חדוא 2

פרק 35 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון 1
2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני 3
3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי 4
4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים 5
5. מבחני השוואה 6
6. התכנסות בהחלט 8
7. מבחן דיריכלה 9
8. התכנסות בתנאי 10

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות **1-5**:

1) $\int_1^\infty \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$

2) $\int_1^\infty \frac{dx}{\left(1+x\right)\sqrt{x}}$

3) $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx$

4) $\int_1^\infty \frac{x}{x^2+5}dx$

5) $\int_1^\infty x^2e^{-2x}dx$

6) הוכח כי $\int_0^\pi \frac{1}{1+\alpha\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, עבור $|\alpha|<1$.

7) הוכח כי $\int_0^\pi \frac{1}{\alpha-\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $|\alpha|>1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}$
2) $\frac{\pi}{2}$
3) $\frac{1}{2e}$
4) מתבדר: ∞.
5) $\frac{5}{4e^2}$
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלות

חשב את האינטגרלים הבאים:

1) $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

תשובות סופיות

1) מתבדר: ∞.

2) מתבדר: ∞.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

1) חשב את האינטגרל הבא: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

תשובה

1) מתבדר: ∞.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

1) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y=e^{2x}$, הישר $x=1$ וציר ה- x , עבור $x\le 1$.

2) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x=5$.

3) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=\frac{x^2}{e^{x^3}}$.
ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0\le x\le k$, שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x\ge k$.
מצא את הקבוע k .

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}e^2$

2) $2\sqrt{5}$

3) $k=\sqrt[3]{\ln 2}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחני השוואה

שאלות

בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים:

1) $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5}dx$

2) $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5}dx$

3) $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^4}dx$

4) $\int_3^\infty \frac{\sin x\cdot \ln x}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$

5) $\int_1^\infty \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$

6) $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}dx$

7) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$

8) $\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2}dx$

9) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x}dx$

10) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

11) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

12) $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

13) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}dx$

14) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

15) $\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2\left(x+\sqrt{x}\right)}$

16) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5}\sqrt{(1+x)^5}}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) מתבדר.
7) מתכנס.
8) מתכנס.
9) מתבדר.
10) מתכנס.
11) מתכנס.
12) מתבדר.
13) מתכנס.
14) מתבדר.
15) מתכנס.
16) מתכנס.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

התכנסות בהחלט

שאלות

בשאלות **1-3** בדוק אם האינטגרלים מתכנסים:

1) $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+1}dx$

2) $\int_0^\infty e^{-10x}\sin 4x dx$

3) $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

4) הוכח: אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

תשובות סופיות

1) מתכנס.

2) מתכנס.

3) מתכנס.

4) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן דיריכלה

שאלות

הוכח כי האינטגרלים הבאים מתכנסים:

1) $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx$

2) א. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p>0)$

ב. $\int_1^\infty \sin\left(x^2\right) dx$

3) $\int_1^\infty \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p>0)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

התכנסות בתנאי

שאלות

קבע האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

1) א. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

ב. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

ג. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

2) א. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

ב. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

ג. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

3) א. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin\left(x^4\right)}{x^p}dx$

4) $\int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1}dx$

5) $\int_0^{\pi/2} \frac{x\sin\left(\tan x\right)}{\cos x}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.

ב. מתכנס בהחלט.

ג. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.

2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.

3) א. מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$,

מתבדר עבור $p \geq 2$.

ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 5$,

מתבדר עבור $p \geq 5$.

4) מתכנס בתנאי.

5) מתכנס בתנאי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©