

שיטות בפיזיקה עיונית 1



תוכן העניינים

1.	מספרים מרוכבים.....	1
2.	פונקציות אנליטיות.....	17
3.	פונקציות אלמנטריות.....	25
4.	אינטגרציה מרוכבת.....	32
5.	טורים.....	43
6.	נקודות סינגולריות.....	52
7.	חישוב אינטגרלים בעזרת משפט השארית.....	58
8.	משפט ליוביל.....	77
9.	טורי פורייה.....	80
10.	התמרת פורייה.....	91
11.	בעיות שטורם ליוביל.....	106
12.	פתרון משוואות דיפרנציאליות רגילות באמצעות טורים.....	111
13.	פולינומים אורתוגונליים.....	116
14.	משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר ראשון..... (ללא ספר)	
15.	מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני..... (ללא ספר)	
16.	פתרון משוואת החום על ידי הפרדת משתנים..... (ללא ספר)	

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 1 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

1. הגדרת המספר המרוכב..... 1
2. המספר הצמוד..... 4
3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת..... 7
4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב..... 8
5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב..... 12
6. שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים..... 14
7. שאלות שונות עם מספרים מרוכבים..... 15

הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i = \sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z = a + bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b . המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\text{Re}(z)$ (מלשון: Real).

b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\text{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

שאלות:

(1) רשום עם i :

ג. $\sqrt{-25} =$

ב. $\sqrt{-4} =$

א. $\sqrt{-1} =$

ה. $\sqrt{-5} =$

ד. $\sqrt{-3} =$

(2) חשב:

ג. $i^3 =$

ב. $i^2 =$

א. $i =$

ו. $i^{17} =$

ה. $i^5 =$

ד. $i^4 =$

(3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

ב. $3 - i$

א. $2 + 5i$

ו. 0

ה. -4

ד. $7i$

(4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\text{Re}(z) = -3$, $\text{Im}(z) = 2$.

ב. $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 4$ ו- $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = -1$. מצא את z .

(6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2 = -1$ ב. $x^2 + 36 = 0$ ג. $x^2 - 2x + 5 = 0$

(7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2 + x + 1 = 0$.

(8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2 + iz + 6 = 0$.

(9) נתון: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 2i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1 + z_2 =$ ב. $z_1 - z_2 =$ ג. $z_1 \cdot z_2 =$

(10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2 + 6i) + (1 - i)$ ב. $(4 + 4i) - \left(3 + \frac{1}{2}i\right)$
 ג. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ד. $5 - (3 - 2i)$
 ה. $(i - 3) + 6i$ ו. $(i + 2) - (3i - 2) + (7 - 5i)$

(11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1 + 4i) \cdot (8 - 2i)$ ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
 ג. $(4i - 3) \cdot (4i + 3)$ ד. $i \cdot (i - 1)$
 ה. $(2i + 3) \cdot i$ ו. $(5i - 1)^2$

(12) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$.

ידוע כי $z_1 + z_2$ הוא ממשי וכי $z_1 - z_2$ הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2 .

ב. הראה כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

תשובות סופיות:

- (1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$
- (2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i
- (3) א. $a = 2, b = 5$ ב. $a = 3, b = -1$ ג. $a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = -\frac{1}{2}$ ד. $a = 0, b = 7$ ה. $a = -4, b = 0$ ו. $a = 0, b = 0$
- (4) א. $z = -3 + 2i$ ב. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- (5) $z = 1.5 + 2.5i$
- (6) א. $x = \pm i$ ב. $x = \pm 6i$ ג. $x = 1 + 2i, 1 - 2i$
- (7) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- (8) $z = 2i, -3i$
- (9) א. $7 + i$ ב. $-3 + 5i$ ג. $16 + 11i$
- (10) א. $-1 + 5i$ ב. $1 + 3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2 + 2i$ ה. $-3 + 7i$ ו. $11 - 7i$
- (11) א. $16 + 30i$ ב. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1 - i$
- (12) א. $a_1 = a_2, b_1 = -b_2$ ב. הוכחה. ג. $-2 + 3i$ ו. $-24 - 10i$

המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z = a + bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z} = a - bi$.

שאלות:

(13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. -4	ו. 0

(14) חשב:

א. $\frac{11 + 2i}{2 - i}$	ב. $\frac{3 + 7i}{2 - 5i}$	ג. $\frac{19 - 9i}{2 - 3i}$
----------------------------	----------------------------	-----------------------------

(15) נתון מספר $z = 5 - 2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$	ב. $\frac{z}{z + 3}$	ג. $\frac{z + i}{z - i}$
------------------	----------------------	--------------------------

(16) המספר $\frac{3 + 4i}{a - i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a .

(17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

(18) פתור את המשוואה הבאה: $3z - 11 = iz - 7i$.

(19) פתור את המשוואה הבאה : $iz + 5 = 4i$.

(20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים) : $\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$.

(21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים :

$$\text{א. } 2a - 3i = 10 + bi \quad \text{ב. } 3a - 8 + 5bi = 2b - ai - 3i$$

(22) פתור את המשוואה הבאה : $2z + 7i = iz + \bar{z} - 3$.

(23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים :

$$\text{א. } \sqrt{5 - 12i} \quad \text{ב. } \sqrt{8 + 6i}$$

(24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

$$\text{א. } (1 - i)z^2 - 2z + i + 1 = 0$$

$$\text{ב. } (-2 + i)z^2 - (6 + 12i)z + 10 - 25i = 0$$

(25) פתור את המשוואה הבאה : $iz^2 - 2(1 - i)z + 6 + 15i = 0$.

(26) פתור את המשוואה הבאה : $z^2 - i\bar{z} + 6 = 0$.

תשובות סופיות:

- (13) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0
- (14) א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $5+3i$
- (15) א. $\frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17} - \frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17} + \frac{5}{17}i$
- (16) $a = -\frac{3}{4}$
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) $z = 4-i$
- (19) $z = 4+5i$
- (20) $z = 2-3i, w = 5+i$
- (21) א. $a = 5, b = -3$ ב. $a = 2, b = -1$
- (22) $z = -\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}i$
- (23) א. $z = \pm(3-2i)$ ב. $z = \pm(3+i)$
- (24) א. $z_{1,2} = i, 1$ ב. $z_{1,2} = -2-i, 2-5i$
- (25) $z_1 = -2-5i, z_2 = 3i$
- (26) $z_1 = -3i, z_2 = 2i$

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

(27) נתונה המשוואה הבאה : $(mi-2)z^2 - 2(m+2i)z + 1 = 0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה :

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

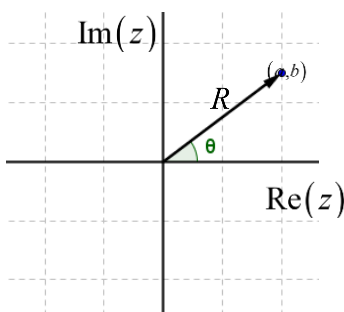
תשובות סופיות:

(27) א. $m = -i$ ב. $m = -2i$.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- x מייצג את a , גודל הערך הממשי של z , וציר ה- y מייצג את b , גודל הערך המדומה של z . מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג (a, b) או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0, 0)$) והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס. הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב ויסומן: (R, θ) . מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$$z = R \cos \theta + i \cdot R \sin \theta = R(\cos \theta + i \sin \theta) = R \operatorname{cis} \theta$$

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R \cos \theta$, $b = R \sin \theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1 \cdot z_2 = (R_1 \operatorname{cis} \theta_1) \cdot (R_2 \operatorname{cis} \theta_2) = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \operatorname{cis} \theta_1}{R_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.

שאלות:

(28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60^\circ$	ב. $6\text{cis}135^\circ$	ג. $4\text{cis}330^\circ$
ד. $4\text{cis}(-30^\circ)$	ה. $4\text{cis}690^\circ$	ו. $8\text{cis}90^\circ$
ז. $3\text{cis}270^\circ$	ח. $\text{cis}180^\circ$	ט. $\text{cis}0^\circ$

(29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$	ב. $\sqrt{3}-i$	ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
ד. $3+4i$	ה. $6i$	ו. $-i$
ז. 4	ח. -1	ט. 1
י. 0		

(30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120^\circ \cdot 3\text{cis}60^\circ$	ב. $\text{cis}210^\circ \cdot 5\text{cis}(-40^\circ)$
ג. $\frac{12\text{cis}315^\circ}{3\text{cis}90^\circ}$	ד. $\frac{1}{2\text{cis}40^\circ}$
ה. $6\text{cis}30^\circ + 2\text{cis}210^\circ$	

(31) נתון המספר המרוכב $z = R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו- θ את המספרים:

א. $\bar{z}$	ב. $1/z$	ג. $-z$
ד. $-\frac{1}{z}$	ה. iz	ו. $z \cdot \bar{z}$

(32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z + \bar{z}$	ב. $z \cdot \bar{z}$	ג. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$
------------------	----------------------	--

(33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2 - \bar{z}^2$	ב. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$
----------------------	--------------------------------------

(34) הוכח את הטענות הבאות :

א. $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$ ב. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

(36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא 30° חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה. קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו :

א. $\bar{z}$ ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}$ ד. $z \cdot \bar{z}$

תשובות סופיות:

- (28) א. $1 + \sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3} - 2i$ ד. $2\sqrt{3} - 2i$
- ה. $2\sqrt{3} - 2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1
- (29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45^\circ$ ב. $2\text{cis}330^\circ$ ג. $\text{cis}240^\circ$ ד. $5\text{cis}53.13^\circ$
- ה. $6\text{cis}90^\circ$ ו. $\text{cis}270^\circ$ ז. $4\text{cis}0^\circ$ ח. $\text{cis}180^\circ$ ט. $\text{cis}0^\circ$
- (30) א. -6 ב. $5\text{cis}170^\circ$ ג. $4\text{cis}225^\circ$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40^\circ)$
- ה. $4\text{cis}30^\circ$
- (31) א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180^\circ + \theta)$
- ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180^\circ + \theta)$ ה. $R\text{cis}(90^\circ + \theta)$ ו. R^2
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35) $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$
- (36) $-\sqrt{3}+i, -1-\sqrt{3}i, \sqrt{3}-i$
- (37) $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2$
- (38) $1+\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i, 2$
- (39) א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל. ג. על המעגל. ד. מחוץ למעגל.

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $(R \operatorname{cis} \theta)^n = R^n \operatorname{cis}(n\theta)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n -י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0 \operatorname{cis} \theta_0$

$$z^n = z_0 = R_0 \operatorname{cis} \theta_0 \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{R_0} \cdot \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) : 1 \leq k \leq n$$

נבצע:

שאלות:

(40) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } (2 \operatorname{cis} 30^\circ)^3 & \text{ב. } (2 \operatorname{cis} 14^\circ)^5 & \text{ג. } (1+i)^4 \\ \text{ד. } (\sqrt{3}-i)^3 & \text{ה. } \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{12} & \end{array}$$

(41) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } z^2 = 36 \operatorname{cis} 120^\circ & \text{ב. } z^4 = (9 \operatorname{cis} 80^\circ)^2 & \text{ג. } z^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}$$

(42) מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

(43) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

(44) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z - 3i| = 5$.

(45) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס

המתקבל בעבור המשוואה: $|z + i| + |\bar{z} + i| = |1 + 3i|$.

תשובות סופיות:

(40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70^\circ$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1 .

(41) א. $z_0 = 6\text{cis}60^\circ, z_1 = 6\text{cis}240^\circ$.

ב. $z_0 = 3\text{cis}40^\circ, z_1 = 3\text{cis}130^\circ, z_2 = 3\text{cis}220^\circ, z_3 = 3\text{cis}310^\circ$.

ג. $z_0 = \text{cis}12^\circ, z_1 = \text{cis}84^\circ, z_2 = \text{cis}156^\circ, z_3 = \text{cis}228^\circ, z_4 = \text{cis}300^\circ$.

(42) סכום: 0 , מכפלה: -1 .

(43) $x^2 + y^2 = 4$.

