פונקציות מרוכבות

תוכן העניינים

פונקציות מרוכבות

פרק 1 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i=\sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z=a+bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b. המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\text{Re}(z)$ (מלשון: Real).

b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\text{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

שאלות:

1) רשום עם i:

א. $\sqrt{-1}=$ ב. $\sqrt{-4}=$ ג. $\sqrt{-25}=$

ד. $\sqrt{-3}=$ ה. $\sqrt{-5}=$

2) חשב:

א. $i=$ ב. $i^2=$ ג. $i^3=$

ד. $i^4=$ ה. $i^5=$ ו. $i^{17}=$

3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\text{Re}(z)=-3,\ \text{Im}(z)=2$.

ב. $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)=4$ ו-$\operatorname{Re}(z)-\operatorname{Im}(z)=-1$.
מצא את z.

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2=-1$ ב. $x^2+36=0$ ג. $x^2-2x+5=0$

7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$.

8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$.

9) נתון: $z_1=2+3i$, $z_2=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1+z_2=$ ב. $z_1-z_2=$ ג. $z_1\cdot z_2=$

10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2+6i)+(1-i)$ ב. $(4+4i)-\left(3+\frac{1}{2}i\right)$

ג. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ד. $5-(3-2i)$

ה. $(i-3)+6i$ ו. $(i+2)-(3i-2)+(7-5i)$

11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1+4i)\cdot(8-2i)$ ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ג. $(4i-3)\cdot(4i+3)$ ד. $i\cdot(i-1)$

ה. $(2i+3)\cdot i$ ו. $(5i-1)^2$

12) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.
ידוע כי z_1+z_2 הוא ממשי וכי z_1-z_2 הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2.

ב. הראה כי המכפלה $z_1\cdot z_2$ היא ממשית.

תשובות סופיות:

1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$.

2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i.

3) א. $a=2\ ,\ b=5$ ב. $a=3\ ,\ b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$
ד. $a=0\ ,\ b=7$ ה. $a=-4\ ,\ b=0$ ו. $a=0\ ,\ b=0$.

4) א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5) $z=1.5+2.5i$.

6) א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i\ ,\ 1-2i$.

7) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8) $z=2i\ ,\ -3i$.

9) א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$.

10) א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$

11) א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1-i$
ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$.

12) א. $a_1=a_2\ ,\ b_1=-b_2$ ב. הוכחה.

המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו : $\bar{z}=a-bi$.

שאלות:

13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים :

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

14) חשב :

א. $\frac{11+2i}{2-i}$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$

15) נתון מספר $z=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים :

א. $\frac{1}{z}$ ב. $\frac{z}{z+3}$ ג. $\frac{z+i}{z-i}$

16) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a .

17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים : $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

18) פתור את המשוואה הבאה : $3z-11=iz-7i$.

19) פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים): $\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$.

21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$

ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

22) פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\overline{z}-3$.

23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$

ב. $\sqrt{8+6i}$

24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$.

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$.

25) פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

26) פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\overline{z}+6=0$.

תשובות סופיות:

13) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0.

14) א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $5+3i$.

15) א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$.

16) $a=-\frac{3}{4}$.

17) שאלת הוכחה.

18) $z=4-i$.

19) $z=4+5i$.

20) $z=2-3i\ ,\ w=5+i$.

21) א. $a=5\ ,\ b=-3$ ב. $a=2\ ,\ b=-1$.

22) $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$.

23) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$.

24) א. $z_{1,2}=i\ ,\ 1$ ב. $z_{1,2}=-2-i\ ,\ 2-5i$.

25) $z_1=-2-5i\ ,\ z_2=3i$.

26) $z_1=-3i\ ,\ z_2=2i$.

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

27) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

תשובות סופיות:

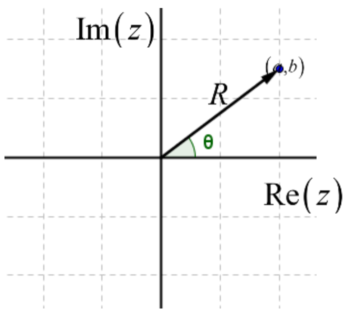
27) א. $m=-i$ ב. $m=-2i$.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה-x מייצג את a , גודל הערך הממשי של z , וציר ה-y מייצג את b, גודל הערך המדומה של z.

מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: (a,b)

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ-$(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: (R,θ). מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$z=R\cos\theta+i\cdot R\sin\theta=R(\cos\theta+i\sin\theta)=R\text{cis}\theta$.

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $\tan\theta=\frac{b}{a}$, $R=\sqrt{a^2+b^2}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $b=R\sin\theta$, $a=R\cos\theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z|=R=\sqrt{a^2+b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1\cdot z_2=(R_1\text{cis}\theta_1)\cdot(R_2\text{cis}\theta_2)=R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{R_1\text{cis}\theta_1}{R_2\text{cis}\theta_2}=\frac{R_1}{R_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$.

שאלות:

28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2cis60°$
ב. $6cis135°$
ג. $4cis330°$
ד. $4cis\left(-30°\right)$
ה. $4cis690°$
ו. $8cis90°$
ז. $3cis270°$
ח. $cis180°$
ט. $cis0°$

29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$
ב. $\sqrt{3}-i$
ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
ד. $3+4i$
ה. $6i$
ו. $-i$
ז. 4
ח. -1
ט. 1
י. 0

30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2cis120°\cdot 3cis60°$
ב. $cis210°\cdot 5cis\left(-40°\right)$
ג. $\frac{12cis315°}{3cis90°}$
ד. $\frac{1}{2cis40°}$
ה. $6cis30°+2cis210°$

31) נתון המספר המרוכב $z=R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו-θ את המספרים:

א. $\bar{z}$
ב. $1/z$
ג. $-z$
ד. $-\frac{1}{z}$
ה. iz
ו. $z\cdot\bar{z}$

32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\bar{z}$
ב. $z\cdot\bar{z}$
ג. $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$

33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\bar{z}^2$
ב. $\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}$

34) הוכח את הטענות הבאות:

א. $z-i\,\bar{z}=\overline{\bar{z}+iz}$ ב. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1+\sqrt{3}i$.
מצא את קדקודיו האחרים.

37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
אחד מקודקודי המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא $30°$ חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\bar{z}$ ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}$ ד. $z\cdot\bar{z}$

תשובות סופיות:

28) א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$
ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1.

29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45°$ ב. $2\text{cis}330°$ ג. $\text{cis}240°$ ד. $5\text{cis}53.13°$
ה. $6\text{cis}90°$ ו. $\text{cis}270°$ ז. $4\text{cis}0°$ ח. $\text{cis}180°$
ט. $\text{cis}0°$ י. 0.

30) א. -6 ב. $5\text{cis}170°$ ג. $4\text{cis}225°$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}\left(-40°\right)$
ה. $4\text{cis}30°$.

31) א. $R\text{cis}\left(-\theta\right)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}\left(-\theta\right)$ ג. $R\text{cis}\left(180°+\theta\right)$
ד. $\frac{1}{R}\text{cis}\left(180°+\theta\right)$ ה. $R\text{cis}\left(90°+\theta\right)$ ו. R^2.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) $1+i\ ,\ -1+i\ ,\ -1-i\ ,\ 1-i$.

36) $-\sqrt{3}+i\ ,\ -1-\sqrt{3}i\ ,\ \sqrt{3}-i$.

37) $1+\sqrt{3}i\ ,\ 1-\sqrt{3}i\ ,\ -2$.

38) $1+\sqrt{3}i\ ,\ -1+\sqrt{3}i\ ,\ 2$.

39) א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל
ד. מחוץ למעגל.

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $\left(R\text{cis}\theta\right)^n = R^n\text{cis}\left(n\theta\right)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n-י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$
נבצע: $1 \le k \le n$: $z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 \,/\, \sqrt[n]{\ } \quad \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[n]{R_0}\cdot\text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)$.

שאלות:

40) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $\left(2\text{cis}30°\right)^3$
ב. $\left(2\text{cis}14°\right)^5$
ג. $\left(1+i\right)^4$
ד. $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$
ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41) פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120°$
ב. $z^4 = \left(9\text{cis}80°\right)^2$
ג. $z^5 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

42) מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43) נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

44) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$.
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z-3i|=5$.

45) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z+i|+|\bar{z}+i|=|1+3i|$.

תשובות סופיות:

40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70°$ ג. ‎-4 ד. $-8i$ ה. 1.

41) א. $z_0=6\text{cis}60°$, $z_1=6\text{cis}240°$.
ב. $z_0=3\text{cis}40°$, $z_1=3\text{cis}130°$, $z_2=3\text{cis}220°$, $z_3=3\text{cis}310°$.
ג. $z_0=\text{cis}12°$, $z_1=\text{cis}84°$, $z_2=\text{cis}156°$, $z_3=\text{cis}228°$, $z_4=\text{cis}300°$.

42) סכום: 0 , מכפלה: ‎-1.

43) $x^2+y^2=4$.

44) $x^2+(y-3)^2=25$.

45) $\frac{2x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7=13+3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3=5-9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5=32+16i$ והאיבר השני הוא $a_2=2-4i$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.

ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

46) $S_{10}=100-15i$.

47) א. $a_1=2+i$, $q=-2i$ ב. $S_5=20+25i$.

48) $2 , 2i , -2$ או $2 , 4-2i , 6-8i$.

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

49) פתור את המשוואה: $z-\bar{z}+|z|=|2-i|^2-4i+\operatorname{Im}(z)$.

50) פתור את המשוואה: $\left|2-3^{x^2-x-1}i\right|=\sqrt{13}$.

51) פתור את המשוואה: $z^3=\bar{z}$.

52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

54) נתון מספר מרוכב z, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z-\frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1\operatorname{cis}\theta_1\cdot R_2\operatorname{cis}\theta_2=R_1R_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $|z^4-z^3|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.
מצא את ערך הביטוי $z+iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$.
הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\sphericalangle z_1Oz_2$ (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

49) $z_1=3-4i$, $z_2=-3-4i$.

50) $x=2$, -1.

51) $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$, $z_4=1$, $z_5=-1$.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) שאלת הוכחה.

55) שאלת הוכחה.

56) $\arg(z)=30°$.

57) $z+iz=\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

58) 2θ.

פונקציות מרוכבות

פרק 2 - טופולוגיה במישור המרוכב

תוכן העניינים

סדרות של מספרים מרוכבים:

שאלות:

1) נתון $z_n=\frac{1}{n}+i\left(\frac{n-2}{n}\right)$. חשב את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

2) נתון $z_n=\frac{n^2+n+1}{3n^2+2}+i\left(\frac{n-1}{2n}\right)$. חשב את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

3) נגדיר $z_n=(i)^{2n}n^3$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$.

4) נגדיר $z_n=\frac{i^n}{n}$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=0$.

5) נתון $z_n=\frac{(1+i)^n}{n}$. חשב את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

6) בדקו את התכנסות הסדרה $z_n=n\cdot z^n$ כאשר $z\in\mathbb{C}$.
א. כאשר $|z|\ge 1$.
ב. כאשר $0<|z|<1$.

7) נאמר כי סדרת מספרים מרוכבים $z_n\xrightarrow{n\to\infty}L$ אם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-L|=0$.
הוכיחו כי אם $z_n\xrightarrow{n\to\infty}z$ ו- $w_n\xrightarrow{n\to\infty}w$ אזי $z_n+w_n\xrightarrow{n\to\infty}z+w$.

8) בדקו האם הסדרות הבאות מתכנסות, אם כן חשבו את גבולן.
א. $z_n=\frac{1+n}{1-2n}+\frac{n-10}{n^2}i$
ב. $z_n=\cos(\pi n)+n\sin\left(\frac{1}{n}\right)i$
ג. $z_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n}+\sqrt[n]{3^n+4^n}\cdot i$
ד. $z_n=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

תשובות סופיות:

1) $\lim_{n\to\infty} z_n = i$

2) $\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{3} + i \cdot \frac{1}{2}$

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) ∞

6) א. ∞ ב. 0

7) הוכחה.

