אינפי 2

פרק 11 - אינטגרביליות, המשפטים היסודיים ומשפטי ערך הביניים לאינטגרלים (הפרק באנגלית)

תוכן העניינים

1. אינטגרביליות 1

2. המשפט היסודי של החדוא, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן 10

אינטגרביליות

שאלות

1) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
נניח שקיימת חלוקה P של $[a,b]$, כך ש- $L(P,f)=U(P,f)$.
הוכח ש- f פונקציה קבועה.

2) בכל אחד מהמקרים הבאים, הערך את האינטגרל העליון והתחתון של f,
הראה ש- f אינטגרבילית ומצא את האינטגרל של f.

א. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, נגדיר $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, על ידי $f(x)=\alpha$ לכל $x\in[a,b]$.

ב. $f(x)=0$ כאשר $0\le x<\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=10$ ו- $f(x)=1$ כאשר $\frac{1}{2}<x\le 1$.

ג. $f(x)=x$ לכל $x\in[0,1]$.

3) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהי (P_n) חלוקה,
כך ש- $U(P_n,f)-L(P_n,f)\to 0$.

א. הראה ש- f אינטגרבילית.

ב. הוכח כי: $\lim_{n\to\infty}U(P_n,f)=\lim_{n\to\infty}L(P_n,f)=\int_a^b f(x)dx$.

4) בכל אחד מהמקרים הבאים, הראה ש- f אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן:

א. $f(x)=x$ ב- $[0,1]$.

ב. $f(x)=x^2$ ב- $[0,1]$.

ג. $f(x)=\frac{1}{x}$ ב- $[1,2]$.

5) יהיו f_1,f_2,f פונקציות חסומות ב- $[0,1]$, כך ש- $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$
לכל $x\in[0,1]$.
הנח כי f_1 ו- f_2 אינטגרביליות וכן $\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 f_2(x)dx=I$.
הראה כי f אינטגרבילית ומצא את $\int_0^1 f(x)dx$.

6) תהי פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f(x)=x$ לכל x רציונלי,
ו- $f(x)=0$ לכל x אי-רציונלי.
הערך את האינטגרל העליון והתחתון של f, והראה כי f אינה אינטגרבילית.

7) תהי $f:[0,1]\to[0,1]$, מוגדרת באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{אם } x=\frac{p}{q}\neq 1 \text{, כאשר } p,q\in\mathbb{N} \text{, ול-} p,q \text{ אין גורמים משותפים}\\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי או } x=0 \text{ או } x=1\end{cases}$$

א. תהי A_N מוגדרת באופן הבא, לכל $N\in\mathbb{N}$: $A_N=\left\{x\in(0,1)\,|\,x=\frac{p}{q}\right\}$,
כאשר $p,q\in\mathbb{N}$, $q\le N$ ול- p,q אין גורמים משותפים.
הראה שהקבוצה A_N סופית.

ב. ל- $N\in\mathbb{N}$ ו- $\varepsilon>0$ נתונים, הראה כי קיימים קטעים
$[x_1,x_2],[x_3,x_4],\ldots,[x_{2m-1},x_{2m}]$, כך ש:
$0<x_1<x_2<x_3<x_4<\ldots<x_{2m-1}<x_{2m}<1$,
$A_N\subseteq(x_1,x_2)\cup(x_3,x_4)\cup\ldots\cup(x_{2m-1},x_{2m})$,
ו- $|x_1-x_2|+|x_3-x_4|+\ldots+|x_{2m-1}-x_{2m}|\le\frac{\varepsilon}{2}$.

ג. הראה ש- f אינטגרבילית.

ד. מצא שתי פונקציות אינטגרביליות, g ו- h ב- $[0,1]$,
כך שההרכבה $g\circ h$ אינה אינטגרבילית.

8) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן $[c,d]\subseteq[a,b]$.
הראה ש- f אינטגרבילית ב- $[c,d]$.

9) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי f חסומה ב- $[c,d]$, ונתון:

$$M=\sup\{f(x)\,|\,x\in[c,d]\},\quad M'=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in[c,d]\}$$
$$m=\inf\{f(x)\,|\,x\in[c,d]\},\quad m'=\inf\{|f(x)|\,|\,x\in[c,d]\}$$

הוכח כי $M'-m'\le M-m$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.
הוכח כי $|f|$ ו- f^2 אינטגרביליות.

10) מצא דוגמה לפונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, כך שמתקיים:

א. $|f|$ אינטגרבילית, אבל f אינה אינטגרבילית.

