

שיטות מתמטיות בכימיה



תוכן העניינים

1	מספרים מרוכבים	(ללא ספר)
1	טורים	
9	אינטגרציה מרוכבת	
18	נקודות סינגולריות	
23	משפט השארית	
29	טורי פורייה	
31	התמרת פורייה	
46	משוואות ליניאריות מסדר שני	
	משוואת החום	(ללא ספר)

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 1 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

1. מספרים מרוכבים (ללא ספר)

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 2 - טורים

תוכן העניינים

1. טורים מספריים..... 1
2. טורים כלליים..... 2
3. טורי טיילור ומקלורן..... 3
4. קריטריון קושי-הדמרד..... 4
5. טורי לורן..... 5

טורים מספריים:

שאלות:

(1) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$.

(2) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin(in)}{3^n}$.

(3) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^n$.

(4) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2+i^n}$.

(5) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+i^n}$.

תשובות סופיות:

(1) מתבדר.

(2) מתכנס.

(3) מתבדר.

(4) מתבדר.

(5) מתכנס.

טורים כלליים:

שאלות:

- (1) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$.
- (2) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(1-i)^n}$.
- (3) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (z-1)^n}$.
- (4) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$.
- (5) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$.

תשובות סופיות:

- (1) $|z| > 1$
- (2) $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (3) $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (4) $2 < |z| < 4$
- (5) $\operatorname{Re}(z) < 0$

טורי טיילור ומקלורן:

שאלות:

(1) מצאו טור טיילור עבור $f(z) = \sin(z+1)$ סביב $z=0$ ומצאו תחום התכנסות.

(2) מצאו טור טיילור עבור $f(z) = \frac{1}{z}$ סביב $z=i$ וציינו את רדיוס ההתכנסות.

(3) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{2i}{2+i+z}$ סביב $z_0 = -(2+i)$ בתחום $|z-z_0| < |2+i+z_0|$.

(4) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$ לטור חזקות סביב $z_0 \neq 1$ בתחום $|z-z_0| < |1-z_0|$.

(5) נניח כי $f(z)$ שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ ומתקיים $f'(0)=1$.

חשבו את $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{f(z)} dz$.

תשובות סופיות:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos(1) \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \sin(1) \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \right) \quad z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

$$f(z) = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{i} \right)^n (z-i)^n \quad |z-i| < 1 \quad (2)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2i(-1)^n}{(2+i+z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \quad (3)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(n+1)(n+2)}{(1-z_0)^{n+3}} (z-z_0)^n \quad (4)$$

$$2\pi i \quad (5)$$

קריטריון קושי – הדמרד:

שאלות:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n \quad \text{מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור}$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{in} \right)^n \quad \text{מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור}$$

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (2n+1)} (z-3n)^n \quad \text{מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור}$$

תשובות סופיות:

$$R=1 \quad (1)$$

$$R=\infty \quad (2)$$

$$R=3 \quad (3)$$

טורי לורן:

שאלות:

(1) פתחו את הפונקציה לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בכל התחומים האפשריים $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

(2) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $|z| < 2$ ובתחום $|z| > 2$.

(3) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = -1$ בתחומים הבאים: $0 < |z+1| < 2$ ו- $|z+1| > 2$.

(4) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = -3$ בכל התחומים האפשריים.

(5) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $1 < |z| < 3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

(6) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $|z| > 3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

(7) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $|z| < 1$.

(8) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ בתחום $|z| < 1$ ומצאו את המקדם a_{-1} .

(9) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0 = i$ בתחום $0 < |z-i| < 2$ ומצאו את המקדם a_{-1} .

(10) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0 = i$ בתחום $|z-i| > 2$.

(11) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-4)}$ לטור לורן סביב $z_0 = 1$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $z = 5$.

(12) פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$ לטור לורן סביב $z_0 = 0$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $1-3i$.

(13) נניח כי $|a| < 1$ ונגדיר את הפונקציה $f(z) = \frac{a}{z-a}$ (כאשר a מספר ממשי).

א. פתחו פונקציה זו לטור לורן בטבעת $|a| < |z| < \infty$.

