

פונקציות מרוכבות



תוכן העניינים

1	מספרים מרוכבים	1
17	פונקציות אנליטיות	2
25	פונקציות אלמנטריות	3
32	אינטגרציה מרוכבת	4
43	טורים	5
51	נקודות סינגולריות	6
57	משפט השארית	7

פונקציות מרוכבות

פרק 1 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

1. הגדרת המספר המרוכב..... 1
2. המספר הצמוד..... 4
3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת..... 7
4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב..... 8
5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב..... 12
6. שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים..... 14
7. שאלות שונות עם מספרים מרוכבים..... 15

הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i = \sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z = a + bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b . המספרים a ו- b הם ממשיים.
 a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\text{Re}(z)$ (מלשון: Real).
 b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\text{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

שאלות:

(1) רשום עם i :

א. $\sqrt{-1} =$	ב. $\sqrt{-4} =$	ג. $\sqrt{-25} =$
ד. $\sqrt{-3} =$	ה. $\sqrt{-5} =$	

(2) חשב:

א. $i =$	ב. $i^2 =$	ג. $i^3 =$
ד. $i^4 =$	ה. $i^5 =$	ו. $i^{17} =$

(3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. -4	ו. 0

(4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\text{Re}(z) = -3$, $\text{Im}(z) = 2$.

ב. $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5 מספר מרוכב מסוים z מקיים : $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 4$ ו- $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = -1$. מצא את z .

6 פתור את המשוואות הבאות :

א. $x^2 = -1$ ב. $x^2 + 36 = 0$ ג. $x^2 - 2x + 5 = 0$

7 פתור את המשוואה הבאה : $x^2 + x + 1 = 0$.

8 פתור את המשוואה הבאה : $z^2 + iz + 6 = 0$.

9 נתון : $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 2i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים :

א. $z_1 + z_2 =$ ב. $z_1 - z_2 =$ ג. $z_1 \cdot z_2 =$

10 חשב את ערכי הביטויים הבאים :

א. $(-2 + 6i) + (1 - i)$ ב. $(4 + 4i) - \left(3 + \frac{1}{2}i\right)$
 ג. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ד. $5 - (3 - 2i)$
 ה. $(i - 3) + 6i$ ו. $(i + 2) - (3i - 2) + (7 - 5i)$

11 חשב את ערכי הביטויים הבאים :

א. $(1 + 4i) \cdot (8 - 2i)$ ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
 ג. $(4i - 3) \cdot (4i + 3)$ ד. $i \cdot (i - 1)$
 ה. $(2i + 3) \cdot i$ ו. $(5i - 1)^2$

12 נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2i$.

ידוע כי $z_1 + z_2$ הוא ממשי וכי $z_1 - z_2$ הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2 .

ב. הראה כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

תשובות סופיות:

- (1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$
- (2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i
- (3) א. $a=2, b=5$ ב. $a=3, b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}, b=-\frac{1}{2}$ ד. $a=0, b=7$ ה. $a=-4, b=0$ ו. $a=0, b=0$
- (4) א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$
- (5) $z=1.5+2.5i$
- (6) א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i, 1-2i$
- (7) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- (8) $z=2i, -3i$
- (9) א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$
- (10) א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$
- (11) א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1-i$
- (12) א. $a_1=a_2, b_1=-b_2$ ב. הוכחה. ג. $-2+3i$ ו. $-24-10i$

המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z = a + bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- \bar{z} וערכו: $\bar{z} = a - bi$.

שאלות:

(13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. -4	ו. 0

(14) חשב:

א. $\frac{11 + 2i}{2 - i}$	ב. $\frac{3 + 7i}{2 - 5i}$	ג. $\frac{19 - 9i}{2 - 3i}$
----------------------------	----------------------------	-----------------------------

(15) נתון מספר $z = 5 - 2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$	ב. $\frac{z}{z + 3}$	ג. $\frac{z + i}{z - i}$
------------------	----------------------	--------------------------

(16) המספר $\frac{3 + 4i}{a - i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a .

(17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

(18) פתור את המשוואה הבאה: $3z - 11 = iz - 7i$.

(19) פתור את המשוואה הבאה : $iz + 5 = 4i$.

(20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים) :

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

(21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים :

ב. $3a - 8 + 5bi = 2b - ai - 3i$

א. $2a - 3i = 10 + bi$

(22) פתור את המשוואה הבאה : $2z + 7i = iz + \bar{z} - 3$.

(23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים :

ב. $\sqrt{8 + 6i}$

א. $\sqrt{5 - 12i}$

(24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

א. $(1 - i)z^2 - 2z + i + 1 = 0$

ב. $(-2 + i)z^2 - (6 + 12i)z + 10 - 25i = 0$

(25) פתור את המשוואה הבאה : $iz^2 - 2(1 - i)z + 6 + 15i = 0$.

(26) פתור את המשוואה הבאה : $z^2 - i\bar{z} + 6 = 0$.

תשובות סופיות:

- א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0 (13)
- א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $.5+3i$ (14)
- א. $\frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17} - \frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17} + \frac{5}{17}i$ (15)
- (16) $a = -\frac{3}{4}$
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) $z = 4 - i$
- (19) $z = 4 + 5i$
- (20) $z = 2 - 3i, w = 5 + i$
- (21) א. $a = 5, b = -3$ ב. $a = 2, b = -1$
- (22) $z = -\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}i$
- (23) א. $z = \pm(3 - 2i)$ ב. $z = \pm(3 + i)$
- (24) א. $z_{1,2} = i, 1$ ב. $z_{1,2} = -2 - i, 2 - 5i$
- (25) $z_1 = -2 - 5i, z_2 = 3i$
- (26) $z_1 = -3i, z_2 = 2i$

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

(27) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2 - 2(m+2i)z + 1 = 0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

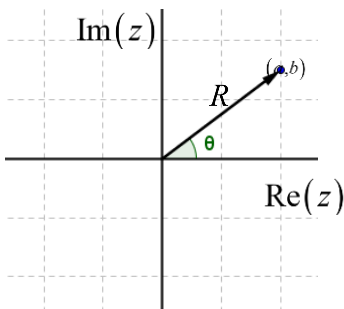
תשובות סופיות:

(27) א. $m = -i$ ב. $m = -2i$.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- x מייצג את a , גודל הערך הממשי של z , וציר ה- y מייצג את b , גודל הערך המדומה של z . מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג (a, b) או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0, 0)$) והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס. הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב ויסומן: (R, θ) . מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$$z = R \cos \theta + i \cdot R \sin \theta = R(\cos \theta + i \sin \theta) = R \operatorname{cis} \theta$$

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R \cos \theta$, $b = R \sin \theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1 \cdot z_2 = (R_1 \operatorname{cis} \theta_1) \cdot (R_2 \operatorname{cis} \theta_2) = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \operatorname{cis} \theta_1}{R_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.

