

# אנליזה מתקדמת

פרק 1 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים ..... 1
2. מציאת פונקציה קדומה ..... 4

## אינטגרלים מיידיים

## שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ):

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4 dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$ ):

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$ ):

$$\int \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \qquad \int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \qquad \int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

$$\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$(30) \quad \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשב את האינטגרל}$$

$$(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

## תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll}
 -\frac{1}{x} + c & \text{(3)} & \frac{x^5}{5} + c & \text{(2)} & 4x + c & \text{(1)} \\
 \frac{4x^{11}}{11} + c & \text{(6)} & -\frac{2}{\sqrt{x}} + c & \text{(5)} & \frac{x^{1.5}}{1.5} + c & \text{(4)} \\
 \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c & \text{(9)} & -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c & \text{(8)} & \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c & \text{(7)} \\
 \frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c & \text{(12)} & -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c & \text{(11)} & \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c & \text{(10)} \\
 -\frac{1}{(x-2)^4} + c & \text{(15)} & \frac{(x-1)^{21}}{21} + c & \text{(14)} & \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c & \text{(13)} \\
 & & 10\sqrt{2x+4} + c & \text{(17)} & \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c & \text{(16)} \\
 -\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c & \text{(19)} & & & -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c & \text{(18)} \\
 \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c & \text{(22)} & \frac{\ln|x|}{4} + c & \text{(21)} & \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c & \text{(20)} \\
 x + \ln|x+2| + c & \text{(25)} & \frac{\ln|4x-1|}{4} + c & \text{(24)} & x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c & \text{(23)} \\
 \frac{e^{2x+2}}{2} + c & \text{(28)} & \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c & \text{(27)} & 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c & \text{(26)} \\
 \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c & \text{(30)} & & & 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c & \text{(29)} \\
 -\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c & \text{(33)} & \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c & \text{(32)} & \frac{1}{2}\arctan(2x) + c & \text{(31)}
 \end{array}$$

## מציאת פונקציה קדומה

### שאלות

- (1) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$ .  
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2, 3)$ .  
 מצא את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$ .  
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 4$ .  
 מצא את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$ .  
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -6$ .  
 מצא את הפונקציה.
- (4) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2x - 6$ .  
 ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.  
 מצא את הפונקציה.
- (5) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$ .  
 שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה  $y = 5\frac{2}{3}$ , הוא 3.  
 מצא את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה:  $f''(x) = 6x + 6$ .  
 שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,  
 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.  
 מצא את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה:  $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ .  
 המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר  $y = -4$ .  
 מצא את הפונקציה.

8 נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0| \text{ ממשי: } x_0 \text{ לכל}$$

א. מצא את תחומי הרציפות של הפונקציה.

ב. חשב את הגבול הבא או קבע שהוא אינו קיים  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ג. מצא כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ד. מצא את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.

ה. תהי  $G(x)$  פונקציה קדומה של  $|x|$ .

חשב את הנגזרת  $(G(x) - f(x))'$ .

### תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

8 א. רציפה לכל  $x$ . ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . ג. נקודת חיתוך אחת  $(0,0)$ .

ד. נקודת פיתול אחת  $(0,0)$ . ה. 0