ב. הוכיחו את הזהות $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(n\theta) = \frac{a \cos(\theta) - a^2}{1 - 2a \cos(\theta) + a^2}$

(14) תהי $a \in \mathbb{C}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ונניח כי

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$$

הוכיחו כי לכל $r > 0$ מתקיים $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz$

(15) נסמן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ פיתוח לטור לורן של $f(z) = \frac{z}{e^{z^2} - 1}$ סביב $z_0 = 0$ בתחום $0 < |z| < r$.

א. מצאו מהו ה- r המקסימלי.

ב. מצאו את a_n לכל $n \leq 4$.

הערה: תרגיל זה דורש ידע בסיווג של נקודות סינגולריות.

(16) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

(17) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

תשובות סופיות:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1 \quad (1)$$

$$f(z) = -\left(\frac{1}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad |z| > 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad |z| < 2 \quad (2)$$

$$f(z) = -\left(\frac{2}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n \quad |z| > 2$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z+1)^{n-1} \quad 0 < |z+1| < 2 \quad (3)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z+1)^{n+2}} \quad |z+1| > 2$$

$$f(z) = -\frac{1}{(z+3)} \sum_{n=0}^{\infty} (z+3)^n \quad 0 < |z+3| < 1 \quad (4)$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+3)^n} \quad |z+3| > 1$$

$$f(z) = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^n} \quad 1 < |z| < 3 \quad (5)$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{z^{n+1}} \quad |z| > 3 \quad (6)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6 \cdot 3^n} \right] z^n \quad |z| < 1 \quad (7)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad |z| < 1 \quad (8)$$

$$a_{-1} = 0$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1} (z-i)^{n-1} \quad 0 < |z-i| < 2 \quad (9)$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2i}$$

$$f(z) = \frac{1}{(2-i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n \quad 2 < |z-i| \quad (10)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^{n+2}} \quad |z-1| > 3 \quad (11)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad |z| > 3 \quad (12)$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} \quad |a| < |z| < \infty \quad \text{א. (13)}$$

ב. הוכחה.

(14) הוכחה.

$$r = \sqrt{2\pi} \quad \text{א. (15)}$$

$$\text{ב. } a_4 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{12}, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_0 = 0, \quad a_{-1} = 1, \quad \forall n \leq -2 \quad a_n = 0$$

$$\frac{\pi i}{12} \quad (16)$$

$$2\pi i \quad (17)$$

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 3 - אינטגרציה מרוכבת

תוכן העניינים

- 9 1. אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת
- 10 2. אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת
- 11 3. משפט הערכה
- 12 4. משפט קושי גורסט
- 13 5. נוסחת האינטגרל של קושי
- 16 6. נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי

אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

$$(1) \text{ חשבו את האינטגרל } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \text{ לכל } m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \text{ לכל } z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) < 0, \text{ פתרו את האינטגרל } \int_0^{\infty} e^{zt} dt.$$

תשובות סופיות:

$$\begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{z} \quad (2)$$

אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^n dz$, כאשר $n \in \mathbb{Z}$.

(2) חשבו את האינטגרל $\int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$, כאשר $\gamma = \{z = 2e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

(3) חשבו את האינטגרל $\int_{\gamma} (z-1) dz$, כאשר $\gamma = \{z = 1 + e^{i\theta} \mid \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$.

(4) חשבו את האינטגרל $\oint_{\gamma} \pi e^{\pi \bar{z}} dz$, כאשר γ מסילת קווים ישרים,

העוברת בנקודות $0 \rightarrow 1 \rightarrow 1+i \rightarrow i \rightarrow 0$.

(5) חשבו את אורך המסילה $\gamma = [z_1, z_2]$, כאשר $\gamma = [z_1, z_2]$ היא מסילת הקו הישר המחברת בין z_1 ל- z_2 .

(6) חשבו את אורך המסילה $\gamma(t) = \{(t - \sin t) + i \cdot (1 - \cos t) \mid 0 < t < 1\}$.

(7) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \bar{z} dz$.