שאלות:

(28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60^\circ$	ב. $6\text{cis}135^\circ$	ג. $4\text{cis}330^\circ$
ד. $4\text{cis}(-30^\circ)$	ה. $4\text{cis}690^\circ$	ו. $8\text{cis}90^\circ$
ז. $3\text{cis}270^\circ$	ח. $\text{cis}180^\circ$	ט. $\text{cis}0^\circ$

(29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$	ב. $\sqrt{3}-i$	ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
ד. $3+4i$	ה. $6i$	ו. $-i$
ז. 4	ח. -1	ט. 1
י. 0		

(30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120^\circ \cdot 3\text{cis}60^\circ$	ב. $\text{cis}210^\circ \cdot 5\text{cis}(-40^\circ)$
ג. $\frac{12\text{cis}315^\circ}{3\text{cis}90^\circ}$	ד. $\frac{1}{2\text{cis}40^\circ}$
ה. $6\text{cis}30^\circ + 2\text{cis}210^\circ$	

(31) נתון המספר המרוכב $z = R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו- θ את המספרים:

א. \bar{z}	ב. $1/z$	ג. $-z$
ד. $-\frac{1}{z}$	ה. iz	ו. $z \cdot \bar{z}$

(32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z + \bar{z}$	ב. $z \cdot \bar{z}$	ג. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$
------------------	----------------------	--

(33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2 - \bar{z}^2$	ב. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$
----------------------	--------------------------------------

(34) הוכח את הטענות הבאות:

א. $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$ ב. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

(36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא 30° חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה. קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. \bar{z} ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}$ ד. $z \cdot \bar{z}$

תשובות סופיות:

- (28) א. $1 + \sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3} - 2i$ ד. $2\sqrt{3} - 2i$
- ה. $2\sqrt{3} - 2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. $.1$
- (29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45^\circ$ ב. $2\text{cis}330^\circ$ ג. $\text{cis}240^\circ$ ד. $5\text{cis}53.13^\circ$
- ה. $6\text{cis}90^\circ$ ו. $\text{cis}270^\circ$ ז. $4\text{cis}0^\circ$ ח. $\text{cis}180^\circ$ ט. $\text{cis}0^\circ$
- (30) א. -6 ב. $5\text{cis}170^\circ$ ג. $4\text{cis}225^\circ$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40^\circ)$
- ה. $4\text{cis}30^\circ$
- (31) א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180^\circ + \theta)$
- ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180^\circ + \theta)$ ה. $R\text{cis}(90^\circ + \theta)$ ו. R^2
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35) $.1+i, -1+i, -1-i, 1-i$
- (36) $.-\sqrt{3}+i, -1-\sqrt{3}i, \sqrt{3}-i$
- (37) $.1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2$
- (38) $.1+\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i, 2$
- (39) א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל ד. מחוץ למעגל.

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $(R\text{cis}\theta)^n = R^n\text{cis}(n\theta)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n -י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

$$\cdot z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 / \sqrt[n]{} \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{R_0} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) : 1 \leq k \leq n$$

שאלות:

40 חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $(2\text{cis}30^\circ)^3$ ב. $(2\text{cis}14^\circ)^5$ ג. $(1+i)^4$

ד. $(\sqrt{3}-i)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41 פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120^\circ$ ב. $z^4 = (9\text{cis}80^\circ)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

42 מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43 נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z|=2$.

(44) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z - 3i| = 5$.

(45) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס

המתקבל בעבור המשוואה: $|z + i| + |\bar{z} + i| = |1 + 3i|$.

תשובות סופיות:

(40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70^\circ$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1 .

(41) א. $z_0 = 6\text{cis}60^\circ, z_1 = 6\text{cis}240^\circ$.

ב. $z_0 = 3\text{cis}40^\circ, z_1 = 3\text{cis}130^\circ, z_2 = 3\text{cis}220^\circ, z_3 = 3\text{cis}310^\circ$.

ג. $z_0 = \text{cis}12^\circ, z_1 = \text{cis}84^\circ, z_2 = \text{cis}156^\circ, z_3 = \text{cis}228^\circ, z_4 = \text{cis}300^\circ$.

(42) סכום: 0 , מכפלה: -1 .

(43) $x^2 + y^2 = 4$.

(44) $x^2 + (y - 3)^2 = 25$.

(45) $\frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{5} = 1$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

(46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13 + 3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3 = 5 - 9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

(47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32 + 16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2 - 4i$.
 א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.
 ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

(48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

$$S_{10} = 100 - 15i \quad (46)$$

$$a_1 = 2 + i, q = -2i \quad (47) \quad \text{א.} \quad \text{ב. } S_5 = 20 + 25i$$

$$2, 2i, -2 \quad \text{או} \quad 2, 4 - 2i, 6 - 8i \quad (48)$$

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

(49) פתור את המשוואה: $z - \bar{z} + |z| = |2 - i|^2 - 4i + \text{Im}(z)$.

(50) פתור את המשוואה: $|2 - 3^{x^2 - x - 1}i| = \sqrt{13}$.

(51) פתור את המשוואה: $z^3 = \bar{z}$.

(52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

(53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים. הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

(54) נתון מספר מרוכב z , שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור. הוכח כי אם $z - \frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

(55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1 \text{cis} \theta_1 \cdot R_2 \text{cis} \theta_2 = R_1 R_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.

(56) הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון. נתון: $|z^4 - z^3| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

(57) הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה. מצא את ערך הביטוי $z + iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

(58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$.
 הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\angle z_1 O z_2$ (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

(49) $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -3 - 4i$

(50) $x = 2$, -1

(51) $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, $z_4 = 1$, $z_5 = -1$

(52) שאלת הוכחה.

(53) שאלת הוכחה.

(54) שאלת הוכחה.

(55) שאלת הוכחה.

(56) $\arg(z) = 30^\circ$

(57) $z + iz = \sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$

(58) 2θ

פונקציות מרוכבות

פרק 2 - פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

17	1. פונקציות מרוכבות
18	2. גבולות מרוכבים ורציפות
19	3. נגזרות מרוכבות
20	4. משוואות קושי-רימן
23	5. פונקציות הרמוניות

פונקציות מרוכבות:

שאלות:

(1) רשמו את הפונקציה $f(z) = z \cdot \operatorname{Re}(z)$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

(2) רשמו את הפונקציה $f(z) = |z|^2$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

(3) רשמו את הפונקציה $f(z) = 2|z|^2 + i(\bar{z})^2$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

(4) רשמו את הפונקציה $f(z) = \frac{z}{1+|z|^2}$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

(5) רשמו את הפונקציה $f(z) = z^2 + \bar{z}$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

(6) רשמו את הפונקציה $f(x+iy) = \frac{x^3}{3} + i \cdot \left(-\frac{y^3}{3}\right)$, כאשר $z = x+iy$, בצורה $f(z)$.

תשובות סופיות:

(1) $f(z) = x^2 + i \cdot xy$

(2) $f(z) = x^2 + y^2 + i \cdot 0$

(3) $f(z) = 2[x^2 + xy + y^2] + i(x^2 - y^2)$

(4) $f(z) = \frac{x}{1+x^2+y^2} + i \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2}$

(5) $f(z) = x^2 + x - y^2 + i \cdot (2xy - y)$

(6) $f = \frac{2z^3 + 6z(\bar{z})^2}{24}$

גבולות מרוכבים ורציפות:

שאלות:

מצאו את הגבולות הבאים (אם קיימים):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = ? \quad (1)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^4}{|z|^4} = ? \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{z^2}} = ? \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{z^4}} = ? \quad (4)$$

תשובות סופיות:

$$\frac{1-ik}{1+ik} \quad (1)$$

$$\frac{(1+ik)^4}{(1+k)^2} \quad (2)$$

(3) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

(4) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

נגזרות מרוכבות:

שאלות:

(1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z) = \bar{z}$ גזירה. הראו עפ"י הגדרת הנגזרת כי $f(z) = \bar{z}$ אינה גזירה ב- z_0 לכל $z_0 \in \mathbb{C}$.

(2) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ גזירה.

(3) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z) = |z|^2$ גזירה.