8) ראו סרטון.

פונקציות מרוכבות

פרק 3 - פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

פונקציות מרוכבות:

שאלות:

1) רשמו את הפונקציה $f(z)=z\cdot\operatorname{Re}(z)$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

2) רשמו את הפונקציה $f(z)=|z|^2$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

3) רשמו את הפונקציה $f(z)=2|z|^2+i(\bar{z})^2$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

4) רשמו את הפונקציה $f(z)=\dfrac{z}{1+|z|^2}$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

5) רשמו את הפונקציה $f(z)=z^2+\bar{z}$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

6) רשמו את הפונקציה $f(x+iy)=\dfrac{x^3}{3}+i\cdot\left(-\dfrac{y^3}{3}\right)$, בצורה $f(z)$, כאשר $z=x+iy$.

תשובות סופיות:

1) $f(z)=x^2+i\cdot xy$

2) $f(z)=x^2+y^2+i\cdot 0$

3) $f(z)=2\left[x^2+xy+y^2\right]+i\left(x^2-y^2\right)$

4) $f(z)=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}+i\cdot\dfrac{y}{1+x^2+y^2}$

5) $f(z)=x^2+x-y^2+i\cdot(2xy-y)$

6) $f=\dfrac{2z^3+6z(\bar{z})^2}{24}$

גבולות מרוכבים ורציפות:

שאלות:

מצאו את הגבולות הבאים (אם קיימים):

1) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=?$

2) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^4}{|z|^4}=?$

3) $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^2}}=?$

4) $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^4}}=?$

תשובות סופיות:

1) $\frac{1-ik}{1+ik}$

2) $\frac{(1+ik)^4}{(1+k)^2}$

3) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

4) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

נגזרות מרוכבות:

שאלות:

1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=\bar{z}$ גזירה.
הראו עפ"י הגדרת הנגזרת כי $f(z)=\bar{z}$ אינה גזירה ב- z_0 לכל $z_0\in\mathbb{C}$.

2) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=\operatorname{Re}(z)$ גזירה.

3) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=|z|^2$ גזירה.

4) הוכיחו את משפט לופיטל: $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}$

תשובות סופיות:

1) הפונקציה לא גזירה.
הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.
2) הפונקציה לא גזירה.
3) בראשית הצירים, והנגזרת שלה היא 0.
4) הוכחה.

משוואות קושי-רימן:

שאלות:

1) הראו כי $f(z)=z^2+\mathrm{Im}(z)$ אינה גזירה לכל z.

2) הראו כי $f(z)=xy+i(x^2+y^2)$ אינה גזירה בכל הנקודות בהן $z\neq 0$, אך כן גזירה בנקודה $z=0$ (לפי הגדרה).

3) מצאו מספרים ממשיים a,b כך שהפונקציה $f(z)=e^{ax}\cos(3y)+i\left(-e^{-3x}\sin(\mathrm{b}\,y)\right)$ תהיה גזירה בכל נקודה.

4) נתון כי $f(z)=\frac{z}{\bar{z}}$ אינה רציפה ב $z=0$.
מצאו את כל הנקודות (אם קיימות) בהן הפונקציה גזירה.

משפט קושי-רימן: הוכחה (הפתרון בסרטון)
אם $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$, גזירה ב-$z_0=x_0+iy_0$,
אז מתקיימות משוואות קושי-רימן בנקודה זו, כלומר: $\begin{matrix} u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0) \end{matrix}$.

5) נניח כי $f(z)$ גזירה בתחום D, ונניח כי $\mathrm{Re}\{f(z)\}=0$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

6) נניח כי $f(z)$ פונקציה גזירה שאינה קבועה בתחום D.
נגדיר $g(z)=\overline{f(z)}$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $g(z)$ אינה גזירה בכל D.

7) נתונה הפונקציה $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ הוכיחו את הטענות הבאות:
א. הפונקציה אינה רציפה בראשית.
ב. משוואות קושי-רימן מתקיימות בראשית.

8) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $H^+=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z)>0\}$.
הוכיחו כי $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$ אנליטית בתחום $H^+=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z)<0\}$.

9) הוכיחו כי $f(z)=e^{\operatorname{Re}(z)}$ אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב.

10) נתונה הפונקציה $f(z)=cx^2-xy+ixy^2$, כאשר c קבוע מרוכב כלשהו.
נתון כי $f(z)$ גזירה בנקודה $1+i$.
מצאו את הקבוע c ואת כל הנקודות בהן הפונקציה גזירה.

11) נתונה הפונקציה $f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\cdot\arctan(\frac{y}{x})$.
קבעו האם הפונקציה $f(z)$ אנליטית בחצי המישור הימני $H=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z)>0\}$.

12) נתונה הפונקציה $f(z)=e^{\frac{x^2-y^2}{2}}\left[\cos(xy)+i\cdot a\sin(xy)\right]$.
עבור אילו ערכי a זוהי פונקציה הולומורפית (אנליטית) בכל המישור?

13) נניח כי $g(z)$ הולומורפית בתחום $\overline{D(0,1)}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 1\}$,
ומקיימת $|g(z)|=1 \quad \forall|z|\le 1$.
הוכיחו כי $g(z)$ קבועה.
הדרכה: ניתן לכתוב את $g(z)$ באופן הבא: $g(z)=e^{i\cdot h(x,y)}$.

14) נניח כי $R>0$ ונתונה הפונקציה $f:D(0,R)\to\mathbb{C}$ גזירה בכל התחום.
נגדיר: $g(z)=\overline{f\left(\frac{R}{\overline{z}}\right)}$.
מצאו תחום בו $g(z)$ מוגדרת, ובדקו אם היא גזירה שם.

תשובות סופיות:

1) $u'_y=-2y+1 \ , \ v'_x=2y$

2) $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

3) $a=-3 \ , \ b=3$

4) $x=0 \ , \ y=0$

5) הוכחה

6) הוכחה

7) א. הוכחה   ב. הוכחה

8) הוכחה

9) הוכחה

10) $c=a+i\cdot b=\frac{3}{2}$,
$$\begin{array}{l} y=0 \ , \ y=1 \ , \ y=0.5 \\ x=0 \ , \ x=1 \ , \ x=0.25 \\ z=0 \ , \ z=1+i \ , \ z=0.25+0.5\cdot i \end{array}$$

11) $u_y=\frac{y}{x^2+y^2} \ ; \ u_x=\frac{x}{x^2+y^2}$.

12) $a=1$

13) הוכחה

14) $A=\{z \ | \ |z|>1\}$

פונקציות הרמוניות:

שאלות:

1) הראו כי הפונקציה x^3-3xy^2, היא פונקציה הרמונית בכל המישור.

2) הראו כי הפונקציה x^2-y^2, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו לה צמודה הרמונית.

3) הראו כי הפונקציה $f(z)=xy+i\left(x^2+y^2\right)$, היא פונקציה גזירה בראשית-
הצירים, אך החלק המדומה שלה אינו פונקציה הרמונית.
האם $f(z)$ הולומורפית בראשית?

4) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\sin(x)\cosh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה $v(x,y)$ המקיימת $v(0,0)=2$.
רמז: $f(z)=\sin(z)$.

5) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\cos(x)\sinh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו פונקציה הלומורפית כך שמתקיים $u(x,y)=\text{Re}\{f\}$.

6) הראו כי הפונקציה $v(x,y)=e^y\sin(x)$, היא פונקציה הרמונית במישור,
מצאו לה פונקציה צמודה הרמונית $u(x,y)$ ופונקציה שלמה $f(z)$,
כך שמתקיים: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

7) הראו כי הפונקציה $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$,
היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
רמז: $u(r,\theta)$ תקרא הרמונית אם היא מקיימת $r^2u''_{rr}+ru'_r+u''_{\theta\theta}=0$.

8) נתון כי $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$ היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
מצאו לה צמודה הרמונית בתחום זה.

9) הוכיחו כי $u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$, היא פונקציה הרמונית
ומצאו לה צמודה הרמונית.

10) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=u(x,y)^2-v(x,y)^2$ פונקציה הרמונית.

11) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=\sin\left[u(x,y)\right]\cdot\cosh\left[v(x,y)\right]$ פונקציה הרמונית.

12) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$
(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

13) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$
(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

14) הראו כי הפונקציה $\sinh(x)\cos(y)$ היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

פונקציות מרוכבות

פרק 4 - פונקציות אלמנטריות

תוכן העניינים

סינוס מרוכב:

שאלות:

1) פתרו את המשוואה $\sin(z)=2$.

2) הוכיחו כי $\sin(z)=\sin(x+iy)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$.

3) פתרו את המשוואה $\sin(z)=5$.

תשובות סופיות:

1) כל הפתרונות הם מהצורה הבאה: $z_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$,
כאשר n מספר שלם.

2) הוכחה.

3) $z_k=\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left(5\pm2\sqrt{6}\right)$

קוסינוס מרוכב:

שאלות:

1) הוכיחו כי $\cos(z)=\cos(x+iy)=\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)$.

2) פתרו את המשוואה $\cos(z)=2$.

3) האם $|\cos(z)|\le 1$ לכל z ?

4) פתרו את המשוואה $\cos(\pi z)+\frac{3}{4}i=0$.

5) הוכיחו כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|\cos(z)|\le\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ כאשר $y=\operatorname{Im}(z)$.

6) פתרו את המשוואה $\tan(z)=\frac{i}{3}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $z_n=2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$

3) לא.

4) $z_k=-\frac{1}{2}+2k-i\frac{1}{\pi}\ln(2)$

5) הוכחה.

6) $z_k=\pi k+i\frac{1}{2}\ln(2)$

אקספוננט מרוכב:

שאלות:

1) פתרו את המשוואה $e^z=-1$.

2) הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $\left|e^{ix}\right|=1$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי אם $\operatorname{Im}(z)\geq 0$ אז $\left|e^{iz}\right|\leq 1$.

ב. הראו כי $\left|e^z\right|=1$ אם ורק אם $\operatorname{Re}(z)=0$.

4) פתרו את המשוואה $e^z=1$.

5) פתרו את המשוואה $e^z=i$.

6) פתרו את המשוואה $e^z=1+i$.

7) האם הפונקציה $f(z)=e^z$ היא חח"ע?

תשובות סופיות:

1) $z=i\cdot\pi[2n+1]$

2) $\sqrt{\cos^2(x)+\sin^2(x)}=1$

3) א. $\left|e^{iz}\right|=e^{-y}=\frac{1}{e^y}\leq\frac{1}{e^0}=1$ ב. הוכחה.

4) $k\in\mathbb{Z}$ $z_k=2\pi ik$

5) $k\in\mathbb{Z}$ $z_k=i\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right)$

6) $k\in\mathbb{Z}$ $z_k=\frac{1}{2}\ln(2)+i\pi\left(2k+\frac{1}{4}\right)$

7) לא.

העתקות אלמנטריות:

שאלות:

1) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$, תחת ההעתקה $f(z)=z+1$.

2) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$, תחת ההעתקה $f(z)=5z$.

3) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,Arg(z)=\frac{\pi}{4}\right\}$, תחת ההעתקה $f(z)=z^3$.

4) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

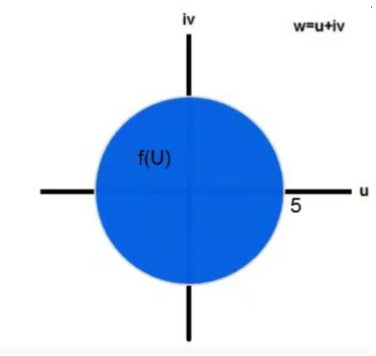
5) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<2\pi\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

6) מהי תמונת התחום $A=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,-\infty<\mathrm{Re}(z)<0, 0<\mathrm{Im}(z)<\frac{\pi}{2}\right\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

תשובות סופיות:

1) $|w-1|<1$

2)



3) $\frac{3\pi}{4}\simeq 135^\circ$

4) $0<\alpha<\pi \quad 0<R<\infty \quad f(z)=e^x e^{iy}\equiv \mathrm{R}e^{i\alpha}$

5) $0<\alpha<2\pi \quad 0<R<\infty \quad f(z)=e^x e^{iy}\equiv \mathrm{R}e^{i\alpha}$

6) $0<\alpha<\frac{\pi}{2} \quad 0<R<1 \quad f(z)=e^x e^{iy}\equiv \mathrm{R}e^{i\alpha}$

לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים:

שאלות:

1) חשבו את הגדלים הבאים:

א. $Arg(1+i)$

ב. $Arg\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

2) חשבו את הגדלים הבאים:

א. $Log(1+i)$

ב. $Log\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

3) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\sqrt{i}$.