תשובות סופיות:

$$\begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases} \quad (1)$$

$$2\pi i - 4 \quad (2)$$

$$0 \quad (3)$$

$$4e^{\pi} - 4 \quad (4)$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (5)$$

$$\approx 0.48 \quad (6)$$

$$2\pi i \quad (7)$$

אי-שוויונות אינטגרליים (משפט הערכה):

שאלות:

הוכיחו את אי השוויונות הבאים:

$$(1) \quad \left| \int_C \frac{z^3}{z^2+1} dz \right| \leq \frac{81\pi}{8} \quad \text{כאשר } C: \{|z|=3, \operatorname{Re}(z)>0\}$$

$$(2) \quad \left| \int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1} dz \right| \leq \frac{6\pi}{8}$$

$$(3) \quad \left| \int_C e^{z^2} dz \right| \leq \sqrt{8} \quad \text{כאשר } C \text{ הינה מסילת הקו הישר מ-} 0 \text{ עד } 2+2i$$

$$(4) \quad \left| \int_C \frac{z^2}{\sin(z)} dz \right| \leq \frac{\pi^2}{2} + 2 \quad \text{כאשר } C \text{ הוא הקטע הישר המתחיל בנקודה } \frac{\pi}{2} + i$$

$$\text{ומסתיים בנקודה } \frac{\pi}{2} - i$$

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

משפט קושי גורסט:

שאלות:

$$(1) \quad \int_0^{2+\frac{i\pi}{4}} e^z dz \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(2) \quad \int_4^{1+i} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \sqrt[4]{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - 2 + i\sqrt[4]{2} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{כי הוכיחו כי}$$

כאשר \sqrt{z} הינו הענף העיקרי של פונקציית השורש.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \frac{e^2 [1+i]}{\sqrt{2}} - 1$$

(2) הוכחה.

נוסחת האינטגרל של קושי:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z} dz$.

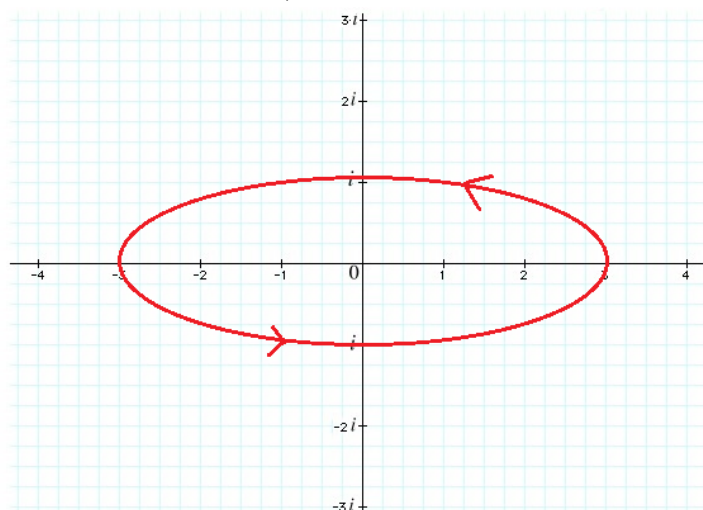
(2) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2} dz$.

(3) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-2|=1} \frac{\sin(z^2)}{z(z-2)} dz$.

(4) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{e^z + e^{-z}}{z(z-2)(z-3)} dz$.

(5) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1.5} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)} dz$.

(6) חשבו את האינטגרל $\oint_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z(z-2)(z-4)} dz$, עבור המסילה שבציור:



$$(7) \quad \oint_{|z|=2} \frac{z^2 - e^{z^2}}{z(z^2 - 1)(z + 3)} dz \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

(8) תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית בתחום D .

נניח כי $z_0 \in D$ וכי הדיסק $D(z_0, R) = \{|z - z_0| \leq R\}$ מוכל כולו ב- D .

$$\text{הוכיחו כי } f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta}) d\theta$$

$$(9) \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \sin(2\theta)} d\theta \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(10) \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{הוכיחו:}$$

$$(11) \quad \int_C \frac{z}{z^2 + 1} dz \quad \text{כאשר } C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

$$(12) \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)} \quad \text{כאשר } a > b > 0$$

$$(13) \quad \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{Log}\left(1 + \frac{z}{3}\right)}{z} dz \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

(14) תהי $f(z) = u + iv$ הולומורפית בתחום $|z| < 1$ כך ש- $u^2(0) = v^2(0)$

$$\int_0^{2\pi} u^2(re^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} v^2(re^{i\theta}) d\theta \quad \text{הוכיחו כי לכל } 0 < r < 1 \text{ מתקיים}$$

(15) תהי $f(z) = u + iv$ הולומורפית בתחום $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

