

פיזיקה 3



תוכן העניינים

1.	מבוא מתמטי - טורי פורייה	1
2.	מבוא מתמטי - התמרת פורייה	16
3.	גלים	31
4.	תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום	48
5.	תורת הקוונטים	72
6.	תורת הקוונטים חלק 2 (ללא ספר)	
7.	המודל הקוונטי לאטום המימן ספין והטבלה המחזורית (ללא ספר)	

פיזיקה 3

פרק 1 - מבוא מתמטי - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. הקדמה	(ללא ספר)
2. טור פורייה ממשל	1
3. טור פורייה מרוכב	2
4. משפט פרסבל	3
5. רימן לבג	6
6. משפט דיריכלה	7
7. המשכה זוגית ואי זוגית	9
8. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה	10
9. התכנסות במידה שווה של טורי פורייה	13
10. טור פורייה בקטע כללי	14

טור פורייה ממשי:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$.

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \sin(|x|)$.

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

תשובות סופיות:

$$\sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x) \quad (2)$$

$$\sin(|x|) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2kx) \quad (3)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx) \quad (4)$$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

תשובות סופיות:

$$x \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi \frac{(-1)^n}{in} + \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right\} e^{inx} \quad (2)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - 3(-1)^n \frac{\pi}{in} \right] e^{inx} \quad (3)$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{3}{\pi i (2k-1)} e^{i(2k-1)x} \quad (4)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4i} e^{ix} - \frac{1}{4i} e^{-ix} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - (2k)^2} e^{i[2k]x} \quad (5)$$

משפט פרסבל:

שאלות:

$$(1) \quad \text{באמצעות טור הפורייה } x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx), \text{ חשבו את הסכום } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$(2) \quad \text{נתון כי טור הפורייה הממשי של } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases} \text{ בקטע } [-\pi, \pi]$$

$$\text{הינו } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ הוכיחו כי } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

$$(3) \quad \text{נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ x + \pi & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = x$$

$$\text{מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$(4) \quad \text{מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases} \text{ ובאמצעותו}$$

$$\text{חשבו את הסכום } \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$(5) \quad \text{נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ e^{x^2} & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\text{נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- } f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}, \quad g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n} = \frac{1}{8}$$

(6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad -\pi \leq x < \pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi < x < 3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$.

(7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi, \pi]$ על ידי הנוסחה: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}} e^{inx}$.

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$.

(8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $p \neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

(9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} h^2 & h \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x \leq h \end{cases}$ בקטע $[-\pi, \pi]$

כאשר $0 \neq h \in [-\pi, \pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n \cos(2n)}{n^2}$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{32}$

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

תשובות סופיות:

$$\frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

$$\frac{\pi^2}{4} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx) \quad \text{ב.} \quad (6) \quad \text{א. ראו סרטון.}$$

ג. ≈ 0.769

$$8\pi \quad (7)$$

(8) הוכחה.

$$\frac{\pi^2 - 4}{4} \quad (9)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx} \quad \text{א.} \quad (10) \quad \text{ב. הוכחה.}$$

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

(1) חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x} \cos(\sqrt{|x|}) \sin(nx) dx$

(2) חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2 + 1} e^{i \cdot n^2 t} dt$

(3) הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{se^{s^2}}{\sqrt{s^2 + 2017}} e^{inx} dx \right) = 0$

תשובות סופיות:

(1) 0

(2) 0

(3) הוכחה.

משפט דיריכלה:

שאלות:

(1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$ לטור פורייה

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ רמז: הציבו } x = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2x}{\pi} & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad (2)$$

נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi, 3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ג. הוכיחו כי

(3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

ב. חשבו את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

ג. חשבו את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ד. חשבו את הטור

(4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \cos(ax)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר a

אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

$$\frac{1}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\pi a + \pi n} + \frac{1}{\pi a - \pi n} \right] \quad \text{א.}$$

$$\cot(\pi a) = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi a + \pi n} - \frac{1}{\pi a - \pi n} \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. ראו סרטון.

ב. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$ ג. הוכחה.

(3) א. $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

(4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0, \pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0 < x < \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos([2k-1]x) \text{ מתקיים}$$

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = 1$ בקטע $[0, \pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ והוכיחו כי:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin([2k-1]x) \text{ מתקיים } 0 < x < \pi \text{ א. לכל}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = -\frac{\pi}{4}$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

(1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$ ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$).

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ מתכנס בהחלט.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = x(\pi - x)$ בקטע $[0, \pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?

שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x) = \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ בקטע $[0, \pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x^2}$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| e^{inx}$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$ מתכנס?

(4) נתבונן בטור הפורייה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(x+i)}$

כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ בקטע $(0, 2\pi)$.

ב. נסמן $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0, 2\pi)$.

(6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi, \pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k

פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ לכל $j = 0, 1, \dots, k-1$. נסמן $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k c_n) = 0$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$

ו- $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

ב. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[0, \pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0) = f(\pi) = 0$.

הראו כי מתקיים $\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

(8) נגדיר $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} e^{in^2 x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

(9) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \sin(n^{2.5} x)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

(10) נסמן $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{1.4}} + \frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

(11) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

(12) נסמן $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3.1} + i \cdot n^{2.2}} \cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$(2) \quad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin([2k-1]x) \quad [0, \pi] \quad \text{א.}$$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

$$\text{ה.} \quad [0, \pi] \quad \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \sim \frac{\pi^3}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k-1)^4} \cos([2k-1]x) \quad \text{ו. הוכחה.}$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \cdot n c_n \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n| < \infty$$

$$\text{ג.} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$$

(4) ראו סרטון.

$$(5) \quad \text{א. הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad -\frac{\pi}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{\pi^2}{6} x$$

(6) הוכחה.

(7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

$$(10) \quad \text{א.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2.8}} < \infty \quad \text{ב.} \quad \text{נניח בשלילה כי } f \text{ גזירה ברציפות.}$$

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

$$(1) \quad \text{תהי הפונקציה} \quad g(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

$$\text{ב. עבור } -\pi \leq x \leq \pi \text{ נגדיר את הפונקציה} \quad h(x) = a \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \int_{-\pi}^x g(t) dt$$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה ל- $h(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

$$(2) \quad \text{נגדיר פונקציה} \quad f(x) = |\sin(x)| \text{ במרחב } L_{PC}^2([-\pi, \pi]) \text{ ונסמן ב-} f'(x) \text{ את הנגזרת שלה.}$$

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f' .

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi, 3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א.} \quad g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2k \cdot x) \quad \text{ב.} \quad a = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad f(x) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)} \right] \cos(2k \cdot x)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)} \right] \sin(2k \cdot x)$$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית- 2π , הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל

נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n + \delta, \pi(n+1) - \delta]$

לכל $0 < \delta < \pi$ ולכל n שלם.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0, 2\pi]$.

(2) תהי הפונקציה $f(x) = \min\{1, |x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2, 2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0, 2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$.

(4) פתחו את $f(x) = |x|$ לטור פורייה בקטע $[-1, 1]$.

(5) פתחו את $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0, 2]$.

(6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x) = f(x+2)$ ובנוסף $f(x) = 2-|x|$ $-1 \leq x < 1$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1, 1]$?

(7) מצאו טור קוסינוסים $f(x) = x$ בקטע $[0, 3]$.

(8) פתחו את $f(x) = \cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0, \pi]$.

תשובות סופיות:

$$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (1)$$

$$b_n = 0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1+4n^2\pi^2} e^{in\pi x} \quad \text{א.} \quad (3)$$

ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$ ב. ראו סרטון.

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(\pi[2k-1]x) \quad (4)$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right) \quad (5)$$

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos([2k-1]\pi x) \quad \text{א.} \quad (6)$$

ג. $\frac{\pi^2}{8}$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a, b]$, $f(a) = f(b)$, ו- f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[a, b]$.

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right) \quad (7)$$

$$\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin([2k-1]x) \quad (8)$$

פיזיקה 3

פרק 2 - מבוא מתמטי - התמרת פורייה

תוכן העניינים

16	1. מבוא כללי
18	2. נוסחת כיווץ והזזה
20	3. נוסחת הנגזרת
21	4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה
23	5. נוסחת המומנט
25	6. נוסחת ההתמרה ההפוכה
(ללא ספר)	7. נוסחת התמרה כפולה
26	8. משפט פלנשראל
27	9. משפט הקונבולוציה

מבוא כללי:

שאלות:

$$(1) \quad \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(5) \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{bx} & x \leq 0 \end{cases} \text{ כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים הינה}$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right]$$

$$(6) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של}$$

$$(7) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(8) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הינה } f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$$

$$(10) \quad f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של}$$

$$(11) \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} x & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ עבור } a > 0$$

$$(12) \quad \text{האם קיימת } f \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \text{ כך ש-} f(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \quad (2)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{2\sin(2\omega) - \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (5)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega) + i[\cos(\omega) - 1]}{\omega} \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega}}{i\omega} \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-i)\omega} - 1}{1-i\omega} \quad (8)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (9)$$

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin([1-\omega])}{1-\omega} - \frac{\sin([1+\omega])}{1+\omega} \right\} \quad (10)$$

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} i \frac{\sin(\omega a) - \omega a \cos(\omega a)}{\omega^2} \quad (11)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \quad \text{לא. אינה רציפה בנקודות} \quad (12)$$

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-r,r] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ כאשר $r > 0$.

(2) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) נתונה פונקציה $g(x) \in G(R)$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.

מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב- $g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

(4) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-ax^2}$ כאשר $a > 0$.

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{רמז:}$$

(5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \cos(4\pi\omega) \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

$$F\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{רמז:}$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi \omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{e^{\frac{i\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{16}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 & 4\pi - 2 \leq x \leq 4\pi + 2 \text{ or } -4\pi - 2 \leq x \leq -4\pi + 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

(1) נניח כי $f(x) \in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $f'(x) \in G$ ו- $f(\omega) = \frac{\omega}{1 + \omega^{30}}$. מצאו התמרת פורייה של $f'(x) \cos(2x)$.

(2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F \left\{ \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \right\}_\omega = \left(-\frac{1}{2} \right) (i\omega) \frac{1}{2|a|} e^{-|a\omega|}$

(3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \omega^2 e^{-|\omega|}$. רמז: $F \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

תשובות סופיות:

$$\frac{i \cdot \frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}} + i \cdot \frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

$$f(x) = (-2) \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad (3)$$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

$$(1) \text{ הוכיחו כי התמרת פורייה של } F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i} \left[\frac{2c \cdot \omega}{1 + (\omega - c)^2} \right] \left[\frac{1}{1 + (\omega + c)^2} \right]$$

$$(2) \text{ מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = \frac{\sin(\omega - 1)}{\omega - 1} - \frac{\sin(\omega + 1)}{\omega + 1}$$

$$(3) \text{ הוכיחו כי התמרת פורייה של } g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \text{ כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים,}$$

$$\text{הינה } g(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{bi - (\omega - a)} - \frac{1}{bi - (\omega + a)} \right]$$

$$(4) \text{ מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \cos(2x) \text{ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי } F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}$$

$$(5) \text{ מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \sin^2(3x) \text{ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי } F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}$$

$$(6) \text{ נניח כי } f(x) \in G(R) \text{ ונגדיר } g(x) = f(3x - 2) \cdot \cos(x) \text{ . בטאו את } g(\omega) \text{ על ידי } f(\omega)$$

$$(7) \text{ מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = e^{3i\omega} \cdot e^{-|\omega - 2|} \text{ . רמז: } F\left\{\frac{1}{1 + x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

$$(8) \text{ תהי } H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } H(x)e^{-ax} \text{ כאשר } a > 0$$

$$\text{ב. } H(x)e^{-ax} \cos(bx) \text{ כאשר } a, b > 0$$

$$\text{ג. } H(x)e^{-ax} \sin(bx) \text{ כאשר } a, b > 0$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$f(x) = 2\pi i \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(x) \quad (2)$$

(3) הוכחה.

$$F\{e^{-|x|} \cos(2x)\} = \frac{1}{2\pi(1+[\omega+2]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-2]^2)} \quad (4)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} - \left[\frac{1}{2\pi(1+[\omega+6]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-6]^2)} \right] \quad (5)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{6} \left[e^{-\frac{2}{3}(\omega+1)} f\left(\frac{\omega+1}{3}\right) + e^{-\frac{2}{3}(\omega-1)} f\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \right] \quad (6)$$

$$F\left\{e^{2i[x+3]} \frac{2}{1+[x+3]^2}\right\} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ג.}$$

נוסחת המומנט:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ על ידי שימוש

בנוסחה $F\{x \cdot f(x)\} = i \frac{d}{d\omega} f(\omega)$.

(2) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

כי $F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

(3) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

כי $F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

(4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x) = e^{-x^2}$.

(5) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = 8x^3 e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$.

(6) תהי $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

(7) נתון כי התמרת פורייה של $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|}$.

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

$$i \cdot \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2} \quad (1)$$

$$F \left\{ x^2 e^{-x^2} \right\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (2)$$

$$F \left\{ x \cdot e^{-|x|} \right\} = -\frac{i}{\pi} \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088) e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}} \quad (5)$$

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

(1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

(2) חשבו $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin(\omega) \cos(\omega x)}{\pi \omega} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

(1) ראו סרטון.

$$\begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \end{cases} \quad (2)$$

משפט פלנשראלי:

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a > 0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{\sin(bx)}{x} dx$ עבור $a, b > 0$.

(2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

(3) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

(4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

(1) א. $f(\omega) = \frac{\sin(\omega a)}{\pi \omega}$ ב. $\pi \cdot \min\{a, b\}$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

(1) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})(x)$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים.

(2) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)(x)$ כאשר $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים $x > 0$ ו- $x \leq 0$.

(3) מצאו פונקציה $f \in G$ כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$

(4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t) \in E$ מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f''(t))g(x-t)dt = 2f(x)$$

(5) נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f * g)(x)$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a}e^{-a|\omega|}$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$.

(8) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$.(9) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,2]}(x)$.(10) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x))_{(x)}$.(11) חשבו את הקונבולוציה $(e^{-x^2} * e^{-x^2})_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$.(13) נניח כי $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy \equiv 0$$

הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$.