ב. f^2 אינטגרבילית, אבל f אינה אינטגרבילית.

11) תהיינה f ו- g שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

א. הוכח כי אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. הוכח כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$.

ג. הוכח כי אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$,

אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

היעזר באי-שוויון זה כדי להראות ש- $\frac{\sqrt{2}}{6}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{3}}{8}$.

12) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\ge0}$ (כלומר, $f(x)\ge0$).

א. הוכח כי אם f רציפה וכן $\int_a^b f(x)dx=0$, אז $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

ב. הבא דוגמה לפונקציה f , אינטגרבילית ב- $[a,b]$, כאשר $\int_a^b f(x)dx=0$,

אבל קיים $x_0\in[a,b]$, עבורו $f(x_0)>0$.

הערה: f לא תהיה רציפה.

13) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שלכל $c\in(0,1)$, הפונקציה f אינטגרבילית ב- $[c,1]$.

א. הוכח כי f אינטגרבילית ב- $[0,1]$.

ב. היעזר בסעיף א', והוכח כי $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \sin\frac{1}{x} & x\in(0,1]\end{cases}$ אינטגרבילית ב- $[0,1]$.

14) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שכאשר המכפלה fg אינטגרבילית ב- $[a,b]$, עבור פונקציה אינטגרבילית

כלשהי g , מתקיים $\int_a^b(fg)(x)dx=0$.

הוכח כי $f(x)\equiv0$ (כלומר, $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$).

15) ענה על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $x,y\ge 0$.

הוכח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^n+y^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\left\{x,y\right\}$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ רציפה.

הוכח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b\left(f(x)\right)^n dx\right)=\sup\left\{f(x)\mid x\in[a,b]\right\}$.

16) [אי-שוויון קושי-שוורץ]

א. יהיו $x_1,x_2,\dots x_n,y_1,y_2,\dots y_n\in\mathbb{R}$.

הוכח כי $\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right|\le\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

רמז: $\sum_{i=1}^n\left(tx_i+y_i\right)^2\ge 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

ב. תהיינה f,g שתי פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

הוכח כי $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\left(\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b\left(g(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

רמז: $\int_a^b\left[tf(x)+g(x)\right]^2dx\ge 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

17) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

משנים את הערכים של f במספר סופי של נקודות.

הוכח שהפונקציה שמתקבלת אינטגרבילית.

18) סעיף א'

1. הוכח כי $b^n-a^n=(b-a)\left(b^{n-1}+b^{n-2}a+b^{n-3}a+\ldots++b^{n-2}+a^{n-1}\right)$,
כאשר $n\in\mathbb{Z}^+$ וכן $a,b\in\mathbb{R}$.

2. הוכח כי $k^n<\frac{(k+1)^{n+1}-k^{n+1}}{n+1}<(k+1)^n$, כאשר $k,n\in\mathbb{Z}^+$.

3. הוכח כי $\sum_{k=1}^{m-1}k^n<\frac{m^{n+1}}{n+1}<\sum_{k=1}^{m}k^n$.

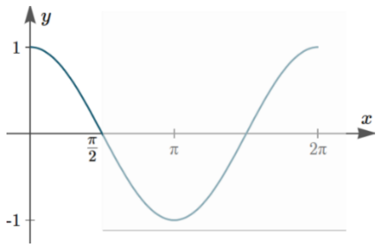
כלומר, $1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n<\frac{m^{n+1}}{n+1}<1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n+m^n$.

סעיף ב'

תהי $f(x)=x^n$ מוגדרת בתחום $[0,1]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

בעזרת סכומי רימן, הוכח כי f אינטגרבילית ב-$[0,1]$, וחשב $\int_0^1 f(x)dx$.

רמז: חלק את הקטע $[0,1]$ ל- m קטעים שווים והיעזר בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.



19) תהי $f(x)=\cos x$ מוגדרת ב-$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

השתמש בסכומי רימן והוכח ש- f אינטגרבילית ב-$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, וחשב את $\int_0^{\pi/2}f(x)dx$.

רמז 1: חלק את $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ל- n קטעים שווים, והנח כי $n\to\infty$.