(4) הוכיחו את משפט לופיטל: $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)}$

תשובות סופיות:

- (1) הפונקציה לא גזירה. הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.
- (2) הפונקציה לא גזירה.
- (3) בראשית הצירים, והנגזרת שלה היא 0.
- (4) הוכחה.

משוואות קושי-רימן:

שאלות:

(1) הראו כי $f(z) = z^2 + \text{Im}(z)$ אינה גזירה לכל z .

(2) הראו כי $f(z) = xy + i(x^2 + y^2)$ אינה גזירה בכל הנקודות בהן $z \neq 0$, אך כן גזירה בנקודה $z = 0$ (לפי הגדרה).

(3) מצאו מספרים ממשיים a, b כך שהפונקציה $f(z) = e^{ax} \cos(3y) + i(-e^{-3x} \sin(by))$ תהיה גזירה בכל נקודה.

(4) נתון כי $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ אינה רציפה ב $z = 0$.

מצאו את כל הנקודות (אם קיימות) בהן הפונקציה גזירה.

משפט קושי-רימן: הוכחה (הפתרון בסרטון)

אם $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, גזירה ב- $z_0 = x_0 + iy_0$,

אז מתקיימות משוואות קושי-רימן בנקודה זו, כלומר:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

(5) נניח כי $f(z)$ גזירה בתחום D , ונניח כי $\text{Re}\{f(z)\} = 0$ לכל $z \in D$. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

(6) נניח כי $f(z)$ פונקציה גזירה שאינה קבועה בתחום D .

נגדיר $g(z) = \overline{f(z)}$ לכל $z \in D$.

הוכיחו כי $g(z)$ אינה גזירה בכל D .

(7) נתונה הפונקציה $f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה אינה רציפה בראשית.

ב. משוואות קושי-רימן מתקיימות בראשית.

- (8) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.
 הוכיחו כי $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ אנליטית בתחום $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$.
- (9) הוכיחו כי $f(z) = e^{\text{Re}(z)}$ אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב.
- (10) נתונה הפונקציה $f(z) = cx^2 - xy + ixy^2$, כאשר c קבוע מרוכב כלשהו.
 נתון כי $f(z)$ גזירה בנקודה $1+i$.
 מצאו את הקבוע c ואת כל הנקודות בהן הפונקציה גזירה.
- (11) נתונה הפונקציה $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
 קבעו האם הפונקציה $f(z)$ אנליטית בחצי המישור הימני $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0\}$.
- (12) נתונה הפונקציה $f(z) = e^{\frac{x^2-y^2}{2}} [\cos(xy) + i \cdot a \sin(xy)]$.
 עבור אילו ערכי a זוהי פונקציה הולומורפית (אנליטית) בכל המישור?
- (13) נניח כי $g(z)$ הולומורפית בתחום $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$,
 ומקיימת $\forall |z| \leq 1 \quad |g(z)| = 1$.
 הוכיחו כי $g(z)$ קבועה.
 הדרכה: ניתן לכתוב את $g(z)$ באופן הבא: $g(z) = e^{i \cdot h(x,y)}$.
- (14) נניח כי $R > 0$ ונתונה הפונקציה $f: D(0,R) \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה בכל התחום.
 נגדיר: $g(z) = \overline{f\left(\frac{R}{\bar{z}}\right)}$.
 מצאו תחום בו $g(z)$ מוגדרת, ובדקו אם היא גזירה שם.

תשובות סופיות:

$$u'_y = -2y + 1, \quad v'_x = 2y \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$a = -3, \quad b = 3 \quad (3)$$

$$x = 0, \quad y = 0 \quad (4)$$

הוכחה (5)

הוכחה (6)

א. הוכחה (7) ב. הוכחה

הוכחה (8)

הוכחה (9)

$$y = 0, \quad y = 1, \quad y = 0.5$$

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 0.25, \quad c = a + i \cdot b = \frac{3}{2} \quad (10)$$

$$z = 0, \quad z = 1 + i, \quad z = 0.25 + 0.5 \cdot i$$

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (11)$$

$$a = 1 \quad (12)$$

הוכחה (13)

$$A = \{z \mid |z| > 1\} \quad (14)$$

פונקציות הרמוניות:

שאלות:

- (1) הראו כי הפונקציה $x^3 - 3xy^2$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור.
- (2) הראו כי הפונקציה $x^2 - y^2$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו לה צמודה הרמונית.
- (3) הראו כי הפונקציה $f(z) = xy + i(x^2 + y^2)$, היא פונקציה גזירה בראשית-הצירים, אך החלק המדומה שלה אינו פונקציה הרמונית. האם $f(z)$ הולומורפית בראשית?
- (4) הראו כי הפונקציה $u(x, y) = \sin(x) \cosh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה $v(x, y)$ המקיימת $v(0, 0) = 2$.
רמז: $f(z) = \sin(z)$.
- (5) הראו כי הפונקציה $u(x, y) = \cos(x) \sinh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו פונקציה הולומורפית כך שמתקיים $u(x, y) = \operatorname{Re}\{f\}$.
- (6) הראו כי הפונקציה $v(x, y) = e^y \sin(x)$, היא פונקציה הרמונית במישור, מצאו לה פונקציה צמודה הרמונית $u(x, y)$ ופונקציה שלמה $f(z)$, כך שמתקיים: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
- (7) הראו כי הפונקציה $u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta)$, היא פונקציה הרמונית בתחום $r \neq 0$.
רמז: $u(r, \theta)$ תקרא הרמונית אם היא מקיימת $r^2 u''_{rr} + r u'_r + u''_{\theta\theta} = 0$.
- (8) נתון כי $u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta)$ היא פונקציה הרמונית בתחום $r \neq 0$. מצאו לה צמודה הרמונית בתחום זה.

(9) הוכיחו כי $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$, היא פונקציה הרמונית ומצאו לה צמודה הרמונית.

(10) תהי $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ פונקציה שלמה. הוכיחו כי $g(x, y) = u(x, y)^2 - v(x, y)^2$ פונקציה הרמונית.

(11) תהי $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ פונקציה שלמה. הוכיחו כי $g(x, y) = \sin[u(x, y)] \cdot \cosh[v(x, y)]$ פונקציה הרמונית.

(12) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x, y) = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$

(כאשר $\varphi \in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

(13) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

(כאשר $\varphi \in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

(14) הראו כי הפונקציה $\sinh(x) \cos(y)$ היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

פונקציות מרוכבות

פרק 3 - פונקציות אלמנטריות

תוכן העניינים

25	1. סינוס מרוכב.....
26	2. קוסינוס מרוכב.....
27	3. אקספוננט מרוכב.....
28	4. העתקות אלמנטריות.....
29	5. לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים.....

סינוס מרוכב:

שאלות:

- (1) פתרו את המשוואה $\sin(z) = 2$.
- (2) הוכיחו כי $\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$.
- (3) פתרו את המשוואה $\sin(z) = 5$.

תשובות סופיות:

- (1) כל הפתרונות הם מהצורה הבאה: $z_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$, כאשר n מספר שלם.
- (2) הוכחה.
- (3) $z_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i \ln(5 \pm 2\sqrt{6})$

קוסינוס מרוכב:

שאלות:

(1) הוכיחו כי $\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$.

(2) פתרו את המשוואה $\cos(z) = 2$.

(3) האם $|\cos(z)| \leq 1$ לכל z ?

(4) פתרו את המשוואה $\cos(\pi z) + \frac{3}{4}i = 0$.

(5) הוכיחו כי לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|\cos(z)| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ כאשר $y = \text{Im}(z)$.

(6) פתרו את המשוואה $\tan(z) = \frac{i}{3}$.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) $z_n = 2\pi n + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

(3) לא.

