

# מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 42 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משטחיים מסוג 1 .....
2. אינטגרלים משטחיים מסוג 2 .....
3. הצגה פרמטרית של משטח (ללא ספר) .....

## אינטגרלים משטחיים מסוג I

### שאלות

בשאלות 1-5 חשב את האינטגרל המשטחי:

$$(1) \quad \iint_S x^2 y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = 1 + 2x + 3y$$

$$\text{מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2].$$

$$(2) \quad \iint_S x dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח } y = x^2 + 4z, \text{ } 0 \leq x \leq 2, \text{ } 0 \leq z \leq 2.$$

$$(3) \quad \iint_S y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = y + 3, \text{ שכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1.$$

$$(4) \quad \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ } z \geq 0.$$

$$(5) \quad \iint_S x y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט } \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$$

$$\text{המקיים } 1 \leq u \leq 2, \text{ } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$(6) \quad \text{חשב את שטח הפנים של כדור בעל רדיוס } R.$$

$$(7) \quad \text{היריעה הדקה } S \text{ היא חלק הפרבולואיד } z = x^2 + y^2, \text{ שמתחת למישור } z = 1,$$

$$\text{וצפיפותה } \delta(x, y, z) = \delta_0, \text{ קבועה.}$$

חשב את מסת היריעה.

**תשובות סופיות**

$$171\sqrt{14} \quad \text{(1)}$$

$$\frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6} \quad \text{(2)}$$

$$\pi\sqrt{2}/4 \quad \text{(3)}$$

$$16\pi \quad \text{(4)}$$

$$93/\sqrt{10} \quad \text{(5)}$$

$$4\pi R^2 \quad \text{(6)}$$

$$\frac{\pi\delta_0}{6}(5\sqrt{5}-1) \quad \text{(7)}$$

## אינטגרל משטחי מסוג II

### שאלות

בשאלות הבאות חשב את האינטגרל  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$  ( $\mathbf{n}$  הוא נורמל חיצוני של  $S$ ).

בניסוח אחר: חשב את השטף של שדה הזרימה  $\mathbf{F}$  דרך  $S$ .

(1)  $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$ ;  $S$  הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים:  
 $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$ .

(2)  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ ;  $S$  הוא פני הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

(3)  $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$ ;  $S$  הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי המישורים:  
 $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$ .

(4)  $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ;  $S$  חלק הפרבולואיד  $z = 4 - x^2 - y^2$ , שבו  $z \geq 0$ .

(5)  $\mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k}$ ;  $S$  הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור  $xy$ .

### תשובות סופיות

(1)  $\frac{11}{6}$

(2)  $\frac{8\pi}{3}$

(3) 27

(4)  $12\pi$

(5)  $-16\pi$