(44) $x^2 + (y - 3)^2 = 25$.

(45) $\frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{5} = 1$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

(46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13 + 3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3 = 5 - 9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

(47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32 + 16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2 - 4i$.
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.
ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

(48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

$$S_{10} = 100 - 15i \quad (46)$$

$$a_1 = 2 + i, q = -2i \quad \text{א.} \quad S_5 = 20 + 25i \quad \text{ב.} \quad (47)$$

$$2, 2i, -2 \quad \text{או} \quad 2, 4 - 2i, 6 - 8i \quad (48)$$

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

(49) פתור את המשוואה: $z - \bar{z} + |z| = |2 - i|^2 - 4i + \operatorname{Im}(z)$.

(50) פתור את המשוואה: $|2 - 3^{x^2-x-1}i| = \sqrt{13}$.

(51) פתור את המשוואה: $z^3 = \bar{z}$.

(52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

(53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים. הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

(54) נתון מספר מרוכב z , שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.

הוכח כי אם $z - \frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

(55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot R_2 \operatorname{cis} \theta_2 = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.

(56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.

נתון: $|z^4 - z^3| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

(57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.

מצא את ערך הביטוי $z + iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

(58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$.
 הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\angle z_1 O z_2$ (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

(49) $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -3 - 4i$

(50) $x = 2$, -1

(51) $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, $z_4 = 1$, $z_5 = -1$

(52) שאלת הוכחה.

(53) שאלת הוכחה.

(54) שאלת הוכחה.

(55) שאלת הוכחה.

(56) $\arg(z) = 30^\circ$

(57) $z + iz = \sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$

(58) 2θ

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 2 - פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

17	1. פונקציות מרוכבות.....
18	2. גבולות מרוכבים ורציפות.....
19	3. נגזרות מרוכבות.....
20	4. משוואות קושי-רימן.....
23	5. פונקציות הרמוניות.....

פונקציות מרוכבות:

שאלות:

1 רשמו את הפונקציה $f(z) = z \cdot \operatorname{Re}(z)$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

2 רשמו את הפונקציה $f(z) = |z|^2$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

3 רשמו את הפונקציה $f(z) = 2|z|^2 + i(\bar{z})^2$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

4 רשמו את הפונקציה $f(z) = \frac{z}{1+|z|^2}$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

5 רשמו את הפונקציה $f(z) = z^2 + \bar{z}$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

6 רשמו את הפונקציה $f(x+iy) = \frac{x^3}{3} + i \cdot \left(-\frac{y^3}{3}\right)$, בצורה $f(z)$, כאשר $z = x+iy$.

תשובות סופיות:

1 $f(z) = x^2 + i \cdot xy$

2 $f(z) = x^2 + y^2 + i \cdot 0$

3 $f(z) = 2[x^2 + xy + y^2] + i(x^2 - y^2)$

4 $f(z) = \frac{x}{1+x^2+y^2} + i \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2}$

5 $f(z) = x^2 + x - y^2 + i \cdot (2xy - y)$

6 $f = \frac{2z^3 + 6z(\bar{z})^2}{24}$

גבולות מרוכבים ורציפות:

שאלות:

מצאו את הגבולות הבאים (אם קיימים):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = ? \quad (1)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^4}{|z|^4} = ? \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{z^2}} = ? \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{z^4}} = ? \quad (4)$$

תשובות סופיות:

$$\frac{1-ik}{1+ik} \quad (1)$$

$$\frac{(1+ik)^4}{(1+k)^2} \quad (2)$$

(3) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

(4) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

נגזרות מרוכבות:

שאלות:

(1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z) = \bar{z}$ גזירה. הראו עפ"י הגדרת הנגזרת כי $f(z) = \bar{z}$ אינה גזירה ב- z_0 לכל $z_0 \in \mathbb{C}$.

(2) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ גזירה.

(3) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z) = |z|^2$ גזירה.

(4) הוכיחו את משפט לופיטל: $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)}$

תשובות סופיות:

- (1) הפונקציה לא גזירה.
הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.
- (2) הפונקציה לא גזירה.
- (3) בראשית הצירים, והנגזרת שלה היא 0.
- (4) הוכחה.

משוואות קושי-רימן:

שאלות:

(1) הראו כי $f(z) = z^2 + \text{Im}(z)$ אינה גזירה לכל z .

(2) הראו כי $f(z) = xy + i(x^2 + y^2)$ אינה גזירה בכל הנקודות בהן $z \neq 0$, אך כן גזירה בנקודה $z = 0$ (לפי הגדרה).

(3) מצאו מספרים ממשיים a, b כך שהפונקציה $f(z) = e^{ax} \cos(3y) + i(-e^{-3x} \sin(by))$ תהיה גזירה בכל נקודה.

(4) נתון כי $f(z) = \frac{z}{z}$ אינה רציפה ב $z = 0$.

מצאו את כל הנקודות (אם קיימות) בהן הפונקציה גזירה.

משפט קושי-רימן: הוכחה (הפתרון בסרטון)

אם $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ גזירה ב- $z_0 = x_0 + iy_0$,

אז מתקיימות משוואות קושי-רימן בנקודה זו, כלומר:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

(5) נניח כי $f(z)$ גזירה בתחום D , ונניח כי $\text{Re}\{f(z)\} = 0$ לכל $z \in D$. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

(6) נניח כי $f(z)$ פונקציה גזירה שאינה קבועה בתחום D .

נגדיר $g(z) = \overline{f(z)}$ לכל $z \in D$.

הוכיחו כי $g(z)$ אינה גזירה בכל D .

(7) נתונה הפונקציה $f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה אינה רציפה בראשית.

ב. משוואות קושי-רימן מתקיימות בראשית.

- (8) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.
הוכיחו כי $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ אנליטית בתחום $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$.
- (9) הוכיחו כי $f(z) = e^{\text{Re}(z)}$ אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב.
- (10) נתונה הפונקציה $f(z) = cx^2 - xy + ixy^2$, כאשר c קבוע מרוכב כלשהו.
נתון כי $f(z)$ גזירה בנקודה $1+i$.
מצאו את הקבוע c ואת כל הנקודות בהן הפונקציה גזירה.
- (11) נתונה הפונקציה $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
קבעו האם הפונקציה $f(z)$ אנליטית בחצי המישור הימני $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0\}$.
- (12) נתונה הפונקציה $f(z) = e^{\frac{x^2-y^2}{2}} [\cos(xy) + i \cdot a \sin(xy)]$.
עבור אילו ערכי a זוהי פונקציה הולומורפית (אנליטית) בכל המישור?
- (13) נניח כי $g(z)$ הולומורפית בתחום $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$,
ומקיימת $\forall |z| \leq 1 \quad |g(z)| = 1$.
הוכיחו כי $g(z)$ קבועה.
הדרכה: ניתן לכתוב את $g(z)$ באופן הבא: $g(z) = e^{i \cdot h(x,y)}$.
- (14) נניח כי $R > 0$ ונתונה הפונקציה $f: D(0,R) \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה בכל התחום.
נגדיר: $g(z) = \overline{f\left(\frac{R}{\bar{z}}\right)}$.
מצאו תחום בו $g(z)$ מוגדרת, ובדקו אם היא גזירה שם.

תשובות סופיות:

$$u'_y = -2y + 1, \quad v'_x = 2y \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$a = -3, \quad b = 3 \quad (3)$$

$$x = 0, \quad y = 0 \quad (4)$$

(5) הוכחה

(6) הוכחה

(7) א. הוכחה ב. הוכחה

(8) הוכחה

(9) הוכחה

$$y = 0, \quad y = 1, \quad y = 0.5$$

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 0.25, \quad c = a + i \cdot b = \frac{3}{2} \quad (10)$$

$$z = 0, \quad z = 1 + i, \quad z = 0.25 + 0.5 \cdot i$$

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (11)$$

$$a = 1 \quad (12)$$

(13) הוכחה

$$A = \{z \mid |z| > 1\} \quad (14)$$

פונקציות הרמוניות:

שאלות:

- (1) הראו כי הפונקציה $x^3 - 3xy^2$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור.
- (2) הראו כי הפונקציה $x^2 - y^2$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו לה צמודה הרמונית.
- (3) הראו כי הפונקציה $f(z) = xy + i(x^2 + y^2)$, היא פונקציה גזירה בראשית-הצירים, אך החלק המדומה שלה אינו פונקציה הרמונית. האם $f(z)$ הולומורפית בראשית?
- (4) הראו כי הפונקציה $u(x, y) = \sin(x) \cosh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה $v(x, y)$ המקיימת $v(0, 0) = 2$.
רמז: $f(z) = \sin(z)$.
- (5) הראו כי הפונקציה $u(x, y) = \cos(x) \sinh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו פונקציה הולומורפית כך שמתקיים $u(x, y) = \operatorname{Re}\{f\}$.
- (6) הראו כי הפונקציה $v(x, y) = e^y \sin(x)$, היא פונקציה הרמונית במישור, מצאו לה פונקציה צמודה הרמונית $u(x, y)$ ופונקציה שלמה $f(z)$, כך שמתקיים: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
- (7) הראו כי הפונקציה $u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta)$, היא פונקציה הרמונית בתחום $r \neq 0$.
רמז: $u(r, \theta)$ תקרא הרמונית אם היא מקיימת $r^2 u_{rr}'' + r u_r' + u_{\theta\theta}'' = 0$.
- (8) נתון כי $u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta)$ היא פונקציה הרמונית בתחום $r \neq 0$. מצאו לה צמודה הרמונית בתחום זה.

(9) הוכיחו כי $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$, היא פונקציה הרמונית ומצאו לה צמודה הרמונית.

(10) תהי $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ פונקציה שלמה. הוכיחו כי $g(x, y) = u(x, y)^2 - v(x, y)^2$ פונקציה הרמונית.

(11) תהי $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ פונקציה שלמה. הוכיחו כי $g(x, y) = \sin[u(x, y)] \cdot \cosh[v(x, y)]$ פונקציה הרמונית.

(12) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x, y) = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$

(כאשר $\varphi \in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

(13) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

(כאשר $\varphi \in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

(14) הראו כי הפונקציה $\sinh(x) \cos(y)$ היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני וידאו.

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 3 - פונקציות אלמנטריות

תוכן העניינים

- 1. אקספוננט מרוכב 25
- 2. סינוס מרוכב 26
- 3. קוסינוס מרוכב 27
- 4. העתקות אלמנטריות 28
- 5. לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים 29

אקספוננט מרוכב:

שאלות:

- (1) פתרו את המשוואה $e^z = -1$.
- (2) הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $|e^{ix}| = 1$.
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הראו כי אם $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ אז $|e^{iz}| \leq 1$.
ב. הראו כי $|e^z| = 1$ אם ורק אם $\operatorname{Re}(z) = 0$.
- (4) פתרו את המשוואה $e^z = 1$.
- (5) פתרו את המשוואה $e^z = i$.
- (6) פתרו את המשוואה $e^z = 1 + i$.
- (7) האם הפונקציה $f(z) = e^z$ היא חח"ע?

תשובות סופיות:

- (1) $z = i \cdot \pi [2n + 1]$
- (2) $\sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1$
- (3) א. $|e^{iz}| = e^{-y} = \frac{1}{e^y} \leq \frac{1}{e^0} = 1$. ב. הוכחה.
- (4) $z_k = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$
- (5) $z_k = i\pi \left(2k + \frac{1}{2} \right) \quad k \in \mathbb{Z}$
- (6) $z_k = \frac{1}{2} \ln(2) + i\pi \left(2k + \frac{1}{4} \right) \quad k \in \mathbb{Z}$
- (7) לא.

סינוס מרוכב:

שאלות:

- (1) פתרו את המשוואה $\sin(z) = 2$.
- (2) הוכיחו כי $\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$.
- (3) פתרו את המשוואה $\sin(z) = 5$.

תשובות סופיות:

- (1) כל הפתרונות הם מהצורה הבאה: $z_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$, כאשר n מספר שלם.
- (2) הוכחה.
- (3) $z_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i \ln(5 \pm 2\sqrt{6})$

קוסינוס מרוכב:

שאלות:

(1) הוכיחו כי $\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)$.