4) מצאו את כל הערכים האפשריים של i^i.

5) מצאו את כל הערכים האפשריים של $2^{\frac{1}{9}+\frac{i}{50}}$.

6) חשבו את הערך $(2+2i)^{5i}$ עבור 3 ענפים שונים לבחירתכם.
כמה תשובות אפשריות יש לערך זה.

7) מצאו את תמונת התחום $A=\left\{z=re^{i\theta} \mid R_1<r<R_2\ ,\ -\pi<\theta<\pi\right\}$ תחת העתקה $Log(z)$ (הענף הראשי של הלוג).

8) מצאו תחום בו הפונקציה $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ אנליטית. כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ $a\neq b$.
הערה: תרגיל זה דורש ידע בהעתקות מוביוס.

9) הראו כי $\left|a^z\right|=a^{\text{Re}(z)}$ עבור a ממשי חיובי בתחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$ כאשר פונקציית החזקה מוגדרת ע״י ענף הראשי של הלוג, כלומר: $a^z=e^{z\cdot Log(a)}$.

10) הוכיחו ישירות כי העתקה $\sqrt{z}$ איננה רציפה בתחום $\mathbb{C}$ אם מגדירים את $\sqrt{z}$ באופן הבא: $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ כאשר $z=re^{i\theta}$ | $\theta\in[0,2\pi]$.

11) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\log(\log(-1))$.

12) נניח כי $\log(z)$ זה ענף רציף של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C}\setminus\{z=x+iy \ , \ x\geq 0 \ , \ y=\sin(x)\}$ ונניח שבענף זה מתקיים $\log(1)=0$,
חשבו בענף זה את הערכים: $\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $\log\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, $\log(-i)$, $\log(i)$, $\log(-1)$.

13) נגדיר $\log_\alpha(z)=\ln|z|+i\cdot\arg(z)$ כאשר $\alpha-2\pi<\arg(z)\leq\alpha$.
א. חשבו את הערכים: $\log_0(1)$, $\log_\pi(1)$, $\log_{2\pi}(1)$.
ב. מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ תחת ההעתקה $\log_\pi(z)$.
ג. מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ תחת ההעתקה $\log_0(z)$.

14) יהיו $z_1 , \ldots , z_n$ מספרים מרוכבים כך ש-$\mathrm{Re}(z_k)>0$ לכל $1\leq k\leq n$ וגם $\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_k)$ לכל $1\leq k\leq n$.
הוכיחו כי $Log(z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n)=Log(z_1)+\ldots+Log(z_n)$, כאשר $Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוגריתם.

15) יהי $U=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ויהי $y>0$. חשבו את הגבול $\lim_{y\to 0}[\log(a+iy)-\log(a-iy)]$ עבור $a>0$ ועבור $a<0$.

16) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt{z}$ ב-$\mathbb{C}$. כלומר, הראו שלא קיימת פונקציה אנליטית $h(z)$ ב-$\mathbb{C}$ כך ש-$h^2(z)=z$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

17) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$ ב-$|z|<1$ לכל $n\geq 2$.

18) נניח כי $f(z)$, $g(z)$ הם שני ענפים אנליטיים של הלוג בקבוצה פתוחה וקשירה U. הוכיחו כי קיים קבוע k שלם כך ש-$f(z)-g(z)=2\pi ik$ לכל $z\in U$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{4}$ ב. $-\frac{\pi}{2}$

2) א. $\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\frac{\pi}{4}$ ב. $\ln(2)-\frac{\pi}{2}$

3) $e\frac{5\pi}{4}i\ ,k=1\quad ;\quad e\frac{\pi}{4}i\ ,\ k=0$

4) $\left\{e^{-\pi\frac{4k+1}{2}}\quad |k\in\mathbb{Z}\right\}$

5) $\left\{2^{\frac{1}{9}}e^{-\frac{2\pi k}{50}}e^{i\left(\frac{\ln(2)}{50}+\frac{2\pi k}{9}\right)}\quad |\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

6) $\left\{e^{-5\cdot\frac{\pi}{4}}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\ ,\ e^{-5\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\ ,\ e^{-5\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\ ,\ ..\right\}$

7) $\ln(r)+i\cdot\theta$

8) $\frac{z-a}{z-b}\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$

9) $a^{\mathrm{Re}(z)}$

10) הוכחה.

11) $m\in\mathbb{Z}\ ,\ k\geq 0$ $\quad\ln(\pi+2\pi k)+i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$

$\ln(-\pi-2\pi k)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)\quad m\in\mathbb{Z}$

12) $-\pi i\ ,\ -\frac{3\pi}{2}i\ ,\ -\frac{\pi}{2}i\ ,\ \ln\left(\frac{5\pi}{2}\right)\ ,\ \ln\left(\frac{3\pi}{2}\right)-2\pi i$

13) א. $2\pi i\ ,\ 0\ ,\ 0$ ב. $\theta<r<\infty\ ,\quad -\infty<\ln(r)<\infty\ ,\quad \ln(r)+i\theta$

ג. $0<\theta\leq 2\pi\ ,\quad -\infty<\ln(r)<\infty\ ,\quad \ln(r)+i\theta$

14) הוכחה.

15) $2\pi i$

16) הוכחה.

17) הוכחה.

18) הוכחה.

פונקציות מרוכבות

פרק 5 - אינטגרציה מרוכבת

תוכן העניינים

אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx$, לכל $\forall m,n\in\mathbb{Z}$.

2) לכל $z\in\mathbb{C}$, המקיים $\mathrm{Re}(z)<0$, פתרו את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{zt}dt$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$

2) $-\frac{1}{z}$

אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} z^n dz$, כאשר $n\in\mathbb{Z}$.

2) חשבון את האינטגרל $\int\limits_{\gamma}\frac{z+2}{z}dz$, כאשר $\gamma=\left\{z=2e^{i\theta}\mid 0\le\theta\le\pi\right\}$.

3) חשבון את האינטגרל $\int\limits_{\gamma}(z-1)dz$, כאשר $\gamma=\left\{z=1+e^{i\theta}\mid \pi\le\theta\le 2\pi\right\}$.

4) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma}\pi e^{\pi\bar{z}}dz$, כאשר γ מסילת קווים ישרים,
העוברת בנקודות $\gamma:0\to 1\to 1+i\to i\to 0$.

5) חשבון את אורך המסילה $\gamma=[z_1,z_2]$, כאשר $\gamma=[z_1,z_2]$ היא מסילת הקו הישר
המחברת בין z_1 ל- z_2 .

6) חשבון את אורך המסילה $\gamma(t)=\{(t-\sin t)+i\cdot(1-\cos t)\ \mid\ 0<t<1\}$.

7) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1}\bar{z}\,dz$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases}0 & n\ne -1\\ 2\pi i & n=-1\end{cases}$

2) $2\pi i-4$

3) 0

4) $4e^{\pi}-4$

5) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

6) ≈ 0.48

7) $2\pi i$

משפט קושי גורסט:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\int_{0}^{2+\frac{i\pi}{4}} e^z dz$.

2) הוכיחו כי $\int_{4}^{1+i} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \sqrt[4]{2}\cos(\frac{\pi}{8}) - 2 + i\sqrt[4]{2}\sin(\frac{\pi}{8})$.
כאשר $\sqrt{z}$ הינו הענף העיקרי של פונקציית השורש.

תשובות סופיות:

1) $\frac{e^2[1+i]}{\sqrt{2}} - 1$

2) הוכחה.

נוסחת האינטגרל של קושי:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z}dz$.

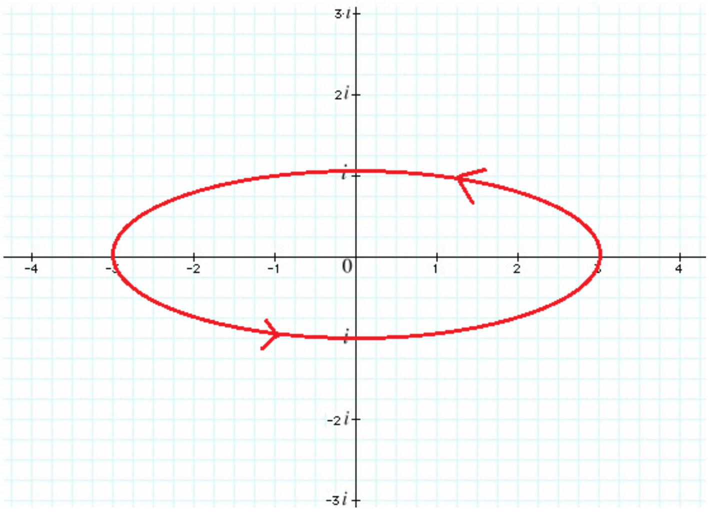
2) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2}dz$.

3) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\sin(z^2)}{z(z-2)}dz$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z+e^{-z}}{z(z-2)(z-3)}dz$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1.5} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)}dz$.

6) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z(z-2)(z-4)}dz$, עבור המסילה שבציור:



7) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-e^{z^2}}{z(z^2-1)(z+3)}dz$.

8) תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית בתחום D.

נניח כי $z_0 \in D$ וכי הדיסק $D(z_0,R)=\{|z-z_0|\le R\}$ מוכל כולו ב-D.

הוכיחו כי $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0+R\cdot e^{i\theta}\right)d\theta$.

9) חשבון את האינטגרל $\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{2+\sin(2\theta)}d\theta$.

10) הוכיחו: $n\in\mathbb{N}$ $\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n}(\theta)d\theta=\frac{2\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

11) חשבון את האינטגרל $\int\limits_C \frac{z}{z^2+1}dz$ כאשר $C=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=2,\ \mathrm{Im}(z)\ge 0\}$.

12) חשבון את האינטגרל $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)}$ כאשר $a>b>0$.

13) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1}\frac{Log\left(1+\frac{z}{3}\right)}{z}dz$.

14) תהי $f(z)=u+iv$ הולומורפית בתחום $|z|<1$ כך ש-$u^2(0)=v^2(0)$.

הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\int_0^{2\pi}u^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}v^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta$.

15) תהי $f(z)=u+iv$ הולומורפית בתחום $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$.

הוכיחו כי לכל $0<r<1$ ולכל $0<|a|<r$ מתקיים

$$\oint\limits_{|z|=r}\frac{\mathrm{Re}(z)}{z-a}f(z)dz=\pi i\cdot\left(\left[a+\frac{r^2}{a}\right]f(a)-\frac{r^2}{a}\cdot f(0)\right).$$

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$
2) $2\pi e^2 i$
3) $2\pi i\cdot\frac{\sin\left(2^2\right)}{2}$
4) $2\pi i\cdot\frac{1}{3}$
5) $\pi i-2\pi ei$
6) $-\frac{\sin(2)\pi i}{2}$
7) $\pi i\cdot\left(\frac{17}{12}-\frac{3e}{4}\right)$
8) הוכחה.
9) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
10) הוכחה.
11) πi
12) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$
13) 0
14) הוכחה.
15) הוכחה.

נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin(z)}{(z-i)^3}dz$.

2) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}dz$.

3) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2}dz$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3}dz$.

6) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=6} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

7) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)^2(z-4)}dz$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

2) $-\pi i$

3) $-2\pi i\cdot\sin(\pi)$

4) $-\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}\pi i$

5) $-2\pi^2 i$

6) $-\frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

7) 0

אי-שיוויונות אינטגרליים (משפט הערכה):

שאלות:

הוכיחו את אי השוויונות הבאים:

1) $\left|\int_C \frac{z^3}{z^2+1}dz\right| \le \frac{81\pi}{8}$, כאשר $C:\{|z|=3 \ , \ \mathrm{Re}(z)>0\}$.