הוכיחו כי לכל $0 < r < 1$ ולכל $0 < |a| < r$ מתקיים

$$\oint_{|z|=r} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z - a} f(z) dz = \pi i \cdot \left(\left[a + \frac{r^2}{a} \right] f(a) - \frac{r^2}{a} \cdot f(0) \right)$$

תשובות סופיות:

(1) $2\pi i$

(2) $2\pi e^2 i$

(3) $2\pi i \cdot \frac{\sin(2^2)}{2}$

(4) $2\pi i \cdot \frac{1}{3}$

(5) $\pi i - 2\pi e i$

(6) $-\frac{\sin(2)\pi i}{2}$

(7) $\pi i \cdot \left(\frac{17}{12} - \frac{3e}{4} \right)$

(8) הוכחה.

(9) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(10) הוכחה.

(11) πi

(12) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

(13) 0

(14) הוכחה.

(15) הוכחה.

נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin(z)}{(z-i)^3} dz$

(2) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3} dz$

(3) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2} dz$

(4) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)} dz$

(5) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3} dz$

(6) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=6} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)} dz$

(7) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)^2(z-4)} dz$

תשובות סופיות:

$$\frac{\pi}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \quad (1)$$

$$-\pi i \quad (2)$$

$$-2\pi i \cdot \sin(\pi) \quad (3)$$

$$-\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}} \pi i \quad (4)$$

$$-2\pi^2 i \quad (5)$$

$$-\frac{\pi i}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \quad (6)$$

$$0 \quad (7)$$

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 4 - נקודות סינגולריות

תוכן העניינים

- 18 1. מיון נקודות סינגולריות
- 22 2. מיון נקודות סינגולריות באינסוף

מיון נקודות סינגולריות:

שאלות:

(1) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

(2) נניח כי $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו- $g(z)$ אנליטיות בסביבת $z=0$.

נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 7 של $f(z)$.

נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 11 של $g(z)$.

מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב- $z=0$?

(3) נניח כי $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו- $g(z)$ אנליטיות בסביבת z_0 .

נניח כי z_0 זה אפס מסדר n של $f(z)$.

נניח כי z_0 זה אפס מסדר m של $g(z)$.

מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב- z_0 ? חלקו למקרים $n \geq m$ ו- $n < m$.

א. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^2}$.

ב. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

(4) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$.

(5) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$.

(6) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{1}{e^{-z}-1} + \frac{1}{z}$.

(7) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

(8) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{1}{z^2-1} \cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right)$.

9 מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$.

10 מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$. האם הן מבודדות?

11 מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = z \cot(z)$.

12 נתון כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

נניח כי 0 זה קוטב מסדר m של $f(z)$ ובנוסף נניח כי $-1 \notin f[\mathbb{C} \setminus \{0\}]$.

מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות של $g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$.

13 מצאו את הקטבים והאפסים בתחום $|z| < 4$ של הפונקציה $f(z) = \frac{(z-2)^2}{(e^{2z}-1)^2 z^3}$.

14 מיינו את הנקודות $z=0$ ו- $z = \frac{\pi}{4}$ עבור $f(z) = \frac{\tan(z)}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}$.

15 תהינה $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציות שלמות שאינן קבועות.

נניח כי לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)| \leq |g(z)|$.

א. הוכיחו שכל נקודה סינגולרית של $\frac{f(z)}{g(z)}$ הינה סליקה.

ב. הוכיחו כי $f(z) = c \cdot g(z)$ כאשר c קבוע המקיים $|c| \leq 1$.

16 מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$.

17 הוכיחו כי הנקודה $z_0 = i$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$.

18 תהי $f(z): D \rightarrow \mathbb{C}$ אנליטית כאשר $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < 1\}$.

נניח כי מתקיים $|z - z_0|^a |f(z)| \leq 1$ לכל $z \in D$ עבור $0 \leq a < 1$.

הוכיחו כי z_0 נקודה סינגולרית סליקה של $f(z)$.

(19) (אתגר)

נתונה $f(z)$ אנליטית בתחום $0 < |z| < 1$ המקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n!}$.
הוכיחו כי $z=0$ זו נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$.