תשובות סופיות:

$$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2, 0] \\ 2-x & x \in [0, 2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2, 0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0, 2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2 + 9} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \text{א.} \quad \frac{2}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad (6)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{א.} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad (7)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4 - x & 2 < x < 4 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\left(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x) \right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 3 \\ 3 - x & 2 < x < 3 \\ x - 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \quad (12)$$

(13) הוכחה.

פיזיקה 3

פרק 3 - גלים

תוכן העניינים

1. גלים והתאבכות גלים 31

גלים והתאבכות גלים:

שאלות:

(1) תרגול גל 1

פולס נע ימינה בחבל.



מתוארת צורתו בשני זמנים שונים: $t = 0$, $t = 2\text{sec}$.

א. מה משרעת הפולס?

ב. מה מהירות התקדמותו?

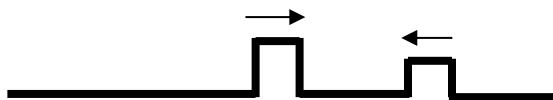
ג. מה כיוון תנועת החלקיק בחבל שנמצא בנקודה A ברגע $t = 0$?

ד. מה כיוון תנועת החלקיק בחבל שנמצא בנקודה B ברגע זה?

(2) תרגול גל 2

מציירים בחבל שתי הפרעות כמתואר בתרשים: $v = 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

שרטט את החבל בזמנים הבאים:



א. $t = 8\text{sec}$

ב. $t = 16\text{sec}$

ג. $t = 18\text{sec}$

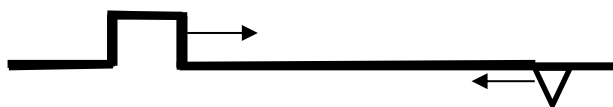
ד. $t = 22\text{sec}$

(3) תרגול גל 3

בחבל מייצרים שתי הפרעות שונות בשני קצותיו שמתקדמות אחת לקראת

השנייה, כמתואר בתרשים: $v = 0.5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

שרטט את צורת החבל בזמנים הבאים:



א. $t = 8\text{sec}$

ב. $t = 12\text{sec}$

ג. $t = 13\text{sec}$

ד. $t = 16\text{sec}$

(4) תרגול גל 4

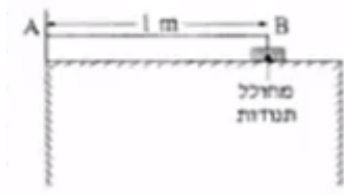
פולס משולש נע בחבל ומגיע לקצהו. שרטט את החבל + הפולס במקרים הבאים:

א. קצה החבל קשור לקיר.

ב. קצה החבל מולבש על טבעת חופשיה למנוע על פני ציר שעובר דרכה.

ג. קצה החבל קשור לחבל כבד יותר.

ד. קצה החבל קשור לחבל קל יותר.

(5) תרגול גל עומד

חוט AB, שאורכו 1m, קשור בקצהו B למחולל תנודות, ובקצהו A למוט קבוע (ראה תרשים).
 כאשר תלמיד מפעיל את מחולל התנודות, נוצר בחוט AB גל, שמוחזר מהקצה A.
 התלמיד מגדיל ברציפות את תדירות מחולל התנודות ורושם את התדירויות בכל פעם שנוצר בחוט AB גל עומד.
 תוצאות הניסוי רשומות בטבלה שלפניך:

$\frac{1}{\lambda} (\text{m}^{-1})$	$\lambda (\text{m})$	צורת הגל העומד	f - תדירות התנודות (Hz)
			24
			45
			67
			88

התייחס לנקודה B כנקודת צומת.

א. העתק את הטבלה למחברתך, ורשום בעמודה את אורך הגל λ , לכל אחד מארבעת הגלים העומדים שנוצרו בחוט?

ב. רשום בעמודה המתאימה בטבלה את הערך $\frac{1}{\lambda}$ לכל אחד מארבעת הגלים,

וסרטט גרף של התדירות f כפונקציה של $\frac{1}{\lambda}$.

ג. מצא בעזרת הגרף את מהירות התפשטותו של גל בחוט AB.

ד. התלמיד ממשיך להגדיל את תדירות מחולל התנודות.

מהי התדירות הראשונה (הגבוהה מ-88Hz) שייוצר בה גל עומד בחוט AB? נמק.

(6) תרגול גל מחזורי 1

מופיעים לפניכם גרפי העתק זמן והעתק מקום של חבל מסוים.

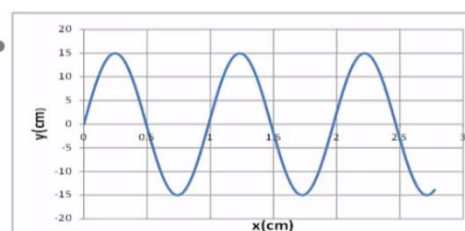
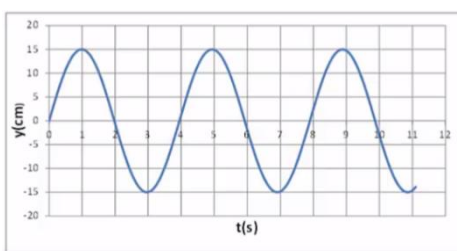
א. מהי משרעת הגל?

ב. מהו אורך הגל המתקדם בחבל?

ג. מה זמן המחזור של הגל?

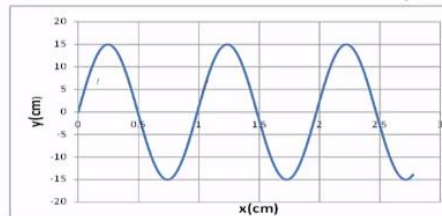
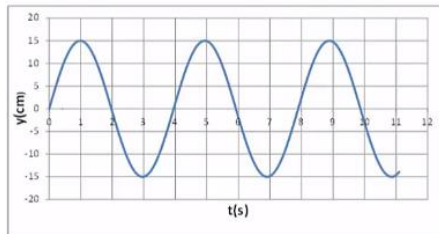
ד. מה מהירות הגל?

ה. לאיזה נקודה/נקודות בחבל יכול להתאים גרף ההעתק זמן (השמאלי)?



(7) תרגול גל מחזורי 2

לפניכם גרף העתק-מקום והעתק-זמן של הגוף מהשאלה הקודמת.
 מכפילים את תדירות מחולל הגלים (מקור).
 שרטטו את גרף העתק-זמן והעתק-מקום החדשים.


(8) תרגול גל מחזורי 3

- לפניך שני תצלומים (נראים זהים). הימני: גל מתקדם, השמאלי: גל עומד בקהל.
- קבע את אורך הגל של כל אחד מהגלים בחבל.
 - שרטט את החבל $\frac{1}{4}$ זמן מחזור לאחר תצלום זה.
 - שרטט את החבל $\frac{1}{2}$ זמן מחזור לאחר תצלום זה.
 - בחר בכל תצלום נקודה מימין ומשמאל למשרעת, וצייר את כיוון תנועתה מיד לאחר צילום זה.


(9) תרגיל 1

מהירות גל במיתר מתוח 25 מטר בשנייה. קושרים את היתר בין שני כנים שהמרחק ביניהם 3 מטר.
 מניעים את המיתר בעזרת מתנד.
 באיזו תדירות יש לנדנד אותו כך שיווצר בו גל עומד עם 12 נקודות צומת (כולל הקצוות)?

- 45.8 הרץ.
- 70 הרץ.
- 8.3 הרץ.
- 75 הרץ.
- 80.7 הרץ.

(10) תרגיל 2

מיתר בעל אורך 90 ס"מ קשור בשני קצותיו. כשמנדנדים אותו בתדירות 150 הרץ, נוצר בו גל עומד עם 8 נקודות צומת (כולל הקצוות). מהירות גל במיתר הנ"ל:

א. $15.3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ב. $38.6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ג. $17 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ד. $34.3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

(11) תרגיל 3

מנדנדים מיתר מתוח הקשור בשני קצותיו בתדירות 100 הרץ. אורך המיתר 3 מטר. במיתר נוצר גל עומד עם 5 נקודות צומת (כולל הקצוות). מהי מהירות הגל במיתר?

א. $150 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ב. $100 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ג. $330 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ד. $20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ה. $340 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

(12) תרגיל 4

מיתר של גיטרה משמיע עם הפריטה עליו צליל בתדירות של 300 הרץ. אם רוצים להפיק מהמיתר צליל בעל תדירות של 900 הרץ:

א. אין כל דרך להפיק את התדירות הנ"ל מהמיתר.

ב. יש להקטין את המתיחות במיתר פי 3.

ג. יש לקצר את המיתר פי 3.

ד. יש להאריך את המיתר פי 3.

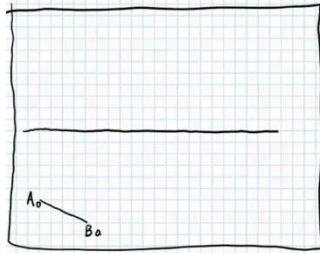
ה. יש להגדיל את המתיחות פי 2.

(13) תרגיל החזרה גלים דו ממדיים

נתון אמבט גלים הבא בו מתקדם גל ישר A_0B_0 . באמבט קיים גם מחסום.

א. הוסף לתרשים חץ המתאר את כיוון התקדמות הגל A_0B_0 .

ב. הוסף לתרשים את חזית הגל לאחר שהוחזרה מהמחסום.



ג. הוסף לתרשים חיצים המתארים את זוויות פגיעת והחזרת הגל כפי שהן מוחזרות לאור.

ד. הוסף לתרשים חיצים המתארים את זוויות פגיעת והחזרת הגל כפי שהן מוחזרות לגלי מים.

ה. הוסיפו לתרשים את חזית הגל, ברגע שבו אמצע חזית הגל נוגעת במחסום.

(14) תרגול מעבר תווך גלי מים

נתון אמבט גלים בו נע גל לפי התרשים הבא.

במרכז האמבט מוקם מחסום כך שגובה המים

בחלק הימני נמוך יותר.

מקור גלים בקצה השמאלי של האמבט מייצר גל

ישר מחזורי בתדירות 4 הרץ.

מהירות הגל במים בחלק העמוק היא 20 ס"מ לשנייה.

הגל מתקדם ועובר לתווך הימני כמתואר בתרשים.

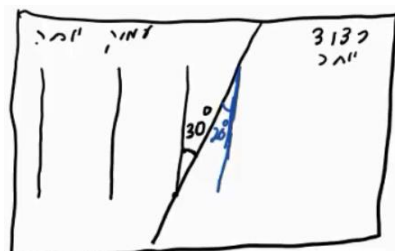
א. מה מהירות גל המים בתווך הרדוד יותר?

ב. מהו אורך הגל λ_1 בחלק העמוק?

ג. מהו אורך הגל λ_2 בחלק הרדוד?

ד. הוסיפו לתרשים (איכותית) עוד 2 אורכי גלים לאחר

מעבר גל המים לתווך הרדוד.


(15) תרגול אנרגיה ומשרעת של גל

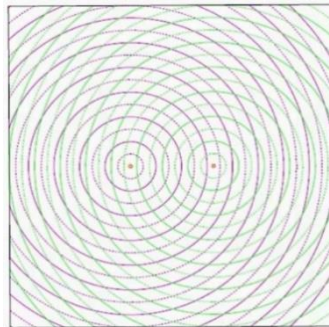
גל מעגלי מתפשט באמבט גלים. משרעתו, כשהיה מעגל ברדיוס 3cm, הייתה 1cm.

א. פי כמה תהיה קטנה האנרגיה שלו כשיתפשט לרדיוס של 15cm?

ב. מה תהיה משרעתו במצב זה?

16) התאבכות גלי מים – תרגיל 1

נתון תרשים של אמבט גלים ובו 2 מקורות בעלי אורך גל זהה ושווי מופע.
 קווים רציפים מייצגים שיא בגל וקווים מקווקוים – שפל.
 זהו את קווי המקסימום והמינימום בתרשים.


17) התאבכות גלי מים – תרגיל 2

נתון אמבט גלים בו 2 מקורות שהמרחק ביניהם 7 ס"מ.
 המקורות מכים במים במופע זהה בתדירות 20 הרץ.
 מהירות התקדמות הגלים באמבט היא 25 ס"מ לשנייה.

- א. מה אורך הגל של הגלים שיוצרים המקורות?
 ב. קבע, לגבי כל אחת מהנקודות הבאות: A, B, C, D בתרשים, האם היא על קו מקסימום, על קו מינימום או נק' ביניים:
- i. A - מרחקה מהמקור הראשון - 4 ס"מ ומהמקור השני - 2.8 ס"מ.
 - ii. B - מרחקה מהמקור הראשון - 5 ס"מ ומהמקור השני - 3.2 ס"מ.
 - iii. C - מרחקה מהמקור הראשון - 7 ס"מ ומהמקור השני - 3.4 ס"מ.
 - iv. D - מרחקה מהמקור הראשון - 8 ס"מ ומהמקור השני - 6.5 ס"מ.
- ג. כמה קווי מקסימום וכמה קווי מינימום יופיעו באמבט?

18) שאלה 1 בהתאבכות גלי מים

שני מקורות גל זהים A ו-B נמצאים בנקודות $(0,0)$ ו- $(6,0)$. המקורות משדרים באורך גל של 1cm לכל הכיוונים. על ציר y מתקבלת התאבכות בונה בנקודות הבאות (המספרים בס"מ):

- א. $(0,1.1)$ $(0,2.5)$ $(0,4.5)$ $(0,8)$ $(0,17.5)$.
- ב. $(0,1)$ $(0,2)$ $(0,4)$ $(0,8)$ $(0,16)$ $(0,32)$.
- ג. $(0,6)$ $(0,12)$ $(0,18)$ $(0,24)$ $(0,30)$.
- ד. $(4,4.5)$ $(4,8)$ $(4,17.5)$ $(3,2)$.
- ה. $(0,4.2)$ $(0,8.7)$ $(0,16.5)$ $(0,0)$.
- ו. $(0,4.5)$ $(0,8)$ $(0,17.5)$.

(19) שאלה 2 בהתאבכות גלי מים

שני מקורות גל זהים ושווי מופע ממוקמים בנקודות $(0,0)$ ו- $(5,0)$ (הערכים בס"מ). אורך הגל של כל אחד מהם 2 ס"מ. היכן על ציר y תתקבל התאבכות בונה מסדר ראשון? (הערכים בס"מ).