2) $\left|\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1}dz\right| \le \frac{6\pi}{8}$

3) $\left|\int_C e^{z^2}dz\right| \le \sqrt{8}$, כאשר C הינה מסילת הקו הישר מ- 0 עד $2+2i$.

4) $\left|\int_C \frac{z^2}{\sin(z)}dz\right| \le \frac{\pi^2}{2}+2$, כאשר C הוא הקטע הישר המתחיל בנקודה $\frac{\pi}{2}+i$ ומסתיים בנקודה $\frac{\pi}{2}-i$.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

פונקציות קדומות:

שאלות:

1) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

2) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^n}$ $(n\geq 2)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

3) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$? האם יש לה קדומה שם?

4) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$? האם יש לה קדומה שם?

5) הוכיחו כי לפונקציה $f(z)=\frac{1}{z(z^2-\pi^2)}$ יש קדומה בתחום $D=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|>\pi\}$.

6) נסמן $I=\int_\Gamma \frac{2z}{z^2+1}dz$ כאשר $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|=2\ ,\ \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$ בכיוון החיובי.

א. האם לאינטגרינד $\frac{2z}{z^2+1}$ יש פונקציה קדומה בתחום פשוט קשר המכיל את Γ?

ב. חשבו את I.

7) נניח כי b , a מספרים מרוכבים בחצי המישור השמאלי, כלומר $\mathrm{Re}(b)<0$, $\mathrm{Re}(a)<0$.
הוכיחו כי $|e^a-e^b|<|a-b|$, $(a\neq b)$.

8) נניח כי $g(z)$, $f(z)$ פונקציות שלמות המקיימות $f^2(z)+g^2(z)=1$ לכל $z\in\mathbb{C}$. הוכיחו
כי קיימת פונקציה שלמה $h(z)$ כך שמתקיים: $f(z)=\cos(h[z])$ ו $g(z)=\sin(h[z])$.

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$

2) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור γ המוכל בתחום Ω.

3) π

4) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור בתחום.

5) הוכחה.

6) א. לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור בתחום. ב. $2\pi i$

7) הוכחה.

8) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)dx=\sqrt{\pi}e^{-b^2}$ עבור $b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ו- $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\sin(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx=\pi$.

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^6(x)}{x^6}dx$.

5) הוכיחו כי $\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{(a+b\cos\theta)^2}d\theta=2\pi\cdot\frac{a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$ עבור $a>b>0$.

6) תהי $f(z)=\frac{1}{(1+az)^2}+\frac{1}{(1+bz)^2}$ כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ קבועים המקיימים $|a|<1$, $|b|<1$ שונים מאפס. נניח כי $|f(z)|\le 3$ לכל $|z|=1$. הוכיחו כי $|a^n+b^n|\le\frac{3}{n+1}$ לכל $n\ge 0$.
רמז: התבוננו ב- $|f^{(n)}(0)|$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) $\frac{11\pi}{20}$
5) הוכחה.
6) הוכחה.

פונקציות מרוכבות

פרק 6 - תכונות של פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

משפט ליוביל:

רקע:

משפט:

אם $f(z)$ פונקציה שלמה (אנליטית בכל $\mathbb{C}$) וחסומה ב-$\mathbb{C}$ (כלומר קיים $M>0$ כך ש- $|f(z)|<M \quad \forall z\in\mathbb{C}$) אז $f(z)$ פונקציה קבועה.

שאלות:

1) מצאו פונקציה שלמה, המקיימת את אי-השוויון $|\sin(z)-z\cdot f(z)|<2 \quad \forall z\in\mathbb{C}$.

2) הוכיחו כי קיים $z\in\mathbb{C}$ עבורו $|\cos(z)|>1$ ע"י שימוש במשפט ליוביל.

3) נתונה פונקציה שלמה $f(z)=u+iv$, המקיימת $v\le 0$ (לכל z).
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-i\cdot f(z)}$.

4) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $u\le 0$ (לכל z).
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{f(z)}$.

5) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $u\ge 0$ (לכל z).
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-f(z)}$.

6) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $v\ge 0$ (לכל z).

7) נתונה פונקציה שלמה $f(z)$, המקיימת $|f(z)|\ge 1$ לכל z.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.
רמז: התבוננו בפונקציה $\frac{1}{f(z)}$.

8) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $v\le 0$ (לכל z).
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-i\cdot f(z)}$.

9) הוכיחו כי כל הפונקציות השלמות $f(z)$, המקיימות $|f(z)| \le 4+5|z|^{\frac{4}{5}}$ $\forall z \in \mathbb{C}$
הן פונקציות קבועות.

10) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $|f(z)| \ge e^{\mathrm{Re}(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.
הוכיחו שקיים קבוע C מרוכב, כך ש- $f(z) = C \cdot e^z$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

11) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $f(0)=0$ ו- $f(1)=1$.
הוכיחו שקיים C מרוכב, כך ש- $|f(c)| > 2$.

12) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $\lim_{z\to\infty} f(z) = 2$.
הוכיחו כי $f(z) \equiv 2$.

13) נתון כי $f(z) = u + iv$ שלמה המקיימת $u \cdot v \ge 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
הוכיחו כי $f(z)$ פונקציה קבועה.

14) נתון כי $f(z) = u + iv$ שלמה המקיימת $u \ge v$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
הוכיחו כי $f(z)$ פונקציה קבועה.

15) האם קיימת פונקציה אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ כך ש-

$$|f(z)| \ge \frac{1}{\sqrt{|z|}} \qquad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \ ?$$

הערה: ניתן להשתמש במשפט רימן אם $g(z)$ אנליטית בסביבה נקובה של z_0 וחסומה שם אז היא אנליטית גם ב- z_0.
(הכוונה שניתן להגדיר אותה ב- z_0 כך שתהיה אנליטית שם).

16) הוכח או הפרך: אם $f(z)$ שלמה שאינה קבועה אז קיים $z \in \mathbb{C}$ כך ש- $\mathrm{Re}\, f(z) > |f(z)|^2$.

17) הוכיחו כי אם $f(z)$ שלמה שאינה קבועה התמונה $f[\mathbb{C}]$ צפופה ב- $\mathbb{C}$.
הגדרה: קבוצה $A \subseteq \mathbb{C}$ תקרא צפופה ב- $\mathbb{C}$ אם ורק אם לכל $z_0 \in \mathbb{C}$ ולכל $R > 0$ מתקיים $D(z_0, R) \cap A \ne \varnothing$.

18) ידוע כי קיימת פונקציה $D(0,1)$ אנליטית $T(z):\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to D(0,1)$ המקיימת $T'(z)\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.
הוכיחו כי כל פונקציה שלמה $f(z)$ המקיימת $f(z)\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ לכל $z\in\mathbb{C}$ הינה פונקציה קבועה.

19) נניח כי $f(z)$ שלמה ומקיימת $f(z)=f(z+1)=f(z+i)$ לכל $z\in\mathbb{C}$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

תשובות סופיות

1) $$f(z)=\begin{cases}\frac{\sin(z)}{z} & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$$

2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) ראו וידאו.
5) ראו וידאו.
6) ראו וידאו.
7) הוכחה.
8) ראו וידאו.
9) הוכחה.
10) הוכחה.
11) הוכחה.
12) הוכחה.
13) הוכחה.
14) הוכחה.
15) לא קיימת.
16) הוכחה.
17) הוכחה.
18) הוכחה.
19) הוכחה.

עקרון היחידות:

שאלות:

1) הוכיחו כי אם $f(z)$ שלמה ומקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, אז $f(z)\equiv z$.

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $D=\{z \mid |z|<1\}$ ומקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
מצאו את $f(z)$.

3) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $D=\{z \mid |z|<1.5\}$,
ומקיימת $f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{nz}{nz-0.5}dz$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
מצאו את $f(z)$.

4) כמה פונקציות אנליטיות $f(z)$ ב- $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$,
מקיימות $f\left(\frac{1}{3n-1}\right)=\frac{2}{n}$ $\forall n\geq 2$?

5) מצאו את כל הפונקציות האנליטיות $f(z)$ ב- $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$,
המקיימות $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sin(\pi n)$ $\forall n\geq 4$.

6) מצאו (אם ישנן) את כל הפונקציות האנליטיות $f(z)$ ב- $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$
המקיימות
$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}\frac{1}{n+1} & n=2k\\ \frac{1}{n+2} & n=2k+1\end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

7) הוכח או הפרך:
לא קיימת פונקציה אנליטית $f(z)$ בעיגול היחידה הפתוח D,
בעלת אינסוף אפסים ב- D, שאינה פונקציית האפס.

8) הוכח או הפרך:
קיימת פונקציה אנליטית בתחום $1<|z|<3$ כך שלכל x ממשי המקיים $1<|x|<3$ מתקיים $f(x)=|x|^3$.

9) נתונות $f(z),g(z)$ אנליטיות בתחום D ויהיו $a,b\in D$.
הוכיחו כי אם $\big(f(z)-a\big)\big(g(z)-b\big)=0$ לכל $z\in D$ אז בהכרח $f(z)\equiv a$ או $g(z)\equiv b$.

10) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $D(z_0,R)$ עבור $z_0\in\mathbb{C}$ ו- $R>0$.
נניח בנוסף כי $f'(z_0)\neq 0$.
הוכיחו כי קיים $r>0$ כך ש- $\oint\limits_{|z-z_0|=r}\frac{1}{f(z)-f(z_0)}dz=\frac{2\pi i}{f'(z_0)}$.
הערה: תרגיל זה דורש שימוש במשפט השארית.

11) הוכח או הפרך:
נסמן $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<|z|<1\}$.
נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- D כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)=n$ לכל $n>1$ וכי $f(z)$
בעלת קוטב ב- $z=0$ אז בהכרח $f(z)=\frac{1}{z}$ לכל $z\in D$.
הערה: תרגיל זה דורש ידע על נקודות סינגולריות.

12) הוכח או הפרך:
נתונה $f(z)$ אנליטית בתחום $|z|>1$ ונתון כי לכל $z\in(1,\infty)$ מתקיים ש- $f(z)$ ממשי.
אז בהכרח גם לכל $z\in(-\infty,-1)$ מתקיים ש- $f(z)$ ממשי.

13) נניח כי $f(z)$ רציפה ב- $|z|<1$ ומקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$ ו- $f\left(\frac{i}{2}\right)=0$.
הוכיחו כי $f(z)$ אינה אנליטית ב- $|z|<1$.

14) (אתגר)
נניח כי $f(z)$ רציפה ב- $\overline{D(0,1)}$ ואנליטית ב- $D(0,1)$ המקיימת
$|f(z)|=1 \quad \forall |z|=1$ הוכיחו כי יש מספר סופי בלבד של נקודות ב- $D(0,1)$
בהן $f(z)$ מתאפסת.
רמז: היעזרו במשפט בולצאנו וייארשטראס.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f\left(z\right)=\frac{z}{1+z}$

3) $f\left(z\right)=z$

4) $f\left(z\right)=6\frac{z}{z+1}$

5) ראו בווידאו.

6) לא קיימות כאלו פונקציות.

7) הפרכה. דוגמא נגדית: $f\left(z\right)=\sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$

8) לא קיימת כזו פונקציה.

9) הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

14) הוכחה.

עקרון המקסימום והמינימום:

שאלות:

1) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $|f(z)|$, כאשר $f(z)=e^{-z^2}$ בתחום $D=\{z \mid |z|<1\}$.

2) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $|f(z)|$, כאשר $f(z)=e^{-z^2}$ בתחום $D=\{z \mid |z|\le 3\}$.

3) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $|f(z)|$, כאשר $f(z)=\cos(z)$ בתחום $D=\{z \mid 0\le \mathrm{Re}\{z\}\le 2\pi \ , \ 0\le \mathrm{Im}\{z\}\le 2\pi\}$.

4) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $|f(z)|$, כאשר $f(z)=e^{z^2}$ בתחום $D=\{z \mid |z|\le 1\}$ ואת כל הנקודות בהן הוא מתקבל.

5) תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול $|z|\le R$ ומקיימת $|f(z)|>a \qquad \forall |z|=R$
הוכיחו כי אם $|f(0)|<a$ אז בעיגול $|z|<R$ יש לפחות אפס אחד של $f(z)$.

6) (עקרון המינימום)
תהי $f(z)$ אנליטית בתחום (קבוצה פתוחה וקשירה) U ומקיימת $|f(z)|>0$.
הוכיחו:
א. אם $f(z)$ אינה קבועה אז לא קיימת נקודה $z_0\in U$ כך שהפונקציה $|f(z)|$ מקבלת מינימום ב- z_0.
ב. אם $|f(z)|$ מקבלת מינימום ב- U אז היא קבועה.
ג. הערך המינימלי של $|f(z)|$ בתחום קומפקטי Ω מתקבל על השפה בהנחה כי $f(z)$ אנליטית ולא מתאפסת ב- Ω.

7) תהי $f(z)$ אנליטית ב- $|z|\le 1$ ונניח שאינה מתאפסת שם.
נניח גם כי לכל $|z|=1$ מתקיים $|f(z)|=1$.
א. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.
ב. האם סעיף א' נכון גם ללא הנחה ש- $f(z)$ אינה מתאפסת ב- $|z|\le 1$?

8) (עקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות).
נניח כי $f(z)=u+iv$ אנליטית בתחום קומפקטי Ω.
הוכיחו כי $u(x,y)$ מקבלת ערך מקסימלי על השפה $\partial\Omega$.

9) (עקרון המינימום לפונקציות הרמוניות).
נניח כי $f(z)=u+iv$ אנליטית בתחום קומפקטי Ω.
הוכיחו כי $u(x,y)$ מקבלת ערך מינימלי על השפה $\partial\Omega$.

10) נניח גם כי $g(z)$, $f(z)$ אנליטיות ב- $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\le 1\}$.
נניח כי לכל $|z|=1$ מתקיים $\mathrm{Re}[f(z)]=\mathrm{Re}[g(z)]$.
הוכיחו כי קיים קבוע $c\in\mathbb{C}$ כך ש- $f(z)=g(z)+c$ לכל $z\in D$.

11) יהי $p(z)=\sum_{k=0}^{k=n}a_kz^k$ פולינום ממעלה n $(a_n\ne 0)$.
נתון כי לכל $|z|=1$ מתקיים $|p(z)|\le 1$.
הראו כי לכל $|z|\ge 1$ מתקיים $|p(z)|\le|z|^n$.
רמז: הראו כי הפונקציה $f(z)=z^np\left(\frac{1}{z}\right)$ היא פונקציה שלמה ומצאו לה חסם בדיסק היחידה.
הערה: ניתן להשתמש בעובדה: אם $f(z)$ אנליטית בסביבה נקובה של z_0 והגבול $\lim_{z\to z_0}f(z)$ קיים וסופי אזי $f(z)$ אנליטית גם ב- z_0.
(הכוונה שניתן להגדיר אותה ב- z_0 כך שתהיה אנליטית שם).

12) יהי $R>0$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום:
$A=\{z=x+iy\,|\,-R\le x\le R,-R\le y\le R\}$.
נסמן את שפת התחום כך:

$l_3=\{z=-R+iy\,|\,-R\le y\le R\}$ $\qquad$ $l_1=\{z=R+iy\,|\,-R\le y\le R\}$

$l_4=\{z=x-iR\,|\,-R\le x\le R\}$ $\qquad$ $l_2=\{z=x+iR\,|\,-R\le x\le R\}$

הוכיחו כי $|f(0)|\le\frac{1}{4}\left(\max_{l_1}|f(z)|+\max_{l_2}|f(z)|+\max_{l_3}|f(z)|+\max_{l_4}|f(z)|\right)$.
רמז: התבוננו בפונקציה $g(z)=\frac{1}{4}\left(f(z)+f(-z)+f(iz)+f(-iz)\right)$.

13) (אתגר)
הוכיחו כי משפט ההעתקה הפתוחה: אם $A \subset \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה ו- $f(z)$ אנליטית ולא קבועה ב- A אז התמונה $f[A]$ פתוחה.

14) נסמן $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ ונניח כי:
- $f(z)$ הולומורפית ב- $D(0,1)$.
- לכל $z\in D(0,1)$ מתקיים $|f(z)|\le 1$.
- $f(0)=0$.

הוכיחו כי $|f(z)|\le|z|$ לכל $z\in D(0,1)$ וכי $|f'(0)|\le 1$ ואת ההערה הבאה.
הערה: אם בנוסף ידוע כי קיימת נקודה $z_0\in D(0,1)$ (שאינה אפס) כך ש- $|f(z_0)|=|z_0|$ אז קיים קבוע $c\in\mathbb{C}$ כך ש- $f(z)=c\cdot z$.

15) נניח כי $f(z)$ הולומורפית בתחום $\overline{D(0,1)}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 1\}$ ומקיימת $|f(z)|=1$ לכל $|z|=1$.
נניח בנוסף כי $f(z)=0$ אם ורק אם $z=0$.
הוכיחו כי קיימים קבועים c ו- k כך ש- $f(z)=c\cdot z^k$.
הערה: ניתן להשתמש בעקרון המינימום.

16) (נכון או לא נכון)
נגדיר $A=\{z\in\mathbb{C} \mid 1<|z|<2\}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית ב- A ורציפה ב- $\bar{A}$.
נתון כי:
$$|f(z)|=1 \quad \forall |z|=1$$
$$|f(z)|=8 \quad \forall |z|=2$$
אזי בהכרח $|f(z)|\le|z|^3$ לכל $z\in A$.

17) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $|z|\le 1$ ומקיימת:
- $|f(z)|\le 1 \quad \forall z\in\{\mathrm{Im}(z)\ge 0, |z|=1\}$
- $|f(z)|\le 3 \quad \forall z\in\{\mathrm{Im}(z)\ge 0, |z|=2\}$

הוכיחו כי $|f(0)|\le\sqrt{6}$.
רמז: התבוננו בביטוי $f(z)f(-z)$.

18) יהי $r>0$.

נגדיר $C_r=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=r\}$ ויהיו $z_1,\dots,z_n\in C_r$.

הוכיחו כי קיים $z\in C_r$ כך ש- $\prod_{k=1}^{k=n}|z-z_k|>r^n$.

תשובות סופיות:

1) לא קיים.

2) e^9

3) 268

4) $|f(1)|=|f(-1)|=e$

5) הוכחה.

6) הוכחה.

7) א. הוכחה. ב. לא.

8) הוכחה.

9) הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) נכון.

17) הוכחה.

18) הוכחה.

פונקציות מרוכבות

פרק 7 - טורים

תוכן העניינים

טורים מספריים:

שאלות:

1) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}$.

2) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin(in)}{3^n}$.

3) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^n$.

4) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2+i^n}$.

5) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+i^n}$.

תשובות סופיות:

1) מתבדר.
2) מתכנס.
3) מתבדר.
4) מתבדר.
5) מתכנס.

קריטריון קושי – הדמרד:

שאלות:

1) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$.

2) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n$.

3) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (2n+1)} (z-3n)^n$.

תשובות סופיות:

1) $R=1$

2) $R=\infty$

3) $R=3$

טורים כלליים:

שאלות:

1) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$.

2) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(1-i)^n}$.

3) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (z-1)^n}$.

4) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$.

5) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$.

תשובות סופיות:

1) $|z|>1$

2) $|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$

4) $2<|z|<4$

5) $\operatorname{Re}(z)<0$

טורי לורן:

שאלות:

1) פתחו את הפונקציה לטור לורן סביב $z_0=0$ בכל התחומים האפשריים $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

2) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<2$ ובתחום $|z|>2$.

3) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=-1$ בתחומים הבאים: $0<|z+1|<2$ ו- $|z+1|>2$.

4) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+2)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=-3$ בכל התחומים האפשריים.

5) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $1<|z|<3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

6) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|>3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

7) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<1$.

8) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<1$ ומצאו את המקדם a_{-1}.

9) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=i$ בתחום $0<|z-i|<2$ ומצאו את המקדם a_{-1}.

10) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=i$ בתחום $|z-i|>2$.

11) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-4)}$ לטור לורן סביב $z_0=1$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $z=5$.

12) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $1-3i$.

13) נניח כי $|a|<1$ ונגדיר את הפונקציה $f(z)=\frac{a}{z-a}$ (כאשר a מספר ממשי).

א. פתחו פונקציה זו לטור לורן בטבעת $|a|<|z|<\infty$.

ב. הוכיחו את הזהות $\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(n\theta)=\frac{a\cos(\theta)-a^2}{1-2a\cos(\theta)+a^2}$.

14) תהי $a\in\mathbb{C}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ ונניח כי מתקיים $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$.

הוכיחו כי לכל $r>0$ מתקיים $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz$.

15) נסמן $\sum_{-\infty}^{\infty}a_nz^n$ פיתוח לטור לורן של $f(z)=\frac{z}{e^{z^2}-1}$ סביב $z_0=0$ בתחום $0<|z|<r$.

א. מצאו מהו ה- r המקסימלי.

ב. מצאו את a_n לכל $n\le 4$.

הערה: תרגיל זה דורש ידע בסיווג של נקודות סינגולריות.

16) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1}z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)dz$.

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

17) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1}e^{\frac{1}{z}}dz$.

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

תשובות סופיות:

1)
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1$$
$$f(z)=-\left(\frac{1}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad |z|>1$$

2)
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad |z|<2$$
$$f(z)=-\left(\frac{2}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n \qquad |z|>2$$

3)
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1} \qquad 0<|z+1|<2$$
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z+1)^{n+2}} \qquad |z+1|>2$$

4)
$$f(z)=-\frac{1}{(z+3)}\sum_{n=0}^{\infty}(z+3)^n \qquad 0<|z+3|<1$$
$$f(z)=\frac{1}{(z+3)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+3)^n} \qquad |z+3|>1$$

5)
$$f(z)=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n} \qquad 1<|z|<3$$

6)
$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}} \qquad |z|>3$$

7)
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6\cdot 3^n}\right]z^n \qquad |z|<1$$

8)
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \qquad |z|<1$$
$$a_{-1}=0$$

9)
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}(z-i)^{n-1} \qquad 0<|z-i|<2$$
$$a_{-1}=\frac{1}{2i}$$

10)
$$f(z)=\frac{1}{(2-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n \qquad 2<|z-i|$$

11)
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+2}} \qquad |z-1|>3$$

12) $|z|>3$ $\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$

13) א. $|a|<|z|<\infty$ $\quad f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}$ $\quad$ ב. הוכחה.

14) הוכחה.

15) א. $r=\sqrt{2\pi}$

ב. $a_n=0$ $\forall n\le -2$, $a_{-1}=1$, $a_0=0$, $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{12}$, $a_4=0$.

16) $\frac{\pi i}{12}$

17) $2\pi i$

טורי טיילור ומקלורן:

שאלות:

1) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\sin(z+1)$ סביב $z=0$ ומצאו תחום התכנסות.

2) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\frac{1}{z}$ סביב $z=i$ וציינו את רדיוס ההתכנסות.

3) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{2i}{2+i+z}$ סביב $z_0\neq-(2+i)$ בתחום $|z-z_0|<|2+i+z_0|$.

4) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(1-z)^3}$ לטור חזקות סביב $z_0\neq1$ בתחום $|z-z_0|<|1-z_0|$.

5) נניח כי $f(z)$ שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ ומתקיים $f'(0)=1$.
חשבו את $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos(z)}{f(z)}dz$.

תשובות סופיות:

1) $z\in\mathbb{C}$ $\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos(1)\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\sin(1)\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right)$.

2) $|z-i|<1$ $\quad f(z)=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{i}\right)^n(z-i)^n$.

3) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i(-1)^n}{(2+i+z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$.

4) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(n+1)(n+2)}{(1-z_0)^{n+3}}(z-z_0)^n$.

5) $2\pi i$.