(20) (אתגר)

הוכיחו כי אם z_0 זה קוטב של $f(z)$ אז היא בהכרח עיקרית של $g(z) = e^{f(z)}$.

רמז: רשמו את $f(z)$ באופן הבא $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ כאשר $\varphi(z_0) = r_0 e^{i\alpha}$

התבוננו בסדרות הבאות: $z_n = z_0 + \frac{1}{n} e^{i\frac{\alpha}{m}}$, $w_n = z_0 + \frac{1}{n} e^{i\frac{\pi+\alpha}{m}}$

תשובות סופיות:

- (1) $z=1$ קוטב מסדר 1.
- (2) $z=0$ קוטב מסדר 4.
- (3) אם $n \geq m$ אז z_0 נקודה סינגולרית מסוג סליקה של $h(z)$.
ואם $n < m$ אז z_0 קוטב מסדר $m-n$ של $h(z)$.
- (4) $z=0$ עיקרית.
- (5) $z=0$ עיקרית.
- (6) $z_k = 2\pi ik$ קטבים מסדר 1.
- (7) $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ קטבים מסדר 1.
- (8) $z = -1$ עיקרית ו- $z = 1$ קוטב מסדר 1.
- (9) $z = 2$ עיקרית.
- (10) $z = 0$ לא מבודדת ו- $z_k = \frac{1}{\pi k}$ קטבים מסדר 1.
- (11) $z = 0$ סליקה ו- $z_k = \pi k \neq 0$ קטבים מסדר 1.
- (12) $z = 0$ סליקה.
- (13) $z = 2$ אפס מסדר 2, $z = 0$ קוטב מסדר 5, $z = \pm \pi i$ קטבים מסדר 2.
- (14) $z = 0$ סליקה, $z = \frac{\pi}{4}$ קוטב מסדר 1.
- (15) (א) הוכחה
(ב) הוכחה
- (16) $z = 0$ לא מבודדת.
- (17) $z_k = \frac{1}{k}$ ($k \neq 0, 2, -2$) קטבים מסדר 1.
- (18) $z = \pm \frac{1}{2}$ סליקות.
- (17) הוכחה.
- (18) הוכחה.
- (19) הוכחה.
- (20) הוכחה.

מיון נקודות סינגולריות באינסוף:

שאלות:

(1) מיינו את הנקודה הסינגולרית ∞ של הפונקציה $f(z) = \frac{z^2}{1+z}$.

(2) מיינו את הנקודה הסינגולרית ∞ של הפונקציה $f(z) = e^z$.

תשובות סופיות:

(1) ∞ זה קוטב מסדר 1 של $f(z)$.

(2) ∞ זאת נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$.

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 5 - משפט השארית

תוכן העניינים

- 1. מציאת שארית..... 23
- 2. מסילת חצי-קשת מעגלית..... 25
- 3. שארית באינסוף..... 28

מציאת שארית:

שאלות:

חשבו את השאריות של הפונקציות בנקודות הבאות:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+3}{z+2}, z=-2\right) \quad (1)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+9}, z=3i\right) \quad (2)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=1\right) \quad (3)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=-1\right) \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{נניח כי לפונקציה } \frac{f(z)}{g(z)} \text{ יש קוטב פשוט ב- } z_0 \text{ כאשר ונניח כי } g'(z_0) \neq 0.$$

$$\text{הוכיחו כי } \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z}, 0\right) \quad (6)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\sin(z+1)}{z}, 0\right) \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה } f(z) = \frac{\tan(z)}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}$$

$$(9) \quad \text{חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה } f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^3(z - \pi)}$$

(10) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה בעלת n אפסים בדיוק. הוכיחו שכל הנקודות הסינגולריות של $\frac{f'(z)}{f(z)}$ הן קטבים פשוטים וחשבו את השאריות בנקודות אלו.