- א. $(5, 2.5)$.
- ב. $(0, 5.25)$.
- ג. $(0, 6)$.
- ד. $(0, 2.5)$.
- ה. $(0, -5.25)$.

(20) שאלה 3 בהתאבכות גלי מים

שני מקורות גל זהים A ו-B נמצאים בנקודות $(0,5)$ ו- $(0,-5)$. בנקודה $(10,10)$ מתקבלת התאבכות בונה מסדר ראשון (כל המספרים נתונים בס"מ) אורך הגל הוא בקירוב:

- א. 8.5 ס"מ.
- ב. 5 ס"מ.
- ג. 7.3 ס"מ.
- ד. 15 ס"מ.
- ה. 6.8 ס"מ.

(21) שאלה 4 בהתאבכות גלי מים

באמבט גלים ממקמים שני מתנדים בשתי נקודות $(4,2)$ ו- $(7,6)$. המתנדים רוטטים בתדירות זהה ובאותו מופע. בנקודה $(10,10)$ מתקבלת התאבכות בונה מסדר שלישי. מהו אורך הגל? (הגדלים המספריים במטרים).

- א. 1.67m.
- ב. 0.62m.
- ג. 2.79m.
- ד. 6.83m.
- ה. 1.23m.

(22) התאבכות אור תרגיל 1

מאירים בלייזר בעל אורך גל 500 ננומטר לוחית בעלת 2 סדקים בעלי $d = 0.2\text{mm}$. במרחק $L = 3\text{m}$ נמצא מסך.

- מהו רוחב פס אור כל עוד אנחנו בזווית קטנות?
- מהו מרחקו ממרכז התבנית של מרכז פס האור מסדר רביעי?
- מהו מרחקו ממרכז תבנית ההתאבכות של קו החושך מסדר שביעי?
- מה מרחקו ממרכז תבנית ההתאבכות של מרכז פס האור מסדר 200?

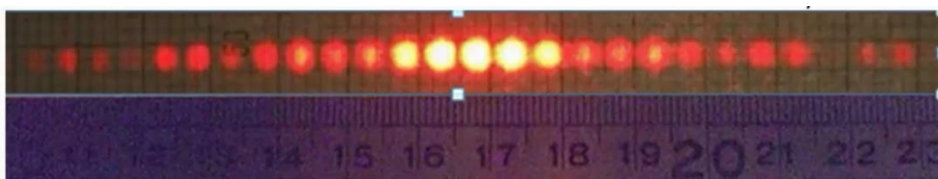
(23) התאבכות אור תרגיל 2

מאירים בלייזר ירוק בעל אורך גל לא ידוע על לוחית ובה 2 סדקים שהמרחק ביניהם 0.15 מ"מ. מניחים מסך שאורכו $h = 1\text{m}$ במרחק 3 מטר מהלוחית כך שמרכז המסך בדיוק מול הסדקים. הזווית למקסימום מסדר חמישי נמדדת ושווה ל-1 מעלה.

- מה אורך הגל של הלייזר?
- מה מרחקו של המינימום מסדר חמישי ממרכז המסך?
- כמה קווי חושך התקבלו על המסך?
- אם נחליף המסך במסך ארוך מאוד שיונח באותו מיקום, כמה פסי אור ייווצרו על המסך?

(24) התאבכות אור תרגיל 3

לוקחים לייזר אדום בעל אורך גל לא ידוע ומציבים לפניו לוחית בעלת 2 סדקים שהמרחק ביניהם 0.25 מ"מ. ממקמים מסך במרחק 1.8 מטר מהלוחית. על המסך מתקבלת תבנית ההתאבכות הבאה, לצד סרגל שהודבק למסך מראש.



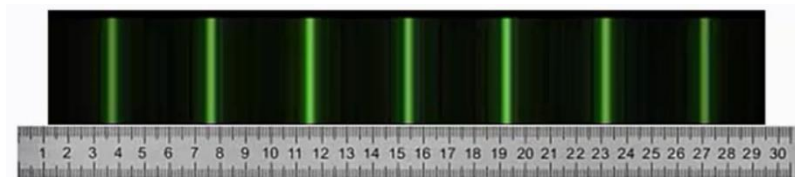
- מצא את אורך הגל של הלייזר בדרך המדויקת ביותר.
- איזה מהנקודות בצילום הינה נקודת המקסימום המרכזי?
- לאיזה נקודה בצילום מגיע אור שמרחקו מאחד הסדקים גדול ב-3 אורכי גל מאשר מרחקו מהסדק השני?
- לאיזה נקודה על המסך מגיע אור שמרחקו מאחד הסדקים גדול ב-4.5 אורכי גל מאשר מרחקו מהסדק השני?
- מהן 3 הדרכים אשר ניתן לצופף בהן את תבנית ההתאבכות?

(25) התאבכות אור בסריג – תרגיל 4

- מאירים בלייזר בעל אורך גל לא ידוע על סריג בעל קבוע של 100 חריצים למ"מ. מציבים מסך במרחק 1 מטר מהסריג כך שמרכזו מול מרכז הסריג ומול קרן הלייזר. אורך המסך 4 מטר.
- מיקומו של קו המקסימום הראשון נמדד ושווה ל-6.5 ס"מ ממרכז המסך.
- מהו אורך הגל של הלייזר?
 - מה מיקומו של קו המקסימום מסדר שני?
 - מה מיקומו של קו המקסימום מסדר חמישי?
 - כמה קווי מקסימום יתקבלו על המסך?
 - בהנחה שמחליפים מסך זה במסך ארוך מאוד באותו המיקום, כמה קווי מקסימום יתקבלו עליו?

(26) התאבכות אור בסריג – תרגיל 5

- מאירים בלייזר ירוק בעל אורך גל 550 ננומטר על סריג בעל קבוע לא ידוע, ומציבים מסך במרחק 2.5 מטר מהסריג.
- על המסך שעליו מודבק סרגל מתקבלת התמונה הבאה:



- מצאו את קבוע הסריג בדרך המדויקת ביותר.
- באיזה זווית ביחס לאנך האמצעי יתקבל קו המקסימום מסדר 20?
- מה יקרה לתבנית ההתאבכות אם נחליף את הלייזר הירוק בלייזר כחול?

(27) התאבכות אור בסריג – תרגיל 6

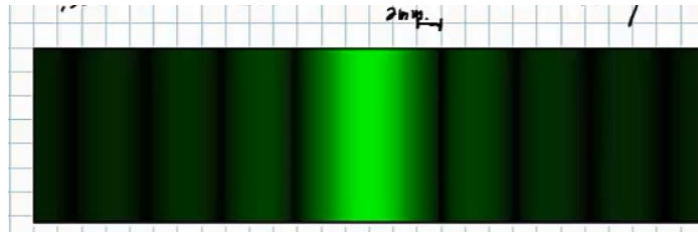
- אור לבן פוגע בסריג עקיפה בעל קבוע 300 חריצים למ"מ. מסך ארוך מונח במרחק 2 מטר מהסריג.
- מה רוחב הפס הצבעוני מסדר ראשון?
 - מה הזווית שנפתחת בין המקסימום האדום מסדר שני, והסגול מסדר שני?
 - הוכח שקיימת חפיפה בצבעים בין הסדר השני לסדר השלישי.

(28) עקיפה מסדק יחיד – תרגיל 1

- תלמיד מאיר בלייזר אדום בעל אורך גל 670 ננומטר סדק שרוחבו 0.3 מ"מ. תבנית עקיפה מתקבלת על מסך במרחק 1.5 מטר.
- מה רוחבו של המקסימום המרכזי?
 - מה רוחבו של מקסימום משני, מסדר נמוך?

29) עקיפה מסדק יחיד – תרגיל 2

לוקחים לייזר ירוק בעל אורך גל 530 ננומטר. מציבים אותו לפני סדק בעל רוחב לא ידוע, ועל מסך משבצות במרחק 3 מטר מהסדק מתקבלת תבנית ההתאבכות הבאה:

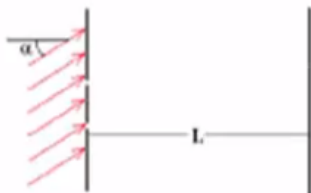


נתון שרוחב משבצת על הלוח הוא 2 מ"מ.

- א. מה רוחב הסדק?
- ב. כמה קווי צומת יתקבלו על מסך ארוך מאוד?
- ג. מה יקרה לתבנית ההתאבכות אם נגדיל את רוחב הסדק?

30) שאלה בהתאבכות גלי אור

דרך משטח מישורי עם שני סדקים צרים מאוד מעבירים גל מישורי בעל אורך גל λ המתקדם בכיוון היוצר זווית קטנה α עם האנך למשטח (ראו ציור).



המרחק בין הסדקים הוא d כאשר $d \gg \lambda$. מודדים את העוצמה במרכז לוח מישורי הנמצא במרחק $L \gg d$ מהמשטח עם הסדקים, כלומר בנקודה הנמצאת מול נקודת האמצע בין שני הסדקים. העוצמה הנמדדת היא 0.

מהי הזווית הקטנה ביותר α המסבירה מדידה זו?

- א. $\alpha = 0$.
- ב. $\alpha = \frac{\lambda}{2d}$.
- ג. $\alpha = \frac{2\lambda}{\pi d}$.
- ד. $\alpha = \frac{2\lambda}{d}$.
- ה. $\alpha = \frac{2\pi\lambda}{d}$.
- ו. $\alpha = \frac{\lambda}{\pi d}$.

(31) שאלה 2 בהתאבכות גלי אור

שני גלים אלקטרומגנטיים העוברים כל אחד דרך סדק צר יוצרים תבנית התאבכות

על פני מסך רחוק. הגל העובר דרך הסדק הראשון מתואר ע"י: $\vec{E}_1 = A_1 \cdot e^{i(kz - \omega t)} \hat{x}$

הגל העובר דרך הסדק השני מתואר ע"י: $\vec{E}_2 = A_1 \cdot e^{i(kz - \omega t)} (-\hat{y})$

היחס בין העוצמה המקסימלית לעוצמה המינימלית הוא:

א. $\sqrt{2}:1$

ב. $1:0$

ג. $1:1$

ד. $2:1$

ה. $4:1$

ו. $3:2$

(32) שאלה 1 – גלי קול

אם נניח, כי עוצמת סף השמע היא: $10^{-16} \frac{W}{cm^2}$

מהי העוצמה ביחידות הנ"ל בסף הכאב 140dB (כלומר, כמה $\frac{W}{cm^2}$ יש ב-140dB)?

א. $14 \cdot 10^{-16} \frac{W}{cm^2}$

ב. $10^{-14} \frac{W}{cm^2}$

ג. $140 \frac{W}{cm^2}$

ד. $10^4 \frac{W}{cm^2}$

ה. $10^{-2} \frac{W}{cm^2}$

(33) שאלה 2 – גלי קול

פי כמה גדולה עוצמת קול של 100 דציבל מעוצמת קול של 10 דציבל?

א. פי 10

ב. פי 100

ג. פי 1,000

ד. פי 10,000

ה. פי 1,000,000

ו. פי 1,000,000,000.

ז. פי 10,000,000,000.

34) שאלה 3 – גלי קול

אם עוצמת הקול המינימאלית שבני אדם מסוגלים לשמוע (סף השמע)

היא: $10^{-16} \frac{W}{cm^2}$, מהי עוצמת הקול באותן יחידות ב-130 דציבל (סף הכאב),

וכמה אנרגיה פוגעת בעור התוף החשוף לעוצמה הזו (130dB) במשך שעה? נתון ששטחו של עור התוף כ-0.7 סמ"ר.

א. העוצמה: $10^{-13} \frac{W}{cm^2}$, וסה"כ אנרגיה בשעה: 5.3J.

ב. העוצמה: $10^{-3} \frac{W}{cm^2}$, וסה"כ אנרגיה בשעה: 5.3J.

ג. העוצמה: $130 \frac{W}{cm^2}$, וסה"כ אנרגיה בשעה: 75J.

ד. העוצמה: $1.3 \cdot 10^{-3} \frac{W}{cm^2}$, וסה"כ אנרגיה בשעה: 2.52J.

ה. העוצמה: $0.001 \frac{W}{cm^2}$, וסה"כ אנרגיה בשעה: 2.52J.

35) שאלה 4 – גלי קול

אם נניח כי עוצמת סף השמע היא: $10^{-16} \frac{W}{cm^2}$ ($\frac{W}{cm^2}$ = ווט לסמ"ר),

מהי העוצמה I ביחידות הנ"ל ב-120dB, וכמה אנרגיה E פוגעת בעור התוף של אוזנו של אדם, החשוף לעוצמת קול זו במשך 4 שעות? הניחו ששטחו של עור התוף 0.7 סמ"ר.

א. $E = 5.8 \text{ Joule}$ ו- $I = 12 \cdot 10^{-16} \frac{W}{cm^2}$.

ב. $E = 5.8 \text{ Joule}$ ו- $I = 13 \cdot 10^{-14} \frac{W}{cm^2}$.

ג. $E = 1.01 \text{ Joule}$ ו- $I = 10^{-4} \frac{W}{cm^2}$.

ד. $E = 10.1 \text{ Joule}$ ו- $I = 10^{-4} \frac{W}{cm^2}$.

ה. $E = 1.2 \cdot 10^6 \text{ Joule}$ ו- $I = 120 \frac{W}{cm^2}$.

(36) שאלה 5 – גלי קול

כאשר אדם נחשף לקול בעוצמה של 20 דציבל בפרק זמן של שעה, כמות האנרגיה הכוללת המגיעה לעור התוף של אוזנו היא: $2.5 \cdot 10^{-11} \text{ Joule}$.
מהי כמות האנרגיה הכוללת המגיעה לעור התוף כאשר האוזן נחשפת לקול בעוצמה של 120 דציבל למשך זמן של 20 דקות?

- א. 0.08 Joule .
- ב. 0.75 Joule .
- ג. 25 Joule .
- ד. $2.5 \cdot 10^{-5} \text{ Joule}$.
- ה. $5 \cdot 10^{-11} \text{ Joule}$.

