חדוא 2 מ

פרק 28 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^4-x}{\ln x}dx$.

2) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^m-x^n}{\ln x}dx$ $(m,n>0)$.

3) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

4) חשב את האינטגרל $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)dx$.

5) הוכח כי $\pi \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right) = \int_0^{\pi} \ln\left(1+\alpha\cos x\right)dx$, עבור $|\alpha|<1$.

6) חשב $\int_0^{\pi} \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx$, עבור $\alpha\neq\pm1$.

7) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

8) חשב את האינטגרל $\int_0^1 x^p(\ln x)^m dx$ $(p>0,\ m\in\mathbb{N})$.

9) חשב את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{(2-\cos x)^2}dx$.

תשובות סופיות

1) $\ln 2.5$

2) $\ln\left(\dfrac{m+1}{n+1}\right)$

3) $\dfrac{\pi}{8}\ln 2$

4) 2π

5) שאלת הוכחה.

6) $\int_0^{\pi} \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx = \begin{cases} 0 & |\alpha|<1 \\ 2\pi\ln|\alpha| & |\alpha|>1 \end{cases}$

7) $\dfrac{\pi+2}{8}$

8) $\dfrac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}}$

9) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{27}}$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$, עבור $b>a>0$.

2) חשב את האינטגרל $\int_0^{\pi} \ln\frac{b-\cos x}{a-\cos x}dx$, עבור $b,a>1$.

3) הוכח כי $\int_0^{2\pi}\left[(b-\sin x)^2-(a-\sin x)^2\right]dx=2\pi(b^2-a^2)$, לכל a ו- b.

הערה: פתור בשתי דרכים, גם ע"י אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם ע"י חישוב ישיר.

4) בהינתן הנוסחה: $\int_0^{2\pi}\frac{1}{\alpha+\sin x}dx=\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $\alpha>1$,

הוכח כי: $\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right)dx=2\pi\ln\left(\frac{9}{8}\right)$.

תשובות סופיות

1) $\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$

2) $\pi\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה

אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר

הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שילמדו בהמשך.
חלק מהמרצים מסתפק רק בצד הטכני החישובי ולא נכנס לנושא זה כלל.
בררו עם מתרגל ו/או מרצה הקורס האם אתם נדרשים לנושא זה.
במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים.
בהצלחה!

שאלות

1) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(kx)\,dx$, כאשר k ממשי.
הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $0<a\le\alpha$.

2) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+\alpha\right)^n}dx$, כאשר n טבעי.
הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha\ge 1$.

3) הוכח שהאינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ מתכנס במידה שווה עבור $\alpha\ge 0$.

4) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2}dx$.
הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α.

5) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$ עבור $\alpha\ge k>0$.

א. חשב את האינטגרל והוכח שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α המקיים $\alpha\ge k>0$.

6) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}dx$.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל n טבעי ולכל α המקיים $\alpha \ge k > 0$.

7) נתון כי $\phi(\alpha)=\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2/2}dx$, כאשר $\alpha \ge k > 0$.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

8) נתון האינטגרל $\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2}dx$.

הוכח שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \ge k > 0$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר GooL.co.il

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשב את האינטגרל $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$.

2) הוכח שלכל n טבעי מתקיים:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{\pi}{2} .$$

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$.

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty x^{10} e^{-x^2} dx$.

ג. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx$.

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$ $(\alpha > 0)$.

ב. בעזרת סעיף א' חשב את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

תשובות סופיות

1) $n!$

2) שאלת הוכחה.

3) א. $\sqrt{2\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

4) א. אם n אי-זוגי אז 0, ואם n זוגי אז $1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot\sqrt{2\pi}$.

ב. $\frac{945}{64}\sqrt{\pi}$ ג. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

5) א. $-\arctan\alpha+\frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{2}$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשב: $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, עבור $b>a\geq k>0$.

2) חשב: $\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$, עבור $b>a\geq k>0$.

3) חשב: $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

4) הוכח כי עבור $b>a>0$ ו- $r\in\mathbb{R}$, מתקיים $\int_0^\infty \cos rx\frac{a^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+r^2}{a^2+r^2}$.

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin rx}{x}dx=\arctan\frac{r}{\alpha}$ $(\alpha,r>0)$.

ב. הוכח כי $\int_0^\infty \left[e^{-\alpha x}\frac{1-\cos rx}{x^2}\right]dx=\arctan\frac{r}{a}-\frac{a}{2}\ln\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)$ $(\alpha,r>0)$.

ג. הוכח כי $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\arctan\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)$ $(\alpha>0)$.

6) הוכח:

א. $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$.

8) חשב: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

תשובות סופיות

1) $\ln\frac{b}{a}$

2) $\frac{\pi}{2}(b-a)$

3) π

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{4}$

8) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$