(2) פתרו את המשוואה $\cos(z) = 2$.

(3) האם $|\cos(z)| \leq 1$ לכל z ?

(4) פתרו את המשוואה $\cos(\pi z) + \frac{3}{4}i = 0$.

(5) הוכיחו כי לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|\cos(z)| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ כאשר $y = \operatorname{Im}(z)$.

(6) פתרו את המשוואה $\tan(z) = \frac{i}{3}$.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) $z_n = 2\pi n + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

(3) לא.

(4) $z_k = -\frac{1}{2} + 2k - i \frac{1}{\pi} \ln(2)$

(5) הוכחה.

(6) $z_k = \pi k + i \frac{1}{2} \ln(2)$

העתקות אלמנטריות:

שאלות:

(1) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

תחת ההעתקה $f(z) = z + 1$.

(2) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

תחת ההעתקה $f(z) = 5z$.

(3) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}\right\}$

תחת ההעתקה $f(z) = z^3$.

(4) מהי תמונת התחום $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ תחת העתקה $f(z) = e^z$.

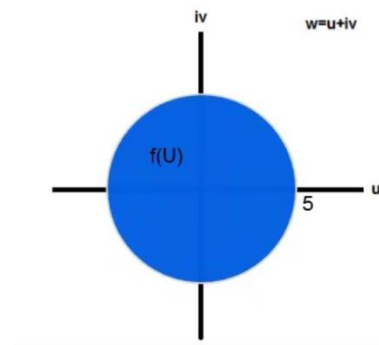
(5) מהי תמונת התחום $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$ תחת העתקה $f(z) = e^z$.

(6) מהי תמונת התחום $A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid -\infty < \operatorname{Re}(z) < 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$ תחת העתקה $f(z) = e^z$.

תשובות סופיות:

$$(1) |w-1| < 1$$

$$(2) w = u + iv$$



$$(3) \frac{3\pi}{4} \approx 135^\circ$$

$$(4) f(z) = e^x e^{iy} \equiv \operatorname{Re}^{i\alpha} \quad 0 < R < \infty \quad 0 < \alpha < \pi$$

$$(5) f(z) = e^x e^{iy} \equiv \operatorname{Re}^{i\alpha} \quad 0 < R < \infty \quad 0 < \alpha < 2\pi$$

$$(6) f(z) = e^x e^{iy} \equiv \operatorname{Re}^{i\alpha} \quad 0 < R < 1 \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים:

שאלות:

(1) חשבו את הגדלים הבאים :

א. $\text{Arg}(1+i)$

ב. $\text{Arg}\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

(2) חשבו את הגדלים הבאים :

א. $\text{Log}(1+i)$

ב. $\text{Log}\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

(3) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\sqrt{i}$.

(4) מצאו את כל הערכים האפשריים של i^i .

(5) מצאו את כל הערכים האפשריים של $2^{\frac{1}{9} + \frac{i}{50}}$.

(6) חשבו את הערך $(2+2i)^{5i}$ עבור 3 ענפים שונים לבחירתכם. כמה תשובות אפשריות יש לערך זה.

(7) מצאו את תמונת התחום $A = \{z = re^{i\theta} \mid R_1 < r < R_2, -\pi < \theta < \pi\}$ תחת העתקה $\text{Log}(z)$ (הענף הראשי של הלוג).

(8) מצאו תחום בו הפונקציה $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ אנליטית. כאשר $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$.
הערה: תרגיל זה דורש ידע בהעתקות מוביוס.

(9) הראו כי עבור a ממשי חיובי בתחום $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ כאשר פונקציית החזקה מוגדרת ע"י ענף הראשי של הלוג, כלומר: $a^z = e^{z \cdot \text{Log}(a)}$.

(10) הוכיחו ישירות כי העתקה $\sqrt{z}$ איננה רציפה בתחום $\mathbb{C}$ אם מגדירים את $\sqrt{z}$ באופן הבא: $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ כאשר $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

(11) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\log(\log(-1))$.

(12) נניח כי $\log(z)$ זה ענף רציף של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy, x \geq 0, y = \sin(x)\}$, $\log(1) = 0$, ונניח שבענף זה מתקיים $\log(i)$, $\log(-i)$, $\log\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, $\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$: חשבו בענף זה את הערכים: $\log(-1)$, $\log(i)$, $\log(-i)$, $\log\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, $\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

(13) נגדיר $\log_\alpha(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z)$ כאשר $\alpha - 2\pi < \arg(z) \leq \alpha$.
 א. חשבו את הערכים: $\log_{2\pi}(1)$, $\log_\pi(1)$, $\log_0(1)$.
 ב. מצאו את התמונה של $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ תחת ההעתקה $\log_\pi(z)$.
 ג. מצאו את התמונה של $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ תחת ההעתקה $\log_0(z)$.

(14) יהיו $z_1, \dots, z_n$ מספרים מרוכבים כך ש- $\operatorname{Re}(z_k) > 0$ לכל $1 \leq k \leq n$ וגם $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_k) > 0$ לכל $1 \leq k \leq n$.
 הוכיחו כי $\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n) = \operatorname{Log}(z_1) + \dots + \operatorname{Log}(z_n)$, כאשר $\operatorname{Log}(z)$ זה הענף הראשי של הלוגריתם.

(15) יהי $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ויהי $y > 0$. חשבו את הגבול $\lim_{y \rightarrow 0} [\log(a + iy) - \log(a - iy)]$ עבור $a > 0$ ועבור $a < 0$.

(16) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt{z}$ ב- $\mathbb{C}$. כלומר, הראו שלא קיימת פונקציה אנליטית $h(z)$ ב- $\mathbb{C}$ כך ש- $h^2(z) = z$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

(17) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$ ב- $|z| < 1$ לכל $n \geq 2$.

(18) נניח כי $f(z)$, $g(z)$ הם שני ענפים אנליטיים של הלוג בקבוצה פתוחה וקשירה U . הוכיחו כי קיים קבוע k שלם כך ש- $f(z) - g(z) = 2\pi i k$ לכל $z \in U$.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \frac{\pi}{4} \quad \text{ב. } -\frac{\pi}{2}$$

$$(2) \quad \text{א. } \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} \quad \text{ב. } \ln(2) - \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \quad e^{\frac{\pi}{4}i}, k=0; \quad e^{\frac{5\pi}{4}i}, k=1$$

$$(4) \quad \left\{ e^{-\pi \frac{4k+1}{2}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(5) \quad \left\{ 2^{\frac{1}{9}} e^{-\frac{2\pi k}{50}} e^{i\left(\frac{\ln(2)}{50} + \frac{2\pi k}{9}\right)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(6) \quad \left\{ e^{-5 \cdot \frac{\pi}{4}} e^{i \cdot 5 \ln(\sqrt{8})}, e^{-5 \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)} e^{i \cdot 5 \ln(\sqrt{8})}, e^{-5 \left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right)} e^{i \cdot 5 \ln(\sqrt{8})}, \dots \right\}$$

$$(7) \quad \ln(r) + i \cdot \theta$$

$$(8) \quad \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$$

$$(9) \quad a^{\operatorname{Re}(z)}$$

$$(10) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(11) \quad \ln(\pi + 2\pi k) + i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m \right) \quad m \in \mathbb{Z}, k \geq 0$$

$$\ln(-\pi - 2\pi k) + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m \right) \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$(12) \quad -\pi i, -\frac{3\pi}{2}i, -\frac{\pi}{2}i, \ln\left(\frac{5\pi}{2}\right), \ln\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2\pi i$$

$$(13) \quad \text{א. } 2\pi i, 0, 0 \quad \text{ב. } \ln(r) + i\theta, \quad -\infty < \ln(r) < \infty, \quad \theta < r < \infty$$

$$\ln(r) + i\theta, \quad -\infty < \ln(r) < \infty, \quad 0 < \theta \leq 2\pi$$

$$(14) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(15) \quad 2\pi i$$

$$(16) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(17) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(18) \quad \text{הוכחה.}$$

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 4 - אינטגרציה מרוכבת

תוכן העניינים

32	1. אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת
33	2. אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת
34	3. משפט הערכה
35	4. משפט קושי גורסט
36	5. נוסחת האינטגרל של קושי
39	6. נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי
41	7. פונקציות קדומות

אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx$ לכל $m, n \in \mathbb{Z}$.

(2) לכל $z \in \mathbb{C}$, המקיים $\operatorname{Re}(z) < 0$, פתרו את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{zt} dt$.

תשובות סופיות:

$$\begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{z} \quad (2)$$

אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^n dz$, כאשר $n \in \mathbb{Z}$.

(2) חשבו את האינטגרל $\int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$, כאשר $\gamma = \{z = 2e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

(3) חשבו את האינטגרל $\int_{\gamma} (z-1) dz$, כאשר $\gamma = \{z = 1 + e^{i\theta} \mid \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$.

(4) חשבו את האינטגרל $\oint_{\gamma} \pi e^{\pi \bar{z}} dz$, כאשר γ מסילת קווים ישרים,

העוברת בנקודות $0 \rightarrow 1 \rightarrow 1+i \rightarrow i \rightarrow 0$.

(5) חשבו את אורך המסילה $\gamma = [z_1, z_2]$, כאשר $\gamma = [z_1, z_2]$ היא מסילת הקו הישר המחברת בין z_1 ל- z_2 .

(6) חשבו את אורך המסילה $\gamma(t) = \{(t - \sin t) + i(1 - \cos t) \mid 0 < t < 1\}$.

(7) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \bar{z} dz$.

תשובות סופיות:

(1)
$$\begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

(2) $2\pi i - 4$

(3) 0

(4) $4e^{\pi} - 4$

(5) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(6) ≈ 0.48

(7) $2\pi i$

אי-שיויונות אינטגרליים (משפט הערכה):

שאלות:

הוכיחו את אי השווינויות הבאים:

$$(1) \quad \left| \int_C \frac{z^3}{z^2+1} dz \right| \leq \frac{81\pi}{8} \quad \text{כאשר } C: \{ |z|=3, \operatorname{Re}(z)>0 \}$$

$$(2) \quad \left| \int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1} dz \right| \leq \frac{6\pi}{8}$$

$$(3) \quad \left| \int_C e^{z^2} dz \right| \leq \sqrt{8} \quad \text{כאשר } C \text{ הינה מסילת הקו הישר מ-} 0 \text{ עד } 2+2i.$$

$$(4) \quad \left| \int_C \frac{z^2}{\sin(z)} dz \right| \leq \frac{\pi^2}{2} + 2 \quad \text{כאשר } C \text{ הוא הקטע הישר המתחיל בנקודה } \frac{\pi}{2} + i$$

$$\text{ומסתיים בנקודה } \frac{\pi}{2} - i.$$

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

משפט קושי גורסט:

שאלות:

$$(1) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^{2+\frac{i\pi}{4}} e^z dz.$$

$$(2) \quad \text{הוכיחו כי } \int_4^{1+i} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \sqrt[4]{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - 2 + i\sqrt[4]{2} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

כאשר $\sqrt{z}$ הינו הענף העיקרי של פונקציית השורש.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \frac{e^2[1+i]}{\sqrt{2}} - 1$$

$$(2) \quad \text{הוכחה.}$$

נוסחת האינטגרל של קושי:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z} dz$.

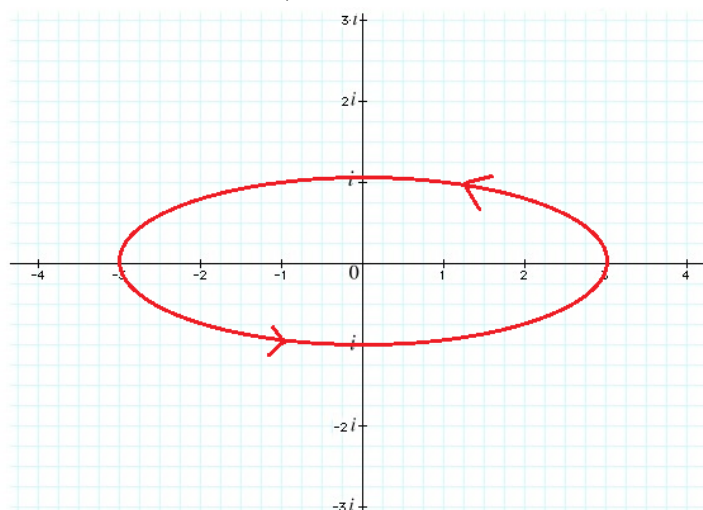
(2) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2} dz$.