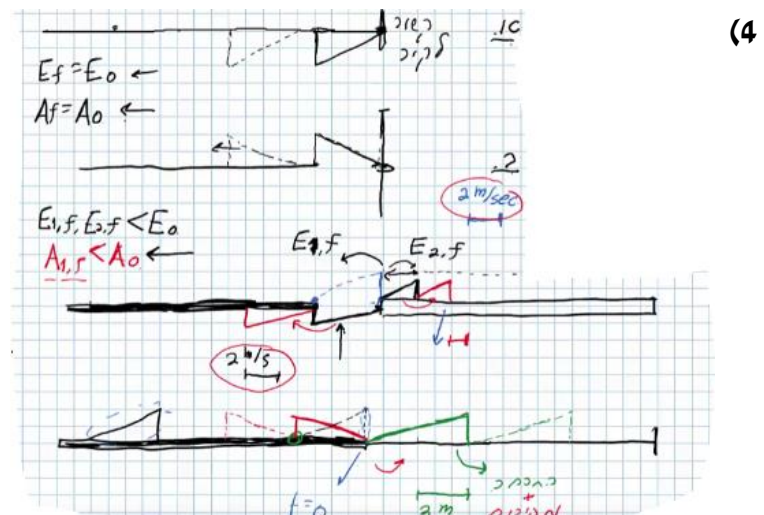
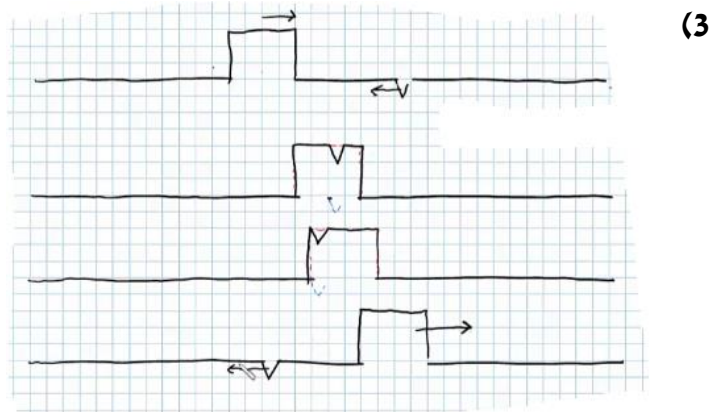
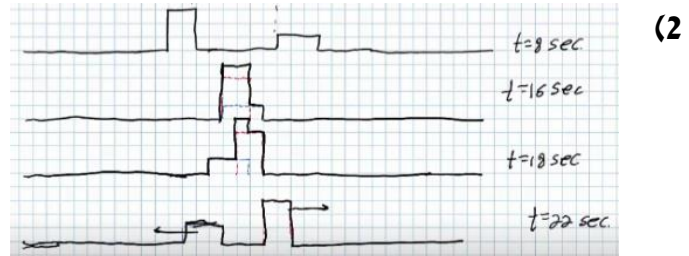
(37) שאלה 6 – גלי קול

כאשר אדם נחשף לקול בעוצמה של 20 דציבל בפרק זמן של שעה, כמות האנרגיה הכוללת המגיעה לעור התוף של אוזנו היא: $2.5 \cdot 10^{-11} \text{ Joule}$.
מהי כמות האנרגיה הכוללת המגיעה לעור התוף כאשר האוזן נחשפת לקול בעוצמה של 120 דציבל למשך זמן של 30 דקות?

- א. 0.125 Joule .
- ב. 1.130 Joule .
- ג. 37.52 Joule .
- ד. $3.8 \cdot 10^{-5} \text{ Joule}$.
- ה. $7.5 \cdot 10^{-11} \text{ Joule}$.

תשובות סופיות:

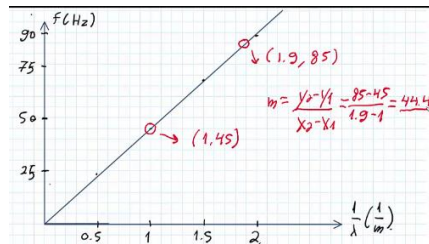
- (1) א. $A = 0.3 \text{ m}$ ב. $V = 0.2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ג. למעלה. ד. למטה.



(5) א.

$\frac{1}{\lambda} (\text{m}^{-1})$	$\lambda (\text{m})$	צורת הגל העומד	f - תדירות התנודות (Hz)
0.5	2		24
1	1		45
1.5	2/3		67
2	1/2		88

א. $f = 111 \text{ Hz}$ ב. $f = v \frac{1}{\lambda}$



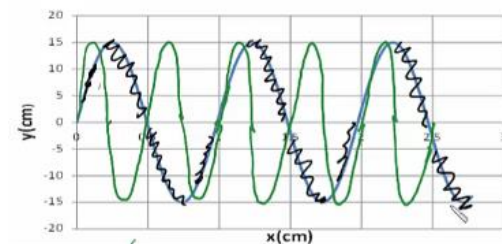
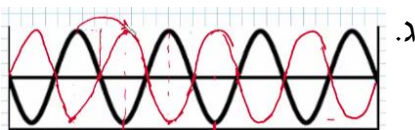
ב.

א. $v = 25 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$

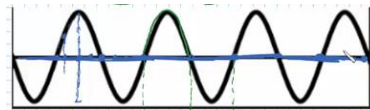
ב. $\lambda = 1 \text{ m}$ ג. $t = 4$ ד. $A = 0.15 \text{ m}$ (6)

ה. $(0.5, 0)$, $(1.5, 0)$, $(2.5, 0)$

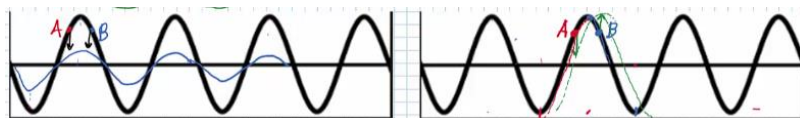
(7) הגל הירוק בשרטוט:

(8) א. מתקדם: $\lambda_1 = 80 \text{ cm}$, עומד: $\lambda_2 = 80 \text{ cm}$.

ג.



ב.



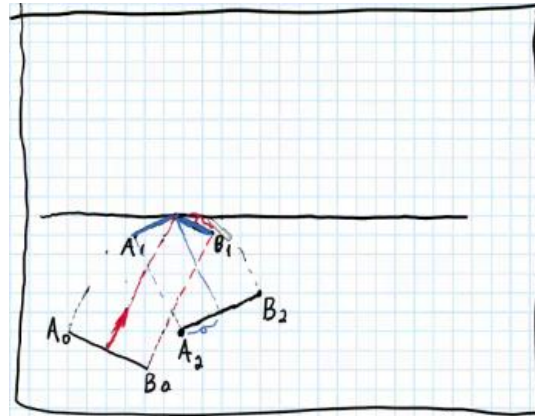
ד.

(9) א.

(10) ב.

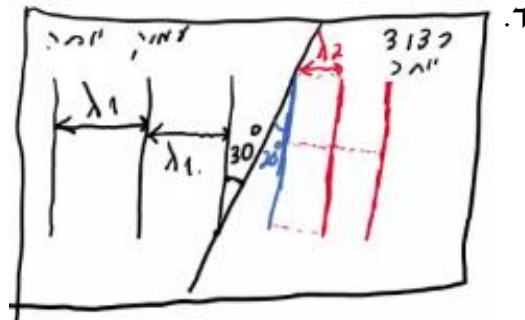
(11) ג.

(12) ד.



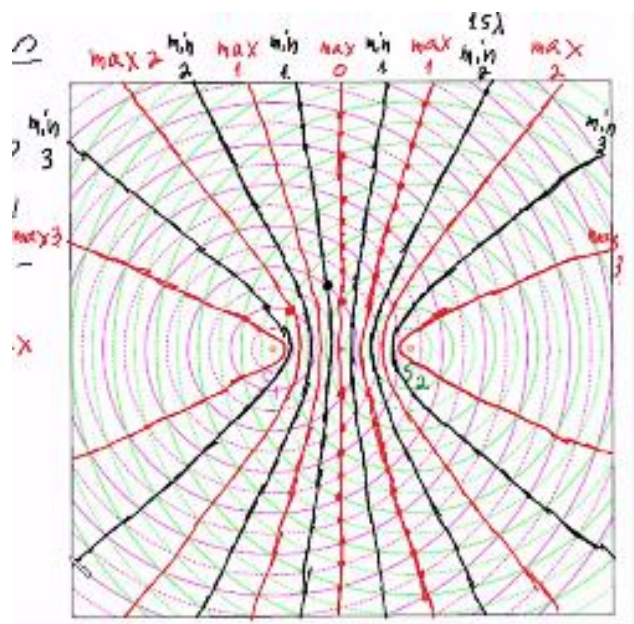
(13)

(14) א. $v_2 = 13.7 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ ב. $\lambda_1 = 5 \text{ cm}$ ג. $\lambda_2 = 3.42 \text{ cm}$



ד.

(15) א. 5 ב. 0.45 cm



(16)

(17) א. 1.2 ס"מ.

ב.i. A - נק' מקסימום מסדר ראשון.

B. ii - נק' צומת מסדר שני.

C. iii - נק' מקסימום מסדר שלישי, נק' על קו מקסימום.

D. iv - נק' ביניים.

ג. 11 קווי מקסימום, 12 קווי מינימום.

(18) א' מלאה ו-ו' חלקית.

(19) ב' ו-ה.

(20) ה.

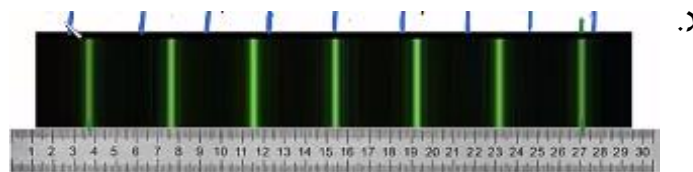
(21) א'.

(22) א. 7.5nm ב. 3 ס"מ. ג. $\theta = 0.93^\circ$ ד. $x_{200} = 1.73$

(23) א. 524 נ"מ. ב. 4.72 ס"מ. ג. 94 קווי חושך. ד. 573 פסי מקסימום.

(24) א. 5 מ"מ. ב. $\lambda = 694$ ג. 3λ ד. 4.5λ ה. ראה סרטון.

(25) א. 649 נ"מ. ב. 13 ס"מ. ג. 34.3 ס"מ. ד. 27 קווים. ה. 31 קווים.

(26) א. $282 \frac{\text{haritsim}}{\text{cm}}$ ב. 18.1° (27) א. 0.188 מ'. ב. 10.9° ג. הוכחה.

(28) א. 6.7 מ"מ. ב. 3.35 מ"מ.

(29) א. 0.265 מ"מ. ב. 1,000 קווי צומת בתבנית.

ג. האור ינוע בקווים ישרים ולא מבצע עקיפה.

(30) ב'.

(31) ג'.

(32) ה.

(33) ו'.

(34) ה.

(35) ג'.

(36) א'.

(37) א'.

פיזיקה 3

פרק 4 - תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום

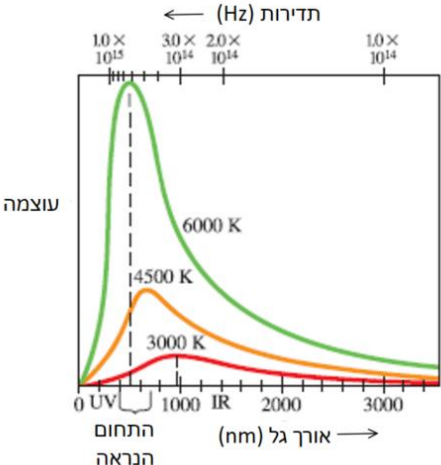
תוכן העניינים

48	1. תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום
51	2. התיאוריה הפוטנית של האור והאפקט הפוטואלקטרי
55	3. אנרגיה מסה ותנע של פוטון
56	4. אפקט קומפטון
58	5. אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות
60	6. דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר
(ללא ספר)	7. סיכום ביניים התורה הפוטונית והשלכות
62	8. מודלים מוקדמים של האטום
63	9. מודל האטום של בוהר
(ללא ספר)	10. סיכום חלק שני מודלים מוקדמים ומודל בוהר
67	11. שאלות ותרגילים נוספים

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום:

סיכום כללי:

ההנחה הקוונטית של פלאנק וקרינת גוף שחור.

		גרף של קרינת גוף שחור כתלות באורך הגל ובטמפרטורות שונות
λ_p - אורך הגל בשיא T - הטמפרטורה בקלווין	$\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} m \cdot K$	חוק ווין - Wien law
קבוע בולצמן $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$ קבוע פלאנק $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$	$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$	נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור
<u>ההנחה הקוונטית של פלאנק</u>	$E_{min} = hf$	אנרגיה מינימלית של מטען בתנועה הרמונית באטום
המספר הקוונטי $n = 1, 2, 3, \dots$	$E = nhf$	אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי

שאלות:

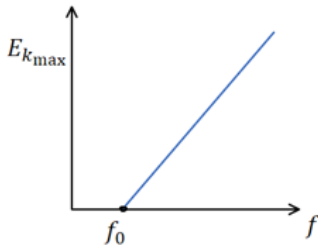
- (1) **דוגמה - טמפרטורת השמש**
הראו באמצעות חוק ווין כי הטמפרטורה על פני השמש היא באמת 6,000K אם ידוע שאורך הגל של האור הנראה הוא בערך 500nm.
- (2) **דוגמה - טמפרטורת כוכב**
טלסקופ גדול בחלל מזהה כוכב חדש. הקרינה שפולט הכוכב נקלטת בטלסקופ כאשר השיא של הקרינה הוא באורך גל של 90nm. מהי הטמפרטורה על פני הכוכב?
- (3) **טמפרטורה של מתכת**
מה הטמפרטורה של מתכת בשלב הריתוך אם שיא פליטת האור שלה באורך גל של 460nm.
- (4) **הפרש אנרגיות של מולקולה רוטטת**
מולקולת HCl רוטטת בתדירות של: $8.1 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$. חשבו את ההפרש בין שני ערכים צמודים של האנרגיות האפשריות לפי ההנחה הקוונטית של פלאנק לערכי האנרגיה באוסילציות. תנו תשובה בג'אול ובאלקטרון וולט.
- (5) **חוק ווין וקבוע פלאנק מנוסחת הקרינה**
נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור היא: $I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$.
א. * הראו, ללא שימוש בחוק ווין, כי קבוע $\lambda_p T$, לעזרתכם פתרון המשוואה: $5e^{-x} = 5 - x$: $x = 4.966$.
ב. השתמשו בחוק ווין וחשבו את קבוע פלאנק.
ג. ** הראו כי הקרינה הנפלטת מגוף שחור פרופורציונית לטמפרטורה ברביעית - חוק סטפן - בולצמן.
הדרכה: בשביל לחשב את הקרינה הכוללת הנפלטת יש לעשות אינטגרציה על כל אורכי הגל, אין צורך לפתור את האינטגרל עד הסוף.

