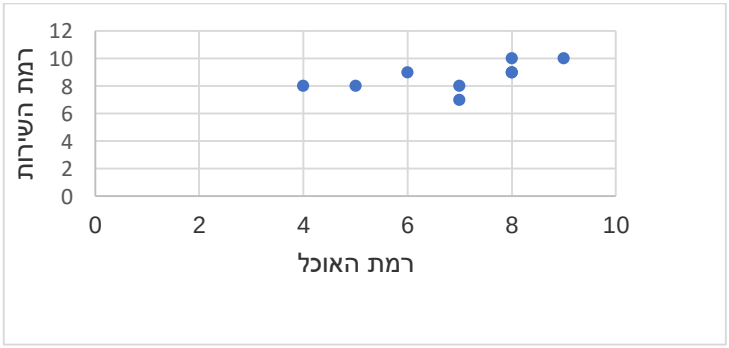
ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.

ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.

ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

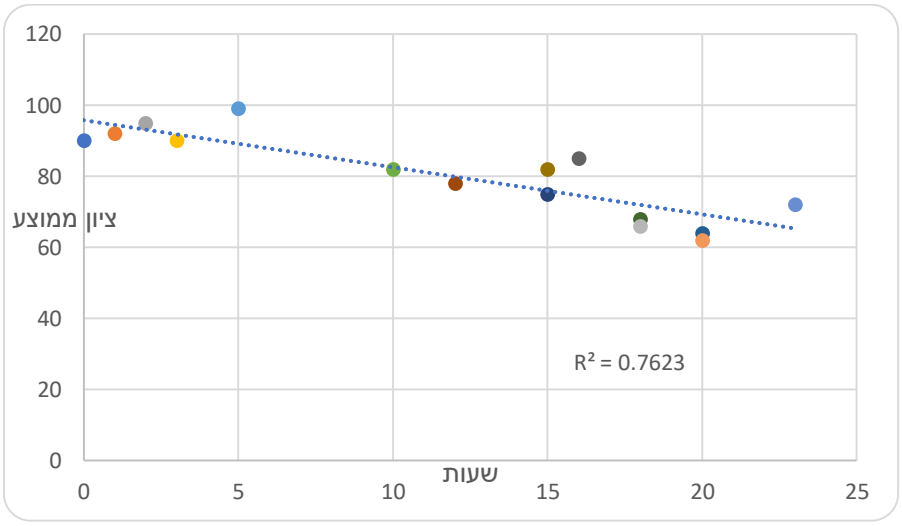
7) בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.



מה יהיה ערכו של מקדם המתאם (r)?

א. $r=-0.3$
ב. $r=0$
ג. $r=1.125$
ד. $r=0.593$

8) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.

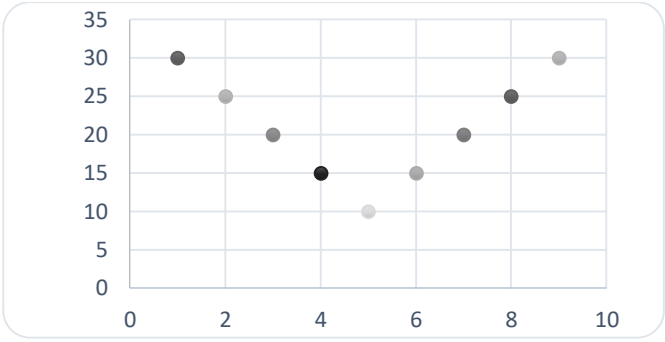


מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

א. ככל שמבלים יותר הציון נוטה לרדת.
ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
ג. ככל שמבלים פחות הציון נוטה לרדת.
ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



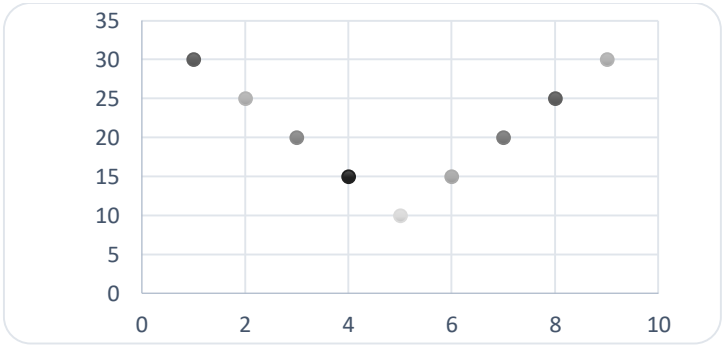
א. $r = 1$ היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.

ב. $r = 2$ היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.

ג. $r = 0$ היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.

ד. $r = \pm 1$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

10) התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.



איזו טענה נכונה?

א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.

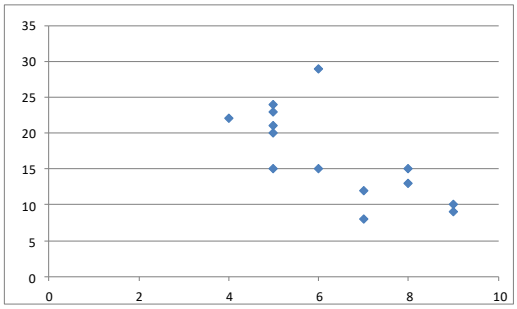
ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.

ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.

ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים:



X - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)
ו- Y (משתנה תלוי).
במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.

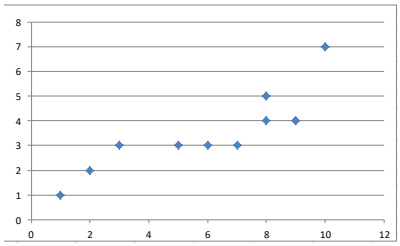
11) לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של r?

א. -0.52
ב. 0.72
ג. -0.72
ד. 0.52

12) אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי:

א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.
ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.
ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.
ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

13) להלן דיאגרמת פיזור:



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

14) בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל: $r = -1$.

א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.
ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.
ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.
ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

15) לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר ____ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

א. חיובי

ב. שלילי

ג. אפסי

ד. לא ניתן לדעת.

16) מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

		159
		170
		180
		185
		204
		224
		236
		212
		168
		189
		195
		163
		187
		206
		201
		223
		242
		203
		205
197.47	AVERAGE	
536.25	VARPA	

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

א. -1

ב. 1

ג. -0.5

ד. 0.5

17) מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.

ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.

ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.

ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

18) אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

א. 1

ב. 0

ג. -1

ד. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

19) נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין X – ציון בבגרות בלשון ל Y – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?

א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.

ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.

ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.

ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

20) עבור סדרה של תצפיות מדדו את X ואת Y. נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של Y ירד הערך של X בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח:

א. 1

ב. -1

ג. 0

ד. אף אחת מהתשובות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. שעות בילוי. ב. הקשר חלקי, כיוון הקשר שלילי .

2) א. להלן טבלה :

	ספורט	לשון	מתמטיקה
ספורט	1	-0.7	0.1
לשון	-0.7	1	0.6
מתמטיקה	-0.1	0.6	1

ב. ספורט ולשון.

3) א. ב"ת- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון. ב. ראה גרף בפתרון וידאו.
ג. קשר לינארי חיובי חלקי. ד. מקדם המתאם לא היה משתנה.

4) א. לעלות. ב. לא ישפיע על מקדם המתאם.

5) א. חלקי, חיובי. ב. קטן.

6) ד'. **7)** ד'. **8)** א'. **9)** ג'. **10)** א'.

11) ג'. **12)** ד'. **13)** ב'. **14)** א'. **15)** א'.

16) א'. **17)** ד'. **18)** א'. **19)** ד'. **20)** ד'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה.
בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).

דוגמה:

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד – X מסבירה את ההכנסה שלו Y. במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

שלב ראשון: נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:
X -מס' חדרים בדירה. Y-מס' נפשות הגרות בדירה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הדיאגרמה המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור וננתח אותן (הדיאגרמות המלאות בסרטון).

שלב שני: מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.
מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם 1-).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

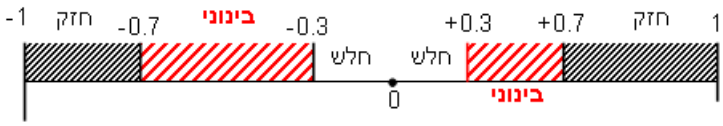
מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

מתאם שלילי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר:



מקדם המתאם יסומן באות r.

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

שונות משותפת: $COV(x,y)=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}=\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}$

שונות של המשתנה X: $s_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2$

שונות המשתנה Y: $S_Y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n}-\bar{y}^2$

מקדם המתאם הלינארי: $r_{xy}=\frac{COV(x,y)}{S_x\cdot S_y}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	2	1	0	2	3	4
ציון	80	90	90	70	70	50

א. שרטטו דיאגראמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר ביו מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?

ב. חשבו את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?

ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:

X	Y
10	12
14	15
15	15
18	17
20	21

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

3) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i-1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76 \qquad \sum_{i-1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 60.8$$

א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i-1}^{20} X_i^2 = 2960 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y.

5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

6) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$, $S_x = S_y = 1$.
לכן, מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:

א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.

ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

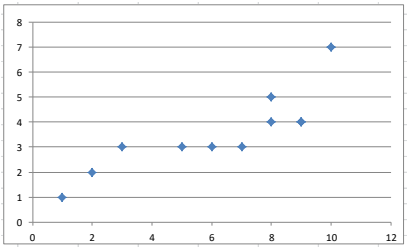
ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה-4.2₪).
מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

א. 1
ב. 0
ג. 4.2
ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגראמת פיזור:
מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?



א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

תשובות סופיות

1) א. משתנה תלוי: ציון, משתנה ב"ת: מס' חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחלקי בין מספר החיסורים לציון התלמיד.
ב. 0.9325-. ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חלקי אך עוצמתו תחלש.

2) א. $\bar{y}=16$, $\bar{x}=15.4$ ב. $r_{xy}=0.96$.

3) א. 0.8.

4) 0.8.

5) 1.

6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.

7) ג'.

8) א'.

9) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי – רקע

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים באוכלוסייה. כאשר:
r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר ρ.

השערת האפס: תהיה שבאוכלוסייה לא קיים כלל קשר לינארי בין שני המשתנים $H_0:\rho=0$.

ההנחה שעליה אנו מתבססים בתהליך היא ששני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו נורמלית.

סטטיסטי המבחן: $t=\dfrac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}\sim t(n-2)$

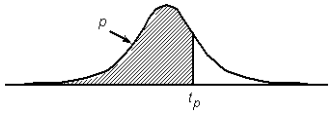
סטטיסטי זה מתפלג t עם $n-2$ דרגות חופש.

השערת האפס:	$H_0:\rho=0$	$H_0:\rho=0$	$H_0:\rho=0$
השערת המחקר:	$H_1:\rho\neq 0$	$H_1:\rho<0$	$H_1:\rho>0$
כלל ההכרעה: אזור דחייה של השערת האפס	$t\geq t_{1-\alpha}$ או $t\leq -t_{1-\alpha}$	$t\leq -t_{1-\alpha}$	$t\geq t_{1-\alpha}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת ערכים קריטיים של t - נספח: טבלת התפלגות T

P



דרגות חופש	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.709	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) להלן נתונים על הוותק בעבודה (בשנים) ועל השכלה (בשנים) במדגם של 10 עובדים:

נחקר	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X -ווותק	13	18	2	8	16	9	5	28	17	24
Y -השכלה	12	14	17	8	11	12	13	8	12	15

מקדם המתאם חושב והתקבל: 0.31-.

א. האם קיים מתאם בין וותק העובד להשכלתו? בדקו ברמת מובהקות של 5%?

ב. אם הוותק של העובד היה נמדד בחודשים האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה?

2) מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין גיל נשים בהריון לרמת ההמוגלובין שלהן בדם בזמן הריון. נדגמו 7 נשים והתקבלו התוצאות הבאות:

נחקרת	1	2	3	4	5	6	7
המוגלובין	14.7	13.5	9.7	12	10.8	13	10.3
גיל	39	34	30	29	28	26	23

במדגם חושב מדד הקשר של פירסון להיות 0.7.

א. האם ניתן לומר שבמדגם אם אישה היא יותר מבוגרת אזי בהכרח יש לה יותר המוגלובין בדם?

ב. האם ניתן לומר, ברמת מובהקות של 5%, שקיים מתאם בין גיל האישה שבהריון לבין רמת ההמוגלובין שלה בדם?

3) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8-.

א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים קשר לינארי שלילי בחודש ינואר בין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לבין המשקעים במעלות צלזיוס.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף א אם הינו מוסיפים עוד תצפיות למדגם?