(4) $z_k = -\frac{1}{2} + 2k - i \frac{1}{\pi} \ln(2)$

(5) הוכחה.

(6) $z_k = \pi k + i \frac{1}{2} \ln(2)$

אקספוננט מרוכב:

שאלות:

- (1) פתרו את המשוואה $e^z = -1$.
- (2) הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $|e^{ix}| = 1$.
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:
 - א. הראו כי אם $\text{Im}(z) \geq 0$ אז $|e^{iz}| \leq 1$.
 - ב. הראו כי $|e^z| = 1$ אם ורק אם $\text{Re}(z) = 0$.
- (4) פתרו את המשוואה $e^z = 1$.
- (5) פתרו את המשוואה $e^z = i$.
- (6) פתרו את המשוואה $e^z = 1+i$.
- (7) האם הפונקציה $f(z) = e^z$ היא חח"ע?

תשובות סופיות:

- (1) $z = i \cdot \pi [2n+1]$
- (2) $\sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1$
- (3) א. $|e^{iz}| = e^{-y} = \frac{1}{e^y} \leq \frac{1}{e^0} = 1$. ב. הוכחה.
- (4) $z_k = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$
- (5) $z_k = i\pi \left(2k + \frac{1}{2}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$
- (6) $z_k = \frac{1}{2} \ln(2) + i\pi \left(2k + \frac{1}{4}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$
- (7) לא.

העתקות אלמנטריות:

שאלות:

(1) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,

תחת ההעתקה $f(z) = z + 1$.

(2) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,

תחת ההעתקה $f(z) = 5z$.

(3) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}\right\}$

תחת ההעתקה $f(z) = z^3$.

(4) מהי תמונת התחום $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im}(z) < \pi\}$ תחת העתקה $f(z) = e^z$.

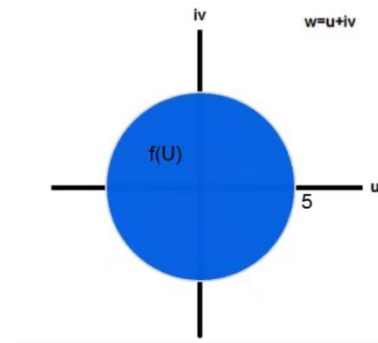
(5) מהי תמונת התחום $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im}(z) < 2\pi\}$ תחת העתקה $f(z) = e^z$.

(6) מהי תמונת התחום $A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid -\infty < \text{Re}(z) < 0, 0 < \text{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$ תחת העתקה $f(z) = e^z$.

תשובות סופיות:

(1) $|w - 1| < 1$

(2) $w = u + iv$



(3) $\frac{3\pi}{4} \approx 135^\circ$

(4) $f(z) = e^x e^{iy} \equiv \text{Re}^{i\alpha} \quad 0 < R < \infty \quad 0 < \alpha < \pi$

(5) $f(z) = e^x e^{iy} \equiv \text{Re}^{i\alpha} \quad 0 < R < \infty \quad 0 < \alpha < 2\pi$

(6) $f(z) = e^x e^{iy} \equiv \text{Re}^{i\alpha} \quad 0 < R < 1 \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים:

שאלות:

(1) חשבו את הגדלים הבאים:

א. $Arg(1+i)$

ב. $Arg\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

(2) חשבו את הגדלים הבאים:

א. $Log(1+i)$

ב. $Log\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

(3) מצאו את כל הערכים האפשריים של \sqrt{i} .

(4) מצאו את כל הערכים האפשריים של i^i .

(5) מצאו את כל הערכים האפשריים של $2^{\frac{1}{9} + \frac{i}{50}}$.

(6) חשבו את הערך $(2+2i)^{5i}$ עבור 3 ענפים שונים לבחירתכם. כמה תשובות אפשריות יש לערך זה.

(7) מצאו את תמונת התחום $A = \{z = re^{i\theta} \mid R_1 < r < R_2, -\pi < \theta < \pi\}$ תחת העתקה $Log(z)$ (הענף הראשי של הלוג).

(8) מצאו תחום בו הפונקציה $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ אנליטית. כאשר $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$.
 הערה: תרגיל זה דורש ידע בהעתקות מוביוס.

(9) הראו כי $|a^z| = a^{\operatorname{Re}(z)}$ עבור a ממשי חיובי בתחום $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ כאשר פונקציית החזקה מוגדרת ע"י ענף הראשי של הלוג, כלומר: $a^z = e^{z \cdot \operatorname{Log}(a)}$.

(10) הוכיחו ישירות כי העתקה \sqrt{z} איננה רציפה בתחום \mathbb{C} אם מגדירים את \sqrt{z} באופן הבא: $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ כאשר $z = re^{i\theta}$ | $\theta \in [0, 2\pi]$.

(11) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\log(\log(-1))$.

(12) נניח כי $\log(z)$ זה ענף רציף של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy, x \geq 0, y = \sin(x)\}$ ונניח שבענף זה מתקיים $\log(1) = 0$, חשבו בענף זה את הערכים: $\log\left(\frac{5\pi}{2}\right), \log\left(\frac{3\pi}{2}\right), \log(-1), \log(i), \log(-i)$.

(13) נגדיר $\log_\alpha(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z)$ כאשר $\alpha - 2\pi < \arg(z) \leq \alpha$.
 א. חשבו את הערכים: $\log_{2\pi}(1), \log_\pi(1), \log_0(1)$.
 ב. מצאו את התמונה של $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ תחת ההעתקה $\log_\pi(z)$.
 ג. מצאו את התמונה של $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ תחת ההעתקה $\log_0(z)$.

(14) יהיו z_1, \dots, z_n מספרים מרוכבים כך ש- $\operatorname{Re}(z_k) > 0$ לכל $1 \leq k \leq n$ וגם $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_k) > 0$ לכל $1 \leq k \leq n$. הוכיחו כי $\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n) = \operatorname{Log}(z_1) + \dots + \operatorname{Log}(z_n)$, כאשר $\operatorname{Log}(z)$ זה הענף הראשי של הלוגריתם.

(15) יהי $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ויהי $y > 0$. חשבו את הגבול $\lim_{y \rightarrow 0} [\log(a + iy) - \log(a - iy)]$. עבור $a > 0$ ועבור $a < 0$.

(16) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של \sqrt{z} ב- \mathbb{C} . כלומר, הראו שלא קיימת פונקציה אנליטית $h(z)$ ב- \mathbb{C} כך ש- $h^2(z) = z$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

(17) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$ ב- $|z| < 1$ לכל $n \geq 2$.

(18) נניח כי $f(z), g(z)$ הם שני ענפים אנליטיים של הלוג בקבוצה פתוחה וקשירה U . הוכיחו כי קיים קבוע k שלם כך ש- $f(z) - g(z) = 2\pi i k$ לכל $z \in U$.