פונקציות מרוכבות

פרק 8 - נקודות סינגולריות

תוכן העניינים

אפסים של פונקציות אנליטיות:

שאלות:

1) קבעו את סדר האפס של הפונקציה $f(z)=z\sin(z)$ בנקודה $z=0$.

2) קבעו את סדר האפס של הפונקציה $f(z)=z\sin(z^3)$ בנקודה $z=0$.

3) נניח כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר n.
נניח כי הפונקציה $g(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר m.
הוכיחו כי הפונקציה $h(z)=f(z)g(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר $n+m$.

4) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $h(z)=z^{20}\sin(z)$ בנקודה $z_0=0$.

5) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $f(z)=e^{\sin(z)}-\sin^2(z)-1$ בנקודה $z_0=0$.

6) נניח כי לפונקציה $f(z)$ יש אפס מסדר 7 בנקודה $z_0=0$.
נניח כי לפונקציה $g(z)$ יש אפס מסדר 3 בנקודה $z_0=0$.
מצאו את סדר האפס של הפונקציה $h(z)=f(z)+g(z)$.

7) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $h(z)=6\sin(z^3)+z^{12}(z^6-6)$ בנקודה $z_0=0$.

8) הוכיחו כי לא קיימת $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

תשובות סופיות:

1) $N=2$
2) $N=2$
3) הוכחה.
4) $N=21$
5) $N=1$
6) $N=3$
7) $N=3$
8) הוכחה.

מיון נקודות סינגולריות:

שאלות:

1) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

2) נניח כי $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו-$g(z)$ אנליטיות בסביבת $z=0$.
נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 7 של $f(z)$.
נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 11 של $g(z)$.
מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב-$z=0$?

3) נניח כי $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו-$g(z)$ אנליטיות בסביבת z_0.
נניח כי z_0 זה אפס מסדר n של $f(z)$.
נניח כי z_0 זה אפס מסדר m של $g(z)$.
מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב-z_0? חלקו למקרים $n\geq m$ ו-$n<m$.
א. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1-\cos(z)}{z^2}$.
ב. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

4) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$.

5) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$.

6) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1}{e^{-z}-1}+\frac{1}{z}$.

7) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

8) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1}{z^2-1}\cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right)$.

9) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=e^{\frac{z}{z-2}}$.

10) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$. האם הן מבודדות?

11) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\cot(z)$.

12) נתון כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
נניח כי 0 זה קוטב מסדר m של $f(z)$ ובנוסף נניח כי $-1\notin f\left[\mathbb{C}\setminus\{0\}\right]$.
מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות של $g(z)=\dfrac{f(z)-1}{f(z)+1}$.

13) מצאו את הקטבים והאפסים בתחום $|z|<4$ של הפונקציה $f(z)=\dfrac{(z-2)^2}{\left(e^{2z}-1\right)^2 z^3}$.

14) מיינו את הנקודות $z=0$ ו- $z=\frac{\pi}{4}$ עבור $f(z)=\dfrac{\tan(z)}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$.

15) תהיינה $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציות שלמות שאינן קבועות.
נניח כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)|\le|g(z)|$.

א. הוכיחו שכל נקודה סינגולרית של $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ הינה סליקה.

ב. הוכיחו כי $f(z)=c\cdot g(z)$ כאשר c קבוע המקיים $|c|\le 1$.

16) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\dfrac{\left(z^2-\frac{1}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$.

17) הוכיחו כי הנקודה $z_0=i$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)=\cos\left(\dfrac{1}{z^2+1}\right)$.

18) תהי $f(z):D\to\mathbb{C}$ אנליטית כאשר $D=\left\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-z_0|<1\right\}$.
נניח כי מתקיים $|z-z_0|^a|f(z)|\le 1$ לכל $z\in D$ עבור $0\le a<1$.
הוכיחו כי z_0 נקודה סינגולרית סליקה של $f(z)$.

19) (אתגר)

נתונה $f(z)$ אנליטית בתחום $0<|z|<1$ המקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n!}$.

הוכיחו כי $z=0$ זו נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$.

20) (אתגר)

הוכיחו כי אם z_0 זה קוטב של $f(z)$ אז היא בהכרח עיקרית של $g(z)=e^{f(z)}$.

רמז: רשמו את $f(z)$ באופן הבא $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ כאשר $\varphi(z_0)=r_0e^{i\alpha}$.

התבוננו בסדרות הבאות: $w_n=z_0+\frac{1}{n}e^{i\frac{\pi+\alpha}{m}}$, $z_n=z_0+\frac{1}{n}e^{i\frac{\alpha}{m}}$.

תשובות סופיות:

1) $z=1$ קוטב מסדר 1.

2) $z=0$ קוטב מסדר 4.

3) אם $n\ge m$ אז z_0 נקודה סינגולרית מסוג סליקה של $h(z)$.
ואם $n<m$ אז z_0 קוטב מסדר $m-n$ של $h(z)$.

4) $z=0$ עיקרית.

5) $z=0$ עיקרית.

6) $z_k=2\pi ik$ קטבים מסדר 1.

7) $z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$ קטבים מסדר 1.

8) $z=-1$ עיקרית ו- $z=1$ קוטב מסדר 1.

9) $z=2$ עיקרית.

10) $z=0$ לא מבודדת ו- $z_k=\frac{1}{\pi k}$ קטבים מסדר 1.

11) $z=0$ סליקה ו- $z_k=\pi k\neq 0$ קטבים מסדר 1.

12) $z=0$ סליקה.

13) $z=2$ אפס מסדר 2, $z=0$ קוטב מסדר 5, $z=\pm\pi i$ קטבים מסדר 2.

14) $z=0$ סליקה, $z=\frac{\pi}{4}$ קוטב מסדר 1.

15) א) הוכחה
ב) הוכחה

16) $z=0$ לא מבודדת.
$(k\neq 0,2,-2)$ $z_k=\frac{1}{k}$ קטבים מסדר 1.
$z=\pm\frac{1}{2}$ סליקות.

17) הוכחה.

18) הוכחה.

19) הוכחה.

20) הוכחה.

מיון נקודות סינגולריות באינסוף:

שאלות:

1) מיינו את הנקודה הסינגולרית ∞ של הפונקציה $f(z)=\frac{z^2}{1+z}$.

2) מיינו את הנקודה הסינגולרית ∞ של הפונקציה $f(z)=e^z$.

תשובות סופיות:

1) ∞ זה קוטב מסדר 1 של $f(z)$.

2) ∞ זאת נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$.

פונקציות מרוכבות

פרק 9 - משפט השארית

תוכן העניינים

מציאת שארית:

שאלות:

חשבו את השאריות של הפונקציות בנקודות הבאות:

1) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+3}{z+2}, z=-2\right)$

2) $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+9}, z=3i\right)$

3) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=1\right)$

4) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=-1\right)$

5) נניח כי לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ יש קוטב פשוט ב- z_0 כאשר ונניח כי $g'(z_0)\neq 0$.

הוכיחו כי $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right)=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

6) $\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z}, 0\right)$

7) $\operatorname{Res}\left(\frac{\sin(z+1)}{z}, 0\right)$

8) חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה $f(z)=\frac{\tan(z)}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$

9) חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה $f(z)=\frac{1-\cos(z)}{z^3(z-\pi)}$.

10) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה בעלת n אפסים בדיוק.
הוכיחו שכל הנקודות הסינגולריות של $\frac{f'(z)}{f(z)}$ הן קטבים פשוטים וחשבו את השאריות בנקודות אלו.

תשובות סופיות:

1) 1

2) $\frac{1}{6i}$

3) $\frac{3}{8}$

4) $-\frac{3}{8}$

5) הוכחה.

6) 1

7) $\sin(1)$

8) $\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{\pi}{2}+\pi k\right]=-\frac{1}{\left[\frac{\pi}{2}+\pi k\right]\left[\frac{\pi}{4}+\pi k\right]}$

9) $\operatorname{Res}\left[f(z),\pi\right]=\frac{2}{\pi^3}$ $\qquad$ $\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=-\frac{1}{2\pi}$

10) $\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_k\right]=m_k$ כאשר z_k אפס מסדר m_k של $f(z)$.

אינטגרלים מרוכבים :

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים :

1) $\oint\limits_{|z|=1} z\tan(\pi z)\,dz$

2) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)}\,dz$

3) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}\,dz$

4) $\oint\limits_{|z|=1} z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$

5) $\oint\limits_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)+e^{z^2}\cos(z)\,dz$

6) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי לכל מסלול C פשוט וסגור שאינו חותך את הראשית, מתקיים $\oint\limits_C f\left(\frac{1}{z^2}\right)dz=0$.

7) $(a>1)$ $\oint\limits_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}\,dz$

8) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{(1+z)^5\sinh(z)}{z^6}\,dz$

9) $\oint\limits_{|z|=5} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2}\,dz$

10) $\oint\limits_{|z|=6} \cot(z)\,dz$

11) $\oint\limits_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{3}{z}\right)\cos\left(e^{z^2+\pi}+\ln(2)\right)\,dz$

12) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ שם יש לה אפס מסדר 2 ומתקיים $f''(0)=7$.

חשבו $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin(z)}{f(z)}\,dz$.

13) $\oint\limits_{|z|=1} z^4\sin(\bar{z})\,dz$

14) $\oint\limits_{|z|=1}\sin(z)\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$

15) חשבו את המקדמים של החזקות השליליות בפיתוח של $f(z)=\frac{1}{\cos(z)-1}$

לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $0<|z|<2\pi$.

הערה: אם $\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ טור לורן של $f(z)$ בתחום $R_1<|z-z_0|<R_2$ אז ניתן

לקבל את המקדמים ע״י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ כאשר $R_1<r<R_2$.

16) הוכיחו את עקרון הארגומנט:

אם $f(z)$ אנליטית בתחום D פרט למספר סופי של קטבים ורציפה על

השפה γ ואינה מתאפסת שם על השפה אזי $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$ כאשר

N - מספר האפסים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D.

P - מספר הקטבים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D.

17) אם $n\in\mathbb{N}$ ו-$r>0$ כך ש-$n<r^2<n+1$ חשבו את האינטגרל $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}\frac{z}{e^{2\pi i z^2}-1}dz$.

18) חשבו $\int_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4}dz$.

הערה: $\int_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4}dz \overset{definition}{=} \lim_{R\to\infty}\int_{-iR}^{iR} \frac{e^z}{(z+1)^4}dz$ כאשר המסילה באינטגרל הימני היא מסילת הקו הישר מ- $-iR$ ל- iR .

תשובות סופיות:

1) $\oint_{|z|=1} z\tan(\pi z)dz = 0$

2) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$

3) $\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz = 2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)$

4) $\oint_{|z|=1} z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz = -\frac{\pi i}{3}$

5) $\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)+e^{z^2}\cos(z)dz = 0$

6) הוכחה.

7) $\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}dz = \frac{\pi i}{2}$

8) $\oint_{|z|=1} \frac{(1+z)^5\sinh(z)}{z^6}dz = \frac{267}{20}\pi i$

9) $\oint_{|z|=5} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2}dz = \pi\left[-3i\cdot e^i+2i-e\right]$

10) $\oint_{|z|=6} \cot(z)\,dz = 6\pi i$

11) $\oint_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{3}{z}\right)\cos\left(e^{z^2+\pi}+\ln(2)\right)dz = 0$

12) $\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{f(z)}dz = \frac{4\pi i}{7}$

13) $\oint\limits_{|z|=1} z^4 \sin\left(\bar{z}\right) dz = \dfrac{2\pi i}{5!}$

14) $\oint\limits_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\dfrac{1}{z}\right) dz = 0$

15) $a_{-1} = -2 \ \ , \ \ a_{-2} = -2 \ \ , \ \ a_n = 0 \ \text{ for } \ n \le -3$

16) הוכחה.