ג. על סמך טבלת T המצורפת עבור אילו רמות מובהקות ניתן להחליט שקיים קשר לינארי שלילי מובהק?

4) מתווך דירות חישב את מקדם המתאם בין שטח דירה במרכז תל אביב לבין המחיר של הדירה עבור 17 דירות. מקדם המתאם שקיבל היה 0.6.

א. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם ניתן להגיד שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה במרכז תל אביב?

ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה בתל אביב.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. לא נדחה את H_0 .
ב. לא תשתנה.

2) א. לא
ב. לא נדחה את H_0 .

3) א. נדחה את H_0 .
ב. לא ניתן לדעת.
ג. לפחות 0.005.

4) א. נדחה את H_0 .
ב. $0.005 < P_V < 0.01$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 27 - מדד הקשר פירסון

תוכן העניינים

1. כללי 256

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון):

רקע:

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים.
מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה.
בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).
למשל, נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד X מסבירה את ההכנסה שלו Y. במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.
בשלב הראשון, נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:

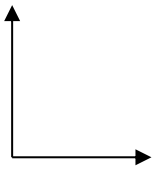
X - מס' חדרים בדירה.

Y - מס' נפשות הגרות בדירה.

להלן התוצאות שהתקבלו:

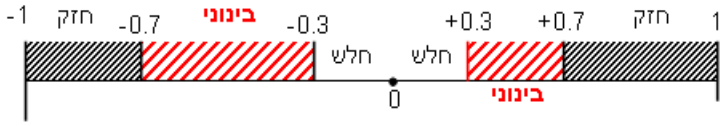
מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

נשרטט מנתונים הללו דיאגרמת פיזור:



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בשלב השני, מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים.
המדד (נקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.
מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.
מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם 1-).
מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.
מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.
ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר.
מקדם המתאם יסומן באות r.



כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

שונות משותפת: $COV_{(x,y)} = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\cdot\bar{y}$.

שונות של המשתנה X: $S_x^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$.

שונות המשתנה Y: $S_y^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i-\bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}}{n} - \bar{y}^2$.

מקדם המתאם הלינארי: $r_{xy} = \frac{COV(x,y)}{S_x \cdot S_y}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן.
בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס
וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	ציון
2	80
1	90
0	90
2	70
3	70
4	50

א. שרטט דיאגראמת פיזור לנתונים.
מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?

ב. חשב את מדד הקשר של פירסון.
האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?

ג. הסבר ללא חישוב כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו.
לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים הללו עבור חמישה חולים.
להלן התוצאות שהתקבלו:

Y	X
12	10
15	14
15	15
17	18
21	20

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים?
ומה משמעות התוצאה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

3) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \ , \ \sum_{i-1}^{20}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = 76 \ , \ \sum_{i-1}^{20}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = 76 \ ,$$

$$\sum_{i-1}^{20}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right) = 60.8 .$$

א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א'?

4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \ , \ \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i^{\,2} = 2960 \ , \ \sum_{i=1}^{20} Y_i^{\,2} = 2080 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464 .$$

חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y.

5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב- 3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

6) להלן רשימת טענות. לגבי כל טענה קבע נכון/לא נכון ונמק!

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל: $\bar{X} = \bar{Y} = 6 \ , \ S_x = S_y = 1$ לכן מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:

א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.

ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

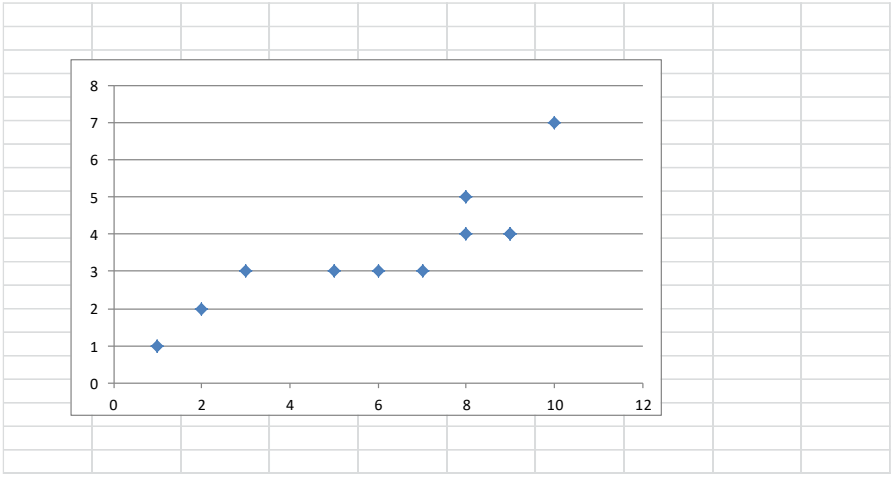
ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) נלקחו 20 מוצרים וניבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה 4.2 ₪).
מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר ב-₪?

א. 1.
ב. 0.
ג. 4.2.
ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגראמת פיזור:



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1.
ב. 0.85.
ג. 0.15.
ד. 0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) ב. -0.9325.
2) א. $\overline{y}=16$, $\overline{x}=15.4$. ב. $r_{xy}=0.96$.
3) א. 0.8.
4) 0.8.
5) 1.
6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.
7) ג'.
8) א'.
9) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 28 - מבוא לרגרסיה

תוכן העניינים

1. כללי 262

מדדי קשר – רגרסיה ליניארית:

רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הכמותיים נהוג לבצע ניבוי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר. מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X.
השיטה למציאת הקו הנ"ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים.

a - נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא נקרא החותך של הקו.

b - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים.

להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה: $b = r\frac{S_r}{S_x}$, $Y = bX + a$.

לצורך בניית קו ניבויים לניבוי X על סמך Y נצטרך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} \left(X_i - \overline{X} \right)^2 = 76 \ , \ \sum_{i=1}^{20} \left(Y_i - \overline{Y} \right) = 76 \ .$$

$$\sum_{i=1}^{20} \left(X_i - \overline{X} \right)\left(Y_i - \overline{Y} \right) = 60.8$$

א. חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?
ב. מצאו את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבירו את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.
ג. משפחת כהן הכניסה 15,000₪. מה ההוצאה הצפויה שלה?

2) נסמן ב- X את ההשכלה של אדם בשנות לימוד.
נסמן ב- Y את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$\mathrm{COV}\left(X,Y\right) = 7.5 \ , \ \overline{Y} = 8 \ , \ \overline{X} = 14 \ , \ S_Y = 5 \ , \ S_X = 2 \ .$$

א. חשבו את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.
ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?
ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000₪?

3) חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

א. על פי משוואת הרגרסיה, שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב-?
ב. על פי משוואת הרגרסיה, תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון?
ג. מהו קו הרגרסיה לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?

4) נתונים 2 משתנים X ו- Y. כמו כן נתון: $\overline{X} = 1.5$, $S_x = S_y = 4$,
וכן שקו הרגרסיה של Y על בסיס X הינו: $Y = -0.2X + 0.5$.
חשבו מהו מקדם המתאם בין X ל- Y.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.8. ב. $Y=0.8X+0.4$. ג. 12.4 אלפי ₪.

2) א. 0.75. ב. 4.25 אלפי ₪. ג. 14.6 שנים.

3) א. 1.2. ב. 29. ג. $Y=1.2X+29$.

4) -0.2.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 29 - המשך מבוא לרגרסיה

תוכן העניינים

1. כללי 265

מדדי קשר – רגרסיה – שונות מוסברת ושונות לא מוסברת:

רקע:

המטרה ברגרסיה היא להסביר את השונות של המשתנה התלוי.
למשל, להסביר את השונות של המשכורת באמצעות הוותק או להסביר את השוני בציונים באמצעות כמות החיסורים.

r^2 - החלק מהשונות של המשתנה התלוי מוסבר. השונות המוסברת נקראת גם שונות ניבויים. השונות הלא מוסברת נקראת גם שונות טעויות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נמצא קשר חיובי בעוצמה של 0.7 בין שטח דירה למחירה. כמו כן, נתון שסטיית התקן של מחירי הדירות הינה 200.

א. איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות מוסבר על ידי שטח הדירה?

ב. איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות לא מוסבר על ידי שטח הדירה?

ג. מהי השונות המוסברות ומהי השונות הלא מוסברת של מחירי הדירות?

2) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו!

א. אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.

ב. אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y היא 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

3) בקשר בין שני משתנים התקבל: $r^2 = 0.64$, לכן:

א. ללא יוצא מן הכלל ככל שערכי משתנה אחד עולה השני יעלה.

ב. 64% מהשונות של משתנה אחד מוסבר על ידי המשתנה השני.

ג. הקשר בין שני המשתנים הוא בעוצמה של 0.64.

ד. כל התשובות נכונות.

4) אם מגדילים את r^2, ניתן לומר כי:

א. אחוז השונות המוסברת יקטן.

ב. אחוז השונות המוסברת יגדל.

ג. אחוז השונות המוסברת יישאר ללא שינוי.

ד. סטיית התקן משתנה.

ה. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בקורס מבוא לכלכלה ניתנו במשך השנה שני מבחנים: מבחן בסוף סמסטר א' X ומבחן בסוף סמסטר ב' Y. כאשר בנו את קו הרגרסיה של הציון במבחן סוף סמסטר ב' לפי הציון במבחן סוף סמסטר א התקבלה שונות טעויות של 80, ושונות ניבויים של 20.
לפי נתונים אלו, מקדם המתאם בין הציון במבחן סוף סמסטר א' לבין הציון במבחן סוף סמסטר ב' הוא:

א. 0.44.

ב. 0.44 -.

ג. עוצמת ההקשר הלינארי היא 0.44, אך אין אפשרות לדעת את סימנה.

ד. אין אפשרות לחשב את מקדם המתאם.

ה. 0.35.

תשובות סופיות:

1) א. 49%. ב. 51%.
ג. שונות מוסברת: 19,600, שונות לא מוסברת: 20,400.

2) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון.

3) ב'.

4) ב'.

5) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סטטיסטיקה

פרק 30 - רגרסיה פשוטה

תוכן העניינים

1. כללי 268

רגרסיה פשוטה:

רקע:

רגרסיה ליניארית פשוטה מסתמכת על המתאם הליניארי בין המשתנה התלוי (המנובא) לב"ת (המנבא).

מקדם המתאם: $r = \frac{\text{cov}(x,y)}{S_x \cdot S_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2\right)}} = \frac{SXY}{\sqrt{SXX} \cdot \sqrt{SYY}}$.

המודל באוכלוסייה: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$

כאשר:

β_0 הוא החותך.

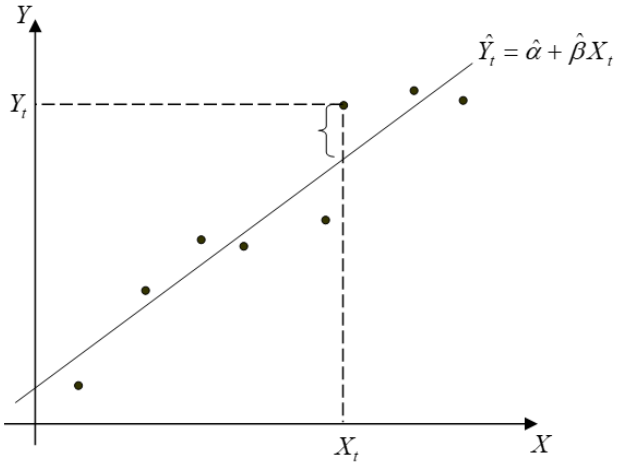
β_1 הוא שיפוע.

ε_i הינו גורם הטעות מסביב לקו הליניארי.

המודל הנאמד (על סמך מדגם): $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$.

לסיכום:

1. במודל $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, α ו- β הם מספרים קבועים אך לא ידועים. אנו יכולים להעריך אותם ולקבל אומדים (תהליך קבלת האומדנים נקרא אמידה).
2. $\hat{\alpha}$ הוא האומד ל- α. $\hat{\beta}$ הוא האומד ל- β.
3. אומדי ריבועים פחותים (אר"פ) הם אומדים שחושבו בשיטת הריבועים הפחותים. אומדי הריבועים הפחותים מסומנים בד"כ ע"י 'כובע' - $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$.
4. בעוד α ו- β הם קבועים, $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ הם משתנים מקריים. מדוע? מפני שבכל מדגם מתקבלים $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ אחרים.
5. את α ו- β אי אפשר לדעת, ולכן אי אפשר לדעת מהו הקו האמיתי, וכן אי אפשר לדעת את ε.
6. אפשר לדעת את e, שהיא הסטייה מקו הרגרסיה. נגדיר זאת באופן הבא:
   - עבור X_i, הערך הצפוי של המשתנה המוסבר ($\hat{Y}_i$) המתקבל לפי הרגרסיה הוא: $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t$.
   - הסטייה של התצפית (Y_t) מהערך הצפוי לפי הרגרסיה ($\hat{Y}_t$) היא: $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$.