תשובות סופיות:

- (1) הוכחה.
- (2) 32,000K
- (3) 6,300K
- (4) $5.4 \cdot 10^{-20} \text{ J}$, 0.34eU
- (5) הוכחה.

התיאוריה הפוטונית של האור והאפקט הפוטואלקטרי:

סיכום כללי:

אנרגיה של פוטון יחיד	$E = hf$	f - תדירות האור
<u>הניסוי הפוטואלקטרי</u>		
תדירות סף	$hf_0 = W_0$	W_0 - פונקציית העבודה של המתכת
אנרגיה קינטית מקסימאלית של האלקטרונים	$E_k = hf - W_0$	
מתח עצירה	$eV_0 = E_k$	
השוואה לתורה הגלית	<u>לפי התורה הפוטונית</u> 1. עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא לאנרגיה של כל אחד מהם. הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלק' הנפלטים אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם. 2. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות. 3. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.	<u>לפי התורה הגלית - אלקטרומגנטית</u> 1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים. 2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

שאלות:

- (1) **דוגמה - חישוב אנרגיית פוטון באור כחול**
חשבו את האנרגיה של פוטון באור כחול: $\lambda = 450\text{nm}$ באוויר (או וואקום).
- (2) **דוגמה - הערכה של מספר פוטונים מנורה**
נסו להעריך כמה פוטונים פולטת נורה בהספק 100W כל שניה.
הניחו שהנצילות של הנורה היא בערך 3% (כלומר רק 3% מהאנרגיה המושקעת בנורה כל שניה מנוצלת להפקה של אור). האור שיוצא מנורה לבנה הוא בכל אורכי הגל, ניתן לקחת לצורך ההערכה את אורך הגל באמצע הספקטרום של האור הנראה: $\lambda \approx 500\text{nm}$.
- (3) **דוגמה - חישוב אנרגיה של אלקטרונים נפלטים**
מהי האנרגיה הקינטית המקסימאלית ומהי המהירות המקסימאלית של אלקטרונים הנפלטים מחומר שפונקציית העבודה שלו היא: $W_0 = 2.8\text{eV}$
אם אורך הגל של האור הפוגע במשטח הוא:
א. $\lambda = 400\text{nm}$
ב. $\lambda = 600\text{nm}$
- (4) **עקיפה של קרינת גמא**
לפוטון בקרינת גמא יש אנרגיה של 380keV .
א. מהו אורך הגל של הקרינה?
ב. האם לדעתך הקרינה עושה עקיפה דרך פתחים טיפוסיים שאנחנו נתקלים ביום יום כמו פתח של דלת?
- (5) **איזו מתכת לא תפלוט אלקטרונים**
פונקציות העבודה של סודיום, צסיום, נחושת וברזל הן: $2.3, 2.1, 4.7$ ו- 4.5 אלקטרון וולט בהתאמה. אלו מהמתכות לא תפלוט אלקטרונים כאשר פוגע בה אור מהתחום הנראה?
- (6) **פונקציית עבודה ומתח עצירה**
בניסוי של האפקט הפוטואלקטרי נצפה כי לא זורם זרם כאשר אורך גל של האור הוא מעל ל- 540nm .
א. מהי פונקציית העבודה של המתכת?
ב. מהו מתח העצירה הדרושה אם מקרינים באור באורך גל של 450nm ?

(7) ניסוי פוטואלקטרי

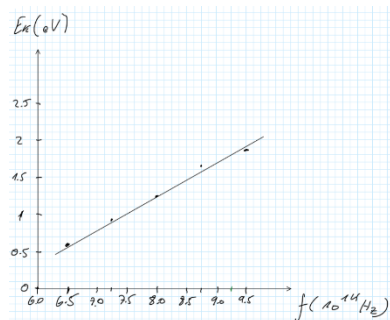
בניסוי פוטואלקטרי הקרינו אור בתדירויות שונות ומדדו את מתח העצירה. התוצאות של הניסוי מוצגות בטבלה הבאה:

$f(10^{14}\text{Hz})$	$V(V)$
6.50	0.6
7.25	0.91
8.00	1.23
8.75	1.54
9.50	1.85

- מצאו את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים בפליטה ושרטטו גרף של אנרגיה זו כתלות בתדירות. השתמשו בנייר משבצות ורשמו נתונים בצורה מדויקת.
- חשבו מתוך הגרף את קבוע פלאנק.
- חשבו את פונקציית העבודה ותדירות הסף של המתכת.

תשובות סופיות:

- (1) 2.8eV
- (2) $8 \cdot 10^{18}$ פוטונים.
- (3) א. $3.2 \cdot 10^2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ב. לא תהיה פליטה של אלקטרונים.
- (4) א. $3.3 \cdot 10^{-3} \text{nm}$ ב. לא.
- (5) נחשת וברזל.
- (6) א. 2.3eV ב. 0.46V
- (7) א.
- ב. הוכחה.



$E_k = \text{eV}$
0.6eV
0.91eV
1.23eV
1.54eV
1.85eV

ג. $W_0 = 2.42\text{eV}$, $f = 5.84 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:

סיכום כללי:

אנרגיה של פוטון יחיד	$E = hf$	f -תדירות האור
תנע של פוטון	$p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$	
מסת מנוחה של פוטון	$m = 0$	

שאלות:

- (1) דוגמה - כוח שמפעילה נורה על נייר שחור
בדוגמה "הערכה של מספר הפוטונים מנורה" חישבנו את מספר הפוטונים שיוצאים מנורה של 100W כל שניה (בערך 10^{19}). נניח כי כל הפוטונים האלו פוגעים בנייר שחור (ולא מוחזרים) חשבו את:
א. התנע של פוטון יחיד.
ב. הכוח שמפועל על הנייר.

- (2) דוגמה - יעילות של תהליך פוטוסינתזי
בתהליך פוטוסינתזי פיגמנטים בצמח כמו כלורופיל סופגים אור שמש ובאמצעותו הופכים פחמן דו חמצני (CO_2) לפחמימות (וחמצן שנפלט).
בשביל להפוך מולקולה אחת של CO_2 לפחממה הצמח משתמש ב-9 פוטונים. כלורופיל סופג אור בעיקר באורך גל של 670nm. אם ידוע שהאנרגיה המשתחררת בפירוק פחממה היא: $4.9 \frac{eV}{molecule}$, מה היעילות (או נצילות) של התהליך הפוטוסינתזי?

תשובות סופיות:

- (1) א. $1.3 \cdot 10^{-27} \frac{kg \cdot m}{sec}$ ב. $10^{-8} N$
(2) 29%

אפקט קומפטון:

סיכום כללי:

λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת $\frac{h}{m_e c}$ - אורך גל של האלקטרון החופשי	$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$	הסחת קומפטון
--	--	--------------

שאלות:

(1) דוגמה - פיזור בכמה זוויות

קרני X באורך גל 0.162nm מפוזרות מסרט פחמן דק. מה יהיו אורכי הגל של הקרניים המפוזרות בזוויות?

- א. 0°
 ב. 90°
 ג. 180°

(2) הסחה יחסית מקסימאלית

בפיזור קומפטון, מצאו את זווית הפיזור עבורה ההסחה (שינוי באורך הגל) היא מקסימאלית. מהי ההסחה היחסית המקסימאלית $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ עבור פוטון באורך גל: $\lambda = 500\text{nm}$ מהתחום הנראה ועבור פוטון באורך גל: $\lambda = 0.1\text{nm}$ מתחום קרינת X.

(3) פיזור רב פעמי

קרני גמא שנוצרות קרוב למרכז השמש עוברות הרבה פיזורים בזוויות קטנות עד שהן מאבדות מספיק אנרגיה והופכות לקרניים בתחום הנראה. הניחו שלפוטון בקרן גמא יש אנרגיה של 1.0MeV והפוטון עובר סדרה של התנגשויות בזוויות של 0.5° בכל התנגשות. כמה התנגשויות צריך הפוטון לעבור בשביל שאורך הגל שלו ישתנה ל-555nm.

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.162nm ב. 0.164nm ג. 0.167
- (2) א. $\theta = \pi$ ב. 0.00097% ג. 4.9%
- (3) $6 \cdot 10^9$ התנגשויות.

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:

סיכום כללי:

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען
2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש להוסיף אנרגיית מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .
3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף (בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.
4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

שאלות:

- (1) **דוגמה - אנרגיה מינימלית ליצירת זוגות**
מצאו מהי האנרגיה המינימלית (ב-eV) ליצירת זוג אלקטרון פוזיטרון? מה אורך הגל של הפוטון במקרה זה?
- (2) **חישוב אנרגיה קינטית ביצירת זוג**
חשבו כמה אנרגיה קינטית כוללת תהיה ביצירת זוג של אלקטרון פוזיטרון מתוך פוטון בעל אנרגיה של: 2.8 MeV.
- (3) **אורך גל מקסימאלי ליצירת זוג**
מהו אורך הגל המקסימאלי של פוטון היכול לייצר זוג של פרוטון ואנטי פרוטון (כל אחד במסה של: $1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$).
- (4) **אלקטרון ופוזיטרון מייצרים שני פוטונים**
אלקטרון ופוזיטרון נעים אחד כלפי השני במהירות: $10^5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ כל אחד. הם מתנגשים, נעלמים ויוצרים שני פוטונים שנעים בכיוונים מנוגדים. מהן האנרגיה והתנע של כל פוטון?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad 1.02\text{MeV} \text{ ו- } 1.2\text{pm}.$$

$$(2) \quad 1.78\text{MeV}.$$

$$(3) \quad 6.63 \cdot 10^{-16} \text{ m}.$$

$$(4) \quad p = 0.51 \frac{\text{MeV}}{c}, \quad E = 0.51\text{MeV}.$$

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

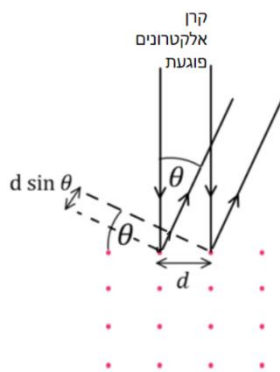
סיכום כללי:

$p = mv$ או $p = mv\gamma$	לא יחסותי או יחסותי	$\lambda = \frac{h}{p}$	אורך גל דה ברולי של חלקיק
----------------------------------	---------------------------	-------------------------	------------------------------

שאלות:

(1) דוגמה - אורך גל של כדורסל
חשבו את אורך גל דה ברולי של כדורסל השוקל חצי קילוגרם ונזרק במהירות של 10 מטר לשנייה.

(2) דוגמה - אורך גל של אלקטרון ב-100 וולט
חשבו את אורך הגל של אלקטרון המואץ תחת הפרש פוטנציאלים של 100V.



(3) דוגמה - עקיפה של אלקטרונים
מקרינים קרן אלקטרונים בניצב למשטח של חומר מוצק. האטומים בחומר מסודרים בצורת סריג ריבועי כאשר המרווח בין האטומים לא ידוע ומסומן ב- d , ראו איור. מצאו את המרחק d אם האנרגיה הקינטית של האלקטרונים היא: $E_k = 80\text{eV}$ והזווית בה מתרחשת התאבכות בונה בפעם הראשונה היא 22° . הניחו שהאנרגיה של האלקטרונים נמוכה וכי האלקטרונים עושים אינטראקציה רק עם השכבה החיצונית של החומר.

(4) כמה מתח לאורך גל
באיזה מתח צריך להאיץ אלקטרון כך שהוא יגיע לאורך גל של 0.6nm.

(5) אנרגיה ותנע מאורך גל
לאלקטרון אורך גל דה ברולי של: $\lambda = 3.2 \cdot 10^{-10}\text{m}$.
א. מהו התנע שלו?
ב. מהי מהירותו? האם היא יחסותית? רמת דיוק של 1% בגאמה.
ג. איזה מתח נדרש כדי להאיץ אותו למהירות כזו?

(6) רזולוציה של מיקרוסקופ אלקטרוני

מהו הגבול התיאורטי של הרזולוציה של מיקרוסקופ אלקטרוני שבו האלקטרונים מואצים במתח של 80 kV . יש להשתמש בנוסחאות יחסיות.

(7) אנרגיה יחסית

אלקטרון בשפופרת טלויזיה (של פעם) מואץ במתח של 33 keV .

א. האם האנרגיה של האלקטרון יחסית? לפי רמת דיוק של אחוז אחד בגמא.

ב. חשבו את אורך הגל של האלקטרון. האם צריך לדאוג מתופעות עקיפה?

גודל פתח השפופרת הוא 5 cm .

תשובות סופיות:

(1) $1.3 \cdot 10^{-34}\text{ m}$

(2) $1.2 \cdot 10^{-10}\text{ m}$

(3) 3 A

(4) 4.17 V

(5) א. $2.1 \cdot 10^{-24}\text{ kg} \cdot \text{sec}$. ב. $2.3 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, לא יחסית. ג. 15 V

(6) $4.2 \cdot 10^{-12}\text{ m}$

(7) א. כן. ב. $6.6 \cdot 10^{-12}\text{ m}$, אין צורך.