17) $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r} \dfrac{z}{e^{2\pi i z^2} - 1} dz = 2n+1$

18) $\int\limits_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty} \dfrac{e^z}{(z+1)^4} dz = \dfrac{\pi i}{3e}$

מסילת חצי קשת מעגלית:

שאלות:

בכל התרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$$C_R = \{z = \mathrm{R}e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$$

$$\gamma = \{z = x \mid -R \le x \le R\}$$

1) חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיף הקודם כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

2) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

3) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2}$

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2}$

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3} dx$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1} dx$.

6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2} dx$

7) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2} dx$

8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2} dx$

9) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)}$

תשובות סופיות:

1) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz = \pi$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

2) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

3) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = \pi\sqrt{2}$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3} dx = \frac{3\pi}{8}$

5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1} dx = \frac{14\pi}{3}$

6) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2} dx = \frac{\pi}{4}$

7) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2} dx = -\frac{\pi}{27}$

8) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2} dx = \frac{\pi}{6}$

9) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)} = \frac{5}{96}\pi$

מסילת משולש פיצה:

שאלה:

1) הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2016}}dx=\frac{\pi}{2016}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2016}\right)}$.

רמז: התבוננו בפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+x^{2016}}$ ובגזרת מעגל בזווית $\frac{2\pi}{2016}$.

תשובה סופית:

1) הוכחה.

מסילת מעגל היחידה:

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(2+\cos(\theta)\right)^2} d\theta$

2) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(3x)} dx$

3) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos(x)+b\sin(x)+c} dx$ עבור הפרמטרים הממשיים a,b,c המקיימים $c>\sqrt{a^2+b^2}=1$.

<u>הערה</u>: ניתן להשתמש בעובדה כי $\left|\sqrt{c^2-1}-c\right|<1$

4) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+b\cos\varphi)^2} d\varphi$ עבור $a>b>0$

5) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x} dx$ עבור $|a|>1$

6) חשבו לכל $n\in\mathbb{N}$ את $\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta)^n \cos(n\theta) d\theta$

תשובות סופיות:

1) $$\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(2+\cos(\theta)\right)^2}d\theta=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

2) $$\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos(3x)}dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

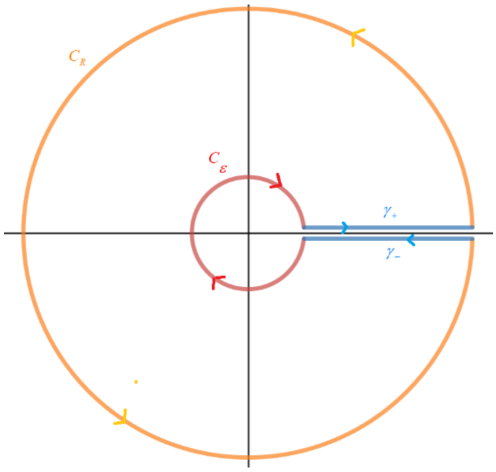
3) $$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a\cos(x)+\mathrm{b}\sin(x)+\mathrm{c}}dx=\frac{2\pi}{\sqrt{c^2-1}}$$

4) $$\int_0^{\pi}\frac{1}{(a+b\cos\varphi)^2}d\varphi=\frac{\pi ab}{\left(a^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

5) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{a^2+a}}$$

6) $$\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta)^n\cos(n\theta)\,d\theta=2\pi$$

מסילת חור מנעול:



שאלות:

1) הוכיחו כי $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\pi$.

הדרכה:

נגדיר את המסלולים (כאשר $R>1$ ו-$0<\varepsilon<1$).

$C_\varepsilon=\left\{z=\varepsilon e^{i\theta}\,|\,0+<\theta<2\pi-\right\}$ $\quad$ $C_R=\left\{z=\mathrm{R}\,e^{i\theta}\,|\,0+<\theta<2\pi-\right\}$

$\gamma_-=\left\{z=xe^{2\pi i}\,|\,x:R\to\varepsilon\right\}$ $\quad$ $\gamma_+=\left\{z=xe^{0\cdot i}\,|\,x:\varepsilon\to R\right\}$

א. הוכיחו כי $\oint\limits_{\gamma_++C_R+\gamma_-+C_\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}dz=2\pi$ כאשר $\sqrt{z}$ מוגדר בתחום $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}dz=0$.

ג. הוכיחו כי $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}dz=0$.

ד. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\pi$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

הלמה של ז'ורדן:

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים על ידי שימוש בהלמה של ז׳ורדן:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$

הדרכה:

א. הוכיחו כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx = \operatorname{Re}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}dx\right\}$

ב. הוכיחו כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9}dx$

הדרכה:

א. הוכיחו כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9}dx = \operatorname{Im}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)e^{ix}}{x^4+10x^2+9}dx\right\}$

ב. הוכיחו כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)e^{ix}}{x^4+10x^2+9}dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^3}\right)\cdot i$

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^4+1}dx$

4) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2\cos(ax)}{(x^2+1)^2}dx$

תשובות סופיות:

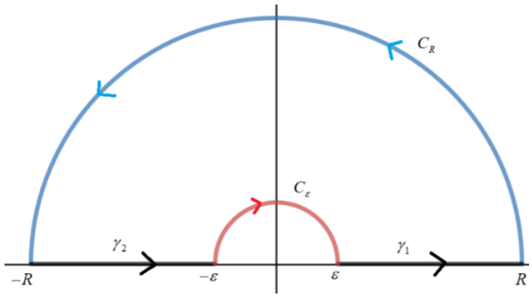
1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}$$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9}dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^3}\right)$$

3) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^4+1}dx = 0$$

4) $$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2\cos(ax)}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{4}(1-a)e^{-a}$$

מסילת חצי מעגל מנוקב:



בתרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$$\gamma_1=\{z=x\mid \varepsilon\le x\le R\} \qquad C_R=\{z=Re^{i\theta}\mid 0\le\theta\le\pi\}$$
$$\gamma_2=\{z=x\mid -R\le x\le -\varepsilon\} \qquad C_\varepsilon=\{z=\varepsilon e^{i\theta}\mid \theta:\pi\to 0\}$$
$$\gamma=\gamma_1+C_R+\gamma_2+C_\varepsilon$$

שאלות:

1) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx=\pi$.

הדרכה:

א. הוכיחו כי $\frac{\sin^2(x)}{x^2}=\text{Re}\left\{\frac{1-e^{i2x}}{2x^2}\right\}$.

ב. הגדירו $f(z)=\frac{1-e^{i2z}}{2z^2}$ והסבירו מדוע $\oint_\gamma f(z)dz=0$.

ג. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$ ו- $\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{C_\varepsilon}f(z)dz=-\pi$.

2) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^6(x)}{x^6}dx$.

3) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^3+\pi^2x}dx$.

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}dx$.

5) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2(x^2+\beta^2)}dx$ לכל $\alpha,\beta>0$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^6(x)}{x^6}dx=\frac{88}{5\cdot 2^5}\pi$

3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^3+\pi^2 x}dx=\frac{1}{2\pi}-\frac{e^{-\pi}}{\pi}$

4) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}dx=\pi$

5) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2(x^2+\beta^2)}dx=\frac{\pi}{\beta^2}\left(\alpha-\frac{1-e^{-\alpha\beta}}{\beta}\right)$

שימושים של משפט השארית בהתמרות אינטגרליות:

שאלות:

1) נתונה $F(s)=\frac{p(s)}{q(s)}$ מנת פולינומים כאשר $\deg(q)\geq\deg(p)+1$.

הוכיחו כי $L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}e^{st}F(s)ds=\sum_{k=1}^{n}\text{Res}\left[e^{st}F(s),s_k\right]$

כאשר s_k אלו הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $F(s)$ והקו $\text{Re}(s)=\sigma$ נמצא מצד ימין לכל הנקודות הסינגולריות.

2) חשבו התמרת לפלס הפוכה של $F(s)=\frac{1}{\left(s^2+2s+5\right)^2}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f(t)=\frac{e^{-t}}{16}\left(\sin(2t)-2t\cos(2t)\right)$.

פונקציות מרוכבות

פרק 10 - עקרון הארגומנט

תוכן העניינים

עקרון הארגומנט:

שאלות:

חשב את האינטגרלים הבאים על ידי שימוש בעקרון הארגומנט:

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{2z}{z^2+1}dz$

2) $\int\limits_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ כאשר $f(z)=\frac{(z+3)(z+1)}{z^2}$

3) $\int\limits_{|z|=1} \frac{3\sin(2z)}{\sin^2(z)-0.5}dz$

4) א) מצא את הקטבים והאפסים של $f(z)=\frac{(z-2)^2}{(e^{2z}-1)^2 z^3}$ בתחום $|z|<4$.

ב) חשב את האינטגרל $I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=4} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$.

5) א) מצא את הקטבים והאפסים של $f(z)=\frac{\cos(z)}{\sin(z)(1-\cos(z))^2}$ בתחום $\mathbb{C}$.

ב) חשב את האינטגרל $I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$.

6) (אתגר)

נתבונן במסילה $\gamma(t):[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ המוגדרת על ידי:

$$\gamma(t)=\frac{\left[\cos(2t)-\cos(t)+i\left(\sin(2t)-\sin(t)\right)+\frac{1}{4}\right]e^{\frac{\cos(t)-2-i\sin(t)}{5-4\cos(t)}}}{\sin\left(\cos(t)+i\sin(t)\right)-i\sin(t)-\cos(t)}$$

כמה פעמים היא מקיפה את הראשית? (נגד כיוון השעון)

הערה: מספר הפעמים שמסילה סגורה (לאו דווקא פשוטה) מקיפה את z_0

נתון ע"י: $\eta(\gamma,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{1}{z-z_0}dz$

תשובות סופיות:

1) $\int_{|z|=2} \frac{2z}{z^2+1} dz = 4\pi i$

2) $\int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2\pi i$

3) $\int_{|z|=1} \frac{\sin(2z)}{\sin^2(z)-0.5} dz = 12\pi i$

4) א) $z=0$ קוטב מסדר 5 , $z=\pm\pi i$ קטבים מסדר 2.
ב) $I=-7$

5) א) $z=\frac{\pi}{2}+\pi k$ אפסים מסדר 1 (פשוטים).
$z=2\pi k$ קטבים מסדר 3.
$z=\pi(2k+1)$ קטבים מסדר 1.
ב) $I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0-5$

6) -1 (כלומר סיבוב אחד עם כיוון השעון)

משפט רושה:

שאלות:

1) כמה אפסים יש לפונקציה $h(z)=z^4+5z+1$ בעיגול היחידה $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$?

2) כמה אפסים יש לפונקציה $h(z)=5z^4+z+1$ בעיגול היחידה $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$?

3) כמה אפסים יש לפונקציה $h(z)=z^4+5z+4$ בעיגול $D(0,2)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<2\}$?

4) כמה פתרונות יש למשוואה $z^5+3z+1=0$ בתחום $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,1<|z|<2\}$?

5) כמה אפסים יש לפונקציה $h(z)=z^4-10z+1$ בתחום $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,1<|z|<3\}$?

6) כמה אפסים יש לפונקציה $h(z)=\frac{1}{2}z^6-5z^4+7z$ בתחום $D=\{z\in\mathbb{C}\quad |z|<1\}$?

7) כמה אפסים יש לפונקציה $h(z)=\frac{1}{2}z^6-5z^4+7z$ בתחום $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,1<|z|<3\}$?

8) יהי $m\geq 2$ טבעי. מצאו את מספר האפסים של $1-$ $h(z)=ze^{m-z}$ ב-$|z|<1$.

9) יהי $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$ עיגול היחידה ויהיו $a_1,\dots,a_n\in D$ נקודות שונות.

נסמן $B(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}\cdot z}$.

הוכיחו כי לכל $z_0\in D$ למשוואה $B(z)=z_0$ יש n פתרונות.

רמז: הוכיחו קודם כי ההעתקה $\varphi_j(z)=\frac{z-a_j}{1-za_j}$ מעתיקה את מעגל היחידה לעצמו.

10) הוכיחו כי קיים מספר $N_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_0$ יש בדיוק פתרון אחד למשוואה $\sin(z)=z^n$ בדיסק $D\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<\frac{1}{2}\right\}$.