האומדים של הרגרסיה $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$:

שיטת האמידה של α ושל β נקראת שיטת הריבועים הפחותים
Ordinary Least Squares (OLS).
השאלה הנשאלת בשיטת אמידה זו היא:
איזה $\hat{\alpha}$ ו-$\hat{\beta}$ יביאו למינימום את סכום ריבועי טעויות האמידה.

ובתרגום מתמטי: $\min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum e_t^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \left(y_t - \hat{y}_t\right)^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \left[y_t - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t\right)\right]^2 = ?$.

מתוך גזירת הפונקציה הזו מתקבלים האומדים $\hat{\beta}$ ו-$\hat{\alpha}$: $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$.

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{SXY}{SXX} = \frac{COV\left(X,Y\right)}{V\left(X\right)} = r\frac{S_Y}{S_X}.$$

מבחני המובהקות:

השערות: $\begin{matrix} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{matrix}$.

ברגרסיה פשוטה בה יש לנו רק מנבא אחד: ניתן לבצע מבחן F למובהקות משוואת הרגרסיה או מבחן T למובהקות מקדם הרגרסיה (הביטא).
משמעות דחיית השערת האפס: משוואת הרגרסיה מובהקת, מקדם הרגרסיה מובהק, הקשר בין X ל-Y מובהק.
ולהיפך – אם השערת האפס לא נדחית: אין הוכחה לקשר בין המשתנים X ו-Y, משוואת הרגרסיה איננה מובהקת וכך גם מקדם הרגרסיה.

אמידת שונות הטעויות: $\hat{\sigma}^2 = MSE = \frac{SSE}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = \frac{\left(1-r^2\right)SST}{n-2}$.

מבחן F:

מבחן זה נעשה על מנת לבדוק האם משוואת הרגרסיה מובהקת.

המבחן מתבסס על פירוק סכום הריבועים: $SST = SSR + SSE$.

$S_Y^2 \qquad r^2 S_Y^2 \quad (1-r^2)S_Y^2$

טבלת ניתוח שונות (טבלת ANOVA):

מקור	סכום ריבועים SS	דרגות חופש $d.f.$	ממוצע סכום ריבועים $MS = \frac{SS}{d.f.}$	F
מודל הרגרסיה	SSR	1	$MSR = \frac{SSR}{1}$	$\frac{MSR}{MSE}$
שאריות	SSE	$n-2$	$MSE = \frac{SSE}{n-2}$	
סה"כ	SST	$n-1$		

כלל הכרעה:

אם: $F_{st} > F_c\alpha(1, n-2)$ נדחה את השערת האפס.

מבחן t:

מבחן זה נעשה על מנת לבדוק האם מקדם הרגרסיה מובהק.

סטטיסטי המבחן: $t_{st} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\wedge} \sim t_{c(n-2)}$.

$s.e.(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{SXX}}$

אם השערת האפס מתייחסת ל- β_0 (בדר"כ): $t_{stt} = \frac{r^2\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$.

כלל הכרעה:

	השערה חד צדדית ימנית $H_1:\beta_1>\beta_{1,0}$	השערה חד צדדית שמאלית $H_1:\beta_1<\beta_{1,0}$	השערה דו צדדית $H_1:\beta_1\neq\beta_{1,0}$
סטטיסטי המבחן	$t_{statistic}=\dfrac{\hat{\beta}_1-\beta_{1,0}}{\overset{\wedge}{s.e.}\left(\hat{\beta}_1\right)}=\dfrac{r^2\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$, $\overset{\wedge}{s.e.}\left(\hat{\beta}_1\right)=\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{SXX}}$		
אזור דחייה	$t_{statistic}\geq t_{n-2,1-\alpha}$	$t_{statistic}\leq -t_{n-2,1-\alpha}$	$\lvert t_{statistic}\rvert\geq t_{n-2,1-\alpha/2}$
P-VALUE	$P\left(t_{n-2}>t_{statistic}\right)$	$P\left(t_{n-2}>t_{statistic}\right)$	$2*P\left(t_{n-2}>\lvert t_{statistic}\rvert\right)$

- שימו לב כי במודל של רגרסיה ליניארית פשוטה ערך ה-t סטטיסטי שהתקבל שווה בדיוק לשורש של ערך F המחושב: $t=\sqrt{F}$. $Pvalue=Pvalue$

רווח סמך לאמידת β:

$1-\alpha$ = (גבול תחתון $\leq\beta\leq$ גבול עליון) p.

$\hat{\beta}_1\pm t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\overset{\wedge}{s.e.}\left(\hat{\beta}_1\right)$.

מדד טיב ההתאמה R^2:

מדד שנותן את פרופורציית השונות המוסברת. כמה מהשונות של Y מוסברת על ידי השונות של X:

(X מסביר את כל השונות של Y): $0\leq R^2=\dfrac{SSR}{SST}=1-\dfrac{SSE}{SST}\leq 1$ (X לא מסביר כלום מהשונות של Y).

נרצה פרופורציית שונות מוסברת קרובה ככל האפשר ל-1.

אחוז השונות המוסברת: $R^2\cdot 100$.

רב"ס שמטרתו לאמוד את תוחלת ערכי המשתנה התלוי (μ_0) עבור ערך מסוים של המשתנה הב"ת (x_0). במילים אחרות אנו מתבקשים לאמוד את הניבוי באוכלוסייה עבור ערך מסוים של X.

האומד הנקודתי (הסטטיסטי) סביבו בנוי הרב"ס הוא הניבוי במדגם עבור אותו

ה- X : $\hat{\mu}_0 = \hat{y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_0$.

נוסחת הרב"ס : $\hat{\mu}_0 \pm t_{n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{MSRES \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{SSX}\right)}$.

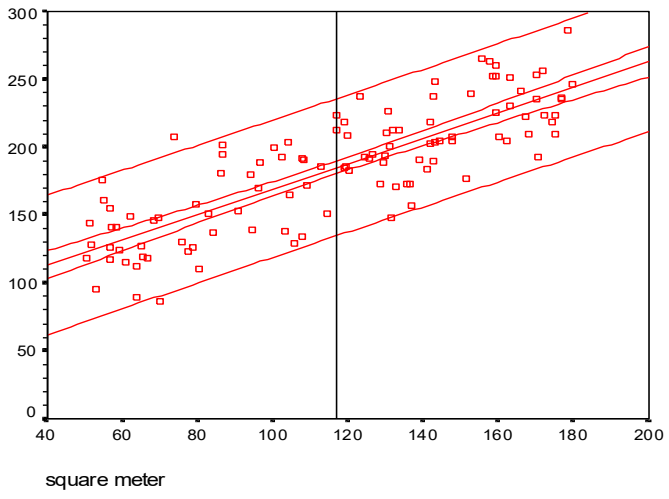
טעות התקן/גודל הרב"ס מושפעים מ-4 גורמים :

1. $MSRES$ - האומד לשונות הטעויות. ככל שגדל, טעות התקן/הרב"ס גדלים ולהפך.
2. n - גודל המדגם. ככל שגדל, טעות התקן/הרב"ס קטנים ולהפך.
3. SSX - מונה השונות של X (קשור לתופעת קיצוץ תחום). ככל שגדל, טעות התקן/הרב"ס קטנים ולהפך.
4. $(x_0 - \bar{x})$ - הסטייה של ערך X המסוים מהממוצע של X . ככל שגדלה טעות התקן/הרב"ס גדלים ולהפך.

רב"ס לערכי Y עבור ערך מסוים של X :
רב"ס שמטרתו לאמוד את כל טווח ערכי Y (y_0) עבור ערך X מסוים (x_0).

נוסחת הרב"ס : $\hat{\mu}_0 \pm t_{n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{MSRES \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{SSX}\right)}$.

ניתן לראות כי גם רב"ס זה בנוי סביב האומדן הנקודתי לתוחלת ערכי Y עבור ערך ה- X המסוים ($\hat{\mu}_0$).
ההבדל בין רב"ס לערכי Y לבין הרב"ס לתוחלת ערכי Y בא לידי ביטוי בטעות התקן. ניתן לראות כי טעות התקן של הרב"ס לערכי Y גדולה יותר מטעות התקן של הרב"ס לתוחלת ערכי Y . כאשר כל יתר הפרמטרים נשארים קבועים רב"ס זה יהיה רחב יותר מן הרב"ס לתוחלת.
התרשים הבא מתאר רב"ס לתוחלת ולערך המשתנה התלוי וממחיש זאת בבירור :



שאלות:

קו הרגרסיה:

1) מתווך דירות בתל אביב רצה לבדוק איך משפיע גודלה של דירה על המחיר שבו היא נמכרת. הוא הניח 2 הנחות מקדימות:

1. רק גודל הדירה משפיע על מחיר הדירה באופן שיטתי. כל שאר הדברים המשפיעים על מחיר הדירה הם אקראיים ולא ניתנים לחיזוי.
2. ההשפעה של גודל הדירה על מחיר הדירה היא ליניארית.

גודל הדירה הינו X ומחיר הדירה הינו Y. מודל המתווך: $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon$.

המתווך אסף נתונים על 6 דירות, שנמכרו בחודש האחרון באותו אזור:

מספר הדירה	גודל הדירה במ"ר	מחיר הדירה באלפי דולרים
1	$X_1 = 70$	$Y_1 = 190$
2	$X_2 = 70$	$Y_2 = 210$
3	$X_3 = 80$	$Y_3 = 250$
4	$X_4 = 100$	$Y_4 = 290$
5	$X_5 = 120$	$Y_5 = 360$
6	$X_6 = 120$	$Y_6 = 380$

א. מקדם המתאם בין גודל הדירה למחיר הדירה. מה משמעותו?

ב. קו הרגרסיה לניבוי מחיר הדירה באמצעות גודל הדירה ופרשו את משמעות המקדמים.

ג. המחיר החזוי על פי קו הרגרסיה של דירה בגודל 100 מ"ר.

מבחן F:

2) בצעו מבחן F לבדיקת הקשר בין גודל הדירה למחירה ברמת מובהקות של 1%.

מבחן t:

3) בהמשך לדוגמא הנ"ל:

א. בצעו מבחן t למובהקות מקדם הרגרסיה ברמת מובהקות של 1%.

ב. בדקו את הטענה כי עליה במ"ר אחד תעלה את מחיר הדירה ביותר מ-$2000.

ג. מהו ה-pvalue של מובהקות הקשר בין גודל הדירה למחירה. מה משמעותו?

קשר בין מבחן F למבחן t:

4) חשבו את סטטיסטי המבחן F על סמך סטטיסטי המבחן t שקיבלתם.
מה ה-pvalue של מבחן F?

5) חשבו רב"ס לאמידת מקדם הרגרסיה ברמת סמך של 0.99.
השוו עם תוצאות מבחן t.

6) חשבו את אחוז השונות המוסברת של מחיר הדירה על ידי גודלה.

רווח בר סמך לתוחלת:

7) השאלה מבוססת על נתוני דוגמא מס' 2 (ראו סרטון) והפלטים הבאים:

Case Summaries

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
SIZE square meter	112		39.13942	50.46	179.76
PRICE thousands $	112	185.0664	44.45345	86.20	286.56

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)					.000	60.979	91.015
	SIZE square meter		.062	.823	15.173	.000		

a. Dependent Variable: PRICE thousands $

Descriptive Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
SIZE square meter	116.740	39.139	112
PRICE thousands $	185.066	44.453	112
PRE_1 Unstandardized Predicted Value	185.066	36.568	112
RES_1 Unstandardized Residual	.000	25.277	112

חשב רב"ס ברמת סמך של 95% לתוחלת מחיר הדירה כאשר שטח הדירה הוא 100 מ"ר.

רווח בר סמך לערכי נעלם:

8) חשב רב"ס ברמת ביטחון של 95% למחיר הדירה עבור שטח דירה של 100 מ"ר. מה ההבדל בין רב"ס זה לרב"ס הקודם?