(3) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-2|=1} \frac{\sin(z^2)}{z(z-2)} dz$.

(4) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{e^z + e^{-z}}{z(z-2)(z-3)} dz$.

(5) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1.5} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)} dz$.

(6) חשבו את האינטגרל $\oint_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z(z-2)(z-4)} dz$, עבור המסילה שבציור:



(7) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=2} \frac{z^2 - e^{z^2}}{z(z^2 - 1)(z + 3)} dz$

(8) תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית בתחום D .
נניח כי $z_0 \in D$ וכי הדיסק $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ מוכל כולו ב- D .
הוכיחו כי $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta}) d\theta$

(9) חשבו את האינטגרל $\int_0^\pi \frac{1}{2 + \sin(2\theta)} d\theta$

(10) הוכיחו: $n \in \mathbb{N} : \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$

(11) חשבו את האינטגרל $\int_C \frac{z}{z^2 + 1} dz$ כאשר $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$

(12) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)}$ כאשר $a > b > 0$

(13) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{Log}\left(1 + \frac{z}{3}\right)}{z} dz$

(14) תהי $f(z) = u + iv$ הולומורפית בתחום $|z| < 1$ כך ש- $u^2(0) = v^2(0)$.
הוכיחו כי לכל $0 < r < 1$ מתקיים $\int_0^{2\pi} u^2(re^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} v^2(re^{i\theta}) d\theta$

(15) תהי $f(z) = u + iv$ הולומורפית בתחום $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
הוכיחו כי לכל $0 < r < 1$ ולכל $0 < |a| < r$ מתקיים

$$\oint_{|z|=r} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z - a} f(z) dz = \pi i \cdot \left(\left[a + \frac{r^2}{a} \right] f(a) - \frac{r^2}{a} \cdot f(0) \right)$$

תשובות סופיות:

$$2\pi i \quad (1)$$

$$2\pi e^2 i \quad (2)$$

$$2\pi i \cdot \frac{\sin(2^2)}{2} \quad (3)$$

$$2\pi i \cdot \frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\pi i - 2\pi e i \quad (5)$$

$$-\frac{\sin(2)\pi i}{2} \quad (6)$$

$$\pi i \cdot \left(\frac{17}{12} - \frac{3e}{4} \right) \quad (7)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (8)$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (9)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (10)$$

$$\pi i \quad (11)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (12)$$

$$0 \quad (13)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (14)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (15)$$

נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin(z)}{(z-i)^3} dz$.

(2) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3} dz$.

(3) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2} dz$.

(4) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)} dz$.

(5) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3} dz$.

(6) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=6} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)} dz$.

(7) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)^2(z-4)} dz$.

תשובות סופיות:

$$\frac{\pi}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \quad (1)$$

$$-\pi i \quad (2)$$

$$-2\pi i \cdot \sin(\pi) \quad (3)$$

$$-\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}} \pi i \quad (4)$$

$$-2\pi^2 i \quad (5)$$

$$-\frac{\pi i}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \quad (6)$$

$$0 \quad (7)$$

פונקציות קדומות:

שאלות:

(1) האם הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C} \setminus \{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

(2) האם הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^n}$ ($n \geq 2$) אנליטית בתחום $\mathbb{C} \setminus \{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

(3) האם הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$? האם יש לה קדומה שם?

(4) האם הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$? האם יש לה קדומה שם?

(5) הוכיחו כי לפונקציה $f(z) = \frac{1}{z(z^2 - \pi^2)}$ יש קדומה בתחום $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \pi\}$.

(6) נסמן $I = \int_{\Gamma} \frac{2z}{z^2 + 1} dz$ כאשר $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ בכיוון החיובי.

א. האם לאינטגרנד $\frac{2z}{z^2 + 1}$ יש פונקציה קדומה בתחום פשוט קשר המכיל את Γ ?
ב. חשבו את I .

(7) נניח כי a, b מספרים מרוכבים בחצי המישור השמאלי, כלומר $\operatorname{Re}(a) < 0, \operatorname{Re}(b) < 0$.
הוכיחו כי $|e^a - e^b| < |a - b|$, $(a \neq b)$.

(8) נניח כי $f(z), g(z)$ פונקציות שלמות המקיימות $f^2(z) + g^2(z) = 1$ לכל $z \in \mathbb{C}$. הוכיחו כי קיימת פונקציה שלמה $h(z)$ כך שמתקיים: $f(z) = \cos(h[z]) \mid g(z) = \sin(h[z])$.

תשובות סופיות:

- (1) $2\pi i$
- (2) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ לכל מסלול סגור γ המוכל בתחום Ω .
- (3) π
- (4) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ לכל מסלול סגור בתחום.
- (5) הוכחה.
- (6) א. לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ לכל מסלול סגור בתחום. ב. $2\pi i$
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 5 - טורים

תוכן העניינים

43	1. טורים מספריים
44	2. קריטריון קושי-הדמרד
45	3. טורים כלליים
46	4. מבחן ויירשטראס להתכנסות במידה שווה
47	5. טורי טיילור ומקלורן
48	6. טורי לורן

טורים מספריים:

שאלות:

- (1) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$.
- (2) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin(in)}{3^n}$.
- (3) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+i}{\sqrt{5}} \right)^n$.
- (4) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2+i^n}$.
- (5) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + i^n}$.

תשובות סופיות:

- (1) מתבדר.
- (2) מתכנס.
- (3) מתבדר.
- (4) מתבדר.
- (5) מתכנס.

קריטריון קושי – הדמרד:

שאלות:

$$(1) \quad \text{מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור} \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$$

$$(2) \quad \text{מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{in} \right)^n$$

$$(3) \quad \text{מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (2n+1)} (z-3n)^n$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad R=1$$

$$(2) \quad R=\infty$$

$$(3) \quad R=3$$

טורים כלליים:

שאלות:

- (1) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$.
- (2) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(1-i)^n}$.
- (3) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (z-1)^n}$.
- (4) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$.
- (5) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$.

תשובות סופיות:

- (1) $|z| > 1$
- (2) $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (3) $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (4) $2 < |z| < 4$
- (5) $\operatorname{Re}(z) < 0$

מבחן ויירשטראס להתכנסות במידה שווה:

שאלות:

(1) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ מתכנס במידה שווה ב- $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ כאשר $0 < r < 1$.

(2) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ מתכנס במידה שווה ב- $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

(3) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2 - 1)^n}$ מתכנס במידה שווה ב- $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 2\}$.

(4) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{z^n + 1}$ מתכנס במידה שווה ב- $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ כאשר $0 < r < 1$.

(5) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ מתכנס במידה שווה ב- $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 2\}$,

(כאשר n^{-z} מוגדרת על ידי הענף הראשי של הלוג).

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

טורי טיילור ומקלורן:

שאלות:

(1) מצאו טור טיילור עבור $f(z) = \sin(z+1)$ סביב $z=0$ ומצאו תחום התכנסות.

(2) מצאו טור טיילור עבור $f(z) = \frac{1}{z}$ סביב $z=i$ וציינו את רדיוס ההתכנסות.

(3) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{2i}{2+i+z}$ סביב $z_0 \neq -(2+i)$ בתחום $|z-z_0| < |2+i+z_0|$.

(4) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$ לטור חזקות סביב $z_0 \neq 1$ בתחום $|z-z_0| < |1-z_0|$.

(5) נניח כי $f(z)$ שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ ומתקיים $f'(0)=1$.

חשבו את $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{f(z)} dz$.

תשובות סופיות:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos(1) \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \sin(1) \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \right) \quad z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

$$f(z) = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{i} \right)^n (z-i)^n \quad |z-i| < 1 \quad (2)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2i(-1)^n}{(2+i+z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \quad (3)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(n+1)(n+2)}{(1-z_0)^{n+3}} (z-z_0)^n \quad (4)$$

$$2\pi i \quad (5)$$

טורי לורן:

שאלות:

(1) פתחו את הפונקציה לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בכל התחומים האפשריים $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

(2) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $|z| < 2$ ובתחום $|z| > 2$.

(3) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = -1$ בתחומים הבאים: $0 < |z+1| < 2$ ו- $|z+1| > 2$.

(4) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = -3$ בכל התחומים האפשריים.

(5) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $1 < |z| < 3$. רמז: פירוק לשברים חלקיים.

(6) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $|z| > 3$. רמז: פירוק לשברים חלקיים.

(7) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $|z| < 1$.

(8) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $|z| < 1$ ומצאו את המקדם a_{-1} .

(9) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0 = i$ בתחום $0 < |z-i| < 2$ ומצאו את המקדם a_{-1} .

(10) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0 = i$ בתחום $|z-i| > 2$.

(11) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-4)}$ לטור לורן סביב $z_0 = 1$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $z = 5$.

(12) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $1-3i$.

(13) נניח כי $|a| < 1$ ונגדיר את הפונקציה $f(z) = \frac{a}{z-a}$ (כאשר a מספר ממשי).

א. פתחו פונקציה זו לטור לורן בטבעת $|a| < |z| < \infty$.

ב. הוכיחו את הזהות $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(n\theta) = \frac{a \cos(\theta) - a^2}{1 - 2a \cos(\theta) + a^2}$.

(14) תהי $a \in \mathbb{C}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ונניח כי

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = 0$$

הוכיחו כי לכל $r > 0$ מתקיים $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz$.

(15) נסמן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ פיתוח לטור לורן של $f(z) = \frac{z}{e^{z^2} - 1}$ סביב $z_0 = 0$ בתחום $0 < |z| < r$.

א. מצאו מהו ה- r המקסימלי.

ב. מצאו את a_n לכל $n \leq 4$.

הערה: תרגיל זה דורש ידע בסיווג של נקודות סינגולריות.

(16) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$.

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$.

(17) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$.

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$.

תשובות סופיות:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1 \quad (1)$$

$$f(z) = -\left(\frac{1}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad |z| > 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad |z| < 2 \quad (2)$$

$$f(z) = -\left(\frac{2}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n \quad |z| > 2$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z+1)^{n-1} \quad 0 < |z+1| < 2 \quad (3)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z+1)^{n+2}} \quad |z+1| > 2$$

$$f(z) = -\frac{1}{(z+3)} \sum_{n=0}^{\infty} (z+3)^n \quad 0 < |z+3| < 1 \quad (4)$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+3)^n} \quad |z+3| > 1$$

$$f(z) = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^n} \quad 1 < |z| < 3 \quad (5)$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{z^{n+1}} \quad |z| > 3 \quad (6)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6 \cdot 3^n} \right] z^n \quad |z| < 1 \quad (7)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad |z| < 1 \quad (8)$$

$$a_{-1} = 0$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1} (z-i)^{n-1} \quad 0 < |z-i| < 2 \quad (9)$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2i}$$

$$f(z) = \frac{1}{(2-i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n \quad 2 < |z-i| \quad (10)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^{n+2}} \quad |z-1| > 3 \quad (11)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad |z| > 3 \quad (12)$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} \quad |a| < |z| < \infty \quad \text{א.} \quad (13)$$

ב. הוכחה.