רמז 2: השתמש בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר $k\in\mathbb{Z}^+$ ו- $\theta\in\mathbb{R}$,

$\sin\frac{\theta}{2}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2k+1)\theta}{2}-\sin\frac{(2k-1)\theta}{2}\right]$, כדי להעריך את הסכום:

$$\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right].$$

20) חשב את $\int_1^2 f(x)dx$, בעזרת החלוקה $P_n=\left\{\overset{=1}{x_0},x_1,\ldots,\overset{=2}{x_n}\right\}$,

כאשר $(0\le i\le n)$ $x_i=2^{\frac{i}{n}}$, וגם:

א. $f(x)=\frac{1}{x}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\qquad P_4=\left\{1,2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{2}{4}},2^{\frac{3}{4}},2\right\}$

21) תהיינה f,g שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. הוכח:

א. אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$, אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

22) כזכור, משפט ערך הביניים לאינטגרלים טוען כי:

אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, אז קיים $c\in(a,b)$, כך ש- $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$.

הוכח שהמשפט נכשל, אם נחליף את המילה 'רציפה' במילה 'אינטגרבילית'.

23) נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אי-שלילית.

הוכח כי $\sqrt{f}$ אף היא אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

24) נתונה הפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. הוכח או הפרך:

א. אם f אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס,

אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ב. אם f רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ג. אם f אינטגרבילית, אז כך גם f^2.

ד. אם $|f|$ אינטגרבילית, אז כך גם f.

25) חשב את $\int_{0.25}^{4.3}\lfloor x\rfloor dx$, כאשר $\lfloor x\rfloor=\max\{n\in\mathbb{Z}\,|\,n\le x\}$ (פונקציית הערך השלם).

26) הוכח כי אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$, אז αf אינטגרבילית ב-$[a,b]$,

וכן $\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$.

רמז: הנח תחילה כי $\alpha\ge 0$, והיעזר בפונקציה $-f$, ל-$\alpha<0$.

27) הוכח כי אם f,g אינטגרביליות ב-$[a,b]$, אז כך גם $f+g$,

ובנוסף מתקיים $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.

רמז: הוכח כי $\overline{\int_a^b}(f+g)\le\overline{\int_a^b}f+\overline{\int_a^b}g$ וכן $\underline{\int_a^b}(f+g)\ge\underline{\int_a^b}f+\underline{\int_a^b}g$.

28) נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן שקיים $c>0$, כך ש- $|f(x)|\ge c$ לכל $x\in[a,b]$. [לחלופין: f אינטגרבילית ואינה אפס; $\frac{1}{f}$ חסומה]

הוכח כי גם $g=\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

29) נניח כי f,g אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

א. הוכח כי גם $f\cdot g$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

ב. הוכח כי אם $|g(x)|\ge c>0$ לכל $x\in[a,b]$,

אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

30) הנח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ וכן ש-$a<c<b$, והוכח כי:

א. אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב-$[a,c]$ ו-$[c,b]$.

ב. אם f אינטגרבילית ב-$[a,c]$ ו-$[c,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב-$[a,b]$.

ג. באיזה מהמקרים, בסעיפים א' ו-ב', מתקיים השוויון:

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

31) נניח כי f,g אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

נגדיר $\varphi=\max\{f,g\}$ וכן $\psi=\min\{f,g\}$.

הוכח כי גם φ,ψ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

רמז: $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}\left[a+b+|a-b|\right]$, $\min\{a,b\}=?$

32) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

בהינתן החלוקה $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ של $[a,b]$ וכן $\varepsilon>0$,

נגדיר שתי תתי-קבוצות, $A_\varepsilon(P)$ ו-$B_\varepsilon(P)$ של $\{1,\dots,n\}$, באופן הבא:

$i\in A_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i<\varepsilon$, ו-$i\in B_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i\ge\varepsilon$.

כמו כן, נגדיר $s_\varepsilon(P)=\sum_{i\in B_\varepsilon(P)}\Delta x_i$.

הוכח כי פונקציה חסומה f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אם ורק אם

לכל $\varepsilon>0$ ולכל $\tau>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל P כנ"ל $\|P\|<\delta \Rightarrow s_\varepsilon(P)<\tau$.