11) לפי הגדרה, נקודת שבת של f היא נקודה z_0 כך ש- $f(z_0)=z_0$.
הוכיחו כי אם f אנליטית בעיגול היחידה הסגור כך שלכל $|z|=1$ מתקיים $|f(z)|<1$
אז קיימת ל- f נקודת שבת אחת בדיוק בעיגול היחידה הפתוח.

תשובות סופיות:

1) 1
2) 4
3) 4
4) 4
5) 3
6) 1
7) 3
8) 1
9) הוכחה
10) הוכחה
11) הוכחה

קיום פונקציות לוגריתמיות ושורשים:

שאלות:

1) הוכיחו כי בתחום $\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\}$ לפונקציה $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$ קיים לוגריתם אנליטי.

2) הוכיחו:

א. כי בתחום $\mathbb{C}\setminus[-i,i]$ לפונקציה $f(z)=\frac{z-i}{z+i}$ קיים לוגריתם אנליטי.

ב. כי בתחום $\mathbb{C}\setminus[-i,i]$ לפונקציה $f(z)=z^2\frac{z-i}{z+i}$ קיימת פונקציית שורש אנליטית מסדר 2.

3) הוכיחו:

א. הוכיחו כי בתחום $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ לפונקציה $f(z)=1-z^2$ לא קיים לוגריתם אנליטי.

ב. הוכיחו כי בתחום $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ לפונקציה $f(z)=1-z^2$ קיימת פונקציית שורש אנליטית מסדר 2.

4) הוכיחו כי $|z|>4$ לפונקציה $f(z)=(z-2)^2-4$ לא קיים לוגריתם אנליטי אך כן קיימת פונקציית שורש מסדר 2.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

פונקציות מרוכבות

פרק 11 - העתקות מתקדמות

תוכן העניינים

העתקות קונפורמיות:

שאלות:

1) הוכיחו כי ההעתקה $T(z)=z+1$ מעתיקה את התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|<1\}$ אל התחום $B=\{w\in\mathbb{C}\ |\ |w-1|<1\}$.

2) חשבו את $f(-6i)$, $f(6i)$, $f(6)$, $f(-6)$ כאשר $f(z)=e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot z$.
מהי המשמעות הגיאומטרית של ההעתקה?

3) מצאו את תמונת מעגל היחידה תחת ההעתקה כאשר $f(z)=2z$.
מהי המשמעות הגיאומטרית של ההעתקה?

4) מצאו העתקה ליניארית המעתיקה את החצי המישור העליון $H^+=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}(z)>0\}$ אל החצי מישור התחתון $H^-=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}(z)<0\}$.

5) מצאו העתקה ליניארית המעתיקה את הרביע הראשון $\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)>0,\mathrm{Im}(z)>0\}$ אל הרביע השלישי $\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)<0,\mathrm{Im}(z)<0\}$.

6) מצאו את תמונת הקבוצה $A=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|=2\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\frac{1}{z}$.

7) מצאו את התמונה של $A=\left\{z=re^{i\frac{\pi}{4}}\ |\ r\geq 0\right\}$ תחת ההעתקה $f(z)=z^2$.

8) מצאו את התמונה של $A=\{z=e^{i\theta}\ |\ 0\leq\theta\leq\pi\}$ תחת העתקת יוקובסקי $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

9) מצאו את התמונה של $A=\{z=x+iy \mid -\pi<y\le\pi\ ,\ 0\le x\le 1\}$ תחת ההעתקה $f(z)=e^z$.

10) מצאו את התמונה של $C\setminus(-\infty,0]$ תחת ההעתקה $w=Log(z)$.

11) מצאו את התמונה של $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}\setminus(-\infty,0]$ תחת ההעתקה $w=Log(z)$.

12) מצאו את התמונה של $\{z=x+iy \mid 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\}$ תחת ההעתקה $w=z^2$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) $f(-6)=-6i\ ,\ f(6)=6i\ ,\ f(6i)=-6\ ,\ f(-6i)=6$
3) 2
4) $f(z)=e^{-i\frac{\pi}{2}}z$
5) $f(z)=e^{i\pi}z$
6) ראו סרטון.
7) $\left[re^{i\frac{\pi}{4}}\right]^2$
8) ראו סרטון.
9) ראו סרטון.
10) ראו סרטון.
11) ראו סרטון.
12) ראו סרטון.

העתקות מוביוס:

שאלות:

1) תרגיל זה מחולק ל-2 סעיפים:

א. הוכיחו כי הרכבת העתקות מוביוס הינה העתקה מוביוס,

כלומר אם $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ו- $g(z)=\dfrac{Az+B}{Cz+D}$ אז $f\circ g(z)$ גם העתקת מוביוס.

ב. חשבו את כפל המטריצות:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

מה הקשר להרכבת העתקות מוביוס?

2) הוכיחו כי העתקת מוביוס $w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ היא פונקציה קבועה כאשר $ad-bc=0$.

3) מצאו את התמונה של $D=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|<1\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$.

הדרכה: ניתן להשתמש בעובדות הבאות:

א. העתקת מוביוס מעבירה קווים ישרים/מעגלים לקווים ישרים/מעגלים.

ב. רק קו ישר מכיל את נקודת האינסוף.

4) מצאו את התמונה של $H^+=\{z\in\mathbb{C}\ |\ \operatorname{Im}(z)>0\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$.

5) מצאו את התמונה של $H^+=\{z\in\mathbb{C}\ |\ \operatorname{Im}(z)>0\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$.

6) מצאו את התמונה של $D=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|<1\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$.

7) מצאו את התמונה של $H^+=\{z\in\mathbb{C}\ |\ \operatorname{Im}(z)>0\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$

כאשר $a\in H^+$.

8) מצאו העתקה מהתחום $\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)>0, \mathrm{Im}(z)>0\}$
אל עיגול היחידה $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$.

9) מצאו וציירו את תמונת התחום $\begin{cases}|z-i|\le 1\\ \mathrm{Re}(z)>0\end{cases}$ תחת העתקה $f(z)=\frac{z}{z-2i}$.

10) מצאו העתקה חח״ע ועל בין $D(0,1)\setminus[0,1)$ ו- $D(0,1)$.

11) מצאו העתקה חח״ע ועל בין $A=\{z\in\mathbb{C}:0<\mathrm{Im}(z)<1\}$ והרביע הראשון.

12) מצאו העתקה חח״ע ועל בין $A=\left\{z=re^{i\theta}:r>0,0<\theta<\frac{\pi}{4}\right\}$ ו- $B=\{z\in\mathbb{C}:0<\mathrm{Im}(z)<1\}$.

13) מצאו העתקה חח״ע ועל בין $A=\left\{z=re^{i\theta}:r>0,0<\theta<\frac{\pi}{4}\right\}$ ו- $B=D(0,1)$.

15) נגדיר $H^+=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}$. בהינתן זוג נקודות $z_1,z_2\in H^+$, מצאו שקילות
בין חצי המישור לעצמו כך ש- $f(z_1)=z_2$.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. $\begin{pmatrix} aA+bC & aB+bD \\ cA+bC & cB+bD \end{pmatrix}$

2) הוכחה.

3) $f(-1)=\infty$

4) $f(0)=-1\ ,\ f(1)=0\ ,\ f(-1)=\infty\ ,\ f(i)=i$

5) $f(2i)=3$

6) $f(-i)=0\ ,\ f(0)=-1$

7) ראו סרטון.

8) $g(z)=\frac{z-i}{z+i}\ ,\ T(z)=\frac{z^2-i}{z^2+i}$

9) $f(2i)=\infty\ ,\ f(0)=0\ ,\ f(1+i)=i\ ,\ f(i)=-1$

10) $f_1(z)=e^{\frac{1}{2}\log(z)},\ f_2(z)=\frac{z-1}{z+1}\ ,\ f_3(z)=e^{-i\frac{\pi}{2}}z\ ,\ f_4(z)=z^2\ ,\ f_5(z)=\frac{z-i}{z+i}$

11) $f_1(z)=\frac{\pi}{2}z\ ,\ f_2(z)=e^{\frac{\pi}{2}z}$

12) $f_1(z)=\ln(r)+i\theta\ ,\ f_2(z)=\frac{4}{\pi}x+i\frac{4}{\pi}y$

13) $f_1(z)=z^4\ ,\ f_2(z)=\frac{z-i}{z+i}$

15) $f(z)=f_2^{-1}\circ f_1(z)$

פונקציות מרוכבות

פרק 12 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

שאלות מסכמות ברמת בחינה:

שאלות:

1) האם קיימת f אנליטית ב- $B_1(0)=\{|z|<1\}$ כך ש- $|f(z)|=\ln(2+|z|)$ לכל $z\in B_1(0)$?

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<\infty$ ונניח כי קיים מספר α ממשי שאינו שלם כך שלכל $R>0$ מתקיים: $\int_0^{2\pi}\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right|d\theta\le 2\pi R^{\alpha}$.
הוכיחו כי: $f(z)=0$ בטבעת.

3) הוכח / הפרך:
קיימת פונקציה $f(z)$ אנליטית ב- $B_{1+\varepsilon}(0)$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

4) הראו כי הטור: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^z-i}{e^z+i}\right)^n$ מתכנס בהחלט ברצועה: $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$.

5) נניח כי: $f=u+iv$ שלמה כך ש- $v(x,y)=\cosh[u(x,y)]$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

6) הוכח / הפרך:
קיימת סדרה: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0\ne a_n\in\mathbb{C}$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n a_n}{(2k+1)^n}=0$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

7) הוכיחו כי לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2t\cos(\theta)}d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(n!)^2}$.

8) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב-$B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$f\left(\frac{1}{n}\right)\neq\frac{1}{n+2}$.

9) חשבו את האינטגרל: $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}$.

10) הוכח / הפרך:
קיימת פונקציה שלמה $f(z)$ כך ש-$\left|z^2\cdot f(z)+e^z\right|\le 1$ לכל $|z|<1$.

11) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<2$ כך שלכל $n\ge 0$ מתקיים:
$\oint_{|z|=1} z^n f(z)dz=0$. הוכיחו כי $\lim_{z\to 0} f(z)$ קיים וסופי.

12) הוכח / הפרך:
קיימת פונקציה $f(z)$ שלמה כך ש-$\frac{(-1)^n}{n}=f\left(\frac{1}{n}\right)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

13) האם קיימת f שלמה המקיימת:
$f(x)=\begin{cases} x^4 & x\in\mathbb{R}\ ,\ x>0 \\ -x^4 & x\in\mathbb{R}\ ,\ x<0 \end{cases}$.

14) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הראו כי: $\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]}} |Log(z)|=\infty$.
ב. הראו כי: $\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]}} |z\cdot Log(z)|=0$.
ג. האם הפונקציה: $f(z)=\begin{cases} z\cdot Log(z) & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ אנליטית ב-$z=0$?

15) חשבו את האינטגרל: $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$.

16) פתחו את הפונקציה: $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^4}$ לטור לורן בטבעת $0<|z-i|<2$.

17) נתון כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<1$ וזוגית (כלומר: $f(z)=f(-z)$).

חשבו: $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz$.

18) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב-$B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-

$f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right)\neq\frac{1}{n}$.

19) תהי: $f:B_1(0)\to\mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה.

נניח כי: $f^2(z)$ ו-$f^3(z)$ אנליטיות ב-$B_1(0)$.

הוכיחו כי $f(z)$ אנליטית ב-$B_1(0)$.

20) הוכח / הפרך:

אם: $f:B_1(0)\to\mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה ו-$f^2(z)$ ו-$f^6(z)$ אנליטיות ב-$B_1(0)$

אז $f(z)$ בהכרח אנליטית ב-$B_1(0)$.

תשובות סופיות:

1) לא.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.
10) הוכחה.
11) הוכחה.
12) הוכחה.
13) לא קיימת.
14) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. לא.
15) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
16) $a_k = \begin{cases} (-1)^{k+4}\dfrac{(k+7)(k+6)(k+5)}{6(2i)^{k+8}} & k\ge -4 \\ 0 & k\le -5 \end{cases}$.
17) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left[f(z),0\right]=0$.
18) הוכחה.
19) הוכחה.
20) הוכחה.