תרגול מסכם:

9) בפיצוציית "שלמה המלך" חושדים כי מספר הלקוחות המבקרים בפיצוצייה תלוי במחיר המכירה של הבירה במקום. לשם בדיקת הנושא ערכו ניסוי בו בכל שבוע שינו את מחיר הבירה במקום ומנו את מספר הלקוחות שהגיעו במשך אותו שבוע. משך הניסוי 7 שבועות עוקבים. להלן נתוני הניסוי:

	שבוע 1	שבוע 2	שבוע 3	שבוע 4	שבוע 5	שבוע 6	שבוע 7
מחיר הבירה	15	14	13	12	11	10	9
כמות הלקוחות	143	145	148	150	150	155	164

א. אמדו את מודל הרגרסיה ע"י חישוב מקדמי הרגרסיה.

ב. חשבו את מקדם המתאם r_{xy}.

ג. אמדו את השונות של שאריות המודל.

ד. בצעו בדיקה גראפית של אקראיות השאריות.

ה. חשבו את אחוז השונות המוסברת. מה משמעותה?

ו. בצעו חיזוי לכמות הלקוחות אם מחיר הבירה יהיה 16 ₪.
האם להערכתכם ניתן להסתמך על חיזוי זה?

ז. בצעו מבחן F לבדיקה האם קיים קשר בין מחיר הבירה לבין כמות הלקוחות.

ח. בצעו מבחן t לבדיקה האם קיים קשר בין מחיר הבירה לבין כמות הלקוחות המבקרים בפיצוצייה ברמת מובהקות 5%. השוו את התוצאות.

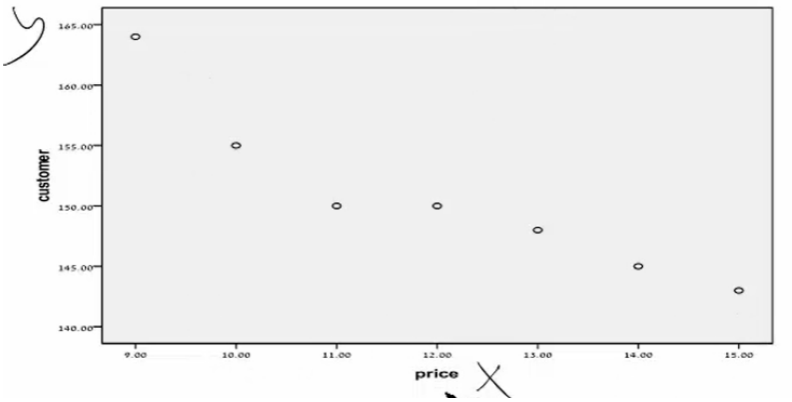
ט. אמדו את מקדם הרגרסיה ברמת סמך של 0.95. השוו את התוצאה עם הסעיף הקודם.

י. כתבו דו"ח קצר על הממצאים.

קריאת פלטים של SPSS:

10) על סמך הנתונים של השאלה הקודמת התקבלו הפלטים הבאים:

דיאגרמת הפיזור (scatter plot):



סטטיסטיקה תיאורית (descriptive statistics):

Descriptive Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
customer	150.7143	7.01699	7
Price	12.0000	2.16025	7

פלט מקדם המתאם (correlations):

Correlations

		customer	Price
Pearson Correlation	customer	1.000	-.935
	price	-.935	1.000
Sig. (1-tailed)	customer	.	.001
	price	.001	.
N	customer	7	7
	price	7	7

פלט model summary:

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.935[a]	.873	.848	2.73470

a. Predictors: (Constant), price

b. Dependent Variable: customer

פלט ניתוח שונות (ANOVA):

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	258.036	1	258.036	34.503	.002[a]
	Residual	37.393	5	7.479		
	Total	295.429	6			

a. Predictors: (Constant), price

b. Dependent Variable: customer

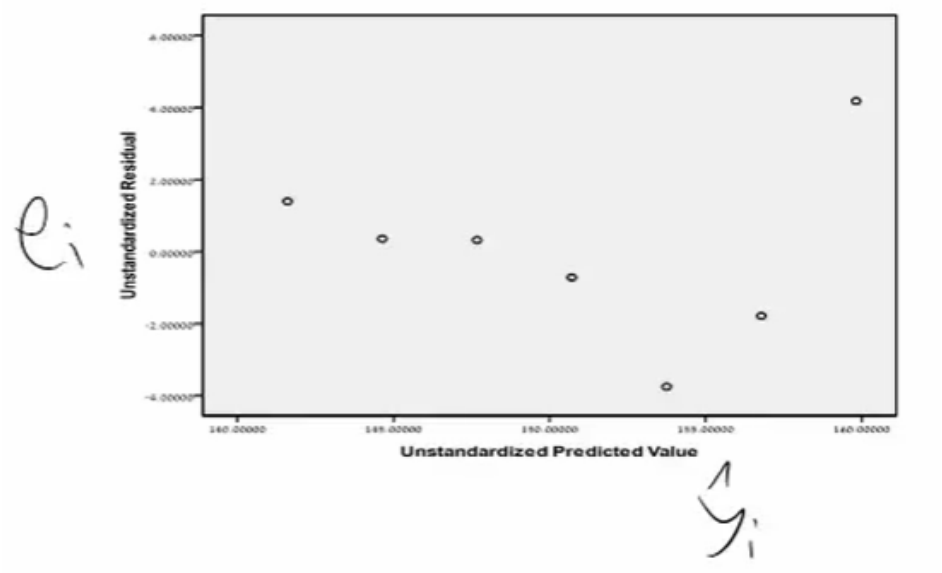
פלט מקדמי הרגרסיה (coeffitients):

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	187.143	6.287		29.765	.000
	Price	-3.036	.517	-.935	-5.874	.002

a. Dependent Variable: customer

גרף ניתוח שאריות:



על סמך הפלטים הנתונים:

א. מהו מודל הרגרסיה שנאמד?

ב. מהו מקדם המתאם r_{xy}?

ג. מהי השונות של שארית המודל?

ד. האם נמצא דפוס מיוחד בשאריות?

ה. מהו אחוז השונות המוסברת?

ו. על פי מבחן F: האם קיים קשר בין מחיר הבירה לבין כמות הלקוחות המבקרים בפיצוצייה ברמת מובהקות 5%?

ז. על פי מבחן t: האם קיים קשר בין מחיר הבירה לבין כמות הלקוחות המבקרים בפיצוצייה ברמת מובהקות 5%? השוו את התוצאות.

ח. מה ה-pvalue של המבחנים הסטטיסטיים? מה משמעותו?

ט. בדקו האם קיים קשר חיובי מובהק בין המשתנים ברמת מובהקות 5%?

תשובות סופיות:

1) א. $r=0.987$. ב. $\hat{Y}_t=-27.32+3.29X_t$. ג. 301.68 אלף דולר.

2) $F_{st}=21.198$, יש עדות לקשר מובהק.

3) א. $t_{stt}=4.604$. ב. יש עדות לכך. ג. $\text{pvalue}<0.001$.

4) $t_{stt}^2=147$, $\text{pvalue}<0.001$.

5) $p\left(2.061\le\beta\le4.519\right)=0.99$.

6) 97.4%.

7) $p\left(163.889\le\mu_{100}\le174.24\right)=0.95$.

8) $p\left(119.036\le Y_{100}\le219.09\right)=0.95$, רחב יותר.

9) א. $\hat{y}_i=187.143-3.0357x_i$. ב. $r=-0.93457$. ג. $\hat{\sigma}^2=7.4785$.

ד. ראו סרטון. ה. $R^2=0.873$. ו. $\hat{y}=138.5714$, כן.

ז. $F_{stt}=34.5>F_c0.05(1,5)=6.6$, יש עדות לכך. ח. $t_{st}=-5.87395$.

ט. $p\left(-4.36\le\beta\le-1.709\right)=0.95$. י. ראו סרטון.

10) א. $\hat{y}_i=187.143-3.036x_i$. ב. $r_{xy}=0.935$. ג. $\text{MSE}=7.479$.

ד. לא. ה. $R^2=0.874$. ו. $F=34.503$.

ז. $t=-5.874$. ח. $\text{pvalue}=0.002$. ט. ראו סרטון.

סטטיסטיקה

פרק 31 - רגרסיה מרובה

תוכן העניינים

1. כללי 280

רגרסיה מרובה:

רקע:

ניבוי המשתנה התלוי באמצעות יותר ממשתנה ב"ת אחד.

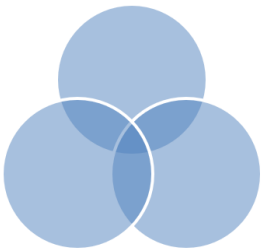
המודל באוכלוסייה: $y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n$.

מקדמי מודל הרגרסיה המרובה:

α = חותך אחד שמשמעותו: הציון המנובא כאשר כל המשתנים הב"ת = 0.

$\beta_1 ... \beta_J$ = מקדמי השיפוע. מס' הבטות = למספר המשתנים הב"ת במודל.

משמעות מקדם השיפוע β_J: ההשפעה הייחודית של המשתנה הב"ת המסוים לניבוי המשתנה התלוי, בניכוי השפעתם של כל יתר המשתנים הב"ת האחרים המצויים במשוואת הרגרסיה.



אמידת מודל הרגרסיה המרובה:

ברגרסיה מרובה, כמו ברגרסיה פשוטה, שיטת האמידה הטובה ביותר היא שיטת הריבועים הפחותים. כלומר, נרצה להביא את סכום הטעויות בניבוי למינימום.

מפתרון פונקציית הריבועים הפחותים נקבל את אומדי הרגרסיה: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1 ... \hat{\beta}_J$.

מבחני מובהקות:

1. מבחן F למובהקות הרגרסיה:

בדיקה האם קיים קשר ליניארי בין המשתנה התלוי Y לבין לפחות אחד מהמשתנים המסבירים.

ההשערות הן:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0$$

$$H_1 : Not \quad H_0 : at\ least\ one\ of\ the\ \beta's\ is\ not\ 0$$

טבלת ניתוח שונות (ANOVA):

מקור	סכום ריבועים SS	דרגות חופש $d.f.$	ממוצע סכום ריבועים $MS=\frac{SS}{d.f.}$	$F_{st}\sim F_{k,n-k-1}$
מודל הרגרסיה	SSR	k	$MSR=\frac{SSR}{K}$	$F_{st}=\frac{MSR}{MSE}$
שאריות	SSE	$n-k-1$	$MSE=\frac{SSE}{(n-k-1)}$	
סה"כ	TSS	$n-1$		

סטטיסטי המבחן: $F_{st}=\frac{MSR}{MSE}$.

כלל הכרעה: נדחה את H_0 אם: $F_{st}\geq F_{k,n-k-1}^{1-\alpha}$.

חישוב סכומי הריבועים:

$$TSS=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2$$

$$SSR=R^2\cdot TSS$$

$$SSE=(1-R^2)TSS$$

פרופורציית השונות המוסברת R^2:

$$R^2=\frac{SSR}{SST}=1-\frac{SSE}{SST}.$$

ברגרסיה מרובה אומד זה לפרופורציית השונות המוסברת הוא בעייתי שכן הוא מושפע ממספר המשתנים הב"ת במודל. אומד זה יכול רק לגדול בהוספת משתנים ב"ת למודל ולכן לא ייתן לנו אינדיקציה האם כדאי היה להוסיף אותם למודל או לא.

האומד המתוקן לפרופורציית השונות המוסברת $AdjR^2$:

$$\bar{R}^2=1-\left[\frac{(1-R^2)(n-1)}{n-k-1}\right].$$

בניגוד ל-R^2 לוקח בחשבון את מספר המשתנים הב"ת במודל. יכול שלא לגדול ואף לקטון בהוספת משתנה ב"ת שלא תורם תרומה משמעותית לניבוי.

2. מבחן t למובהקות משתנה ב"ת יחיד:

השערות: $\begin{matrix} H_0 : \beta_j = 0 \\ H_1 : else \end{matrix}$.

סטטיסטי המבחן וכלל הכרעת השערת האפס:

$$\left| t_{\hat{\beta}_i} \right| = \left| \frac{\hat{\beta}_i}{S_{\hat{\beta}_I}} \right| > t_{(T-k-1;1-\frac{\alpha}{2})}.$$

רווח בר סמך לאמידת ה- β_j: $\hat{\beta}_j \pm t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}} s.e.\left(\hat{\beta}_j\right)$.

3. מבחן F חלקי (partial F):

בודק את ההשערה שתוספת של משתנה אחד או קבוצה של משתנים מוסיפה תוספת מובהקת לניבוי המשתנה התלוי מעבר למשתנים אחרים שקיימים כבר במודל.