(14) הוכחה.

$$r = \sqrt{2\pi} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{ב. } a_4 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{12}, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_0 = 0, \quad a_{-1} = 1, \quad \forall n \leq -2 \quad a_n = 0.$$

$$\frac{\pi i}{12} \quad (16)$$

$$2\pi i \quad (17)$$

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 6 - נקודות סינגולריות

תוכן העניינים

52	1. אפסים של פונקציות אנליטיות
54	2. מיון נקודות סינגולריות

אפסים של פונקציות אנליטיות:

שאלות:

- (1) קבעו את סדר האפס של הפונקציה $f(z) = z \sin(z)$ בנקודה $z = 0$.
- (2) קבעו את סדר האפס של הפונקציה $f(z) = z \sin(z^3)$ בנקודה $z = 0$.
- (3) נניח כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר n .
 נניח כי הפונקציה $g(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר m .
 הוכיחו כי הפונקציה $h(z) = f(z)g(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר $n+m$.
- (4) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $h(z) = z^{20} \sin(z)$ בנקודה $z_0 = 0$.
- (5) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $f(z) = e^{\sin(z)} - \sin^2(z) - 1$ בנקודה $z_0 = 0$.
- (6) נניח כי לפונקציה $f(z)$ יש אפס מסדר 7 בנקודה $z_0 = 0$.
 נניח כי לפונקציה $g(z)$ יש אפס מסדר 3 בנקודה $z_0 = 0$.
 מצאו את סדר האפס של הפונקציה $h(z) = f(z) + g(z)$.
- (7) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $h(z) = 6 \sin(z^3) + z^{12}(z^6 - 6)$ בנקודה $z_0 = 0$.
- (8) הוכיחו כי לא קיימת $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

תשובות סופיות:

- (1) $N = 2$
- (2) $N = 2$
- (3) הוכחה.
- (4) $N = 21$
- (5) $N = 1$
- (6) $N = 3$
- (7) $N = 3$
- (8) הוכחה.

מיון נקודות סינגולריות:

שאלות:

(1) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

(2) נניח כי $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו- $g(z)$ אנליטיות בסביבת $z=0$.

נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 7 של $f(z)$.

נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 11 של $g(z)$.

מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב- $z=0$?

(3) נניח כי $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו- $g(z)$ אנליטיות בסביבת z_0 .

נניח כי z_0 זה אפס מסדר n של $f(z)$.

נניח כי z_0 זה אפס מסדר m של $g(z)$.

מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב- z_0 ? חלקו למקרים $n \geq m$ ו- $n < m$.

א. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^2}$.

ב. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

(4) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$.

(5) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$.

(6) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{1}{e^{-z}-1} + \frac{1}{z}$.

(7) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

(8) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{1}{z^2-1} \cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right)$.

(9) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$.

(10) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$. האם הן מבודדות?

(11) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = z \cot(z)$.

(12) נתון כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

נניח כי 0 זה קוטב מסדר m של $f(z)$ ובנוסף נניח כי $-1 \notin f[\mathbb{C} \setminus \{0\}]$.

מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות של $g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$.

(13) מצאו את הקטבים והאפסים בתחום $|z| < 4$ של הפונקציה $f(z) = \frac{(z-2)^2}{(e^{2z}-1)^2 z^3}$.

(14) מיינו את הנקודות $z=0$ ו- $z = \frac{\pi}{4}$ עבור $f(z) = \frac{\tan(z)}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}$.

(15) תהיינה $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציות שלמות שאינן קבועות.

נניח כי לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)| \leq |g(z)|$.

א. הוכיחו שכל נקודה סינגולרית של $\frac{f(z)}{g(z)}$ הינה סליקה.

ב. הוכיחו כי $f(z) = c \cdot g(z)$ כאשר c קבוע המקיים $|c| \leq 1$.

(16) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$.

(17) הוכיחו כי הנקודה $z_0 = i$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$.

(18) תהי $f(z): D \rightarrow \mathbb{C}$ אנליטית כאשר $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < 1\}$.

נניח כי מתקיים $|z - z_0|^a |f(z)| \leq 1$ לכל $z \in D$ עבור $0 \leq a < 1$.

הוכיחו כי z_0 נקודה סינגולרית סליקה של $f(z)$.

(19) (אתגר)

נתונה $f(z)$ אנליטית בתחום $0 < |z| < 1$ המקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n!}$.
הוכיחו כי $z=0$ זו נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$.

(20) (אתגר)

הוכיחו כי אם z_0 זה קוטב של $f(z)$ אז היא בהכרח עיקרית של $g(z) = e^{f(z)}$.

רמז: רשמו את $f(z)$ באופן הבא $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ כאשר $\varphi(z_0) = r_0 e^{i\alpha}$.

התבוננו בסדרות הבאות: $z_n = z_0 + \frac{1}{n} e^{i\frac{\alpha}{m}}$, $w_n = z_0 + \frac{1}{n} e^{i\frac{\pi+\alpha}{m}}$.

תשובות סופיות:

- (1) $z=1$ קוטב מסדר 1.
- (2) $z=0$ קוטב מסדר 4.
- (3) אם $n \geq m$ אז z_0 נקודה סינגולרית מסוג סליקה של $h(z)$.
ואם $n < m$ אז z_0 קוטב מסדר $m-n$ של $h(z)$.
- (4) $z=0$ עיקרית.
- (5) $z=0$ עיקרית.
- (6) $z_k = 2\pi i k$ קטבים מסדר 1.
- (7) $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ קטבים מסדר 1.
- (8) $z = -1$ עיקרית ו- $z=1$ קוטב מסדר 1.
- (9) $z=2$ עיקרית.
- (10) $z=0$ לא מבודדת ו- $z_k = \frac{1}{\pi k}$ קטבים מסדר 1.
- (11) $z=0$ סליקה ו- $z_k = \pi k \neq 0$ קטבים מסדר 1.
- (12) $z=0$ סליקה.
- (13) $z=2$ אפס מסדר 2, $z=0$ קוטב מסדר 5, $z = \pm \pi i$ קטבים מסדר 2.
- (14) $z=0$ סליקה, $z = \frac{\pi}{4}$ קוטב מסדר 1.
- (15) א) הוכחה
ב) הוכחה
- (16) $z=0$ לא מבודדת.
- $z_k = \frac{1}{k}$ ($k \neq 0, 2, -2$) קטבים מסדר 1.
- $z = \pm \frac{1}{2}$ סליקות.
- (17) הוכחה.
- (18) הוכחה.
- (19) הוכחה.
- (20) הוכחה.

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 7 - חישוב אינטגרלים בעזרת משפט השארית

תוכן העניינים

58	1. מציאת שארית
60	2. אינטגרלים מרוכבים
64	3. מסילת חצי-קשת מעגלית
67	4. מסילת משולש פיצה
68	5. מסילת מעגל היחידה
70	6. מסילת חור מנעול
71	7. הלמה של זורדן
73	8. חצי מעגל מנוקב
75	9. שימושים של משפט השארית בהתמרות אינטגרליות
76	10. שארית באינסוף

מציאת שארית:

שאלות:

חשבו את השאריות של הפונקציות בנקודות הבאות:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+3}{z+2}, z=-2\right) \quad (1)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+9}, z=3i\right) \quad (2)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=1\right) \quad (3)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=-1\right) \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{נניח כי לפונקציה } \frac{f(z)}{g(z)} \text{ יש קוטב פשוט ב-} z_0 \text{ כאשר ונניח כי } g'(z_0) \neq 0.$$

$$\text{הוכיחו כי } \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z}, 0\right) \quad (6)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\sin(z+1)}{z}, 0\right) \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה } f(z) = \frac{\tan(z)}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}$$

$$(9) \quad \text{חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה } f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^3(z - \pi)}$$

- (10) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה בעלת n אפסים בדיוק. הוכיחו שכל הנקודות הסינגולריות של $\frac{f'(z)}{f(z)}$ הן קטבים פשוטים וחשבו את השאריות בנקודות אלו.

תשובות סופיות:

- (1) 1
(2) $\frac{1}{6i}$
(3) $\frac{3}{8}$
(4) $-\frac{3}{8}$
(5) הוכחה.
(6) 1
(7) $\sin(1)$
(8)
$$\operatorname{Res}\left[f(z), \frac{\pi}{2} + \pi k\right] = -\frac{1}{\left[\frac{\pi}{2} + \pi k\right]\left[\frac{\pi}{4} + \pi k\right]}$$

(9)
$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = -\frac{1}{2\pi} \quad \operatorname{Res}[f(z), \pi] = \frac{2}{\pi^3}$$

(10)
$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = m_k$$
 כאשר z_k אפס מסדר m_k של $f(z)$.

אינטגרלים מרוכבים :

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\oint_{|z|=1} z \tan(\pi z) dz \quad (1)$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz \quad (2)$$

$$\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz \quad (3)$$

$$\oint_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz \quad (4)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) + e^{z^2} \cos(z) dz \quad (5)$$

(6) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה.

הוכיחו כי לכל מסלול C פשוט וסגור שאינו חותך את הראשית, מתקיים $\oint_C f\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0$.

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz \quad (a > 1) \quad (7)$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{(1+z)^5 \sinh(z)}{z^6} dz \quad (8)$$

$$\oint_{|z|=5} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2} dz \quad (9)$$

$$\oint_{|z|=6} \cot(z) dz \quad (10)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin(z) \sin\left(\frac{3}{z}\right) \cos\left(e^{z^2+\pi} + \ln(2)\right) dz \quad (11)$$

(12) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ שם יש לה אפס מסדר 2 ומתקיים $f''(0)=7$.

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{f(z)} dz \quad \text{חשבו}$$

$$\oint_{|z|=1} z^4 \sin(\bar{z}) dz \quad (13)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin(z) \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz \quad (14)$$

$$(15) \quad f(z) = \frac{1}{\cos(z)-1} \quad \text{חשבו את המקדמים של החזקות השליליות בפיתוח של}$$

לטור לורך סביב $z_0=0$ בתחום $0 < |z| < 2\pi$.

הערה: אם $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור לורך של $f(z)$ בתחום $R_1 < |z-z_0| < R_2$ אז ניתן

$$\text{לקבל את המקדמים ע"י הנוסחה} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad \text{כאשר } R_1 < r < R_2.$$

(16) הוכיחו את עקרון הארגומנט:

אם $f(z)$ אנליטית בתחום D פרט למספר סופי של קטבים ורציפה על

$$\text{השפה } \gamma \text{ ואינה מתאפסת שם על השפה אזי } \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

N - מספר האפסים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D .

P - מספר הקטבים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D .

$$(17) \quad \text{אם } n \in \mathbb{N} \text{ ו- } r > 0 \text{ כך ש- } n < r^2 < n+1 \text{ חשבו את האינטגרל } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z}{e^{2\pi i z^2} - 1} dz$$

$$(18) \text{ חשבו } \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz$$

הערה: $\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz \stackrel{\text{definition}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-iR}^{iR} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz$ כאשר המסילה באינטגרל הימני היא מסילת הקו הישר מ- $-iR$ ל- iR .

תשובות סופיות:

$$\oint_{|z|=1} z \tan(\pi z) dz = 0 \quad (1)$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right) \quad (2)$$

$$\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{e} \right) \quad (3)$$

$$\oint_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = -\frac{\pi i}{3} \quad (4)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) + e^{z^2} \cos(z) dz = 0 \quad (5)$$

(6) הוכחה.

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz = \frac{\pi i}{2} \quad (7)$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{(1+z)^5 \sinh(z)}{z^6} dz = \frac{267}{20} \pi i \quad (8)$$

$$\oint_{|z|=5} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2} dz = \pi [-3i \cdot e^i + 2i - e] \quad (9)$$

$$\oint_{|z|=6} \cot(z) dz = 6\pi i \quad (10)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin(z) \sin\left(\frac{3}{z}\right) \cos(e^{z^2+\pi} + \ln(2)) dz = 0 \quad (11)$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{f(z)} dz = \frac{4\pi i}{7} \quad (12)$$

$$\oint_{|z|=1} z^4 \sin(\bar{z}) dz = \frac{2\pi i}{5!} \quad (13)$$

$$\oint_{|z|=1} \sin(z) \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0 \quad (14)$$

$$a_{-1} = -2, \quad a_{-2} = -2, \quad a_n = 0 \text{ for } n \leq -3 \quad (15)$$

(16) הוכחה.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z}{e^{2\pi i z^2} - 1} dz = 2n+1 \quad (17)$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz = \frac{\pi i}{3e} \quad (18)$$

מסילת חצי קשת מעגלית:

שאלות:

בכל התרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$$C_R = \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

$$\gamma = \{z = x \mid -R \leq x \leq R\}$$

(1) חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיף הקודם כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

(2) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2} \quad \text{הוכיחו כי}$$

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2}$

$$(4) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$$

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1} dx$$

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx$$

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx$$

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx$$

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)}$$

תשובות סופיות:

$$\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz = \pi \quad \text{א) (1)}$$

(ב) הוכחה.