תשובות סופיות:

$$\frac{\pi}{4} \text{ א. } \quad \frac{\pi}{2} \text{ ב. } \quad (1)$$

$$\ln(2) - \frac{\pi}{2} \text{ ב. } \quad \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} \text{ א. } \quad (2)$$

$$e^{\frac{\pi}{4}i}, k=0; \quad e^{\frac{5\pi}{4}i}, k=1 \quad (3)$$

$$\left\{ e^{-\frac{4k+1}{2}\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (4)$$

$$\left\{ 2^{\frac{1}{9}} e^{-\frac{2\pi k}{50}} e^{i\left(\frac{\ln(2)}{50} + \frac{2\pi k}{9}\right)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (5)$$

$$\left\{ e^{-5\frac{\pi}{4}} e^{i5\ln(\sqrt{8})}, e^{-5\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)} e^{i5\ln(\sqrt{8})}, e^{-5\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)} e^{i5\ln(\sqrt{8})}, \dots \right\} \quad (6)$$

$$\ln(r) + i\theta \quad (7)$$

$$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0) \quad (8)$$

$$a^{\operatorname{Re}(z)} \quad (9)$$

הוכחה. (10)

$$\ln(\pi + 2\pi k) + i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m \right) \quad m \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \quad (11)$$

$$\ln(-\pi - 2\pi k) + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m \right) \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$-\pi i, -\frac{3\pi}{2}i, -\frac{\pi}{2}i, \ln\left(\frac{5\pi}{2}\right), \ln\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2\pi i \quad (12)$$

$$\ln(r) + i\theta, \quad -\infty < \ln(r) < \infty, \quad \theta < r < \infty \text{ ב. } \quad 2\pi i, 0, 0 \text{ א. } \quad (13)$$

$$\ln(r) + i\theta, \quad -\infty < \ln(r) < \infty, \quad 0 < \theta \leq 2\pi \text{ ג.}$$

הוכחה. (14)

$$2\pi i \quad (15)$$

הוכחה. (16)

הוכחה. (17)

הוכחה. (18)

פונקציות מרוכבות

פרק 4 - אינטגרציה מרוכבת

תוכן העניינים

32	1. אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת
33	2. אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת
34	3. משפט קושי גורסט
35	4. נוסחת האינטגרל של קושי
38	5. נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי
40	6. משפט הערכה
41	7. תרגילים מסכמים

אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

$$(1) \text{ חשבו את האינטגרל } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \text{ לכל } m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \text{ לכל } z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) < 0, \text{ פתרו את האינטגרל } \int_0^{\infty} e^{zt} dt.$$

תשובות סופיות:

$$\begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{z} \quad (2)$$

אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^n dz$, כאשר $n \in \mathbb{Z}$.

(2) חשבו את האינטגרל $\int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$, כאשר $\gamma = \{z = 2e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

(3) חשבו את האינטגרל $\int_{\gamma} (z-1) dz$, כאשר $\gamma = \{z = 1 + e^{i\theta} \mid \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$.

(4) חשבו את האינטגרל $\oint_{\gamma} \pi e^{\pi \bar{z}} dz$, כאשר γ מסילת קווים ישרים,

העוברת בנקודות $0 \rightarrow 1 \rightarrow 1+i \rightarrow i \rightarrow 0$.

(5) חשבו את אורך המסילה $\gamma = [z_1, z_2]$, כאשר $\gamma = [z_1, z_2]$ היא מסילת הקו הישר המחברת בין z_1 ל- z_2 .

(6) חשבו את אורך המסילה $\gamma(t) = \{(t - \sin t) + i \cdot (1 - \cos t) \mid 0 < t < 1\}$.

(7) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \bar{z} dz$.

תשובות סופיות:

$$\begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases} \quad (1)$$

$$2\pi i - 4 \quad (2)$$

$$0 \quad (3)$$

$$4e^{\pi} - 4 \quad (4)$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (5)$$

$$\approx 0.48 \quad (6)$$

$$2\pi i \quad (7)$$

משפט קושי גורסט:

שאלות:

$$(1) \quad \int_0^{2+\frac{i\pi}{4}} e^z dz \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(2) \quad \int_4^{1+i} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \sqrt[4]{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - 2 + i\sqrt[4]{2} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{כי הוכיחו כי}$$

כאשר \sqrt{z} הינו הענף העיקרי של פונקציית השורש.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \frac{e^2 [1+i]}{\sqrt{2}} - 1$$

(2) הוכחה.

נוסחת האינטגרל של קושי:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z} dz$.

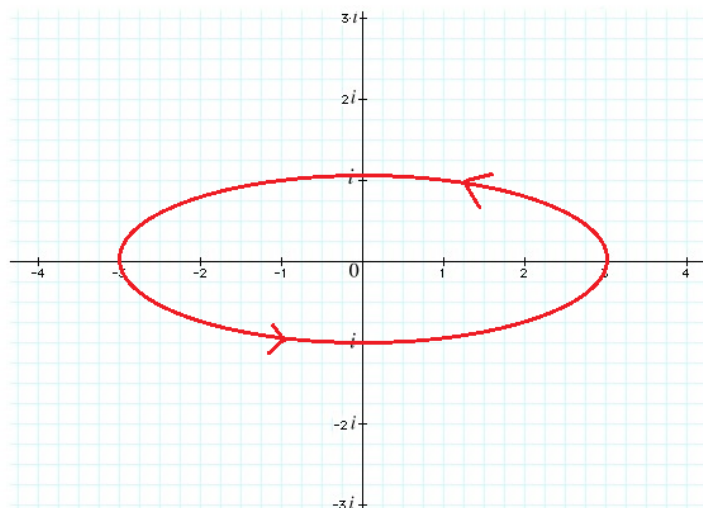
(2) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2} dz$.

(3) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-2|=1} \frac{\sin(z^2)}{z(z-2)} dz$.

(4) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{e^z + e^{-z}}{z(z-2)(z-3)} dz$.

(5) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1.5} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)} dz$.

(6) חשבו את האינטגרל $\oint_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z(z-2)(z-4)} dz$, עבור המסילה שבציור:



$$(7) \quad \oint_{|z|=2} \frac{z^2 - e^{z^2}}{z(z^2 - 1)(z + 3)} dz \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

(8) תהי $f(z)$ פונקציה הולומרפית בתחום D .

נניח כי $z_0 \in D$ וכי הדיסק $D(z_0, R) = \{|z - z_0| \leq R\}$ מוכל כולו ב- D .

$$\text{הוכיחו כי } f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta}) d\theta$$

$$(9) \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \sin(2\theta)} d\theta \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(10) \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{הוכיחו:}$$

$$(11) \quad \int_C \frac{z}{z^2 + 1} dz \quad \text{כאשר } C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

$$(12) \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)} \quad \text{כאשר } a > b > 0$$

$$(13) \quad \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{Log}\left(1 + \frac{z}{3}\right)}{z} dz \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

(14) תהי $f(z) = u + iv$ הולומרפית בתחום $|z| < 1$ כך ש- $u^2(0) = v^2(0)$

$$\int_0^{2\pi} u^2(re^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} v^2(re^{i\theta}) d\theta \quad \text{הוכיחו כי לכל } 0 < r < 1 \text{ מתקיים}$$

(15) תהי $f(z) = u + iv$ הולומרפית בתחום $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

הוכיחו כי לכל $0 < r < 1$ ולכל $0 < |a| < r$ מתקיים

$$\oint_{|z|=r} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z-a} f(z) dz = \pi i \cdot \left(\left[a + \frac{r^2}{a} \right] f(a) - \frac{r^2}{a} \cdot f(0) \right)$$

תשובות סופיות:

(1) $2\pi i$

(2) $2\pi e^2 i$

(3) $2\pi i \cdot \frac{\sin(2^2)}{2}$

(4) $2\pi i \cdot \frac{1}{3}$

(5) $\pi i - 2\pi e i$

(6) $-\frac{\sin(2)\pi i}{2}$

(7) $\pi i \cdot \left(\frac{17}{12} - \frac{3e}{4} \right)$

(8) הוכחה.

(9) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(10) הוכחה.

(11) πi

(12) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

(13) 0

(14) הוכחה.

(15) הוכחה.

נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin(z)}{(z-i)^3} dz$

(2) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3} dz$

(3) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2} dz$

(4) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)} dz$

(5) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3} dz$

(6) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=6} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)} dz$

(7) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)^2(z-4)} dz$

תשובות סופיות:

$$\frac{\pi}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \quad (1)$$

$$-\pi i \quad (2)$$

$$-2\pi i \cdot \sin(\pi) \quad (3)$$

$$-\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}} \pi i \quad (4)$$

$$-2\pi^2 i \quad (5)$$

$$-\frac{\pi i}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \quad (6)$$

$$0 \quad (7)$$

אי-שוויונות אינטגרליים (משפט הערכה):

שאלות:

הוכיחו את אי השוויונות הבאים:

$$(1) \quad \left| \int_C \frac{z^3}{z^2+1} dz \right| \leq \frac{81\pi}{8} \quad \text{כאשר } C: \{|z|=3, \operatorname{Re}(z)>0\}$$

$$(2) \quad \left| \int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1} dz \right| \leq \frac{6\pi}{8}$$

$$(3) \quad \left| \int_C e^{z^2} dz \right| \leq \sqrt{8} \quad \text{כאשר } C \text{ הינה מסילת הקו הישר מ-} 0 \text{ עד } 2+2i$$

$$(4) \quad \left| \int_C \frac{z^2}{\sin(z)} dz \right| \leq \frac{\pi^2}{2} + 2 \quad \text{כאשר } C \text{ הוא הקטע הישר המתחיל בנקודה } \frac{\pi}{2} + i$$

$$\text{ומסתיים בנקודה } \frac{\pi}{2} - i$$

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

$$(1) \text{ הוכיחו כי } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2} \text{ עבור } b > 0$$

$$(2) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ ו-} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$(3) \text{ הוכיחו כי } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi$$

$$(4) \text{ חשבו את האינטגרל } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6(x)}{x^6} dx$$

$$(5) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b \cos \theta)^2} d\theta = 2\pi \cdot \frac{a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ עבור } a > b > 0$$

$$(6) \text{ תהי } f(z) = \frac{1}{(1+az)^2} + \frac{1}{(1+bz)^2} \text{ כאשר } a, b \in \mathbb{C} \text{ קבועים המקיימים } |a| < 1, |b| < 1$$

$$\text{שונים מאפס. נניח כי } |f(z)| \leq 3 \text{ לכל } |z|=1 \text{ . הוכיחו כי } \left| a^n + b^n \right| \leq \frac{3}{n+1} \text{ לכל } n \geq 0$$

$$\text{רמז: התבוננו ב-} |f^{(n)}(0)|$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) $\frac{11\pi}{20}$

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

פונקציות מרוכבות

פרק 5 - טורים

תוכן העניינים

43	1. טורים מספריים
44	2. קריטריון קושי-הדמרד
45	3. טורים כלליים
46	4. טורי טיילור ומקלורן
47	5. טורי לורן

טורים מספריים:

שאלות:

(1) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$

(2) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin(in)}{3^n}$

(3) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^n$

(4) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2+i^n}$

(5) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+i^n}$

תשובות סופיות:

(1) מתבדר.

(2) מתכנס.

(3) מתבדר.

(4) מתבדר.

(5) מתכנס.

קריטריון קושי – הדמרד:

שאלות:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n \quad \text{מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור}$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{in} \right)^n \quad \text{מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור}$$

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (2n+1)} (z-3n)^n \quad \text{מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור}$$

תשובות סופיות:

$$R=1 \quad (1)$$

$$R=\infty \quad (2)$$

$$R=3 \quad (3)$$

טורים כלליים:

שאלות:

- (1) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$.
- (2) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(1-i)^n}$.
- (3) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (z-1)^n}$.
- (4) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$.
- (5) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$.

תשובות סופיות:

- (1) $|z| > 1$
- (2) $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (3) $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (4) $2 < |z| < 4$
- (5) $\operatorname{Re}(z) < 0$

טורי טיילור ומקלורן:

שאלות:

(1) מצאו טור טיילור עבור $f(z) = \sin(z+1)$ סביב $z=0$ ומצאו תחום התכנסות.

(2) מצאו טור טיילור עבור $f(z) = \frac{1}{z}$ סביב $z=i$ וציינו את רדיוס ההתכנסות.

(3) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{2i}{2+i+z}$ סביב $z_0 = -(2+i)$ בתחום $|z-z_0| < |2+i+z_0|$.

(4) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$ לטור חזקות סביב $z_0 \neq 1$ בתחום $|z-z_0| < |1-z_0|$.

(5) נניח כי $f(z)$ שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ ומתקיים $f'(0)=1$.

חשבו את $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{f(z)} dz$.

תשובות סופיות:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos(1) \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \sin(1) \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \right) \quad z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

$$f(z) = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{i} \right)^n (z-i)^n \quad |z-i| < 1 \quad (2)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2i(-1)^n}{(2+i+z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \quad (3)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(n+1)(n+2)}{(1-z_0)^{n+3}} (z-z_0)^n \quad (4)$$

$$2\pi i \quad (5)$$

טורי לורן:

שאלות:

(1) פתחו את הפונקציה לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בכל התחומים האפשריים. $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

(2) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $|z| < 2$ ובתחום $|z| > 2$.

(3) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = -1$ בתחומים הבאים: $0 < |z+1| < 2$ ו- $|z+1| > 2$.

(4) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = -3$ בכל התחומים האפשריים.

(5) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $1 < |z| < 3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

(6) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $|z| > 3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

(7) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $|z| < 1$.

(8) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $|z| < 1$ ומצאו את המקדם a_{-1} .

(9) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0 = i$ בתחום $0 < |z-i| < 2$ ומצאו את המקדם a_{-1} .

(10) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0 = i$ בתחום $|z-i| > 2$.

(11) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-4)}$ לטור לורן סביב $z_0 = 1$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $z = 5$.

(12) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $1-3i$.

(13) נניח כי $|a| < 1$ ונגדיר את הפונקציה $f(z) = \frac{a}{z-a}$ (כאשר a מספר ממשי).

א. פתחו פונקציה זו לטור לורן בטבעת $|a| < |z| < \infty$.

ב. הוכיחו את הזהות $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(n\theta) = \frac{a \cos(\theta) - a^2}{1 - 2a \cos(\theta) + a^2}$

(14) תהי $a \in \mathbb{C}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ונניח כי

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$$

הוכיחו כי לכל $r > 0$ מתקיים $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz$

(15) נסמן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ פיתוח לטור לורן של $f(z) = \frac{z}{e^{z^2} - 1}$ סביב $z_0 = 0$ בתחום $0 < |z| < r$.

א. מצאו מהו ה- r המקסימלי.

ב. מצאו את a_n לכל $n \leq 4$.

הערה: תרגיל זה דורש ידע בסיווג של נקודות סינגולריות.

(16) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

(17) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

תשובות סופיות:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1 \quad (1)$$

$$f(z) = -\left(\frac{1}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad |z| > 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad |z| < 2 \quad (2)$$

$$f(z) = -\left(\frac{2}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n \quad |z| > 2$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z+1)^{n-1} \quad 0 < |z+1| < 2 \quad (3)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z+1)^{n+2}} \quad |z+1| > 2$$

$$f(z) = -\frac{1}{(z+3)} \sum_{n=0}^{\infty} (z+3)^n \quad 0 < |z+3| < 1 \quad (4)$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+3)^n} \quad |z+3| > 1$$

$$f(z) = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^n} \quad 1 < |z| < 3 \quad (5)$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{z^{n+1}} \quad |z| > 3 \quad (6)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6 \cdot 3^n} \right] z^n \quad |z| < 1 \quad (7)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad |z| < 1 \quad (8)$$

$$a_{-1} = 0$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1} (z-i)^{n-1} \quad 0 < |z-i| < 2 \quad (9)$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2i}$$

$$f(z) = \frac{1}{(2-i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n \quad 2 < |z-i| \quad (10)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^{n+2}} \quad |z-1| > 3 \quad (11)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad |z| > 3 \quad (12)$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} \quad |a| < |z| < \infty \quad \text{א. (13)}$$

ב. הוכחה.