השערות: $\begin{matrix} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_p = 0 \\ H_1 : otherwise \end{matrix}$. $p < k$.

ביצוע המבחן:

מריצים שתי רגרסיות:

1. UR: המודל המלא – רגרסיה עם כל המשתנים הב"ת (K).
2. R: המודל החלקי – רגרסיה תחת H_0 ($K-P$).

סטטיסטי המבחן: $F = \frac{R_{UR}^2 - \frac{R_R^2}{p}}{\frac{1-R_{UR}^2}{n-k-1}} = \frac{SSR_{UR} - \frac{SSR_R}{p}}{\frac{1-SSR_{UR}}{n-k-1}} = \frac{SSE_R - \frac{SSE_{UR}}{p}}{\frac{1-SSE_{UR}}{n-k-1}}$.

כלל הכרעה: $F > f_{1-\alpha}^{p,n-k-1}$.

קשר בין מבחן F חלקי למבחן t:

קיים קשר בין מבחן F חלקי למובהקות תוספת משתנה ב"ת יחיד, למבחן t למובהקות אותו משתנה: $\begin{matrix} F > f_{1-\alpha}^{1,n-k-1} = t^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-k-1} \\ pvalue = pvalue \end{matrix}$.

מולטיקוליניאריות:

בעיית המולטיקוליניאריות:
מצב שבו המשתנים המסבירים הם בעלי מתאם גבוה בינם ולבין עצמם.
מתאמים גבוהים אלו יוצרים קושי ביכולת להבחין בהשפעה הבודדת של כל משתנה מסביר על המשתנה המוסבר.

כיצד מזהים בעיית מוליטיקוליניאריות?

- R^2 גדול וערכי t קטנים, או שדוחים את השערת האפס במבחן F אך לא במבחני t.
- מקדמי מתאם זוגיים גבוהים בין המשתנים המסבירים (לפי טבלת קורלציות).

איתור המולטיקולינאריות:

נבחר לרוב להוציא את אחד מהמשתנים לפי הקריטריונים הבאים:

1. המשתנה המתואם ביותר גם עם יתר המשתנים המסבירים.
2. המשתנה הכי פחות מובהק שהתקבל בהרצה הראשונית (לפי t).

אבחון קוליניאריות – מדד VIF (Variance Inflationary Factor):

מדד זה מבטא את הגידול (האינפלציה) בשונות של מקדם הרגרסיה של משתנה ב"ת מסוים כתוצאה מהמתאם שלו עם משתנים ב"ת אחרים המצויים במשוואה:

$$X_j = \frac{1}{\left(1-R_j^2\right)}.$$

R_j^2 הוא מקדם ההסבר של X_j, כל יתר המשתנים ב"ת.

כאשר: $VIF_j > 5$ המשמעות היא ש- X_j מתואם בצורה חזקה עם יתר המשתנים הב"ת במשוואה.

חישוב מובהקות התוספת (F חלקי) של משתנה ב"ת מסוים על פני האחרים:

במקרה של מולטיקוליניאריות במודל (מתאם חזק בין משתנים ב"ת) בכדי לדעת איזה משתנה ב"ת יש להוציא, ניתן לבחון את התוספת לניבוי של המשתנה ה"חשוד" על פני האחרים. אם היא איננה מובהקת, זוהי אינדיקציה שיש להוציאו מהמודל.

שאלות:

המודל ומבחני המובהקות:

1) לצורך בדיקת ההשערה שקיים קשר בין מספר המוניות בעיר באר שבע (y) לבין מספר התושבים בעיר באלפים (x_1) ומספר הרכבים הפרטיים באלפים (x_2).

הוחלט לבנות מודל רגרסיה מהצורה: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$, על סמך הנתונים הבאים: $\sum_i 1673$, $\sum_i y_i^2 = 338657$, $MSE = 119.789$.

א. ע"ס הנתונים הנ"ל, השלימו את טבלת ניתוח השונות הבאה.
איזו השערה ניתן לבדוק באמצעותה? כתוב את ההשערה ובחן אותה.

SOURCE	SS	DF	MS	F
Regression				
Error				
Total		8		

ב. חשבו את מדד טיב ההתאמה. הסבר את משמעותו.

ג. נתונה טבלת המקדמים (החלקית) הבאה:

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*
Intercept	-511.727	114.9476				
X 1	9.208785		3.732167			
X 2	-8.79921	4.420456				

i. רשמו את האומדן למשוואת הרגרסיה ופרשו את מקדמיה.

ii. בחנו את ההשערה כי קיים קשר בין מספר הרכבים הפרטיים לבין מספר המוניות ברמת מובהקות של 5%.

iii. בנו רווח סמך למקדם של מספר התושבים בעיר.

iv. ענה ללא חישוב (על סמך הסעיפים הקודמים).
האם קיים קשר בין מספר התושבים לבין מספר המוניות ברמת מובהקות 5%?

v. מהי תחזית מס' המוניות בבאר שבע עבור 100,000 תושבים ו-52,000 מכוניות פרטיות?

vi. האם ניתן לסמוך על תחזית זאת?

vii. חשב את סטטיסטי F חלקי של מס' הרכבים הפרטיים.
האם מובהק? (ענה ללא חישוב).

תרגול מסכם:

2) מעוניינים למצוא קשר בין מחיר הדירה (ב-$) לבין ארבעה משתנים מסבירים:

1. שטח הדירה.
2. גודל שטח האמבטיה (ב-Sqft).
3. מרחק הדירה מהים.
4. מהאוניברסיטה (במיילים).

לשם כך נדגמו מספר דירות והריצו רגרסיה אשר בה המשתנה המוסבר הוא מחיר הדירה.

להלן פלט הרגרסיה שהתקבל:

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.952[a]			

a. Predictors: (Constant), Sea_Dist, Apartment, Bath

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression					.000[a]
	Residual					
	Total	1940484.615	25			

a. Predictors: (Constant), Univ_Dist, Bath, Sea_Dist, Apartment

b. Dependent Variable: Price

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-265.514	146.673		-1.810	.085
	Apartment		.449	.722	6.572	
	Bath	4.256		.297	2.687	.014
	Sea_Dist	-32.114	11.090	-.223		.009
	Univ_Dist	11.746	9.439	.095	1.244	.227

a. Dependent Variable: Price

ענה על הסעיפים הבאים:

א. מלאו את התאים החסרים בטבלה (אם לא ניתן למלא את כל התאים החסרים באופן מלא ונמקו באופן מפורש מדוע לא ניתן).

ב. כתבו את האומדן למשוואת מחיר הדירה בצורה מפורשת על סמך הפלט הנ"ל. פרשו את מקדמי הרגרסיה.

ג. בדקו האם ארבעת הגורמים ביחד אכן מסבירים את מחיר הדירה. הסבירו את המסקנה שהגעתם אליה. השתמשו ברמת מובהקות 5%.

ד. הסבירו מהו ערך ה- Pvalue ומה ניתן להסיק ממנו לגבי המשתנים המסבירים?

ה. בנו רווח סמך למקדם גודל שטח האמבטיה. השתמשו ברמת מובהקות של 2%.

ו. ברמת מובהקות של 5% יש לבדוק האם המרחק מהאוניברסיטה אכן משפיע על מחיר הדירה.

ז. האם במודל הרגרסיה הנוכחי ניתן לוותר על גורם המרחק מהים? השתמשו ברמת מובהקות 1%.

ח. בדקו את ההשערה כי קיים קשר חיובי בין גודל הדירה למחירה ברמת מובהקות של 5%.

ט. נתונה מטריצת מקדמי המתאם הבאה:

	X1	*X2*	*X3*	*X4*
X1	**1**			
X2	**0.228579**	**1**		
X3	**-0.22413**	**-0.13924**	**1**	
X4	**-0.24545**	**-0.97295**	**0.029537**	**1**

מה ניתן ללמוד ממנה ומה משמעותה לגבי המודל?

י. הניחו כי השאריות המתקבלות מניתוח הרגרסיה הן בעלות הערכים הבאים (סדר הקריאה הוא משמאל לימין) הנח כי אלו כל השאריות הקיימות במודל: $-1, -12, 3, 6, -4, -5, 5, 10, -5, 6, 18, 12, -3, -7, -3, 9, 7$.

האם משתנים X_2 ו- X_4 מוסיפים תוספת משמעותית לניבוי? אם לא ניתן לענות על השאלה, ציין מדוע.

יא. מה יהיו תוצאות מבחן F לבדיקת התוספת לניבוי של המרחק מהאוניברסיטה על פני המשתנים האחרים (ענה ללא חישוב).

תשובות סופיות:

1) א.

SOURCE	SS	DF	MS	F
Regression	26945.784	2	13472.892	112.414
Error	718.733	6	119.789	
Total	27664.517	8		

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$
$H_1: at\ least\ one\ of\ the\ \beta's\ is\ not\ 0$, נדחה את השערת האפס.

ב. 97.4% ג.i. $\hat{y}_i = -511.727 + 9.208x_{1i} - 8.799x_{2i}$.

ii. אין עדות לכך. iii. $p(3.17 \le \beta_1 \le 15.24) = 0.95$.

iv. מובהק. v. 321 מוניות. vi. כן. vii. $F = 3.96$.

2) א.1. 0.907 א.2. 0.89 א.3. 92 א.4. 1760019.5

א.5. 180465 א.6. 4 א.7. 21 א.8. 440004.875

א.9. 8593.57 א.10. 51.2 א.11. 2.95 א.12. $\text{sig} < 0.001$.

א.13. 1.58 א.14. -2.896.

ב. $\hat{y}_i = -256.514 + 2.95x_{1i} + 4.256x_{2i} - 32.114x_{3i} + 11.746x_{4i}$.

ג. ראו סרטון. ד. ראו סרטון. ה. $p(1.016 \le \beta_2 \le 7.496) = 0.98$.

ו. אין עדות לכך. ז. לא. ח. יש עדות לכך.

ט. בעיית קולינאריות. י. ראו סרטון. יא. ראו סרטון.

סטטיסטיקה

פרק 32 - משתנה דמי

תוכן העניינים

1. תאוריה ותרגול 288
2. סיכום ביניים 293
3. משתנה איכותי עם יותר משתי קטגוריות 294
4. משתני דמי עבור שני משתנים איכותיים 300

תאוריה ותרגול:

רקע:

הכנסת משתנים ב"ת איכותיים למודל הרגרסיה.
למשל, נתונה משוואת הרגרסיה: $W_t = \alpha + \beta \cdot S_t$.
W_t = השכר (התלוי), S_t = שנות לימוד (הב"ת) שניהם כמותיים.
נניח שאנו סבורים שגם משתנה המגדר (משתנה איכותי) משפיע על השכר.
כדי להכניסו למשוואת הרגרסיה יש להגדיר משתני דמי (dummy variable):
נגדיר משתנה D שיקבל את הערך 0 אם מדובר ב"אישה" ואת הערך 1 אם מדובר ב"גבר".
ניתן להכניס את משתנה הדמי למודל בשלושה אופנים שונים:

1. משתנה דמי לחותך – המגדר משפיע על השכר ההתחלתי בלבד.
2. משתנה דמי לשיפוע – המגדר משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד.
3. משתנה דמי לכל הפונקציה – המגדר משפיע גם על החותך וגם על השיפוע.

משתנה דמי לחותך:

המין משפיע על השכר ההתחלתי בלבד.
המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot S_t + u_t$ החותך מייצג כאן את השכר ההתחלתי.
שכר ההתחלתי של אישה: α_0.
שכר התחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.
הבדל בשכר בין נשים וגברים: α_1 (הפרש בין החותכים).
בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש החותכים: $H_0 : \alpha_1 = 0$.

- השיפוע מייצג את התוספת בשכר כפונקציה של מס' שנות הלימוד והוא זהה עבור נשים וגברים.

משתנה דמי לשיפוע:

המגדר משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $W_t = \alpha + \beta_0 S_t + \beta_1 D S_t + u_t$.
השיפוע מייצג כאן את התוספת לשכר בגין שנות לימוד.
אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות לימוד: β_0.
אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות לימוד: $\beta_0 + \beta_1$.
הבדל בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 (הפרש השיפועים).
בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש השיפועים: $H_0 : \beta_1 = 0$.

- החותך, המייצג את השכר ההתחלתי, יהיה זהה עבור גברים ונשים.

משתנה דמי לכל הפונקציה:

המין משפיע גם על החותך וגם על השיפוע – גם על השכר ההתחלתי וגם על התוספת לשכר ההתחלתי בגין שנות הלימוד.

המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta_0 S_t + \beta_1 DS_t + u_t$.

השכר ההתחלתי של אישה: α_0.

השכר ההתחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.

הבדל בשכר ההתחלתי בין המינים: α_1 (הבדל בחותכים).

אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_0.

אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $\beta_0 + \beta_1$.

הבדל בין המינים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 (הבדל בשיפועים).

2 דרכים לבדיקה האם יש השפעה למשתנה האיכותי:

1. בדיקת השערות למשתני הדמי:
   באמצעות מבחן WALD יש לבדוק: $H_0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$.
   לפחות אחד הפרמטרים שונה מ-0: H_1.
   אם דוחים את השערת האפס, יש לבצע מבחני t עבור כל אחד מהפרמטרים בנפרד: $H_0: \alpha_1 = 0$ ו- $H_0: \beta_1 = 0$.

2. מבחן CHOW:
   דרך נוספת לבדיקת ההבדל בין הקטגוריות בלא יצירת משתני דמי:
   חלוקת המדגם לפי הקטגוריות של המשתנה האיכותי.
   מדגם של גברים (T_m) ושל נשים (T_f).
   עבור כל קבוצה לאמוד משוואות רגרסיה לניבוי שכר על ידי שנות לימוד:
   נשים: $W_t = \alpha_f + \beta_f X_t + u_t$.
   גברים: $W_t = \alpha_m + \beta_m X_t + u_t$.
   השערות: $H_0: \alpha_f = \alpha_m; \beta_f = \beta_m$.
   לבדיקת ההשערה נשתמש במבחן CHOW (הזהה למבחן WALD):
   המודל המוגבל (R) לא לוקח בחשבון את השפעת המגדר ולכן יכלול את המדגם המאוחד: $W_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.
   המודל הלא מוגבל (U) כולל את שני חלקי המדגם: $\begin{matrix} ESS_U = ESS_f + ESS_m \\ DF_U = DF_f + DF_m \end{matrix}$.
   סטטיסטי המבחן: $CHOW_{stat} = \dfrac{\dfrac{ESS_R - (ESS_f + ESS_m)}{DF_R - (DF_f + DF_m)}}{\dfrac{ESS_f + ESS_m}{DF_f + DF_m}} = WALD_{stat}$.

למרות התוצאות הזהות בשתי הדרכים, שיטת משתני הדמי עדיפה:

1. אם דחינו את H_0 במבחן CHOW נתקשה לברר את מקור ההבדל שנמצא.
2. בהרצת שתי רגרסיות נפרדות אנו בודקים הבדל בכל הפונקציה ואילו שיטת משתני הדמי מאפשרת לבדוק הבדל רק בחותך או רק בשיפוע.

שאלות:

משתנה דמי לחותך:

1) על בסיס מדגם של 50 איש העובדים בחברה מסוימת התקבלו התוצאות הבאות:

$W_t = 5500 + 1043 \cdot D + 119 \cdot S_t$.

(S.E) (134) (56) (24)

המספרים בסוגריים הם טעויות התקן של מבחני המובהקות לפרמטרים.

א. מהו השכר ההתחלתי של גבר בעל 12 שנות לימוד?

ב. מה ההבדל בשכר ההתחלתי בין גברים לנשים?

ג. האם הבדל זה מובהק באוכלוסייה?

ד. בדקו את הטענה כי השכר ההתחלתי של גברים גבוה ביותר מ-500 ₪ מזה של נשים.

ה. בדקו את הטענה שהשכר ההתחלתי של נשים נמוך ב-600 ₪ מזה של גברים.

משתנה דמי לשיפוע:

2) על בסיס אותו מדגם, ביקש החוקר לדעת האם קיים הבדל מובהק בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד.

תוצאות האמידה נתונות להלן:

$W_t = 5000 + 110 \cdot S_t + 120 \cdot D \cdot S_t + u_t$

(68) (23) (25)

בדוק את ההשערה.

3) חברה מסוימת מתמרצת עובדים ונותנת להם תגמול לפי מספר השעות הנוספות שעבדו בחודש. נגדיר Y – סה"כ התגמול שמקבל עובד שעבד X שעות נוספות בחודש. $D = 1$ אם $10 < X$ ו-$D = 0$ אחרת.

איזו משוואת רגרסיה יש להריץ בכדי לאמוד את סה"כ התגמול בתנאים הבאים:

א. מי שעבד עד וכולל 10 שעות נוספות בחודש תגמולו יהיה קבוע וזהה לכל השעות הנוספות ואילו מי שעבד מעבר ל-10 שעות נוספות מקבל תגמול שונה לכל שעה נוספת ל-10 הראשונות.

ב. עובדים שעבדו יותר מ-10 שעות נוספות בחודש מקבלים סכום קבוע ללא תלות במספר השעות הנוספות שעבדו.

משתנה דמי לכל פונקציה:

4) חוקר רצה לבדוק את הטענה שסוג הכביש משפיע על מס' תאונות הדרכים בקטעי כביש בינעירוניים, בהינתן נפח התנועה.
כאשר:

NUM_t - מס' תאונות הדרכים הקטלניות בקטע כביש t בשנה.

$AVGD_t$ - נפח התנועה בקטע כביש t ליום באלפים.

$TYPE_t$ - משתנה דמי המקבל את הערך 1 כאשר הכביש מהיר, ו-0 כאשר הכביש לא מהיר.

החוקר בדק האם הפונקציה של מס' התאונות בהינתן נפח התנועה, שונה בין כבישים מהירים לבין כבישים שאינם מהירים. לשם כך אסף החוקר 754 תצפיות ואמד את המשוואות הבאות:

1. $NUM_t = \gamma_3 + \delta_3 \cdot AVGD_t + \varepsilon_{3t}$.

2. $NUM_t = \alpha + \beta_1 \cdot TYPE_t + \beta_2 \cdot AVGD_t + \beta_3 \cdot (AVGD \cdot TYPE)_t + U_t$.

תוצאות אמידת המשוואות מוצגות להלן:

1. $NUM_t = 0.739 + 0.0233 \cdot AVGD_t$.

2. $NUM_t = 0.14978 + 1.40311 \cdot TYPE_t + 0.002877 \cdot AVGD_t - 0.008 \cdot (AVGD \cdot TYPE)_t$.

1. $ESS = 20963$, $Pt_{\hat{\alpha}} = 0.0019$, $Pt_{\hat{\beta}} = 0.0001$.

2. $ESS = 20759$, $Pt_{\hat{\alpha}} = 0.6534$, $Pt_{\hat{\beta}_1} = 0.0067$, $Pt_{\hat{\beta}_2} = 0.0001$, $Pt_{\hat{\beta}_3} = 0.1283$.

א. בדקו את טענת החוקר.

ב. מהו האומדן הנקודתי למס' התאונות בכביש מהיר כאשר נפח התנועה עומד על 4 אלפי מכוניות ליום בקטע הכביש האמור?

הועלתה הטענה כי המקדם להשפעה של נפח התנועה בדרכים מהירות הינו כפול מזה שבדרכים לא מהירות.

ג. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?

ד. מהי הרגרסיה "תחת H_0" למבחן WALD?

תשובות סופיות:

1) א. $W_t = 7971$. ב. 1,043 ₪. ג. כן. ד. יש עדות לכך.
ה. יש עדות לכך.

2) יש עדות לכך.

3) א. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 D_t \left(X_t - 10\right) + u_t$. ב. $Y_t = \alpha + \beta_1 D_t + \beta_2 X_t + u_t$.

4) א. יש עדות לכך. ב. $NUM_t = 1.532398$.

ג. $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 2 \cdot \beta_2$
$H_0 : \beta_3 = \beta_2$.

ד. $NUM_t = \alpha + \beta_1 \cdot TYPE_t + \beta_3 \cdot \left(AVGD_t + AVGD \cdot TYPE\right)_t + U_t$.

סיכום ביניים:

רקע:

	משתנה דמי לחותך	משתנה דמי לשיפוע	משתנה דמי לכל הפונקציה
המודל	$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot X_t + u_t$	$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 DX_t + u_t$	$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta_0 X_t + \beta_1 DX_t + u_t$
ההשערה במילים	קיים הבדל בין הקטגוריות ב-Y ההתחלתי (בחותך).	קיים הבדל בין הקטגוריות בתוספת ל- Y בגין X (בשיפוע).	קיים הבדל בין הקטגוריות במשוואת הרגרסיה כולה (בחותך ובשיפוע).
בדיקת ההשערה	מבחן t להפרש החותכים: $H_0 : \alpha_1 = 0$	מבחן t להפרש השיפועים: $H_0 : \beta_1 = 0$	מבחן WALD להפרש בין הפונקציות (החותכים והשיפועים): $H_0 : \alpha_1 = \beta_1 = 0$ **ניתן לבדוק את ההשערה בדבר הבדל בין הפונקציות גם במבחן CHOW. אם דוחים את H_0 יש לברר את מקור ההבדל באמצעות מבחני t (אפשרי רק ב-WALD): $H_0 : \alpha_1 = 0$ $H_0 : \beta_1 = 0$

משתנה איכותי עם יותר משתי קטגוריות:

רקע:

משתנה דמי לחותך:

המין משפיע על השכר ההתחלתי בלבד.

המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot S_t + u_t$ החותך מייצג כאן את השכר ההתחלתי.

שכר ההתחלתי של אישה: α_0.

שכר התחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.

הבדל בשכר בין נשים וגברים: α_1 (הפרש בין החותכים).

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש החותכים: $H_0 : \alpha_1 = 0$.

- השיפוע מייצג את התוספת בשכר כפונקציה של מס' שנות הלימוד והוא זהה עבור נשים וגברים.

פונקציית רגרסיה המכילה משתנים איכותיים בלבד:

המגדר הוא המשתנה היחיד במשוואה: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + u_t$.

החותך מייצג כאן את השכר הממוצע עבור כל קטגוריה:

שכר הממוצע של אישה: α_0.

שכר הממוצע של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.

הבדל בשכר הממוצע בין נשים וגברים: α_1 (הפרש בין החותכים).

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t: $H_0 : \alpha_1 = 0$ (מבחן זהה למבחן t להבדל בין ממוצעים).

משתנה דמי לשיפוע:

המגדר משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $W_t = \alpha + \beta_0 S_t + \beta_1 D S_t + u_t$.

השיפוע מייצג כאן את התוספת לשכר בגין שנות לימוד.

אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות לימוד: β_0.

אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות לימוד: $\beta_0 + \beta_1$.

הבדל בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 (הפרש השיפועים).

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש השיפועים: $H_0 : \beta_1 = 0$.

- החותך, המייצג את השכר ההתחלתי, יהיה זהה עבור גברים ונשים.

משתנה דמי לכל הפונקציה:

המין משפיע גם על החותך וגם על השיפוע – גם על השכר ההתחלתי וגם על התוספת לשכר ההתחלתי בגין שנות הלימוד.

המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta_0 S_t + \beta_1 DS_t + u_t$.

השכר ההתחלתי של אישה: α_0.

השכר ההתחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.

הבדל בשכר ההתחלתי בין המינים: α_1 (הבדל בחותכים).

אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_0.

אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $\beta_0 + \beta_1$.

הבדל בין המינים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 (הבדל בשיפועים).

2 דרכים לבדיקה האם יש השפעה למשתנה האיכותי:

1. בדיקת השערות למשתני הדמי:
באמצעות מבחן WALD יש לבדוק: $H_0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$.
לפחות אחד הפרמטרים שונה מ-0: H_1.
אם דוחים את השערת האפס, יש לבצע מבחני t עבור כל אחד מהפרמטרים בנפרד: $H_0: \alpha_1 = 0$ ו- $H_0: \beta_1 = 0$.

2. מבחן CHOW:
דרך נוספת לבדיקת ההבדל בין הקטגוריות בלא יצירת משתני דמי:
חלוקת המדגם לפי הקטגוריות של המשתנה האיכותי.
מדגם של גברים (T_m) ושל נשים (T_f).
עבור כל קבוצה לאמוד משוואות רגרסיה לניבוי שכר על ידי שנות לימוד:
נשים: $W_t = \alpha_f + \beta_f X_t + u_t$.
גברים: $W_t = \alpha_m + \beta_m X_t + u_t$.
השערות: $H_0: \alpha_f = \alpha_m; \beta_f = \beta_m$.
לבדיקת ההשערה נשתמש במבחן CHOW (הזהה למבחן WALD):
המודל המוגבל (R) לא לוקח בחשבון את השפעת המגדר ולכן יכלול את המדגם המאוחד: $W_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.
המודל הלא מוגבל (U) כולל את שני חלקי המדגם: $\begin{matrix} ESS_U = ESS_f + ESS_m \\ DF_U = DF_f + DF_m \end{matrix}$.