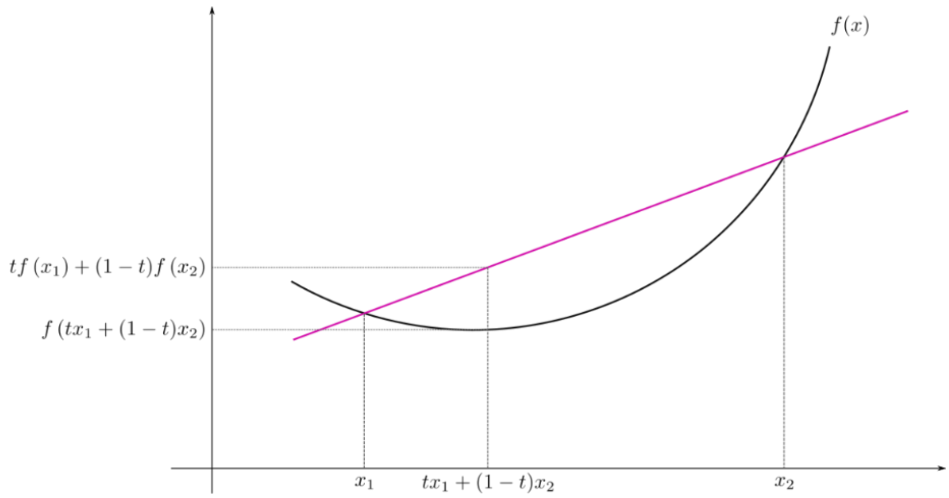
33) נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהי $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.

א. האם תמיד נוכל לבחור תגיות $C=\{c_1,\dots,c_n\}$ ל- P, כך ש- $S(f;P,C)=L(f,P)$? נמק.

הערה: ב"תגיות" הכוונה ש- $x_{i-1}<c_i<x_i$.

ב. האם תשובתך תשתנה אם יינתן גם כי f רציפה?

34) זכור כי פונקציה f על קטע I תיקרא קמורה, אם לכל $a,b\in I$, ולכל $t\in[0,1]$, מתקיים $f(t\cdot a+(1-t)\cdot b)\le t\cdot f(a)+(1-t)\cdot f(b)$.



א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה.

הוכח כי לכל $t_1,\dots,t_n\in[0,1]$ המקיימים $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$, מתקיים אי-השוויון

$f\left(\sum_{i=1}^{n}t_ia_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}t_if(a_i)$. [רמז: אינדוקציה על n]

ב. (אי-שוויון יֶנְסֶן)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה ורציפה, ותהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכח כי $f\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)\le\int_0^1 f(g(x))\,dx$.

35) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

א. הוכח כי f אי-זוגית אם ורק אם F זוגית.

ב. הוכח כי f זוגית אם ורק אם F אי-זוגית.

36) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

א. הוכח כי אם F מחזורית, אז גם f מחזורית.

ב. מצא דוגמה שבה f מחזורית אבל F לא-מחזורית.

37) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, תהי $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ ויהי $0\neq p\in\mathbb{R}$.

הוכח ששני התנאים הבאים שקולים:

1. $f(x+p)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
2. קיים $c\in\mathbb{R}$, כך ש- $\int_x^{x+p} f(t)dt=c$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

38) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכח שקיים $c\in[a,b]$, כך ש- $\int_a^c f(x)dx=\int_c^b f(x)dx$.

39) תהי A קבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, שהן אינטגרביליות בכל $[a,b]$,

ומקיימות את השוויון הבא לכל $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{\int_0^x f(t)dt=f(x)-1}$.

א. מצא דוגמה לפונקציה ב- A.

ב. הוכח כי אם $f\in A$, אז f גזירה ב- $\mathbb{R}$.

(רמז: תחילה הראה ש- f רציפה).

ג. מצא את כל הפונקציות f ב- A.

40) א. נגדיר פונקציה $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ באופן הבא: $f(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$.

הוכח כי f פונקציה קבועה, ומצא את $C\in\mathbb{R}$, כך ש- $f(x)\equiv C$.

תוכל להשתמש ב: $\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x$.

ב. נגדיר $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, על ידי $g(x)=\int_{-\cos x}^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

הוכח ש- g פונקציה קבועה.

המשפט היסודי של החדו"א, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן

שאלות

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי כל פונקציה רציפה בקטע סגור וחסום היא נגזרת.

ב. הראה כי פונקציה אינטגרבילית בקטע סגור וחסום אינה בהכרח נגזרת.

2) תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת כך: $f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x<0\\ 1 & 0\le x\le 1\end{cases}$,

ונגדיר את $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ עבור $-1\le x\le 1$.

שרטט את הגרפים של f ו- F, בהינתן:

א. f אינה רציפה (ב- 0), אבל F רציפה.

ב. F **אינה** גזירה ב- 0.

ג. תן דוגמה לפונקציה $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, כך ש- f אינה רציפה ב- 0,

אבל $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ גזירה ב- 0.

3) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכח כי $\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt$.

4) הוכח את 'משפט ערך הביניים השני לאינטגרלים', בהנחה שהפונקציות רציפות (ולא אינטגרביליות):

תהי f רציפה ב- $[a,b]$.