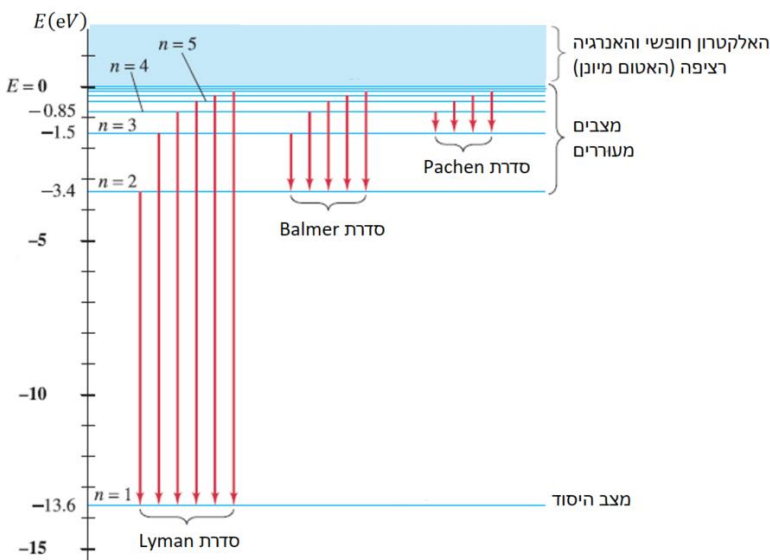
מודלים מוקדמים של האטום:

סיכום כללי:

קבוע Rydberg $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	נוסחה לאורכי הגל הנפלטים מאטום המימן $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	
1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד. 2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.		בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד

מודל האטום של בוהר:

סיכום כללי:

1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים / רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים אורביטלים .		הנחות המודל
2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים stationary states אלו הם נקראים מצבים יציבים		אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים
$n=1,2,3\ldots$	$hf = E_U - E_L$ $L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$	הנחה על התנע הזוויתי
Z - מספר הפוטונים $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$	$r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$	הרדיוסים האפשריים
	$E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6eV}{n^2}$	האנרגיה של האלקטרון הנמצא במסלול ה- n
		טבלה של רמות האנרגיה באטום המימן

שאלות:

- (1) **דוגמה - אורך הגל של הקו הראשון של Paschen**
 השתמשו בטבלה שהוצגה בסרטון "קווי הספקטרום ממודל בוהר" ומצאו את אורך הגל של קו הספקטרום הראשון בסדרת Paschen. באיזה תחום של אורכי גל נמצא קו זה? (IR, UV או אור נראה).
- (2) **דוגמה - אורך גל מקסימלי בבליעה**
 גז מימן נמצא בשפופרת בלחץ נמוך ובטמפרטורת החדר (האלקטרונים במצב היסוד). מקרינים את הגז בקרינה עם ספקטרום רציף של אורכי גל. מהו אורך הגל הכי גבוה בספקטרום הבליעה ומהו אורך הגל אחריו? השתמשו בטבלה של רמות האנרגיה באטום המימן.
- (3) **דוגמה - אנרגיית יון של יון הליום**
 He^+ הוא יון של הליום המכיל שני פרוטונים ואלקטרון אחד. השתמשו במודל בוהר וחשבו את אנרגיית היינון של He^+ , כלומר, כמה אנרגיה דרושה בשביל לנתק גם את האלקטרון היחיד שנשאר. מהו אורך הגל המקסימאלי של פוטון הגורם ליינון? הניחו שהאלקטרון במצב היסוד.
- (4) **דוגמה - אנרגיה של אטומים בטמפרטורת חדר**
 לפי התיאוריה הקינטית (תיאוריה בתרמודינמיקה), האנרגיה הקינטית הממוצעת של אטום בגז (אידיאלי) היא: $\bar{E}_k = \frac{3}{2}kT$ כאשר $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$. הוא קבוע בולצמן ו-T היא הטמפרטורה בקלווין. הסבירו מדוע בטמפרטורת החדר כמעט כל האטומים צריכים להיות במצב היסוד. (טמפרטורת החדר היא בערך 20 מעלות צלזיוס והטמפרטורה בקלווין שווה לטמפרטורה בצלזיוס פלוס 273).
- (5) **השוואה בין מעברים**
 נתונים שלושה מעברים בין רמות אנרגיה של אטום המימן לפי מודל בוהר כאשר n הוא המצב ההתחלתי ו-n' הוא המצב הסופי.
 I. $n = 1 \quad n' = 3$
 II. $n = 6 \quad n' = 2$
 III. $n = 4 \quad n' = 5$
 א. קבעו אילו מן המעברים הם בליעה ואילו פליטה.
 ב. באיזה מעבר מעורב הפוטון הכי אנרגטי?

- (6) **יינון אטום מעורר**
כמה אנרגיה דרושה על מנת ליינן אטום מימן מעורר הנמצא במצב אנרגיה החמישי?
- (7) **אורך גל של הקו השני**
מצאו את אורך הגל של הקו השני בסדרת בלמר.
- (8) **מימן בולע פוטון של הליום מיונן**
בשמש ישנם יונים של הליום - He^+ . יון של ההליום פולט פוטון במעבר מרמה 5 לרמה 2. האם אטום מימן הנמצא בשמש יוכל לבלוע את הפוטון בלי לבצע יינון? אם כן בין איזה רמות אנרגיה תתבצע הבליעה?
- (9) **אנרגיית יינון של ליתיום פלוס שתיים**
חשבו את אנרגיית היינון (ממצב הייסוד) של אטום ליתיום החסר שני אלקטרונים Li^{2+} בעל $Z = 3$ לפי מודל בוהר.
- (10) **אנרגיה קינטית של אלקטרון במצב יסוד**
מהי האנרגיה הפוטנציאלית והקינטית של אלקטרון במצב היסוד של אטום המימן?
- (11) **האם אטום המימן יחסותי**
השתמשו בתוצאה של התרגיל הקודם "אנרגיה קינטית של אלקטרון במצב ייסוד" ובדקו האם יש צורך להשתמש בנוסחאות יחסותיות במודל בוהר.
- (12) **רדיוס אטום מעורר**
אטום מימן מעורר יכול להיות תיאורטית בקוטר של 0.10mm. באיזה רמת אנרגיה נמצא אטום זה? ומהי האנרגיה של מצב זה?
- (13) **אנרגיה ותנז**
מצאו את התנע הזוויתי של אלקטרון באטום המימן אם האנרגיה שלו היא -1.5eV .
- (14) **אלקטרונים פוגעים בגז מימן**
קרן אלקטרונים בעלי אנרגיה של 12.1eV פוגעת בגז מימן הנמצא בטמפרטורת החדר (רוב האטומים במצב היסוד). מהו ספקטרום הפליטה שנצפה לראות מן הגז בעקבות פגיעת הקרן?

תשובות סופיות:

- (1) 300nm בתחום העל סגול (UV).
- (2) $\lambda_{\max} = 122\text{nm}$, $\lambda_2 = 103\text{nm}$.
- (3) 22.8nm
- (4) ראה סרטון.
- (5) א. בליעה : I , פליטה : II , בליעה : III . ב. מעבר I.
- (6) 0.544eV
- (7) 490nm
- (8) לא יוכל לקלוט.
- (9) 122.4eV
- (10) $K = 13.6\text{eV}$, $U = -27.2\text{eV}$
- (11) אין צורך.
- (12) ברמה ה-972 , האנרגיה היא : $-1.4 \cdot 10^{-J} \text{eV}$.
- (13) $3.17 \cdot 10^{-34} \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$
- (14) אורכי הגל הנצפים הם : 103nm , 656nm , 122nm

שאלות ותרגילים נוספים:

שאלות:

- (1) **טמפרטורה של כוכב**
איזה כוכב נמצא בטמפרטורה גבוהה יותר, כוכב הנראה כחול, אדום או צהוב?
- (2) **גופים שחורים בחושך**
אם קרינה נפלטת מכל גוף, למה אנחנו לא רואים אותם בחושך?
- (3) **צבע אור של נורה**
האם האור של נורה בטמפרטורה של 3000K יראה לבן כמו האור של השמש הנמצאת ב-6000K?
- (4) **חדר חושך**
למה בחדרי חושך מאירים בנורה אדומה כשמפתחים תמונה של שחור לבן? האם ניתן להשתמש באור אדום גם בפיתוח של תמונה בצבע?
- (5) **תדירות סף מעדיפה תיאוריה פוטונית**
הסבירו למה העובדה שיש תדירות סף באפקט הפוטואלקטרי מסתדרת עם התורה הפוטונית ולא עם התורה הגלית של האור?
- (6) **אנרגיה של אינפרה אדום לעומת על סגול**
א. האם לפוטון יחיד של קרן בתחום העל סגול יש תמיד יותר אנרגיה מפוטון יחיד של קרן בתחום האינפרה אדום?
ב. האם לקרן בתחום העל סגול יש תמיד יותר אנרגיה מקרן בתחום האינפרה אדום?
- (7) **האם נפלטים יותר אלקטרונים באורך גל נמוך**
מקרינים מתכת באמצעות אור באורך גל מסוים ומודדים את האנרגיה של האלקטרונים הנפלטים. מחליפים את הקרן האור לקרן אחרת, באותה העוצמה אך עם אורך גל גדול יותר. בהנחה שבשני המקרים נפלטים אלקטרונים מן המתכת:
א. האם מספר האלקטרונים הנפלט גדל / קטן או נשאר ללא שינוי?
ב. האם האנרגיה של האלקטרונים גדלה / קטנה או נשארת ללא שינוי?

- (8) **אורך גל של פוטון בפיזור**
האם אורך הגל של פוטון בקרינת X המפוזר מאלקטרון גדל / קטן או לא משתנה?
- (9) **הבדל בין הפוטואלקטרי לקומפטון**
באפקט קומפטון הפגיעה של הפוטון יכולה לגרום ליציאה של אלקטרון מהמתכת, במקרה כזה מה ההבדל בינו לאפקט הפוטואלקטרי?
- (10) **איך העוצמה יורדת עם המרחק לפי כל מודל**
נניח כי ישנו מקור אור נקודתי, כיצד צריכה לרדת העוצמה של האור כתלות במרחק מהמקור לפי המודל הפוטוני וכיצד לפי המודל הגלי.
האם ניתן להבחין בין המודלים בדרך זו?
- (11) **מהם ההבדלים בין פוטון לאלקטרון**
ציינו את כל ההבדלים בין פוטון לאלקטרון.
- (12) **האם יש חמצן על כוכב**
כיצד ניתן לדעת האם יש חמצן על פני השמש או על כוכבים בכלל?
- (13) **נכונות הנוסחה של אנרגיית הפוטון**
השתמשו בשימור תנע והראו כי לפוטון הנפלט מאטום המימן יש קצת פחות אנרגיה מאשר החישוב שבנוסחה: $hf = E_U - E_L$.
- (14) **ספקטרום בליעה ופליטה בטמפרטורות שונות**
נניח שניקח את ספקטרום הפליטה של גז מימן הנמצא בטמפרטורה מאוד גבוהה כך שחלק מהאטומים נמצאים במצב מעורר ונעביר אותו דרך גז מימן הנמצא בטמפרטורה החדר (האטומים לא מעוררים) כך שתתבצע בליעה.
האם קווי הבליעה יהיו זהים לקווי הפליטה?
- (15) **אנרגיה מקסימלית להתנגשות אלסטית**
מהי האנרגיה המקסימאלית עבורה יתנגשו שני אטומי מימן הנמצאים במצב היסוד להתנגשות אלסטית?

(16) כמה פוטונים נכנסים לעין מנורה

נורה של 40W פולטת בערך 3% מהאנרגיה המושקעת בה כאור נראה באורך גל ממוצע של 550nm. האור נפלט בצורה אחידה לכל הכיוונים. העריכו כמה פוטונים פוגעים בעין של אדם הנמצא במרחק 10m מהנורה בכל שניה. קוטר האישון הוא 4.0mm.

(17) כמה פוטונים מגיעים מהשמש

עוצמת האור המגיע מן השמש היא: $I = 1350 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. חשבו כמה פוטונים למטר מרובע לשנייה יש פוגעים בפני כדור הארץ מן השמש? קחו אורך גל ממוצע של 550nm.

(18) כוח של קרן לייזר

קרן לייזר באורך גל של: $\lambda = 633\text{nm}$ פוגעת בחיישן כוח. החיישן מודד כוח של: $F = 3.0\text{nN}$. כמה פוטונים פוגעים בחיישן כל שניה אם נניח שהפוטונים אינם מוחזרים?

(19) חלקיקי אלפא מתקרבים לגרעין

בחלק מהניסויים של רתפורד הוא השתמש בחלקיקי אלפא בעלי מטען $+2e$ עם אנרגיה של 3.6MeV. כמה קרוב יכלו החלקיקים להגיע למרכז גרעין של כסף המכיל מטען של $+47e$. התעלמו מהרתע של הגרעין.

(20) פוטנציאל עצירה בניסוי פוטואלקטרי

בניסוי פוטואלקטרי מקרינים מתכת באור באורך גל 440nm ומודדים כי פוטנציאל העצירה הוא 1.2V. מה יהיה פוטנציאל העצירה אם יחליפו את האור לאורך גל של 550nm.

(21) שינוי תדירות בפוטואלקטרי

בניסוי פוטואלקטרי פוטונים באנרגיה של 9.0eV פוגעים במתכת ומתח העצירה הנמדד הוא 5.0V.
א. מה תהיה האנרגיה המקסימאלית של האלקטרונים הנפלטים אם תדירות הפוטונים תקטן לחצי מהתדירות המקורית?
ב. חזרו על סעיף א אם התדירות תקטן לשליש מהתדירות המקורית.

(22) מודל בוהר לשמש וכדור הארץ

נסו ליישם את המודל של בוהר לכדור הארץ והשמש.

א. מהם הרדיוסים ורמות האנרגיה? יש להשתמש ב:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{sec}^2 \text{kg}}, M_E = 5.97 \cdot 10^{24} \text{kg}, M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{kg}$$

ב. חשבו את רמת האנרגיה שבה נמצא כדור הארץ אם המרחק מהשמש

$$\text{הוא: } r = 1.50 \cdot 10^{11} \text{m}$$

ג. * הראו כי ההבדל בין רמות האנרגיה זניח עבור מודל זה וניתן להתייחס לאנרגיה כרציפה.

(23) כוח על פנס

פנס קטן עובד בהספק של 5W כאשר כ-3% מנוצל לאור נראה. העריכו את הכוח המופעל על הפנס אם האור יוצא בכיוון אחד.