תשובות סופיות:

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{6i} \quad (2)$$

$$\frac{3}{8} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (5)$$

$$1 \quad (6)$$

$$\sin(1) \quad (7)$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), \frac{\pi}{2} + \pi k\right] = -\frac{1}{\left[\frac{\pi}{2} + \pi k\right]\left[\frac{\pi}{4} + \pi k\right]} \quad (8)$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = -\frac{1}{2\pi} \quad \operatorname{Res}[f(z), \pi] = \frac{2}{\pi^3} \quad (9)$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = m_k \quad (10) \text{ כאשר } z_k \text{ אפס מסדר } m_k \text{ של } f(z).$$

מסילת חצי קשת מעגלית:

שאלות:

בכל התרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$$C_R = \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

$$\gamma = \{z = x \mid -R \leq x \leq R\}$$

(1) חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיף הקודם כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

(2) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2} \quad \text{כי הוכיחו כי} \quad (3)$$

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx \quad \text{חשבו את האינטגרל} \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1} dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)} \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$\oint_{C_{R+\gamma}} \frac{1}{1+z^2} dz = \pi \quad \text{א) (1)}$$

(ב) הוכחה.

(ג) הוכחה.

$$\oint_{C_{R+\gamma}} \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{א) (2)}$$

(ב) הוכחה.

(ג) הוכחה.

$$\oint_{C_{R+\gamma}} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = \pi\sqrt{2} \quad \text{א) (3)}$$

(ב) הוכחה.

(ג) הוכחה.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \frac{3\pi}{8} \quad \text{(4)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1} dx = \frac{14\pi}{3} \quad \text{(5)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{(6)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx = -\frac{\pi}{27} \quad \text{(7)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx = \frac{\pi}{6} \quad \text{(8)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)} = \frac{5}{96}\pi \quad \text{(9)}$$

שארית באינסוף:

שאלות:

(1) נניח כי ∞ הינה נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$.

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -\text{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right].$$

(2) נניח כי $f(z)$ אנליטית במישור המרוכב פרט למספר סופי של נקודות

$$z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}.$$

הוכיחו כי:

$$\text{Res}[f(z), z_1] + \text{Res}[f(z), z_2] + \dots + \text{Res}[f(z), z_n] + \text{Res}[f(z), \infty] = 0$$

$$(3) \text{ חשבו } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=10} \frac{e^{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)} \cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 - 1} dz$$

$$(4) \text{ חשבו } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 - 4} dz$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

$$(3) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=10} \frac{e^{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)} \cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 - 1} dz = 0$$

$$(4) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^4 - 1} dz = -\frac{\sin\left(\frac{1}{2i}\right)}{2i}$$

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 6 - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. הקדמה (ללא ספר) 29
2. טור פורייה ממשי 30
3. טור פורייה מרוכב 30

טור פורייה ממשי:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$.

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \sin(|x|)$.

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

תשובות סופיות:

$$\sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x) \quad (2)$$

$$\sin(|x|) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2kx) \quad (3)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx) \quad (4)$$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

תשובות סופיות:

$$x \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi \frac{(-1)^n}{in} + \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right\} e^{inx} \quad (2)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - 3(-1)^n \frac{\pi}{in} \right] e^{inx} \quad (3)$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{3}{\pi i (2k-1)} e^{i(2k-1)x} \quad (4)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4i} e^{ix} - \frac{1}{4i} e^{-ix} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - (2k)^2} e^{i[2k]x} \quad (5)$$

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 7 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

31	1. מבוא כללי
33	2. נוסחת כיווץ והזזה
35	3. נוסחת הנגזרת
36	4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה
38	5. נוסחת המומנט
40	6. נוסחת ההתמרה ההפוכה
(ללא ספר)	7. נוסחת התמרה כפולה
41	8. משפט פלנשראל
42	9. משפט הקונבולוציה

מבוא כללי:

שאלות:

$$\cdot \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של} \quad (1)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (2)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (3)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (4)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{bx} & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של} \quad (5)$$

$$\cdot f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right]$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של} \quad (6)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (7)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (8)$$

$$\cdot f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega} \quad \text{הינה} \quad f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{הוכיחו התמרת פורייה של} \quad (9)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של} \quad (10)$$

$$\cdot a > 0 \quad f(x) = \begin{cases} x & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של} \quad (11)$$

$$\cdot f(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{האם קיימת} \quad f \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \quad \text{כך ש-} \quad (12)$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \quad (2)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{2\sin(2\omega) - \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega) + i[\cos(\omega) - 1]}{\omega} \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega}}{i\omega} \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-i)\omega} - 1}{1-i\omega} \quad (8)$$

(9) הוכחה.