(ג) הוכחה.

$$\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{א) (2)}$$

(ב) הוכחה.

(ג) הוכחה.

$$\oint_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = \pi\sqrt{2} \quad \text{א) (3)}$$

(ב) הוכחה.

(ג) הוכחה.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \frac{3\pi}{8} \quad \text{(4)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1} dx = \frac{14\pi}{3} \quad \text{(5)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{(6)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx = -\frac{\pi}{27} \quad \text{(7)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx = \frac{\pi}{6} \quad \text{(8)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)} = \frac{5}{96}\pi \quad \text{(9)}$$

מסילת משולש פיצה:

שאלה:

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^{2016}} dx = \frac{\pi}{2016} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2016}\right)} \quad \text{כי הוכיחו כי}$$

רמז: התבוננו בפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^{2016}}$ ובגזרת מעגל בזווית $\frac{2\pi}{2016}$.

תשובה סופית:

(1) הוכחה.

מסילת מעגל היחידה:

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos(\theta))^2} d\theta \quad (1)$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{2 + \cos(3x)} dx \quad (2)$$

$$(3) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cos(x) + b \sin(x) + c} dx \quad \text{עבור הפרמטרים}$$

הממשיים a, b, c המקיימים $c > \sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

הערה: ניתן להשתמש בעובדה כי $|\sqrt{c^2 - 1} - c| < 1$

$$(4) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^\pi \frac{1}{(a + b \cos \varphi)^2} d\varphi \quad \text{עבור } a > b > 0$$

$$(5) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin^2 x} dx \quad \text{עבור } |a| > 1$$

$$(6) \quad \text{חשבו לכל } n \in \mathbb{N} \text{ את } \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta)^n \cos(n\theta) d\theta$$

תשובות סופיות:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos(\theta))^2} d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{2 + \cos(3x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

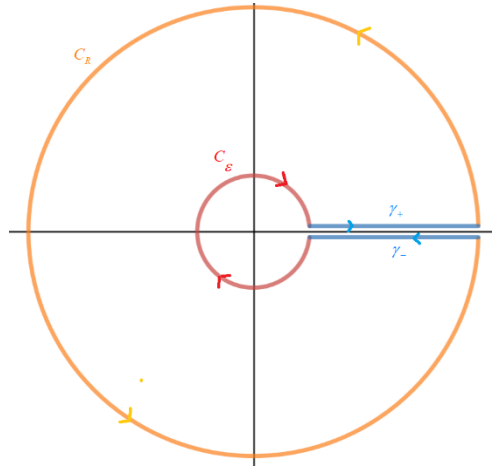
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cos(x) + b \sin(x) + c} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - 1}} \quad (3)$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{(a + b \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{\pi ab}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + a}} \quad (5)$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta)^n \cos(n\theta) d\theta = 2\pi \quad (6)$$

מסילת חור מנעול:



שאלות:

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \pi \quad \text{הוכיחו כי}$$

הדרכה:

נגדיר את המסלולים (כאשר $R > 1$ ו- $0 < \epsilon < 1$).

$$C_R = \{z = R e^{i\theta} \mid 0 < \theta < 2\pi -\}$$

$$C_\epsilon = \{z = \epsilon e^{i\theta} \mid 0 < \theta < 2\pi -\}$$

$$\gamma_+ = \{z = x e^{0i} \mid x: \epsilon \rightarrow R\}$$

$$\gamma_- = \{z = x e^{2\pi i} \mid x: R \rightarrow \epsilon\}$$

א. הוכיחו כי $\oint_{\gamma_+ + C_R + \gamma_- + C_\epsilon} \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)} dz = 2\pi$ כאשר $\sqrt{z}$ מוגדר בתחום $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

ב. הוכיחו כי $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)} dz = 0$

ג. הוכיחו כי $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)} dz = 0$

ד. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \pi$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

הלמה של ז'ורדן:

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים על ידי שימוש בהלמה של ז'ורדן:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx \quad (1)$$

הדרכה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx \right\} \quad \text{א. הוכיחו כי}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e} \quad \text{ב. הוכיחו כי}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9} dx \quad (2)$$

הדרכה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin(x)}{x^4+10x^2+9} dx = \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)e^{ix}}{x^4+10x^2+9} dx \right\} \quad \text{א. הוכיחו כי}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)e^{ix}}{x^4+10x^2+9} dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e^3} \right) \cdot i \quad \text{ב. הוכיחו כי}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^4+1} dx \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos(ax)}{(x^2+1)^2} dx \quad (4)$$

תשובות סופיות:

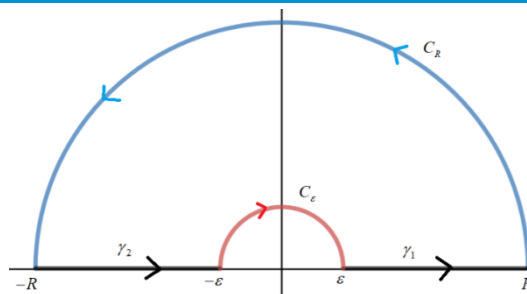
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e} \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x)\sin(x)}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e^3} \right) \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^4 + 1} dx = 0 \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos(ax)}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4} (1-a) e^{-a} \quad (4)$$

מסילת חצי מעגל מנוקב:



בתרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$$\begin{aligned} C_R &= \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\} & \gamma_1 &= \{z = x \mid \epsilon \leq x \leq R\} \\ C_\epsilon &= \{z = \epsilon e^{i\theta} \mid \theta: \pi \rightarrow 0\} & \gamma_2 &= \{z = x \mid -R \leq x \leq -\epsilon\} \\ \gamma &= \gamma_1 + C_R + \gamma_2 + C_\epsilon \end{aligned}$$

שאלות:

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi \quad \text{הוכיחו כי}$$

הדרכה:

$$א. \quad \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - e^{i2x}}{2x^2} \right\} \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$ב. \quad \oint_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{והסבירו מדוע} \quad f(z) = \frac{1 - e^{i2z}}{2z^2}$$

$$ג. \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\epsilon} f(z) dz = -\pi \quad \text{ו} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6(x)}{x^6} dx \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3 + \pi^2 x} dx \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(5) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(\alpha x)}{x^2 (x^2 + \beta^2)} dx \quad \text{לכל } \alpha, \beta > 0.$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6(x)}{x^6} dx = \frac{88}{5 \cdot 2^5} \pi \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3 + \pi^2 x} dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{e^{-\pi}}{\pi} \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx = \pi \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(\alpha x)}{x^2 (x^2 + \beta^2)} dx = \frac{\pi}{\beta^2} \left(\alpha - \frac{1 - e^{-\alpha\beta}}{\beta} \right) \quad (5)$$

שימושים של משפט השארית בהתמרות אינטגרליות:

שאלות:

$$(1) \quad \text{נתונה } F(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \text{ מנת פולינומים כאשר } \deg(q) \geq \deg(p) + 1.$$

$$\text{הוכיחו כי } L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma - iR}^{\sigma + iR} e^{st} F(s) ds = \sum_{k=1}^n \text{Res}[e^{st} F(s), s_k]$$

כאשר s_k אלו הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $F(s)$ והקו $\text{Re}(s) = \sigma$ נמצא מצד ימין לכל הנקודות הסינגולריות.

$$(2) \quad \text{חשבו התמרת לפלס הפוכה של } F(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 5)^2}.$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(2) \quad f(t) = \frac{e^{-t}}{16} (\sin(2t) - 2t \cos(2t)).$$

שארית באינסוף:

שאלות:

(1) נניח כי ∞ הינה נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$.

$$\text{הוכיחו כי } \operatorname{Res}\left[f(z), \infty\right] = -\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right].$$

(2) נניח כי $f(z)$ אנליטית במישור המרוכב פרט למספר סופי של נקודות

$$z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}.$$

הוכיחו כי:

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_1\right] + \operatorname{Res}\left[f(z), z_2\right] + \dots + \operatorname{Res}\left[f(z), z_n\right] + \operatorname{Res}\left[f(z), \infty\right] = 0$$

$$(3) \text{ חשבו } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=10} \frac{e^{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)} \cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 - 1} dz$$

$$(4) \text{ חשבו } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 - 4} dz$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

$$(3) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=10} \frac{e^{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)} \cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 - 1} dz = 0$$

$$(4) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^4 - 1} dz = -\frac{\sin\left(\frac{1}{2i}\right)}{2i}$$

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 8 - משפט ליוביל

תוכן העניינים

1. משפט ליוביל 77

משפט ליוביל:

רקע:

משפט:

אם $f(z)$ פונקציה שלמה (אנליטית בכל $\mathbb{C}$) וחסומה ב- $\mathbb{C}$ (כלומר קיים $M > 0$ כך ש- $|f(z)| < M$ $\forall z \in \mathbb{C}$) אז $f(z)$ פונקציה קבועה.

שאלות:

(1) מצאו פונקציה שלמה, המקיימת את אי-השוויון $|\sin(z) - z \cdot f(z)| < 2$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

(2) הוכיחו כי קיים $z \in \mathbb{C}$ עבורו $|\cos(z)| > 1$ ע"י שימוש במשפט ליוביל.

(3) נתונה פונקציה שלמה $f(z) = u + iv$, המקיימת $v \leq 0$ (לכל z).

הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-i \cdot f(z)}$.

(4) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z) = u + iv$, המקיימות $u \leq 0$ (לכל z).

רמז: התבוננו בפונקציה $e^{f(z)}$.

(5) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z) = u + iv$, המקיימות $u \geq 0$ (לכל z).

רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-f(z)}$.

(6) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z) = u + iv$, המקיימות $v \geq 0$ (לכל z).

(7) נתונה פונקציה שלמה $f(z)$, המקיימת $|f(z)| \geq 1$ לכל z .

הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

רמז: התבוננו בפונקציה $\frac{1}{f(z)}$.

(8) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z) = u + iv$, המקיימות $v \leq 0$ (לכל z).

רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-i \cdot f(z)}$.

(9) הוכיחו כי כל הפונקציות השלמות $f(z)$, המקיימות $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq 4 + 5|z|^{\frac{4}{5}}$ הן פונקציות קבועות.

(10) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \geq e^{\operatorname{Re}(z)}$. הוכיחו שקיים קבוע C מרוכב, כך ש- $f(z) = C \cdot e^z$.

(11) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $f(0) = 0$ ו- $f(1) = 1$. הוכיחו שקיים C מרוכב, כך ש- $|f(c)| > 2$.

(12) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 2$. הוכיחו כי $f(z) \equiv 2$.

(13) נתון כי $f(z) = u + iv$ שלמה המקיימת $u \cdot v \geq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$. הוכיחו כי $f(z)$ פונקציה קבועה.

(14) נתון כי $f(z) = u + iv$ שלמה המקיימת $u \geq v$ לכל $z \in \mathbb{C}$. הוכיחו כי $f(z)$ פונקציה קבועה.

(15) האם קיימת פונקציה אנליטית בתחום $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ כך ש-

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad |f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}$$

הערה: ניתן להשתמש במשפט רימן אם $g(z)$ אנליטית בסביבה נקובה של z_0 וחסומה שם אז היא אנליטית גם ב- z_0 .
(הכוונה שניתן להגדיר אותה ב- z_0 כך שתהיה אנליטית שם).

(16) הוכח או הפרד: אם $f(z)$ שלמה שאינה קבועה אז קיים $z \in \mathbb{C}$ כך ש- $\operatorname{Re} f(z) > |f(z)|^2$.