אם קיימת פונקציה גזירה F ב- $[a,b]$, כך ש- $F'=f$,

אז $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

5) נגדיר $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ באופן הבא: $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$,

ונגדיר $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ כך: $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

הוכח כי $F'=f$, אבל האינטגרל $\int_{-1}^{1}f(t)dt$ לא קיים.

6) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה, כך ש- $|f(x)|\le\int_0^x f(t)dt$, לכל $x\in[0,1]$.
הוכח כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

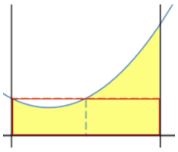
7) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה. נגדיר $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$, לכל $x\in\mathbb{R}$.
הוכח כי $g''=f$.

8) תהי f רציפה ב- $\mathbb{R}$ ויהי $\alpha\neq 0$.
נגדיר $g(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\sin[\alpha(x-t)]dt$.
הראה כי $f(x)=g''(x)+\alpha^2 g(x)$.

9) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ גזירה ב- $[0,1]$.
הראה כי קיים $c\in(0,1)$, כך ש- $\int_0^1 f(x)dx=f(0)+\frac{1}{2}f'(c)$.

10) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה ונניח כי $\int_0^1 f(x)dx=1$.
הראה כי קיים $c\in(0,1)$, כך ש- $f(c)=3c^2$.

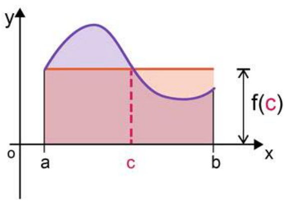
11) תהי $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$ רציפה.
הראה כי קיים $c\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, כך ש- $2\cos 2c\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)dt=f(c)$.



12) תהי $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ פונקציה, כך ש- $f''(x)>0$, לכל $x\in[0,a]$.
הוכח כי $\int_0^a f(x)dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$.

13) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, ונניח כי $\int_a^x f(t)dt=\int_x^b f(t)dt$, לכל $x\in[a,b]$.
הוכח כי $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

14) תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות, ונניח כי f עולה ו- g אי-שלילית.
הוכח כי קיים $c\in[a,b]$,
כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(b)\int_a^c g(x)dx+f(a)\int_c^b g(x)dx$.



משפט ערך הביניים הראשון לאינטגרלים

אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, אז קיים $c\in(a,b)$,
כך ש- $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$.

משפט ערך הביניים של לגראנז'

אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, וכן גזירה ב- (a,b), אז קיים $c\in(a,b)$,
כך ש- $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

15) ענה על הסעיפים הבאים :

א. בהנחה שמשפט ערך הביניים של לגראנז' מתקיים,
הוכח את משפט ערך הביניים הראשון לאינטגרלים.

ב. בהנחה שמשפט ערך הביניים הראשון לאינטגרלים מתקיים, הוכח את
משפט ערך הביניים של לגראנז' לפונקציות עם נגזרת ראשונה רציפה.

16) השתמש במשפט ערך הביניים הראשון לאינטגרלים,
והוכח כי $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

17) תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות, ונתון כי $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.
הוכח כי קיים $c\in[a,b]$, כך ש- $f(c)=g(c)$.

משפט ערך הביניים השני לאינטגרלים

תהי f רציפה ו- g אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

אם $g(x)\geq 0$, (או $g(x)\leq 0$) ב- $[a,b]$, אז קיים $c\in[a,b]$, כך ש-

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

18) הוכח כי $\frac{\pi^2}{9}\leq\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx\leq\frac{2\pi^2}{9}$.

19) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$.

20) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx = f(0)$.

21) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכח כי $\lim\limits_{\|P\|\to 0} S(P,f)=\int_a^b f(x)dx$.

סימונים: $P=\{\underset{=a}{x_0},x_1,\dots,\underset{=b}{x_n}\}$, $S(P,f)=\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

$c_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\|P\|=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}$.

22) תהי $a_n=\ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

המר את a_n לסכום רימן ומצא את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

23) תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, כך ש- f' ו- g' רציפות ב- $[a,b]$.

הוכח כי $\int_a^b f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$.

24) תהי $\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות, ותהי f רציפה בטווח של ϕ.

הוכח כי $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt=\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx$.

25) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ויהיו $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירות.
הוכח כי אם הטווחים של u ו- v מוכלים ב- $[a,b]$,
אז $\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$.

26) נגדיר את $f:[1,\infty)$ באופן הבא: $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$.
פתור את השוויון $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$.