(24) זמן ואורך פלאנק

נסתכל על שלושה קבועים בסיסיים בטבע קבוע הגרביטציה:

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{sec}}, G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}$$

$$\text{ומהירות האור: } c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

א. מצאו קומבינציה מתמטית של הקבועים האלו שתהיה ביחידות של זמן. זמן זה נקרא זמן פלאנק t_p והוא נחשב לזמן המוקדם ביותר מרגע תחילת הייקום שבו ניתן להפעיל את חוקי הפיזיקה כפי שאנחנו מבינים כיום. חשבו את זמן זה.

ב. מצאו קומבינציה מתמטית של הקבועים האלו שתהיה ביחידות של אורך. אורך זה נקרא אורך פלאנק λ_p והוא נחשב לאורך הקטן ביותר שבו ניתן להפעיל את חוקי הפיזיקה כפי שאנחנו מבינים כיום. חשבו את אורך זה.

תשובות סופיות:

- (1) כחול.
- (2) כי הקרינה הנפלטת היא לא בתחום הנראה.
- (3) לא, הוא יראה יותר צהוב אדום.
- (4) כי סרט שחור לבן לא מגיב לאור אדום, לא ניתן להשתמש באור אדום לפיתוח תמונה צבעונית.
- (5) לפי התורה הגלית האנרגיה של האור קשורה לעוצמת האור ולפי התורה הפוטונית לתדירות.
- (6) א. כן. ב. לא.
- (7) א. ללא שינוי. ב. קטנה.
- (8) גדל.
- (9) באפקט קומפטון הפוטון מפוזר באנרגיה יותר נמוכה לעומת הפוטואלקטרי שם תמיד כל הפוטון נבלע וכל האנרגיה שלו הולכת לאלקטרון.
- (10) לפי אחד חלקי המרחק בריבוע בשניהם ואי אפשר להבחין ביניהם.
- (11) משותף: תנע - לשניהם יש, דואליות גל חלקיק לשניהם (לשניהם יש אורך גל). שונה: פוטון נע רק במהירות האור, לפוטון אין מסת מנוחה, לפוטון אין מטען חשמלי.
- (12) לפי ספקטרום הפליטה.
- (13) ראה סרטון.
- (14) לא.
- (15) 10.2eV.
- (16) 10^{10} .
- (17) $3.7 \cdot 10^{21}$ פוטונים.
- (18) $2.9 \cdot 10^8$ פוטונים לשנייה.
- (19) $3.76 \cdot 10^{-14} \text{ m}$.
- (20) 0.64V.
- (21) א. 0.5eV. ב. לא תהיה פליטת אלקטרונים.
- (22) א. $r_n = 2.34 \cdot 10^{-138} \cdot n^2$, $E_n = -1.68 \cdot 10^{182} \cdot \frac{1}{n^2}$. ב. $n = 2.53 \cdot 10^{74}$.
- (23) ג. ראה סרטון. $5 \cdot 10^{-10} \text{ N}$.
- (24) א. $t_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 1.35 \cdot 10^{-43} \text{ sec}$. ב. $\lambda_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 4.05 \cdot 10^{-35} \text{ m}$.

פיזיקה 3

פרק 5 - תורת הקוונטים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים 72

הרצאות ותרגולים:

פונקציית הגל של החומר:

סיכום כללי:

- $|\psi(x)|$ היא פונקציית הגל של החומר.
- $|\psi(x)|^2$ היא צפיפות ההסתברות למצא חלקיק בנקודה מסוימת.
- ההסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא: $\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$.
- נרמול: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$.
- כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.
- מיקום ממוצע: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$.
- המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצא אותו על ידי נגזרת).
- שונות: $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ כאשר $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$.

שאלות:

(1) דוגמה – חישוב הסתברות לדעיכה אקספוננציאלית

פונקציית הגל של חלקיק היא $4e^{-8x}$ עבור $x > 0$ ואפס עבור $x < 0$.
מה הסיכוי למצא את החלקיק ב- $x > 0.03$.

(2) דוגמה – מצאו את המקדם

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A \sin(20\pi x) & 0 \leq x \leq 0.05 \\ 0 & x > 0.05 \end{cases}$$

נתונה פונקציית הגל הבאה של חלקיק: $0 \leq x \leq 0.05$

מצאו את הקבוע A .

3) דוגמה – מצאו משתנים

נתונה פונקציית גל מנורמלת לחלקיק בעל מסה M : $\psi(x) = Ae^{-\alpha(x-x_0)^2}$. מצאו את:

א. A .ב. $\langle x \rangle$.

ג. המיקום המסתבר ביותר.

ד. $\langle x^2 \rangle$.ה. Δx .

$$\int_0^\infty x^2 e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{16b^3}} ; \int_0^\infty e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4b}}$$

לעזרתכם:

עקרון אי הוודאות של הייזנברג:**סיכום כללי:**

הערות		
1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית. 2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד. 3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב- X והמיקום ב- Y בו זמנית.	$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot s$	אי ודאות מיקום תנע
1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן. 2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הוודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.	$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$	אי ודאות זמן אנרגיה
	$\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$	אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי

שאלות:**4) דוגמה – מדידת מיקום**

אלקטרון נע במהירות: $2.10 \cdot 10^6 \frac{m}{sec}$ שנמדדה בדיוק של 0.12%. מה הדיוק המקסימאלי שניתן להשיג במדידה סימולטנית של המיקום?

5) דוגמה – אי וודאות של טניס

מה היא אי הוודאות במדידת המיקום של כדור טניס בעל מסה של 150 גרם הנזרק במהירות: $35 \pm 2 \frac{m}{sec}$?

(6) אי ודאות במיקום נויטרון שנע

נויטרון נע במהירות: $(6.650 \pm 0.023) \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.
 באיזו רמת דיוק ניתן לדעת את המיקום שלו? $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$.

(7) אנרגיה במצב מעורר

אלקטרון נשאר במצב מעורר באטום בערך 10^{-8}sec .
 מה אי הודאות באנרגיה של המצב באלקטרון וולט?

(8) אי ודאות יחסית בפליטת פוטון

זמן החיים של אטום במצב מעורר הוא בערך 10^{-9}sec . האטום יורד מהמצב המעורר ופולט פוטון באורך גל של 400nm , מצאו את אי הודאות היחסית באנרגית הפוטון $\frac{\Delta E}{E}$ ובאורך הגל $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$.

(9) אי ודאות בשל קליע באקדח

קליע בעל מסה של 5gr נורה מאקדח במהירות אופקית של $180 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.
 א. מהו אורך הגל של הקליע?
 ב. מהי אי הודאות המינימלית במדידת המיקום של הקליע?
 ג. מהי אי הודאות המינימלית בתנע בכיוון האנכי של הקליע אם רדיוס הקנה הוא 0.60cm ?

(10) אי ודאות במסת נויטרון

לנויטרון חופשי: $m = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$ יש זמן חיים של 886sec .
 מה אי הודאות במדידת המסה של הנויטרון (בק"ג)?

(11) אלקטרון יורד מצב באטום המימן

אלקטרון נמצא במצב המעורר הראשון ($=2n$) של אטום המימן בממוצע 10^{-8}sec לפני שהוא יורד למצב הייסוד ($=1n$).
 א. העריכו את אי הודאות באנרגיית האלקטרון במצב $=2n$.
 ב. מהי אי הודאות היחסית באנרגיית הפוטון הנפלט?
 ג. מהו אורך הגל ורוחב הפס של קו הספקטרום הנצפה מתהליך זה?

משוואת שרדינגר:

סיכום כללי:

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) \Psi(x, t)$$

תנאים נוספים:

1. פסי מנורמלת.
2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת.
3. פסי רציפה.
4. הגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, y, z, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi(x, y, z, t) + U(x, t) \Psi(x, y, z, t)$$

משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi$$

כאשר: $\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

- התרגילים של נושא זה מופעים בנושאים הבאים.

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל:

סיכום כללי:

חלקיק חופשי – חלקיק שנע ללא השפעת כוחות: $U(x) = 0$.

פונקציית הגל של חלקיק חופשי: $\psi(x) = A \sin(kx)$.

חבילת גלים: $\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$.

בור פוטנציאל אינסופי:

פונקציית הגל של המצב ה- n : $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$

האנרגיה של המצב ה- n : $E_n = \frac{h^2}{8ml^2} n^2, n=1, 2, 3, \dots$

- לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה הפוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית.

עקרונות לציור פונקציית גל:

- ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
- עבור המצב ה- n ציירו גל עם $n-1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).
- ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולהיפך).
- פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.
- פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שהפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מיקום ממוצע: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$.

המיקום בעל ההסתברות הגבוהה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצוא אותו על ידי נגזרת).

שאלות:

12) דוגמה – אלקטרון חופשי עם אנרגיה ידועה

- אלקטרון עם אנרגיה $E = 3.7\text{eV}$ נע באופן חופשי במרחב.
 א. מהו אורך הגל של האלקטרון?
 ב. רשמו את פונקציית הגל של האלקטרון.
 אין צורך לנרמל את הפונקציה והניחו כי הפאזה היא אפס.

13) דוגמה – אלקטרון באמצע הקופסה

- אלקטרון נמצא במצב היסוד בתוך קופסה קשיחה באורך l .
 מצאו את ההסתברות שהאלקטרון נמצא במרחק $\frac{l}{8}$ ממרכז הקופסה (מימין או משמאל למרכז).

14) דוגמה – מיקום ממוצע ומסתבר במצב המעורער הראשון

- מצאו את המיקום הממוצע והמיקום המסתבר ביותר עבור חלקיק הנמצא במצב המעורער הראשון בתוך קופסה קשיחה באורך: $2.00 \cdot 10^{-10}\text{m}$.

15) דוגמה – חיידק בקופסה

- חיידק קטן בעל מסה של 10^{-13}kg מוגבל לזוז בין שני קירות קשיחים במרחק 0.1mm אחד מן השני.
 א. האריכו את המהירות המינימאלית של החיידק.
 ב. אם מהירות החיידק היא בערך $10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, מהו המספר הקוונטי של המצב בו נמצא החיידק?

16) דוגמה – חלקיק בבור סופי

- חלקיק בעל מסה M נמצא בבור פוטנציאל הנתון לפי הפונקציה הבאה:

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq L \\ U_0 & L < x \end{cases}$$

אנרגיית החלקיק E נתונה וקטנה מ- U_0 .

- א. מצאו את פונקציית הגל בכל המרחב ללא מציאת המקדמים הקבועים של הפונקציה בכל תחום.
 ב. השתמשו בתנאי השפה (פונקציית הגל רציפה והנגזרת רציפה) בשביל למצא משוואה ממנה ניתן לחשב את הערכים האפשריים של האנרגיה. הראו כי מתקיים הקשר:

$$\tan(kL) = -\frac{k}{\alpha} \quad \text{כאשר} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

ג. מצאו מהו תחום הערכים האפשריים של kL והראו כי:

$$|\sin(kL)| = \frac{\hbar k}{\sqrt{2mU_0}}$$

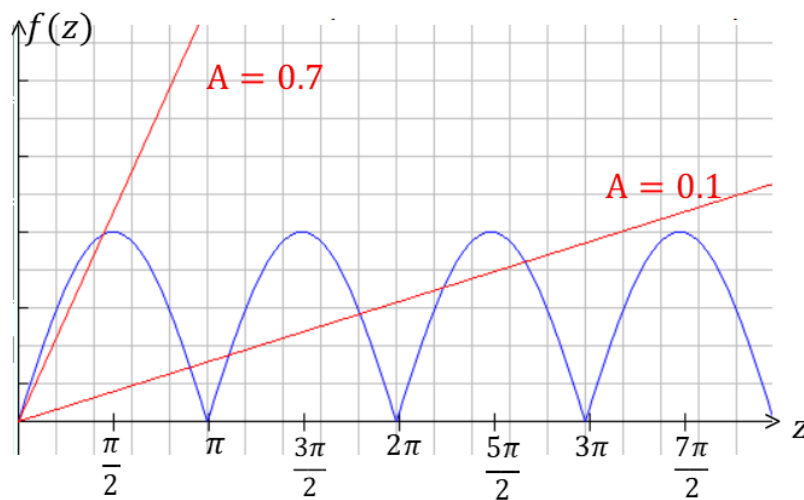
ד. כתבו את המשוואה של סעיף ג' באמצעות המשתנים: $z = kL$

ו- $A = \frac{\hbar}{L\sqrt{2mU_0}}$ כעת ניתן לפתור את הבעיה באמצעות פתרון גרפי.

הפתרונות הן נקודות החיתוך של הפונקציות משני צידי המשוואה.

סמנו את נקודות הפתרון בגרף הבא עבור: $A = 0.1$ ו- $A = 0.7$.

הקפידו על תחום ההגדרה של סעיף ג'.



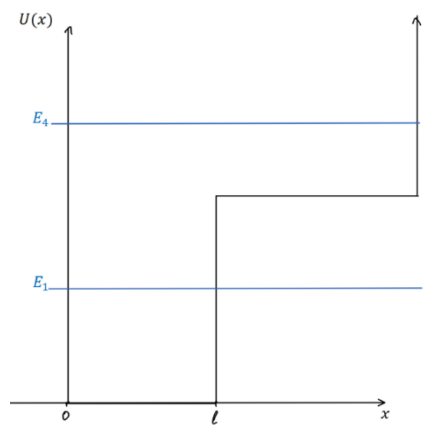
ה. מהו התנאי על A עבורו אין פתרון למשוואה?

מה המשמעות הפיזיקאלית של מצב זה?

17) דוגמה – בור אינסופי עם מדרגה

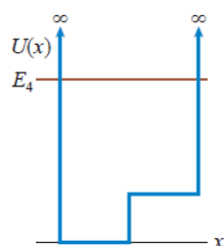
באיור נתונה פונקציית פוטנציאל של בור פוטנציאל אינסופי עם מדרגת

פוטנציאל. ציירו את פונקציית הגל עבור האנרגיות E_1 ו- E_4 באיור.