(17) הוכיחו כי אם $f(z)$ שלמה שאינה קבועה התמונה $f[\mathbb{C}]$ צפופה ב- $\mathbb{C}$.
הגדרה: קבוצה $A \subseteq \mathbb{C}$ תקרא צפופה ב- $\mathbb{C}$ אם ורק אם לכל $z_0 \in \mathbb{C}$ ולכל $R > 0$ מתקיים $D(z_0, R) \cap A \neq \emptyset$.

- (18) ידוע כי קיימת פונקציה $T(z): \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow D(0,1)$ אנליטית המקיימת $T'(z) \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. הוכיחו כי כל פונקציה שלמה $f(z)$ המקיימת $f(z) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ לכל $z \in \mathbb{C}$ הינה פונקציה קבועה.
- (19) נניח כי $f(z)$ שלמה ומקיימת $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ לכל $z \in \mathbb{C}$. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

תשובות סופיות

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) ראו וידאו.

(5) ראו וידאו.

(6) ראו וידאו.

(7) הוכחה.

(8) ראו וידאו.

(9) הוכחה.

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

(14) הוכחה.

(15) לא קיימת.

(16) הוכחה.

(17) הוכחה.

(18) הוכחה.

(19) הוכחה.

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 9 - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. הקדמה	(ללא ספר)
2. טור פורייה ממשי	80
3. טור פורייה מרוכב	81
4. משפט פרסבל	82
5. רימן לבג	85
6. משפט דיריכלה	86
7. המשכה זוגית ואי זוגית	88
8. טור פורייה בקטע כללי	89

טור פורייה ממשי:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$.

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \sin(|x|)$.

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

תשובות סופיות:

$$\sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x) \quad (2)$$

$$\sin(|x|) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2kx) \quad (3)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx) \quad (4)$$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$.

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$.

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$.

(5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$.

תשובות סופיות:

$$x \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi \frac{(-1)^n}{in} + \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right\} e^{inx} \quad (2)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - 3(-1)^n \frac{\pi}{in} \right] e^{inx} \quad (3)$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{3}{\pi i (2k-1)} e^{i(2k-1)x} \quad (4)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4i} e^{ix} - \frac{1}{4i} e^{-ix} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - (2k)^2} e^{i[2k]x} \quad (5)$$

משפט פרסבל:

שאלות:

$$(1) \quad \text{באמצעות טור הפורייה } x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx), \text{ חשבו את הסכום } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$(2) \quad \text{נתון כי טור הפורייה הממשי של } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases} \text{ בקטע } [-\pi, \pi]$$

$$\text{הינו } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ הוכיחו כי } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

$$(3) \quad \text{נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ x + \pi & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = x$$

$$\text{מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$(4) \quad \text{מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases} \text{ ובאמצעותו}$$

$$\text{חשבו את הסכום } \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$(5) \quad \text{נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ e^{x^2} & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\text{נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- } f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}, \quad g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n} = \frac{1}{8}$$

(6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad -\pi \leq x < \pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi < x < 3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$.

(7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi, \pi]$ על ידי הנוסחה: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}} e^{inx}$.

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$.

(8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $p \neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

(9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} h^2 & h \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x \leq h \end{cases}$ בקטע $[-\pi, \pi]$

כאשר $0 \neq h \in [-\pi, \pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n \cos(2n)}{n^2}$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{32}$

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

תשובות סופיות:

$$\frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

$$\frac{\pi^2}{4} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx) \quad \text{ב.} \quad (6) \quad \text{א. ראו סרטון.}$$

ג. ≈ 0.769

$$8\pi \quad (7)$$

(8) הוכחה.

$$\frac{\pi^2 - 4}{4} \quad (9)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx} \quad \text{א.} \quad (10) \quad \text{ב. הוכחה.}$$

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

(1) חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x} \cos(\sqrt{|x|}) \sin(nx) dx$

(2) חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2 + 1} e^{i \cdot n^2 t} dt$

(3) הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{se^{s^2}}{\sqrt{s^2 + 2017}} e^{inx} dx \right) = 0$

תשובות סופיות:

(1) 0

(2) 0

(3) הוכחה.

משפט דיריכלה:

שאלות:

(1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$ לטור פורייה

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{רמז: הציבו } x = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2x}{\pi} & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור } 2\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi, 3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

$$\text{ג. הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

$$\text{ב. חשבו את הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\text{ג. חשבו את הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\text{ד. חשבו את הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \cos(ax)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר a

אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

$$\text{א. } \frac{1}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\pi a + \pi n} + \frac{1}{\pi a - \pi n} \right]$$

$$\text{ב. } \cot(\pi a) = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi a + \pi n} + \frac{1}{\pi a - \pi n}$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. ראו סרטון.

ב. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$ ג. הוכחה.

(3) א. $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

(4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0, \pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0 < x < \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos([2k-1]x) \text{ מתקיים}$$

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = 1$ בקטע $[0, \pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ והוכיחו כי:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin([2k-1]x) \text{ מתקיים } 0 < x < \pi \text{ א. לכל}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = -\frac{\pi}{4} \text{ ב.}$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0, 2\pi]$.

(2) תהי הפונקציה $f(x) = \min\{1, |x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2, 2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0, 2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?

שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 n^2}$.

(4) פתחו את $f(x) = |x|$ לטור פורייה בקטע $[-1, 1]$.

(5) פתחו את $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0, 2]$.

(6) מצאו טור קוסינוסים $f(x) = x$ בקטע $[0, 3]$.

(7) פתחו את $f(x) = \cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0, \pi]$.

תשובות סופיות:

$$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (1)$$

$$b_n = 0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1+4n^2\pi^2} e^{in\pi x} \quad \text{א.} \quad (3)$$

ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$ ב. ראו סרטון.

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(\pi[2k-1]x) \quad (4)$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right) \quad (5)$$

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right) \quad (6)$$

$$\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin([2k-1]x) \quad (7)$$

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 10 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

91	1. מבוא כללי
93	2. נוסחת כיווץ והזזה
95	3. נוסחת הנגזרת
96	4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה
98	5. נוסחת המומנט
100	6. נוסחת ההתמרה ההפוכה
(ללא ספר)	7. נוסחת התמרה כפולה
101	8. משפט פלנשראל
102	9. משפט הקונבולוציה

מבוא כללי:

שאלות:

$$(1) \quad \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(5) \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{bx} & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים הינה}$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right]$$

$$(6) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של}$$

$$(7) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(8) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{הינה } f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$$

$$(10) \quad f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של}$$

$$(11) \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} x & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{עבור } a > 0$$

$$(12) \quad \text{האם קיימת } f \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \text{ כך ש-} f(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \quad (2)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{2\sin(2\omega) - \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (5)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega) + i[\cos(\omega) - 1]}{\omega} \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega}}{i\omega} \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-i)\omega} - 1}{1-i\omega} \quad (8)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (9)$$

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin([1-\omega])}{1-\omega} - \frac{\sin([1+\omega])}{1+\omega} \right\} \quad (10)$$

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} i \frac{\sin(\omega a) - \omega a \cos(\omega a)}{\omega^2} \quad (11)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \quad \text{לא. אינה רציפה בנקודות} \quad (12)$$

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-r,r] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ כאשר $r > 0$.

(2) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) נתונה פונקציה $g(x) \in G(R)$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.

מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב- $g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

(4) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-ax^2}$ כאשר $a > 0$.

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{רמז:}$$

(5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \cos(4\pi\omega) \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

$$F\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{רמז:}$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi \omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{e^{\frac{i\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{16}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 & 4\pi - 2 \leq x \leq 4\pi + 2 \text{ or } -4\pi - 2 \leq x \leq -4\pi + 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

(1) נניח כי $f(x) \in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $f'(x) \in G$ ו- $f(\omega) = \frac{\omega}{1 + \omega^{30}}$. מצאו התמרת פורייה של $f'(x) \cos(2x)$.

(2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F \left\{ \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \right\}_\omega = \left(-\frac{1}{2} \right) (i\omega) \frac{1}{2|a|} e^{-|a\omega|}$.

(3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \omega^2 e^{-|\omega|}$. רמז: $F \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

תשובות סופיות:

$$\frac{i \cdot \frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}} + i \cdot \frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

$$f(x) = (-2) \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad (3)$$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

$$(1) \text{ הוכיחו כי התמרת פורייה של } F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i} \left[\frac{2c \cdot \omega}{1 + (\omega - c)^2} \right] \left[\frac{1}{1 + (\omega + c)^2} \right]$$

$$(2) \text{ מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = \frac{\sin(\omega - 1)}{\omega - 1} - \frac{\sin(\omega + 1)}{\omega + 1}$$

$$(3) \text{ הוכיחו כי התמרת פורייה של } g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \text{ כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים,}$$

$$\text{הינה } g(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{bi - (\omega - a)} - \frac{1}{bi - (\omega + a)} \right]$$

$$(4) \text{ מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \cos(2x) \text{ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי } F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}$$

$$(5) \text{ מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \sin^2(3x) \text{ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי } F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}$$

$$(6) \text{ נניח כי } f(x) \in G(R) \text{ ונגדיר } g(x) = f(3x - 2) \cdot \cos(x) \text{ . בטאו את } g(\omega) \text{ על ידי } f(\omega)$$

$$(7) \text{ מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = e^{3i\omega} \cdot e^{-|\omega - 2|} \text{ . רמז: } F\left\{\frac{1}{1 + x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

$$(8) \text{ תהי } H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } H(x)e^{-ax} \text{ כאשר } a > 0$$

$$\text{ב. } H(x)e^{-ax} \cos(bx) \text{ כאשר } a, b > 0$$

$$\text{ג. } H(x)e^{-ax} \sin(bx) \text{ כאשר } a, b > 0$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$f(x) = 2\pi i \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(x) \quad (2)$$

(3) הוכחה.

$$F\{e^{-|x|} \cos(2x)\} = \frac{1}{2\pi(1+[\omega+2]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-2]^2)} \quad (4)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} - \left[\frac{1}{2\pi(1+[\omega+6]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-6]^2)} \right] \quad (5)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{6} \left[e^{-\frac{2}{3}(\omega+1)} f\left(\frac{\omega+1}{3}\right) + e^{-\frac{2}{3}(\omega-1)} f\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \right] \quad (6)$$

$$F\left\{e^{2i[x+3]} \frac{2}{1+[x+3]^2}\right\} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ג.}$$

נוסחת המומנט:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ על ידי שימוש

$$\text{בנוסחה } F\{x \cdot f(x)\} = i \frac{d}{d\omega} f(\omega)$$

(2) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$\text{כי } F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

(3) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$\text{כי } F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

(4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x) = e^{-x^2}$

(5) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = 8x^3 e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$

(6) תהי $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

(7) נתון כי התמרת פורייה של $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|}$

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

$$i \cdot \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2} \quad (1)$$

$$F \left\{ x^2 e^{-x^2} \right\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (2)$$

$$F \left\{ x \cdot e^{-|x|} \right\} = -\frac{i}{\pi} \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088) e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}} \quad (5)$$

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

(1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

(2) חשבו $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin(\omega) \cos(\omega x)}{\pi \omega} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

(1) ראו סרטון.

$$\begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \end{cases} \quad (2)$$

משפט פלנשראלי:

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a > 0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{\sin(bx)}{x} dx$ עבור $a, b > 0$.

(2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

(3) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

(4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

(1) א. $f(\omega) = \frac{\sin(\omega a)}{\pi \omega}$ ב. $\pi \cdot \min\{a, b\}$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

(1) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים.

(2) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים $x > 0$ ו- $x \leq 0$.

(3) מצאו פונקציה $f \in G$ כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$

(4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t) \in E$ מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f''(t)) g(x-t) dt = 2f(x)$$

(5) נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$.

(8) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$.

(9) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,2]}(x)$.

(10) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x))_{(x)}$.

(11) חשבו את הקונבולוציה $(e^{-x^2} * e^{-x^2})_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$.

(13) נניח כי $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy \equiv 0$$

הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$.