(14) הוכחה.

$$r = \sqrt{2\pi} \quad \text{א. (15)}$$

$$\text{ב. } a_4 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{12}, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_0 = 0, \quad a_{-1} = 1, \quad \forall n \leq -2 \quad a_n = 0$$

$$\frac{\pi i}{12} \quad (16)$$

$$2\pi i \quad (17)$$

פונקציות מרוכבות

פרק 6 - נקודות סינגולריות

תוכן העניינים

51	1. אפסים של פונקציות אנליטיות
53	2. מיון נקודות סינגולריות

אפסים של פונקציות אנליטיות:

שאלות:

- (1) קבעו את סדר האפס של הפונקציה $f(z) = z \sin(z)$ בנקודה $z = 0$.
- (2) קבעו את סדר האפס של הפונקציה $f(z) = z \sin(z^3)$ בנקודה $z = 0$.
- (3) נניח כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר n .
נניח כי הפונקציה $g(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר m .
הוכיחו כי הפונקציה $h(z) = f(z)g(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר $n+m$.
- (4) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $h(z) = z^{20} \sin(z)$ בנקודה $z_0 = 0$.
- (5) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $f(z) = e^{\sin(z)} - \sin^2(z) - 1$ בנקודה $z_0 = 0$.
- (6) נניח כי לפונקציה $f(z)$ יש אפס מסדר 7 בנקודה $z_0 = 0$.
נניח כי לפונקציה $g(z)$ יש אפס מסדר 3 בנקודה $z_0 = 0$.
מצאו את סדר האפס של הפונקציה $h(z) = f(z) + g(z)$.
- (7) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $h(z) = 6 \sin(z^3) + z^{12}(z^6 - 6)$ בנקודה $z_0 = 0$.
- (8) הוכיחו כי לא קיימת $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

תשובות סופיות:

$$N = 2 \quad (1)$$

$$N = 2 \quad (2)$$

הוכחה. (3)

$$N = 21 \quad (4)$$

$$N = 1 \quad (5)$$

$$N = 3 \quad (6)$$

$$N = 3 \quad (7)$$

הוכחה. (8)

מיון נקודות סינגולריות:

שאלות:

(1) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

(2) נניח כי $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו- $g(z)$ אנליטיות בסביבת $z=0$.

נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 7 של $f(z)$.

נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 11 של $g(z)$.

מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב- $z=0$?

(3) נניח כי $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו- $g(z)$ אנליטיות בסביבת z_0 .

נניח כי z_0 זה אפס מסדר n של $f(z)$.

נניח כי z_0 זה אפס מסדר m של $g(z)$.

מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב- z_0 ? חלקו למקרים $n \geq m$ ו- $n < m$.

א. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^2}$.

ב. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

(4) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$.

(5) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$.

(6) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{1}{e^{-z}-1} + \frac{1}{z}$.

(7) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

(8) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{1}{z^2-1} \cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right)$.

9 מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$.

10 מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$. האם הן מבודדות?

11 מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = z \cot(z)$.

12 נתון כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

נניח כי 0 זה קוטב מסדר m של $f(z)$ ובנוסף נניח כי $-1 \notin f[\mathbb{C} \setminus \{0\}]$.

מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות של $g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$.

13 מצאו את הקטבים והאפסים בתחום $|z| < 4$ של הפונקציה $f(z) = \frac{(z-2)^2}{(e^{2z}-1)^2 z^3}$.

14 מיינו את הנקודות $z=0$ ו- $z = \frac{\pi}{4}$ עבור $f(z) = \frac{\tan(z)}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}$.

15 תהינה $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציות שלמות שאינן קבועות.

נניח כי לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)| \leq |g(z)|$.

א. הוכיחו שכל נקודה סינגולרית של $\frac{f(z)}{g(z)}$ הינה סליקה.

ב. הוכיחו כי $f(z) = c \cdot g(z)$ כאשר c קבוע המקיים $|c| \leq 1$.

16 מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$.

17 הוכיחו כי הנקודה $z_0 = i$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$.

18 תהי $f(z): D \rightarrow \mathbb{C}$ אנליטית כאשר $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < 1\}$.

נניח כי מתקיים $|z - z_0|^a |f(z)| \leq 1$ לכל $z \in D$ עבור $0 \leq a < 1$.

הוכיחו כי z_0 נקודה סינגולרית סליקה של $f(z)$.

(19) (אתגר)

נתונה $f(z)$ אנליטית בתחום $0 < |z| < 1$ המקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n!}$.
הוכיחו כי $z=0$ זו נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$.

(20) (אתגר)

הוכיחו כי אם z_0 זה קוטב של $f(z)$ אז היא בהכרח עיקרית של $g(z) = e^{f(z)}$.

רמז: רשמו את $f(z)$ באופן הבא $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ כאשר $\varphi(z_0) = r_0 e^{i\alpha}$

התבוננו בסדרות הבאות: $z_n = z_0 + \frac{1}{n} e^{i\frac{\alpha}{m}}$, $w_n = z_0 + \frac{1}{n} e^{i\frac{\pi+\alpha}{m}}$

תשובות סופיות:

- (1) $z=1$ קוטב מסדר 1.
- (2) $z=0$ קוטב מסדר 4.
- (3) אם $n \geq m$ אז z_0 נקודה סינגולרית מסוג סליקה של $h(z)$.
ואם $n < m$ אז z_0 קוטב מסדר $m-n$ של $h(z)$.
- (4) $z=0$ עיקרית.
- (5) $z=0$ עיקרית.
- (6) $z_k = 2\pi ik$ קטבים מסדר 1.
- (7) $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ קטבים מסדר 1.
- (8) $z = -1$ עיקרית ו- $z = 1$ קוטב מסדר 1.
- (9) $z = 2$ עיקרית.
- (10) $z = 0$ לא מבודדת ו- $z_k = \frac{1}{\pi k}$ קטבים מסדר 1.
- (11) $z = 0$ סליקה ו- $z_k = \pi k \neq 0$ קטבים מסדר 1.
- (12) $z = 0$ סליקה.
- (13) $z = 2$ אפס מסדר 2, $z = 0$ קוטב מסדר 5, $z = \pm \pi i$ קטבים מסדר 2.
- (14) $z = 0$ סליקה, $z = \frac{\pi}{4}$ קוטב מסדר 1.
- (15) (א) הוכחה
(ב) הוכחה
- (16) $z = 0$ לא מבודדת.
- (17) $z_k = \frac{1}{k}$ ($k \neq 0, 2, -2$) קטבים מסדר 1.
- (18) $z = \pm \frac{1}{2}$ סליקות.
- (17) הוכחה.
- (18) הוכחה.
- (19) הוכחה.
- (20) הוכחה.

פונקציות מרוכבות

פרק 7 - משפט השארית

תוכן העניינים

57	1. מציאת שארית.....
59	2. אינטגרלים מרוכבים.....
63	3. מסילת מעגל היחידה.....
65	4. מסילת חצי-קשת מעגלית.....