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin([1-\omega])}{1-\omega} - \frac{\sin([1+\omega])}{1+\omega} \right\} \quad (10)$$

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} i \frac{\sin(\omega a) - \omega a \cos(\omega a)}{\omega^2} \quad (11)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \quad (12) \text{ לא. אינה רציפה בנקודות}$$

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-r,r] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ כאשר $r > 0$.

(2) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \text{ כי}$$

(3) נתונה פונקציה $g(x) \in G(\mathbb{R})$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.

מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב- $g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

(4) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-ax^2}$ כאשר $a > 0$.

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} : \text{רמז}$$

(5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \cos(4\pi\omega) \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

$$F\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} : \text{רמז}$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi \omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{16}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} 4\pi - 2 \leq x \leq 4\pi + 2 \text{ or } -4\pi - 2 \leq x \leq -4\pi + 2 \\ \text{else} \end{array} \right\} \quad (5)$$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

(1) נניח כי $f(x) \in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $f'(x) \in G$ ו- $f(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^{30}}$. מצאו התמרת פורייה של $f'(x) \cos(2x)$.

(2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F \left\{ \frac{x}{(x^2+a^2)^2} \right\}_\omega = \left(-\frac{1}{2} \right) (i\omega) \frac{1}{2|a|} e^{-|a\omega|}$

(3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \omega^2 e^{-|\omega|}$. רמז: $F \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

תשובות סופיות:

$$\frac{i \cdot \frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}} + i \cdot \frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

$$f(x) = (-2) \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad (3)$$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

(1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i} \frac{2c \cdot \omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$

(2) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1} - \frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$

(3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ כאשר $a, b > 0$ קבועים,

הינה $g(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{bi-(\omega-a)} - \frac{1}{bi-(\omega+a)} \right]$

(4) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = e^{-|x|} \cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

(5) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = e^{-|x|} \sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

(6) נניח כי $f(x) \in G(R)$ ונגדיר $g(x) = f(3x-2) \cdot \cos(x)$. בטאו את $g(\omega)$ על ידי $f(\omega)$.

(7) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = e^{3i\omega} \cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$

(8) תהי $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a > 0$.

ב. $H(x)e^{-ax} \cos(bx)$ כאשר $a, b > 0$.

ג. $H(x)e^{-ax} \sin(bx)$ כאשר $a, b > 0$.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$f(x) = 2\pi i \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(x) \quad (2)$$

(3) הוכחה.

$$F\{e^{-|x|} \cos(2x)\} = \frac{1}{2\pi(1+[\omega+2]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-2]^2)} \quad (4)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} - \left[\frac{1}{2\pi(1+[\omega+6]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-6]^2)} \right] \quad (5)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{6} \left[e^{-\frac{2}{3}(\omega+1)} f\left(\frac{\omega+1}{3}\right) + e^{-\frac{2}{3}(\omega-1)} f\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \right] \quad (6)$$

$$F\left\{e^{2i[x+3]} \frac{2}{1+[x+3]^2}\right\} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)} \cdot \aleph \quad (8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \cdot \beth$$

$$\frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \cdot \daleth$$

נוסחת המומנט:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ על ידי שימוש

$$.F\{x \cdot f(x)\} = i \frac{d}{d\omega} f(\omega)$$

(2) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} \quad \text{כי}$$

(4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x) = e^{-x^2}$.

(5) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = 8x^3 e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$.

(6) תהי $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

(7) נתון כי התמרת פורייה של $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|}$

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

$$i \cdot \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2} \quad (1)$$

$$F\{x^2 e^{-x^2}\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right) e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (2)$$

$$F\{x \cdot e^{-|x|}\} = -\frac{i}{\pi} \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088) e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}} \quad (5)$$

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

(1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

(2) חשבו $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin(\omega) \cos(\omega x)}{\pi\omega} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

(1) ראו סרטון.

$$\begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \end{cases} \quad (2)$$

משפט פלנשראלי:

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a > 0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{\sin(bx)}{x} dx$ עבור $a, b > 0$.

(2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$.

(3) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

(4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

א. $f(\omega) = \frac{\sin(\omega a)}{\pi \omega}$. ב. $\pi \cdot \min\{a, b\}$.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

(1) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים.

(2) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים $x > 0$ ו- $x \leq 0$.