תשובות סופיות:

$$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2, 0] \\ 2-x & x \in [0, 2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2, 0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0, 2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2 + 9} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{ב. הוכחה.}$$

$$\frac{2}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

ב. הוכחה.

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4 - x & 2 < x < 4 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\left(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x) \right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 3 \\ 3 - x & 2 < x < 3 \\ x - 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \quad (12)$$

(13) הוכחה.

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 11 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל.....106

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

(1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית

$$(p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0$$

א. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$ (משוואת בסל)

(2) הראה שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y'' + e^{2x}y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + 4y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

(3) הראה שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

פתור את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות 4-7:

(עבור כל בעיה עליך למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) - y'(\pi) = 0 \\ y(\pi) - y'(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הבעיה הבאה:}$$

- א. הוכח שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
 ב. פתור את הבעיה.

(9) פתור את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$ב. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 1 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

1. פתח את הפונקציה $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$
 לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.
 התחל את הטור מ- $n=1$.
 2. מה סכום הטור ב- $x=0$?
 האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$?

$$ג. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 2 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

- פתח את הפונקציה $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$
 לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

(10) פתור את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

- ב. פתח את הפונקציה $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq \pi$
 לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.
 התחל את הטור מ- $n=1$.

$$(11) \text{ נתונה הבעיה: } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < e \\ y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$$

- א. הוכח שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
 ב. מצא את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.
 ג. הראה שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתח את $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \leq x \leq e \end{cases}$ לטור פונקציות עצמיות.

- ה. הראה שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.
 ה. חשב את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x = \sqrt{e}$, $x = 1.5$, $x = 2$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\begin{aligned} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\pi n) = 0 \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (e^{-x^2} y')' + (\lambda e^{-x^2} - 0)y = 0 \quad \text{ב. } (xy')' + \left(\lambda \left(-\frac{1}{x} \right) - (-x) \right) y = 0$$

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(5) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \phi_n(x) = n \cos nx + \sin nx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \text{ בנוסף, } \lambda = -1 \text{ הוא עי"ע של הבעיה,}$$

$$\text{המתאים לפונקציה העצמית } \varphi(x) = e^x.$$

$$(6) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \sin(\omega_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(7) \quad \text{פונקציות עצמיות: } y_n(x) = \sin(\omega_n x) - \omega_n \cos(\omega_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{בנוסף, } \lambda_0 = 0 \text{ הוא עי"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית } \varphi(x) = x - 1.$$

$$(8) \quad \text{א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = e^x \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(9) \quad \text{א. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. סכום הטור ב- } x=0 \text{ הוא } 0, \text{ והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- } x=0.$$

$$\text{ג. } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right) \quad (0 < x < 2).$$

$$(10) \quad \text{א. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. } e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)} (-1)^{n+1} - 1}{1^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) \quad \text{כאשר } 0 < x < \pi.$$

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות : $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \ln x\right)$$

ערכים עצמיים : $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_n = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

ג. שאלת הוכחה.

ד.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2\cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\ln x\right)$$

ה. סכום הטור ב- $x = \sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x = 1.5$ הוא 1 ; וב- $x = 2$ הוא 0.

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 12 - פתרון משוואות דיפרנציאליות רגילות באמצעות טורים

תוכן העניינים

1. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית 111
2. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית-סינגולרית 113

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-7 על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=0$.
 במיוחד, רשום נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי,
 וציין את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

תזכורת: טור חזקות סביב $x=0$ שקול לטור טיילור סביב $x=0$ ושקול לטור מקלורן.

$$y(0)=3, \quad y'(0)=12; \quad y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \quad (1)$$

$$y(0)=1, \quad y'(0)=2; \quad y''-xy=0 \quad (2)$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \quad (3)$$

$$(x^2+4)y''+xy=x+2 \quad (4)$$

$$y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0 \quad (5)$$

$$y(0)=a_0=1, \quad y'(0)=a_1=2; \quad y''+ty=e^{t+1} \quad (6)$$

$$y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0 \quad (\text{השתמש בפתרון בסימן } \Sigma) \quad (7)$$

$$y(1)=1, \quad y'(1)=2; \quad y''(x)+(x-1)y(x)=e^x \quad (8)$$

על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

$$y(-1)=2, \quad y'(-1)=-2; \quad y''+xy'+(2x-1)y=0 \quad (9)$$

רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

תשובות סופיות

$$a_n = \frac{2n-10}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 5) \quad , \quad y = 3 + 12x + x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \dots + a_n x^n \dots \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 3) \quad , \quad y = 1 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

$$a_n = \frac{n-3}{n-1} a_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad , \quad y = a_0 + a_1 x + -a_0 x^2 + 0x^3 - \frac{1}{3}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3 + \left(\frac{-1}{48}a_1 - \frac{1}{96}\right)x^4 + \dots + a_n x^n \quad (4)$$

$$a_n = \frac{-1}{4(n-1)n} a_{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n} a_{n-2} \quad , \quad (n \geq 4)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)x^3 + \frac{1}{6}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (5)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{e}{2}t^2 + \frac{e-1}{6}t^3 + \frac{e-4}{24}t^4 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (6)$$

$$a_n = \frac{e}{n(n-1)(n-2)!} - \frac{a_{n-3}}{n(n-1)} \quad (n \geq 3)$$

$$y = a_0 + a_1 t + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)t^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)t^3 + \frac{1}{6}a_0 t^4 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 1 + 2(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e-1}{6}(x-1)^3 + \frac{e-4}{24}(x-1)^4 + \dots + a_n (x-1)^n + \dots \quad (8)$$

$$a_n = \frac{e - a_{n-3}(n-2)!}{n!} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 2 - 2(x+1) + 2(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{3}(x+1)^4 + \dots \quad (9)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראה שהנקודה היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתור את המשוואה על ידי פיתוח המשוואה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

$$3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad (1)$$

$$2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0 \quad (2)$$

$$2x^2y'' - xy' + (x-5)y = 0 \quad (3)$$

$$3x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (4)$$

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \quad (5)$$

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (6)$$

$$x^2y'' + x(x+2)y' - 2y = 0 \quad (7)$$

$$x^2y'' + x(x-2)y' + 2y = 0 \quad (8)$$

הערות:

בשאלות 2-5, הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרשם אינו מספר שלם. בשאלות 6 ו-7 הפתרונות שווים, ובשאלות 8 ו-9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

תשובות סופיות

$$y = k_1 x^{1/3} \left(1 - \frac{1}{14} x^2 + \frac{1}{728} x^4 + \dots \right) + k_2 \left(1 - \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{440} x^4 + \dots \right) \quad (1)$$

$$y = k_1 x^{1/2} \left(1 - \frac{7}{18} x^1 + \frac{147}{792} x^2 + \dots \right) + k_2 x^{-3} \left(1 - \frac{21}{5} x^1 + \frac{49}{5} x^2 - \frac{343}{15} x^3 \right) \quad (2)$$

$$y = k_1 x^{-1} \left(1 + \frac{1}{5} x + \frac{1}{30} x^2 + \frac{1}{90} x^3 + \dots \right) + k_2 x^{2.5} \left(1 - \frac{1}{9} x + \frac{1}{198} x^2 - \frac{1}{7722} x^3 + \dots \right) \quad (3)$$

$$y = k_1 x + k_2 x^{1/3} \quad (4)$$

$$y = k_1 \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + k_2 \left[\ln x \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + \left(\frac{2}{2^3} x^2 + \frac{-12}{4^3 \cdot 2^3} x^4 + \dots \right) \right] \quad (5)$$

$$y(x) = k_1 x + k_2 x \ln x \quad (6)$$

$$y(x) = \frac{k_1}{x^2} \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2 - e^{-x} \right) + \frac{k_2}{x^2} e^{-x} \quad (7)$$

$$y = -a_0 x^2 \ln x \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2 + \dots \right) + a_0 x \left(1 - x^2 - \frac{3}{4} x^3 + \dots \right) \quad (8)$$

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$ $-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$ $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 13 - פולינומים אורתוגונליים

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים (ללא ספר)
2. מערכות אורתונורמליות 116

מערכות אורתונורמליות:

שאלות:

(1) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x) = \cos(nx)$ במרחב $L^2[-\pi, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

עם המכפלה הפנימית

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

(2) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x) = \sin(nx)$ במרחב $L^2[0, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

עם המכפלה הפנימית

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

(3) יהי מרחב מכפלה פנימית V ותהי $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ מערכת של פולינומים כך

ש- $\varphi_n(x)$ הינו פולינום ממעלה n .

$$\langle \varphi_n(x), x^m \rangle = 0 \quad m < n$$

מתקיים

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

(4) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[e^{-\pi}, e^{\pi}]$ עם המכפלה

$$\langle f, g \rangle = \int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{x} dx$$

הפנימית

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

(5) נניח כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2[a, b]$ עם

המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle_1 = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$. יהיו $c > 0$ ו- d ממשי כלשהוא.

הוכיחו כי המערכת $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $\psi_n(x) = \sqrt{c} \cdot \varphi_n(c \cdot x + d)$ הינה מערכת

אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2\left[\frac{a-d}{c}, \frac{b-d}{c}\right]$ עם המכפלה

הפנימית $\langle f, g \rangle_2 = \int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x) \overline{g(x)} dx$.

(6) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^N$ מערכת אורתונורמלית סופית.

הוכיחו כי לכל $v \in V$ מתקיים $\left\| \sum_{n=1}^N \langle v, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle v, e_n \rangle|^2$.

מערכת פולינומי צ'בישב:

(7) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1, 1)$

ונגדיר ב- K מכפלה פנימית: $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

הוכיחו כי אוסף הפונקציות $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $T_n(x) = \cos[n \cdot \arccos(x)]$

(הנקראת גם פולינומי צ'בישב) הינה מערכת אורתוגונלית ב- K ומצאו

קבועים α_n כך שהמערכת $\{\alpha_n T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית.

מערכת פולינומי הרמיט:

(8) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות

למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x^2} dx < \infty$.

נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \cdot e^{-x^2} dx$

הוכיחו כי פולינומי הרמיט, המוגדרים על ידי הנוסחה $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתוגונלית במרחב K ומצאו להם קבועי נרמול.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח כי לכל n, k טבעיים כך ש- $k < n$

$$\text{מתקיים } \langle H_n, x^k \rangle = 0. \text{ ניתן להיעזר בעובדה כי } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

מערכת פולינומי לג'נדר:

(9) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1, 1)$

$$\text{ונגדיר ב- } K \text{ מכפלה פנימית: } \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\text{הוכיחו כי פולינומי לג'נדר, הנתונים על ידי נוסחת רודריגז } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

$$\text{מהווים מערכת אורתוגונלית ב- } K \text{ וכי } \langle P_n, P_n \rangle = \frac{2}{2n+1} \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n, k טבעיים כך ש- $k < n$ מתקיים.

$$\langle P_n, x^k \rangle = 0$$

מערכת פולינומי לגר:

(10) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות

$$\text{למקוטעין ומקיימות את התנאי } \int_0^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x} dx < \infty$$

$$\text{נגדיר על } K \text{ מכפלה פנימית } \langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx$$

$$\text{הוכיחו כי פולינומי לגר, המוגדרים על ידי הנוסחה } L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^{-x}]$$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב K .

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n, k טבעיים כך ש- $k < n$ מתקיים.

$$\langle L_n, x^k \rangle = 0$$

$$\text{ניתן להיעזר בנוסחה } \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

תשובות סופיות:

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) הוכחה.
- (7) מערכת פולינומי צ'בישב : הוכחה.
- (8) מערכת פולינומי הרמיט : הוכחה.
- (9) מערכת פולינומי לג'נדר : הוכחה.
- (10) מערכת פולינומי לגר : הוכחה.

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 14 - משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים (ללא ספר)

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 15 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני (ללא ספר)

שיטות בפיזיקה עיונית 1

פרק 16 - פתרון משוואת החום על ידי הפרדת משתנים

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים בקטע סופי (ללא ספר)