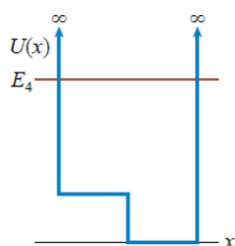


(18) דוגמה – התאימו פוטנציאל לפונקציית הגל

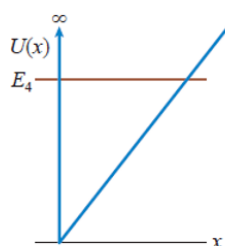
איזה מהגרפים הבאים מתאר את הפוטנציאל של פונקציית הגל הבאה :



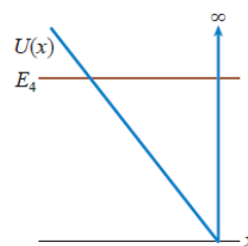
(1)



(2)



(3)



(4)

מנהור (tunneling):

סיכום כללי:

ההסתברות שהחלקיק יעבור את המחסום. l - אורך המחסום $T \ll 1$ רק עבור	$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\alpha l}$ $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$	מקדם ההעברה
	$R = 1 - T$	מקדם החזרה

שאלות:

19) דוגמה – אלקטרון חודר מחסום

אלקטרון חופשי בעל אנרגיה של 40eV נע במרחב ונתקל במחסום פוטנציאל בעל אנרגיה של 60eV. מה ההסתברות שהאלקטרון יעבור את המחסום אם עובי המחסום הוא:

א. 1.0nm
ב. 0.1nm

20) נתונים של אלקטרון חופשי

פונקציית הגל של אלקטרון חופשי היא: $\psi(x) = A \sin(\pi \cdot 10^{10} x)$ כאשר x במטרים. מצאו את:

א. אורך הגל והתנע של האלקטרון.
ב. מהירות האלקטרון.
ג. אנרגיית האלקטרון.

21) מהירות מינימלית בבור אינסופי

מהי המהירות המינימלית של אלקטרון הנמצא בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב 0.30nm?

22) אי ודאות במצב היסוד*

חלקיק נמצא במצב היסוד בתוך בור פוטנציאל אינסופי. הראו כי יחס אי הודאות מתקיים עבור מצב זה. עבור Δx ניתן לקחת את רוחב הבור (או יותר מדויק רוחב הבור חלקי 4π). התנע של החלקיק אמנם ידוע מתוך

האנרגיה אבל הכיוון שלו אינו ידוע, התנע יכול להיות חיובי או שלילי ולכן אי הודאות בתנע היא $2p$.

(23) הסתברות למצא אלקטרון בבור

אלקטרון נמצא בקופסה סגורה וקשיחה ברוחב 1.00nm . מה ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק 0.10nm ממרכז הקופסה, מכל צד, עבור המצב:

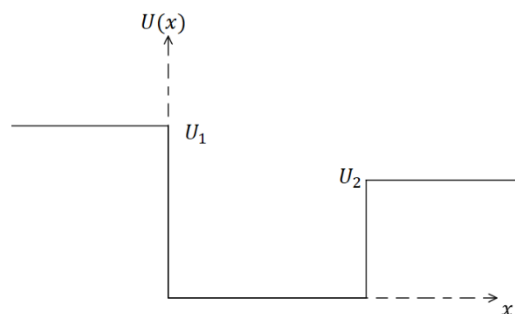
- א. $n = 1$.
- ב. $n = 4$.
- ג. $n = 20$.
- ד. השוו למקרה הקלאסי.

(24) בור אינסופי מוזז

מצאו את פונקציות הגל עבור בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l הנמצא מ- $x = -\frac{l}{2}$ ועד $x = \frac{l}{2}$ (במקום מ-0 עד l). האם רמות האנרגיה משתנות?

(25) בור סופי עם קירות שונים

חלקיק נמצא תחת הפוטנציאל הנתון באיור. שרטטו את פונקציית הגל עבור שלושת המצבים הבאים:
 א. החלקיק במצב המעורר הראשון ו- $E < U_2$.
 ב. $U_2 < E < U_1$.
 ג. $U_1 < E$.



(26) זרם פרוטונים עובר מחסום

זרם של 1.2mA המכיל פרוטונים באנרגיה 1.8MeV נתקל במחסום פוטנציאל בגובה 2.0MeV וברוחב $5.0 \cdot 10^{-14}\text{m}$. מהו הזרם המועבר?

אוסילטור הרמוני:

סיכום כללי:

פונקציות הגל:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_2(x) = A_2 \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_3(x) = A_3 \left(1 - \frac{2x^2}{b^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

רמות האנרגיה:

$$E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

שאלות:

27 דוגמה – אלקטרון בתנודה הרמונית פולט פוטון

אלקטרון הנמצא באוסילטור הרמוני קוונטי פולט פוטון באורך גל של 400nm כאשר הוא יורד רמת אנרגיה אחת.

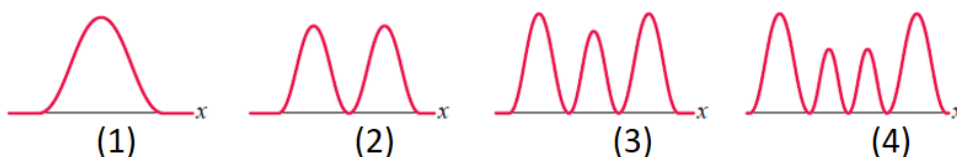
א. האם ניתן לדעת באיזה רמת אנרגיה היה האלקטרון?

ב. מהו "קבוע הקפיץ"?

28 דוגמה – איזה פונקציית הסתברות מתאימה

איזו פונקציית הסתברות מתאימה לחלקיק הנמצא תחת פוטנציאל של

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad \text{אוסילטור קוונטי עם אנרגיה: } E = \frac{7}{2} \hbar \omega$$



תרגילים נוספים:

שאלות:

- (29) פונקציית חומר מול פונקציות גל אחרות
השוו בין פונקציית הגל של החומר ψ לבין:
א. פונקציית הגל של מיתר.
ב. פונקציית גל של גל אלקטרומגנטי.

- (30) מודל בוהר וקוונטים
מה ההבדל בין המודל האטומי של בוהר למכניקת הקוונטים?
רמז: עיקרון אי הוודאות.

- (31) האם אפשר לאזן מחט
האם אפשר לאזן מחט כך שהיא תעמוד על החוד שלה באופן מוחלט?

- (32) ניוטון וקוונטים
באיזה אופן התורה של ניוטון שונה מתורת הקוונטים?

- (33) מיקום מדויק
האם עקרון אי הודאות מגביל את הדיוק שבו ניתן למדוד את המיקום של גוף?

- (34) למי יש יותר סיכוי לעבור מחסום
אטום מימן ואטום הליום בעלי אנרגיה זהה מתקרבים למחסום פוטנציאל ברוחב סופי עם אנרגיה פוטנציאלית גבוהה מהאנרגיה שלהם.
למי סיכוי גדול יותר לעבור את המחסום?

- (35) חיים של Z^0
בוזונים הם שם לקבוצת חלקיקים נשאי כוח (עם ספין שלם). הבוזון Z^0 קשור ל"כוח החלש" (כוח שפועל בתוך הגרעין) ודועך מאוד מהר. האנרגיה הממוצעת שלו היא 91.9 GeV והרוחב במדידת האנרגיה הוא 2.5 GeV.
מהו זמן החיים המוערך של הבוזון Z^0 ?

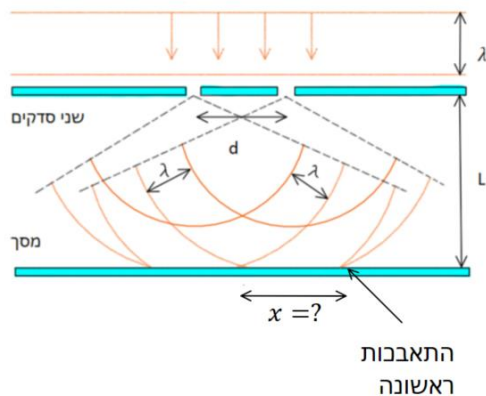
(36) כדור מקפץ

כדור קטן במסה 10^{-6}kg משוחרר ממנוחה בגובה 2m מעל הרצפה. הכדור פוגע ברצפה וקופץ חזרה. לאחר כל פגיעה ברצפה הכדור מגיע חזרה ל-60% מהגובה הקודם בגלל איבוד אנרגיה בהתנגשות עם הרצפה. כמה פעמים צריך הכדור לפגוע ברצפה עד שאי הודאות במהירות שלו תהיה משמעותית (כלומר בסדר גודל של המהירות עצמה). הניחו שאי הודאות במדידת המיקום היא בסדר גודל של הגובה הנמדד.

(37) פונקציית גל נתונה

נתונה פונקציית הגל הבאה: $\psi(x) = b^{-\frac{1}{2}} \left| \frac{x}{b} \right|^{\frac{1}{2}} e^{-(x/b)^2/2}$, כאשר $nmb = 0.5$.

- בדקו כי פונקציית הגל מנורמלת.
- מהו המיקום המסתבר ביותר בו נמצא החלקיק בתחום $x > 0$?
- מה ההסתברות למצא את החלקיק בין $x = 0$ ל- $x = 0.50\text{nm}$?

**(38) נויטרונים בניסוי שני סדקים**

עורכים את ניסוי שני הסדקים עם נויטרונים בעלי אנרגיה של 0.0040eV . המרחק בין הסדקים הוא $d = 0.70\text{mm}$ והמרחק למסך הוא $L = 1.0\text{m}$. מהו המרחק מהמרכז בו תופיע ההתאבכות הראשונה? $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$.

תשובות סופיות:

(1) 38%

(2) $A = 2\sqrt{10}$

(3) א. $A = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$ ב. x_0 ג. x_0

ד. $x_0^2 + \left(\frac{\pi}{8192\alpha^3}\right)^{\frac{1}{4}}$ ה. $\left(\frac{\pi}{8192\alpha^3}\right)^{\frac{1}{8}}$

(4) $\Delta X \min = 2.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

(5) $1.8 \cdot 10^{-34} \text{ m}$

(6) $1.37 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

(7) $3 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$

(8) $\frac{\Delta E}{E} = 4 \cdot 10^{-5} \%$, $\left|\frac{\Delta x}{\lambda}\right| = 4 \cdot 10^{-5} \%$

(9) א. $7.4 \cdot 10^{-34} \text{ m}$ ב. 10^{-32} m ג. $10^{-32} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

(10) 10^{-51} kg

(11) א. $3 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$ ב. $3 \cdot 10^{-9}$ ג. $\lambda = 122 \text{ nm}$, $|\Delta \lambda| \approx 4 \cdot 10^{-7} \text{ nm}$

(12) א. $6.38 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ב. $\psi(x) = A \sin(9.84 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1} \cdot x)$

(13) 47.5%

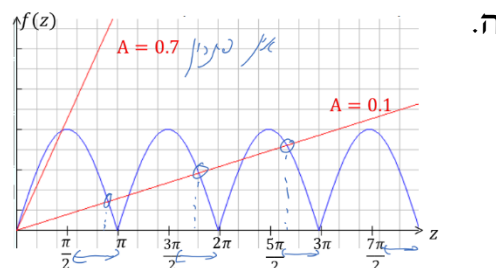
(14) ממוצע: $\langle x \rangle = \frac{l}{2}$, מסתבר: $\frac{l}{4}$, $\frac{3l}{4}$

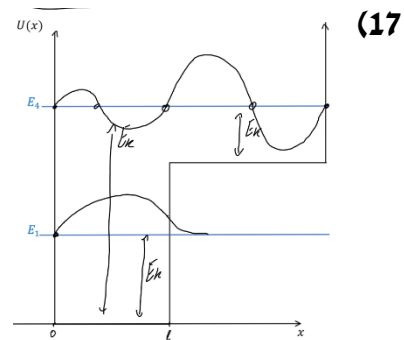
(15) א. $3 \cdot 10^{-17} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ב. $3 \cdot 10^{-17}$

(16) א. $\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{-\alpha x} & 0 < x < L \end{cases}$ כאשר: $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

ב. הוכחה. ג. $\frac{\pi}{2} + \pi n < KL < \pi + \pi n$ $n = 0, 1, 2, \dots$

ד. $|\sin(z)| = Az$

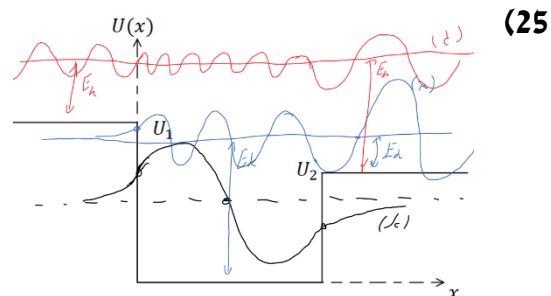




(18) 4.

(19) א. $4.86 \cdot 10^{-18}\%$ ב. 3.67% (20) א. $\frac{m}{\text{sec}} \cdot 3.3 \cdot 10^{-24} \text{ kg}, p = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \lambda = 3.64 \cdot 10^6 \frac{m}{\text{sec}}$ ג. 38 eV ד.(21) $1.2 \cdot 10^6 \frac{m}{\text{sec}}$

(22) הוכחה.

(23) א. 0.387 ב. 0.153 ג. 0.2 ד. 0.2 (24) $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n x}{l} + \frac{\pi n}{2}\right)$, לא משתנות.(26) 96 nA (27) א. לא ב. $0.02 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

(28) 4.

(29) א. חומר: פונקציה סקלרית, מתארת הסתברות וללא תווך.

מיתר: פונקציה סקלרית, מתארת תנודה, דרוש תווך.

ב. א"מ: פונקציה וקטורית, מתארת הסתברות ואת האמפליטודה של השדה החשמלי והמגנטי, ללא תווך.

(30) ראו סרטון.

(31) לא.

(32) בתורה של ניוטון ניתן לחשב את המיקום והתנע באופן מדויק בזמנית, כתוצאה מכך ניתן תיאורית לצפות בדיוק את ההתנהגות של מערכת בעתיד. לפי תורת הקוונטים יש אי ודאות במדידות ולכן ניתן לצפות רק הסתברויות להתנהגות המערכת בעתיד.

(33) לא.

(34) מימן.

(35) $1.3 \cdot 10^{-25} \text{ sec}$

(36) .70

(37) א. הוכחה.

ב. 0.35 nm . ג. 63% (38) $6.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

פיזיקה 3

פרק 6 - תורת הקוונטים חלק 2

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים (ללא ספר)

פיזיקה 3

פרק 7 - המודל הקוונטי לאטום המימן ספין והטבלה המחזורית

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים (ללא ספר)