(3) מצאו פונקציה $f \in G$ כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$

(4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t) \in E$ מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f''(t)) g(x-t) dt = 2f(x)$$

(5) נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$

7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$.

8) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$.

9) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,2]}(x)$.

10) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x))_{(x)}$.

11) חשבו את הקונבולוציה $(e^{-x^2} * e^{-x^2})_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t) dt = e^{-\frac{3(x+1)^2}{2}}$.

13) נניח כי $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2} e^{2xy} dy \equiv 0$ הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$.

תשובות סופיות:

$$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2,0] \\ 2-x & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2+9} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \frac{2}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 2 < x < 4 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\left(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 3 \\ 3-x & 2 < x < 3 \\ x-1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \quad (12)$$

(13) הוכחה.

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 8 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה 46
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים 48
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל" 50
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם" 52
5. וריאציית פרמטרים 54
6. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר (ללא ספר)
7. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל 55
8. הוורונסקיאן ושימושיו 56
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני 58
10. השיטה האופרטורית 59

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[\frac{c^2 (x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k); y = c \quad (8)$$

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-11 :

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 1, \quad 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3; \quad y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2} y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

(12) נתונה המד"ר: $yy'' + (y')^2 = 0$.

א. הראה כי $y_1 = 4$ ו- $y_2 = \sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראה כי הפתרון $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.

האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} \quad (3)$$

$$z = e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (5)$$

$$x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}} \quad (6)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (7)$$

$$y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x] \quad (8)$$

$$y = e^2 \sin 3x \quad (9)$$

$$y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[c_1 \cos \left(\frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left(\frac{2}{5} x \right) \right] \quad (10)$$

$$y = 4e^{-\frac{|x|}{a}} \quad (11)$$

(12) שאלת הוכחה.

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[\frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

משוואה לינארית, כללית – שיטת ד'אלמבר – שיטת הפתרון השני – שיטת אבל

שאלות

(1) פתור $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$,

כאשר ידוע $y_1(x) = e^{2x}$.

(2) פתור $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

(3) הסבר את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגם על המד"ר:

$$(0 < x < 1), \quad (1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}$$

כאשר ידוע ש- $y_1(x) = e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

(1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

(2) $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

(3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

- (1) האם ייתכן כי $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = \sin x$ הם שני פתרונות של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ עם מקדמים רציפים בקטע $[0, \pi]$?
- (2) הראו כי הפונקציות $y_1(x) = \sin x^2$, $y_2(x) = \cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ בקטע $(-4, \infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x = 0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?
- (3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ הן פתרונות של המשוואה $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$ בקטע $(-\frac{1}{2}, \infty)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?
- (4) נתונות שתי פונקציות $y_1 = x^3$, $y_2 = |x^3|$ בקטע $[-4, 4]$.
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy'' - 2y' = 0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?
- (5) ענה על הסעיפים הבאים:
א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I .
הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$ הם פתרונות שלה.
ב. רשום משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x > 0$, שהפונקציות $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^4$ הן פתרונות שלה.

- 6 נתון כי $y_1(x), y_2(x)$ הם פתרונות של המד"ר $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, בקטע I , כאשר p, q רציפות בקטע I .
 הראו, כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c) = y_2(c) = 0$, אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

- (1) לא.
 (2) $W = -2x$
 (3) כן.
 (4) א. $W = 0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.
 (5) א. שאלת הוכחה. ב. $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$
 (6) שאלת הוכחה.

משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

שאלות

(1) נתונה המשוואה $y'' - 4y = 12x$.

א. פתור את המשוואה.

ב. מצא פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$$

ג. נסה למצוא פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תן דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0) = 1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

(2) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

הראה כי $y_1(x) = 0$ ו- $y_2(x) = x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

(3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x = 0$, כך שהפונקציות $y = 4x$ ו- $y = \sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

(1) א. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 3x$ ב. $y = 4e^{2x} - 3e^{-2x} - 3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו ל: www.GooL.co.il.

(2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

משוואה לינארית לא הומוגנית, עם מקדמים קבועים – השיטה האופרטורית

שאלות

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדוק עם מרצה הקורס אם אתה נדרש אליו.

בשאלות אלו הסימון הוא: $(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x)$.

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (6)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2\cos x \cos 2x \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 9 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים בקטע סופי (ללא ספר)