סטטיסטי המבחן: $CHOW_{stat} = \dfrac{\dfrac{ESS_R - (ESS_f + ESS_m)}{DF_R - (DF_f + DF_m)}}{\dfrac{ESS_f + ESS_m}{DF_f + DF_m}} = WALD_{stat}$.

למרות התוצאות הזהות בשתי הדרכים, שיטת משתני הדמי עדיפה:

1. אם דחינו את H_0 במבחן CHOW נתקשה לברר את מקור ההבדל שנמצא.
2. בהרצת שתי רגרסיות נפרדות אנו בודקים הבדל בכל הפונקציה ואילו שיטת משתני הדמי מאפשרת לבדוק הבדל רק בחותך או רק בשיפוע.

משתני דמי אם המשתנה האיכותי יכול לקבל יותר משני ערכים:

כאשר המשתנה האיכותי כולל יותר משני ערכים/קטגוריות נגדיר מס' משתני דמי כמספר הקטגוריות פחות אחד.

למשל, את המשתנה האיכותי של עונות השנה הכולל 4 ערכים: אביב, קיץ, סתיו, חורף נייצג באמצעות 3 משתני דמי:

D_1 יקבל את הערך 1 אם מדובר באביב ו-0 אחרת.

D_2 יקבל את הערך 1 אם מדובר בקיץ ו-0 אחרת.

D_3 יקבל את הערך 1 אם מדובר בסתיו ו-0 אחרת.

אם מדובר בחורף אז כל משתני הדמי יקבלו את הערך 0 ולכן החורף היא קבוצת הייחוס.
נניח שאנו רוצים לבדוק עונתיות במחירי הירקות:

V_t= מדד מחירי הירקות.

p_t = מדד המחירים לצרכן.

1. משתני דמי לחותך:
הטענה: יש הבדל בין עונות השנה במחיר ההתחלתי של הירקות.
המודל: $V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1t} + \alpha_2 D_{2t} + \alpha_3 D_{3t} + \beta \cdot P_t + u_t$.
כל עליה של יחידה אחת במדד המחירים לצרכן תעלה את מחירי הירקות ב-β. למחיר זה יתווסף α_0 בחורף, $\alpha_0 + \alpha_1$ באביב, $\alpha_0 + \alpha_2$ בקיץ ו-$\alpha_0 + \alpha_3$ בסתיו.
ניתן לראות כי: α_0 - החותך בקטגוריה שהושמטה, $\alpha_0 + \alpha_1$ - החותך בקטגוריה i.

בדיקת השערות:
השערות: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ / $H_1 : OTHERWISE$.
המבחן הסטטיסטי – מבחן WALD:
(U): $V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1t} + \alpha_2 D_{2t} + \alpha_3 D_{3t} + \beta \cdot P_t + u_t$.
(R): $V_t = \alpha + \beta \cdot P_t + u_t$.

- שימו לב שהחותך במשוואה המוגבלת איננו α_0 שכן המשתנה המסביר של עונות השנה ירד.

אם נדחה את H_0 במבחן הסטטיסטי של הסעיף הקודם, יש לבדוק מה מקור ההבדל בין החותכים על ידי מבחני t:

1. האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין האביב לחורף:
$H_0:\alpha_1=0$.
2. האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין הקיץ לחורף:
$H_0:\alpha_2=0$.
3. האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין הסתיו לחורף:
$H_0:\alpha_3=0$.

2. משתני דמי לשיפוע:

הטענה: יש הבדל בין עונות השנה בתוספת למחיר הירקות בגין המחיר לצרכן.

המודל: $V_t=\alpha+\beta_0P_t+\beta_1\left(D_{1i}P_t\right)+\beta_2\left(D_{2i}P_t\right)+\beta_3\left(D_{3i}P_t\right)+u_t$.

המחיר ההתחלתי של הירקות שווה בין עונות השנה (α) אולם כל עליה של יחידה אחת במדד המחירים לצרכן תעלה את מחירי הירקות ב: β_0 בחורף, $\beta_0+\beta_1$ באביב, $\beta_0+\beta_2$ בקיץ ו- $\beta_0+\beta_3$ בסתיו.

ניתן לראות כי- β_0 : השיפוע בקטגוריה שהושמטה $\beta_0+\beta_i$: השיפוע בקטגוריה i.

בדיקת השערות:

השערות: $\begin{matrix}H_0:\beta_1=\beta_2=\beta_3=0\\H_1:OTHERWISE\end{matrix}$.

המבחן הסטטיסטי – מבחן WALD:

(U): $V_t=\alpha+\beta_0P_t+\beta_1\left(D_{1i}P_t\right)+\beta_2\left(D_{2i}P_t\right)+\beta_3\left(D_{3i}P_t\right)+u_t$.

(R): $V_t=\alpha+\beta\cdot P_t+u_t$.

- שימו לב שהשיפוע במשוואה המוגבלת איננו β_0 שכן המשתנה המסביר של עונות השנה ירד.

אם נדחה את H_0 במבחן הסטטיסטי של הסעיף הקודם, יש לבדוק מה מקור ההבדל בין השיפועים על ידי מבחני t.

3. משתני דמי לכל הפונקציה:
הטענה: יש הבדל בין עונות השנה בפונקציית הרגרסיה לניבוי מחיר הירקות באמצעות המחיר לצרכן.
המודל:
$$V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \alpha_3 D_{3i} + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1i} P_t) + \beta_2 (D_{2i} P_t) + \beta_3 (D_{3i} P_t) + u_t .$$

בדיקת השערות:
השערות: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.
המבחן הסטטיסטי - מבחן WALD:
(U):
$$V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \alpha_3 D_{3i} + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1i} P_t) + \beta_2 (D_{2i} P_t) + \beta_3 (D_{3i} P_t) + u_t .$$
(R): $V_t = \alpha + \beta \cdot P_t + u_t$.

אם דוחים את H_0, יש לבדוק במבחני WALD האם ההבדל הוא בין החותכים או בין השיפועים: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.
אם דוחים את H_0 יש להמשיך לבדוק באמצעות מבחני t:
$H_0 : \alpha_j = 0$, $H_0 : \beta_j = 0$.

שאלות:

משתנה דמי לחותך:

1) ענה על הסעיפים הבאים:
א. הועלתה הטענה כי יש הבדל במחיר ההתחלתי בין האביב לקיץ.
   i. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?
   ii. פרטו שני מבחנים סטטיסטיים בעזרתם ניתן לבדוק את הטענה.
ב. הועלתה הטענה כי יש רק שתי עונות המשפיעות על מחיר הירקות ההתחלתי: קיץ + אביב, חורף + סתיו.
   i. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?
   ii. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? פרטו.

2) כלכלן הציע לאמוד את המודל הבא: $ta25_t = \alpha_0 + \alpha_1 Q1_t + \alpha_2 Q2_t + \alpha_3 Q3_t + + \alpha_4 Q4_t + u_t$
כאשר: $Ta25$ - תשואת מדד המניות ת"א 25, Q_i - משתנה דמי המקבל ערך 1 עבור רבעון i ו-0 אחרת. מי מהטענות הבאות נכונה (יש רק אחת):
א. לא ניתן לאמוד את המודל כיוון שאין שום משתנה מסביר אלא רק משתני דמי.
ב. לא ניתן לאמוד את המודל יש בעיית מולטיקולינאריות מלאה.
ג. אין שום בעיה לאמוד את המודל.
ד. כל התשובות האחרות שגויות.

משתנה דמי לשיפוע ולכל הפונקציה:

3) ידוע כי התוצר בישראל תלוי בתוצר בארה"ב, על כן הוצע לבחון את המודל: $gdp_i = \alpha + \beta \cdot gdp_usa_i + u_i$.

כאשר gdp הוא אחוז הצמיחה בתוצר בישראל ו-gdp_usa הוא אחוז הצמיחה בתוצר בארה"ב.

הועלתה הטענה שיש עונתיות לפי רבעונים לשם כך הוגדר משתנה הדמי q = רבעון.

רשמו את השערות האפס עבור הטענות הבאות:

א. הרבעונים משפיעים על אחוז הצמיחה בתוצר בישראל באופן כללי וכתלות בהשפעת התוצר האמריקאי.

ב. השפעת הרבעון השלישי על התוצר בישראל זהה להשפעת הרבעון הרביעי.

ג. השפעת התוצר האמריקאי על התוצר בישראל ברבעון השני זהה לרבעון הראשון.

ד. הרבעונים השלישי והראשון משפיעים באופן זהה על התוצר בישראל באופן ישיר וגם כתלות בתוצר האמריקאי.

תשובות סופיות:

1) א.i. $H_0: \alpha_1 = \alpha_2$. ii. WALD ו-t. ב.i. $H_0: \alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3 = 0$. ii. WALD.

2) ב'.

3) א. $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. ב. $H_0: \alpha_3 = 0$.

ג. $H_0: \beta_1 = \beta_2$. ד. $H_0: \alpha_1 = \alpha_3; \beta_1 = \beta_3$.

משתני דמי עבור שני משתנים איכותיים:

רקע:

משתני דמי עבור שני משתנים איכותיים:

לדוגמא – שני משתנים איכותיים המשפיעים על פונקציית השכר:
מגדר (אישה, גבר) וגזע (לבן, שחור).
נגדיר משתנה דמי G שיקבל 1 אם מדובר בגבר ו-0 אחרת (אישה).
נגדיר משתנה דמי R שיקבל 1 אם מדובר בלבן ו-0 אחרת (שחור).
נבדוק כיצד מגדר וגזע משפיעים על השכר ההתחלתי (החותך), כאשר השכר תלוי גם בשנות לימוד (S_t).

1. הבדל בחותך ללא אינטראקציה:
המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \beta \cdot S_t + u_t$.
במודל זה – אין השפעה משולבת של מגדר וגזע על השכר ההתחלתי.
ניתן לבדוק השערות על כל אחד מהמשתנים הב"ת האיכותיים בנפרד:
   1. הבדל בשכר ההתחלתי בין גברים לנשים: $H_0 : \alpha_1 = 0$.
   2. הבדל בשכר ההתחלתי בין שחורים ללבנים: $H_0 : \alpha_2 = 0$.

2. הבדל בחותך עם אינטראקציה:
המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \alpha_3 G \cdot R + \beta \cdot S_t + u_t$.
במודל זה הטענה היא כי קיימת, בנוסף להשפעה של מגדר וגזע בנפרד על השכר, גם השפעה משולבת (אינטראקציה) של מגדר וגזע על השכר ההתחלתי.
במודל זה, לעומת הקודם, נוספת ההשערה לבדיקת השפעת האינטראקציה בין מגדר לגזע על השכר ההתחלתי:
   3. $H_0 : \alpha_3 = 0$.

3. דרך נוספת ליצירת מודל עם אינטראקציה:
הגדרת משתני דמי המייצגים שילוב בין המשתנים האיכותיים גזע ומגדר באופן הבא:
D_1 יקבל 1 אם מדובר בגבר לבן ו-0 אחרת.
D_2 יקבל 1 אם מדובר בגבר שחור ו-0 אחרת.
D_3 יקבל 1 אם מדובר באשה לבנה ו-0 אחרת.
הנשים השחורות מהוות כאן את קבוצת הייחוס.

המודל: $W_t = \gamma_0 + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 + \gamma_3 D_3 + \delta \cdot S_t + u_t$.
נעזר בטבלה בכדי לנסח את ההשערות לבדיקת האינטראקציה:

	גבר	אישה	הפרש
לבן	$\gamma_0 + \gamma_1$	$\gamma_0 + \gamma_3$	$\gamma_1 - \gamma_3$
שחור	$\gamma_0 + \gamma_2$	γ_0	γ_2
הפרש	$\gamma_1 - \gamma_2$	γ_3	

ההשערות לבדיקת קיום האינטראקציה: $H_0 : \gamma_1 - \gamma_3 = \gamma_2$ או $H_0 : \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_3$
התוצאות שיתקבלו כאן יהיו כמובן זהות לחלוטין לתוצאות שהתקבלו בדרך הקודמת: $WALD = t^2$.
$PF = Pt$

שאלות:

1) חוקרת בדקה השפעות השכלה, מגדר וניסיון על הכנסה מעבודה לפי המשוואה הבאה:
$\ln(MWAGE) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot S + \alpha_2 \cdot E + \alpha_3 \cdot (S \cdot E) + \beta_0 \cdot EXP + \beta_1 \cdot (EXP \cdot S) + \beta_2 \cdot (EXP \cdot E) + \beta_3 \cdot (EXP \cdot S \cdot E) + U$,
כאשר:
S משתנה דמי: 1= עבור נשים, 0=גברים.
E משתנה דמי: 1= עבור השכלה גבוהה $(scl > 12)$, 0=השכלה נמוכה.