מציאת שארית:

שאלות:

חשבו את השאריות של הפונקציות בנקודות הבאות:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+3}{z+2}, z=-2\right) \quad (1)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+9}, z=3i\right) \quad (2)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=1\right) \quad (3)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=-1\right) \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{נניח כי לפונקציה } \frac{f(z)}{g(z)} \text{ יש קוטב פשוט ב- } z_0 \text{ כאשר ונניח כי } g'(z_0) \neq 0.$$

$$\text{הוכיחו כי } \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z}, 0\right) \quad (6)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\sin(z+1)}{z}, 0\right) \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה } f(z) = \frac{\tan(z)}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}$$

$$(9) \quad \text{חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה } f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^3(z - \pi)}$$

(10) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה בעלת n אפסים בדיוק. הוכיחו שכל הנקודות הסינגולריות של $\frac{f'(z)}{f(z)}$ הן קטבים פשוטים וחשבו את השאריות בנקודות אלו.

תשובות סופיות:

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{6i} \quad (2)$$

$$\frac{3}{8} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (5)$$

$$1 \quad (6)$$

$$\sin(1) \quad (7)$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), \frac{\pi}{2} + \pi k\right] = -\frac{1}{\left[\frac{\pi}{2} + \pi k\right]\left[\frac{\pi}{4} + \pi k\right]} \quad (8)$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = -\frac{1}{2\pi} \quad \operatorname{Res}[f(z), \pi] = \frac{2}{\pi^3} \quad (9)$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = m_k \quad (10)$$

כאשר z_k אפס מסדר m_k של $f(z)$.

אינטגרלים מרוכבים :

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\oint_{|z|=1} z \tan(\pi z) dz \quad (1)$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz \quad (2)$$

$$\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz \quad (3)$$

$$\oint_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz \quad (4)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) + e^{z^2} \cos(z) dz \quad (5)$$

(6) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה.

הוכיחו כי לכל מסלול C פשוט וסגור שאינו חותך את הראשית, מתקיים $\oint_C f\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0$.

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz \quad (a > 1) \quad (7)$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{(1+z)^5 \sinh(z)}{z^6} dz \quad (8)$$

$$\oint_{|z|=5} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2} dz \quad (9)$$

$$\oint_{|z|=6} \cot(z) dz \quad (10)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin(z) \sin\left(\frac{3}{z}\right) \cos\left(e^{z^2+\pi} + \ln(2)\right) dz \quad (11)$$

(12) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ שם יש לה אפס מסדר 2 ומתקיים $f''(0)=7$.

$$\text{חשבו } \oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{f(z)} dz$$

$$\oint_{|z|=1} z^4 \sin(\bar{z}) dz \quad (13)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin(z) \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz \quad (14)$$

(15) חשבו את המקדמים של החזקות השליליות בפיתוח של $f(z) = \frac{1}{\cos(z)-1}$

לטור לורך סביב $z_0=0$ בתחום $0 < |z| < 2\pi$.

הערה: אם $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור לורך של $f(z)$ בתחום $R_1 < |z-z_0| < R_2$ אז ניתן

לקבל את המקדמים ע"י הנוסחה $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ כאשר $R_1 < r < R_2$.

(16) הוכיחו את עקרון הארגומנט:

אם $f(z)$ אנליטית בתחום D פרט למספר סופי של קטבים ורציפה על

השפה γ ואינה מתאפסת שם על השפה אזי $N - P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ כאשר

N - מספר האפסים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D .

P - מספר הקטבים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D .

(17) אם $n \in \mathbb{N}$ ו- $r > 0$ כך ש- $n < r^2 < n+1$ חשבו את האינטגרל $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z}{e^{2\pi iz^2} - 1} dz$

$$(18) \text{ חשבו } \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz$$

הערה: $\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-iR}^{iR} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz$ definition כאשר המסילה באינטגרל הימני היא מסילת הקו הישר מ- $-iR$ ל- iR .

תשובות סופיות:

$$\oint_{|z|=1} z \tan(\pi z) dz = 0 \quad (1)$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right) \quad (2)$$

$$\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{e} \right) \quad (3)$$

$$\oint_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = -\frac{\pi i}{3} \quad (4)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) + e^{z^2} \cos(z) dz = 0 \quad (5)$$

(6) הוכחה.

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz = \frac{\pi i}{2} \quad (7)$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{(1+z)^5 \sinh(z)}{z^6} dz = \frac{267}{20} \pi i \quad (8)$$

$$\oint_{|z|=5} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2} dz = \pi [-3i \cdot e^i + 2i - e] \quad (9)$$

$$\oint_{|z|=6} \cot(z) dz = 6\pi i \quad (10)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin(z) \sin\left(\frac{3}{z}\right) \cos(e^{z^2+\pi} + \ln(2)) dz = 0 \quad (11)$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{f(z)} dz = \frac{4\pi i}{7} \quad (12)$$

$$\oint_{|z|=1} z^4 \sin(\bar{z}) dz = \frac{2\pi i}{5!} \quad (13)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin(z) \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0 \quad (14)$$

$$a_{-1} = -2, \quad a_{-2} = -2, \quad a_n = 0 \text{ for } n \leq -3 \quad (15)$$

(16) הוכחה.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z}{e^{2\pi i z^2} - 1} dz = 2n + 1 \quad (17)$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz = \frac{\pi i}{3e} \quad (18)$$

מסילת מעגל היחידה:

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos(\theta))^2} d\theta \quad (1)$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{2 + \cos(3x)} dx \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cos(x) + b \sin(x) + c} dx \quad (3) \quad \text{עבור הפרמטרים}$$

הממשיים a, b, c המקיימים $c > \sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

הערה: ניתן להשתמש בעובדה כי $|\sqrt{c^2 - 1} - c| < 1$

$$\int_0^\pi \frac{1}{(a + b \cos \varphi)^2} d\varphi \quad (4) \quad \text{עבור } a > b > 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin^2 x} dx \quad (5) \quad \text{עבור } |a| > 1$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta)^n \cos(n\theta) d\theta \quad (6) \quad \text{חשבו לכל } n \in \mathbb{N}$$

תשובות סופיות:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos(\theta))^2} d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos(3x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cos(x) + b \sin(x) + c} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - 1}} \quad (3)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(a + b \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{\pi ab}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + a}} \quad (5)$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta)^n \cos(n\theta) d\theta = 2\pi \quad (6)$$

מסילת חצי קשת מעגלית:

שאלות:

בכל התרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$$C_R = \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

$$\gamma = \{z = x \mid -R \leq x \leq R\}$$

(1) חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיף הקודם כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

(2) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2} \quad \text{כי הוכיחו כי} \quad (3)$$

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx \quad \text{חשבו את האינטגרל} \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1} dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)} \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$\oint_{C_{R+\gamma}} \frac{1}{1+z^2} dz = \pi \quad \text{א) (1)}$$

(ב) הוכחה.

(ג) הוכחה.

$$\oint_{C_{R+\gamma}} \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{א) (2)}$$

(ב) הוכחה.

(ג) הוכחה.

$$\oint_{C_{R+\gamma}} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = \pi\sqrt{2} \quad \text{א) (3)}$$

(ב) הוכחה.

(ג) הוכחה.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \frac{3\pi}{8} \quad \text{(4)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1} dx = \frac{14\pi}{3} \quad \text{(5)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{(6)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx = -\frac{\pi}{27} \quad \text{(7)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx = \frac{\pi}{6} \quad \text{(8)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)} = \frac{5}{96}\pi \quad \text{(9)}$$