א. רשמו את הפונקציה לחישוב:
   i. תחזית לוג השכר עבור גבר בעל השכלה נמוכה ו- 10 שנות ניסיון.
   ii. תחזית לוג השכר ההתחלתי עבור נשים משכילות.
   iii. לאחר כמה שנות ניסיון ישתווה השכר של נשים משכילות לזה של גברים משכילים?

ב. רשמו את השערות האפס המתאימות לבדיקת הטענות הבאות:
   i. אין השפעה של מגדר והשכלה על השכר.
   ii. השפעת ההשכלה אינה תלויה במגדר.
   iii. אין השפעות השכלה אצל גברים.
   iv. אין הבדל בשיעורי התשואה לניסיון, בקרב הנשים.

תשובות סופיות:

1) א.i. $\hat{\ln}(MWAGE) = \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}_0 \cdot 10$.

ii. $\hat{\ln}(MWAGE) = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3$.

iii. $EXP_t = \frac{-(\alpha_1 + \alpha_3)}{\beta_1 + \beta_3}$.

ב.i. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

ii. $H_0 : \alpha_3 = \beta_3 = 0$.

iii. $H_0 : \alpha_2 = \beta_2 = 0$.

iv. $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 0$.

סטטיסטיקה

פרק 33 - רגרסיה - שאלות ממבחנים

תוכן העניינים

1. מבחן 1 303
2. מבחן 2 307

מבחן 1:

שאלות:

1) להלן תוצאות הרצת רגרסיה של Y בתלות ב-X עבור 10 תצפיות (חלק מהנתונים הושמטו בכוונה מהפלט, אך ניתנים לחישוב על ידך).

נתון כי: $\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2=1475.6$.

מקור	סכום ריבועים SS
רגרסיה	SSR = 2148.6
שאריות	SSE = ?
סה"כ	SST = ?

משתנה	מקדם	טעות תקן	ערך סטטיסטי(מתוקנן)	p-value
	b_i	S_{bi}	t	מובהקות
קבוע (חותך)	-24.7	11.3	?	?
X	1.20	?	**10.5**	

א. מהו SST?

i. לא ניתן לקבוע.

ii. 1994.42.

iii. 2304.1.

iv. 1629.78.

ב. האם הרגרסיה מובהקת? בדוק לפי p value.

i. הרגרסיה מובהקת.

ii. הרגרסיה אינה מובהקת.

2) לפניך פלט רגרסיה פשוטה (ממנו הושמטו נתונים שבאפשרותך להשלים), המתאר את ציון המבחן כפונקציה של מספר התרגילים שהגיש הסטודנט במהלך הסמסטר, ידוע כי כל הנחות המודל תקפות.

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0.842105598
R Square	0.709141839
Adjusted R Square	0.688366256
Standard Error	5.315523758
Observations	16

ANOVA

	Df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*
Regression	1	964.4329004	964.4329004	34.13343	4.28E-05
Residual	14	395.5670996	28.25479283		
Total	15	1360			

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*
Intercept	50.99134199	4.318918368	11.80650747	1.15E-08
מספר התרגילים	4.086580087	0.699471573	5.842381939	4.28E-05

א. ע"פ הנתונים, אחוז השונות של ציוני המבחן המוסברת ע"י מספר התרגילים שהגיש הסטודנט, היא_____. אם נוסיף משתנים נוספים, אחוז השונות המוסברת _____, ו-Radjusted _____.

i. 84%, יגדל, לא ניתן לקבוע ללא נתונים נוספים.
ii. 84%, יקטן, יגדל.
iii. 70.9%, יגדל, לא ניתן לקבוע ללא נתונים נוספים.
iv. 70.9%, יגדל, יקטן.
v. 68.8%, יגדל, יגדל.
vi. 68.8%, יקטן, יקטן.

ב. מהו הרב"ס של שיפוע הרגרסיה β_1 ? (בר"מ של 1%).

i. $2.58 < \beta < 5.58$.
ii. $2 < \beta < 6.17$.
iii. $1.74 < \beta < 6.88$.
iv. $2.86 < \beta < 5.3$.

במטרה לנבא בצורה טובה יותר את הצלחת הסטודנטים בבחינה, החליט החוקר להוסיף 2 משתנים נוספים לניתוח הרגרסיה.
מספר השיעורים בהם נכח הסטודנט, ומספר השעות שלמד לבחינה.
לפניכם הפלט החסר:

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0.880163577
R Square	0.774687922
Adjusted R Square	0.718359902
Standard Error	5.053253294
Observations	16

ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*
Regression	3	?	351.1918579	13.75315
Residual	12	306.4244263	25.53536886	
Total	15	?		

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	37.08959571	8.726136945	4.250402663	0.001127
מספר השיעורים	2.610000755	1.429904588	1.82529714	0.092932
מספר התרגילים	3.198068014	1.239162836	2.58082951	0.024061
שעות לימוד לבחינה	-0.108373802	1.021202927	-0.106123669	0.917238

ג. בדוק את ההשערה כי הרגרסיה מובהקת לכל אחד מהמשתנים המסבירים ברי"מ של 1%.

i. הרגרסיה אינה מובהקת לכל המשתנים שנבדקו.

ii. לא ניתן לקבוע מהנתונים האם הרגרסיה מובהקת.

iii. הרגרסיה מובהקת למשתנה מספר התרגילים, אך אינה מובהקת למשתנים מספר השיעורים ומספר שעות הלימוד לבחינה.

iv. הרגרסיה מובהקת למשתנה מספר התרגילים ומספר השיעורים, אך אינה מובהקת למשתנה שעות הלימוד לבחינה.

ד. מהו SSR של הרגרסיה המרובה?

i. $SSR = 964.4$.

ii. $SSR = 1053.57$.

iii. $SSR = 694.57$.

iv. $SSR = 853.57$.

v. לא ניתן לחשב את SSR מהנתונים שהתקבלו.

תשובות סופיות:

1) א. iii. ב. i.

2) א. iii. ב. ii. ג. i. ד. ii.

מבחן 2:

שאלות:

1) הועלתה השערה שהוצאות האחזקה של מערכת לעיבוד נתונים קשורות למספר שעות השימוש השבועיות במערכת. להלן תוצאות חלקיות של פלט EXCEL של ניתוח רגרסיה בין Y הוצאות אחזקה שנתיות (במאות $) ו-X מספר שעות השימוש השבועיות.

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	
R Square	
Adjusted R Square	
Standard Error	
Observations	10

ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*
Regression		860.051			0.00012
Residual					
Total		1004.525			

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*
Intercept	10.528	3.745		0.023
שעות שימוש	0.953		6.901	

א. לאור התוצאות ה-p-value בבדיקת ההשערה: $\begin{matrix} H_0:\beta_1 \le 0.5 \\ H_1:\beta_1 > 0.5 \end{matrix}$.

i. $Pv < 0.005$.
ii. $0.005 < Pv < 0.01$.
iii. $0.01 < pv < 0.025$.
iv. $0.025 < pv < 0.05$.
v. $Pv > 0.05$.

ב. אם היינו מריצים רגרסיה בה Y מספר שעות השימוש השבועיות ואילו המשתנה המסביר X, הוצאות אחזקה שנתיות (במאות $), אזי השיפוע של קו הרגרסיה יהיה:

i. 0.953.
ii. 1.049.
iii. 10.528.
iv. 0.095.
v. 0.898.

2) הועלתה השערה שמספר התקלות ברכב Y קשורה לגיל הנהג X. לשם כך נלקח מדגם של 10 נהגים.
כמו כן חושבו הסכומים הבאים:
$\sum X_i Y_i = 366$, $\sum Y_i^2 = 29$, $\sum Y_i = 13$, $\sum X_i = 363$, $\sum X_i^2 = 14,227$.
משוואת קו הרגרסיה נתונה על ידי: $\hat{Y} = 4.96 - 0.1X_i$.

א. ערכו של מקדם המתאם הליניארי בין מספר התקלות לבין גיל הנהג הוא:

i. -10.59.
ii. -0.9395.
iii. 0.8826.
iv. -0.1.

החוקר לא היה מרוצה מעוצמת הקשר ולכן החליט להוסיף לרגרסיה את המשתנים הבאים: מספר הק"מ שהמכונית נסעה (באלפי ק"מ) וסוג הרכב.
במדגם נכללו 2 סוגי רכבים: A ו-B כאשר סוג B קודד כערך 0 וסוג רכב A קודד בערך 1.
להלן פלט הרגרסיה המרובה. שימו לב כי חלק מהערכים בפלט חסרים:

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	
R Square	
Adjusted R Square	
Standard Error	0.204047
Observations	10

ANOVA

	df	SS	MS	F
Regression	3			0.00002
Residual	6	0.249811		
Total	9			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	1.407943	0.71094		
X1 גיל הנהג	-0.03094	0.014611		
X2 סוג הרכב	0.239574	0.152994		
X3 ק"מ באלפים	0.027666	0.005329		

ב. להלן מספר טענות לגבי מובהקות הרגרסיה ומובהקות המשתנה סוג הרכב ברמת מובהקות 0.1:

i. הרגרסיה מובהקת והמשתנה סוג הרכב מובהק ברמת מובהקות 0.1.

ii. הרגרסיה מובהקת, אך המשתנה סוג הרכב אינו מובהק ברמת מובהקות 0.1.

iii. הרגרסיה אינה מובהקת, אך המשתנה סוג הרכב מובהק ברמת מובהקות 0.1.

iv. הרגרסיה והמשתנה סוג הרכב אינם מובהקים ברמת מובהקות 0.1.

ג. SST בפלט הרגרסיה המרובה שווה ל:

i. 12.1.

ii. 16.0.

iii. 20.0.

iv. אין מספיק נתונים לחשבו.

ד. לאור התוצאות, רב"ס למקדם המשתנה מספר הקילומטרים, בר"מ 5% :

i. (0.015,0.04).

ii. (0.017,0.038).

iii. (0.02,0.035).

iv. אין מספיק נתונים לחשבו.

ה. אם היינו מקודדים את סוג רכב B כערך 1 וסוג רכב A קודד בערך 0 משוואת הרגרסיה הייתה:

i. נשארת ללא שינוי.

ii. $\hat{Y}=1.4079-0.0309X_{1i}-0.2395X_{2i}+0.0276X_{3i}$.

iii. $\hat{Y}=1.6475-0.0309X_{1i}-0.2395X_{2i}+0.0276X_{3i}$.

iv. לא ניתן לדעת ללא הרצה מחדש.

ו. החוקר רצה להוסיף משתנה מסביר נוסף X_4 מספר השנים שחלפו מאז קבלת רישיון הנהיגה. להלן פלט הרגרסיה (חלק מהנתונים חסרים) עם 4 המשתנים המסבירים:

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	1.5	0.71		
X1 גיל הנהג	5.1	14.1		
X2 סוג הרכב	0.25	0.2		
X3 ק"מ באלפים	0.02	0.008		
מס' השנים שחלפו מאז קבלת רשיון X4	-5.13094	0.8		

על סמך נתונים אלו:

i. חשש סביר למולטיקוליניאריות.

ii. התחזית הנקודתית של מספר התקלות תהיה דומה לזו של הרגרסיה הקודמת) עם 3 המשתנים המסבירים).

iii. קיימת קורלציה גבוהה בין חלק מהמשתנים המסבירים.

iv. כל התשובות נכונות.

3) במפעל מסוים הורץ מודל של רגרסיה ליניארית פשוטה על 8 עובדים כאשר Y תפוקת העובד ו-X גיל העובד. נמצא שהחלק המוסבר על ידי הרגרסיה הוא 74. הטעויות שהתקבלו מופיעות בחלקן בטבלה שלהלן:

e_8	e_7	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1
0	2	-2	2	?	2	-3	0

אחת מהטענות שלהלן נכונה:

א. מקדם ההסבר בין X ל-Y הוא 0.74.

ב. לא ניתן לחשב את מקדם המתאם המרובה.

ג. $SSR=18$.

ד. $SSE=74$.

ה. אף אחת מהטענות איננה נכונה.

תשובות סופיות:

1) א. ii. ב. v.

2) א. ii. ב. i. ג. i. ד. i. ה. ii. ו. iv.

3) א'.