

# מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 40 - אינטגרלים קווים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים קווים ושימושיהם.....1

## אינטגרלים קויים ושימושיהם

\* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

### שאלות

#### אינטגרל קוי מסוג I

בשאלות 1-4 חשב את האינטגרל  $\int_C f(x, y) ds$ , כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi ; f(x, y) = 1 - x^2 \quad (1)$$

$$C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq \pi ; f(x, y) = x \quad (2)$$

$$C \text{ קטע של ישר המחבר את } O(0,0) \text{ עם } A(1,2) ; f(x, y) = x + y \quad (3)$$

$$C \text{ היקפו של } \Delta OAB \text{ של } O(0,0), A(0,1), B(1,0) ; f(x, y) = x + y^2 \quad (4)$$

בשאלות 5-6 חשב את האינטגרל  $\int_C f(x, y, z) ds$ , כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, z = t \quad 0 \leq t \leq \pi ; f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

$$C: x = t, y = \frac{1}{\sqrt{2}} t^2, z = \frac{1}{3} t^3 \quad 0 \leq t \leq 3 ; f(x, y, z) = x^3 + 3z \quad (6)$$

$$(7) \text{ חשב את אורך העקום } x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

$$(8) \text{ סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי } x = \cos t, y = \sin t, z = 2t \quad (0 \leq t \leq \pi) \text{ . חשב את מסת הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא } \delta(x, y, z) = kz \quad (k > 0) \text{ .}$$

## אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות 9-10 חשב:

$$C: x = \cos t, y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy \quad (9)$$

$$C: x = t, y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 1; \int_C (2x + y) dx + (x^2 - y) dy \quad (10)$$

$$(11) \text{ חשב } \int_C y dx + x^2 dy, \text{ כאשר } C \text{ המסלול מנקודה } (0,0) \text{ לנקודה } (2,4),$$

ו- $C$  נתון ע"י המשוואה:

$$א. y = 2x$$

$$ב. y = x^2$$

$$(12) \text{ חשב } \int_{(1,1)}^{(4,2)} (x + y) dx + (y - x) dy, \text{ אם העקום נתון על ידי:}$$

$$א. הפרבולה  $y^2 = x$ .$$

ב. קו ישר.

ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$  ל- $(1,2)$  ומשם ל- $(4,2)$ .

$$ד. העקום:  $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ .$$

$$(13) \text{ חשב } \int_C x^2 y dx + x dy, \text{ כאשר המסלול } C \text{ מתואר בציור:}$$



$$(14) \text{ חשב } \int_C (x - y^2) dx + dy, \text{ כאשר המסלול } C \text{ מתואר בציור:}$$



$$(15) \text{ אם } \mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$$

חשב את האינטגרל הקווי  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , מ- $(0,0,0)$  ל- $(1,1,1)$ , לאורך המסלולים:

$$\text{א. } x=t, y=t^2, z=t^3$$

ב. הקוים הישרים מ- $(0,0,0)$  ל- $(0,0,1)$ , משם ל- $(0,1,1)$  ומשם ל- $(1,1,1)$ .

ג. הישר המחבר את  $(0,0,0)$  ו- $(1,1,1)$ .

בשאלות 16-17 חשב את האינטגרל הקווי  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , כאשר:

$$(16) \mathbf{F}(x, y) = (x^2 y^3, -y\sqrt{x}), \quad \mathbf{r}(t) = (t^2, -t^3), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(17) \mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz), \quad \mathbf{r}(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(18) \text{ נתון שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y) = x^3 y \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$$

א. חשב את העבודה שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה  $y = x^2$

מ- $(-2, 4)$  עד  $(1, 1)$ .

ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1, 1)$  עד  $(-2, 4)$ ?

$$(19) \text{ חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

על חלקיק הנע לאורך העיקול  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 1$ ).

### הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f, g, h) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f dx + g dy + h dz$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_1, A_2, A_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

## תשובות סופיות

- (1)  $\pi$
- (2)  $\frac{16}{3}$
- (3)  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
- (4)  $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$
- (5)  $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$
- (6)  $\frac{567}{2}$
- (7) 6
- (8)  $\sqrt{5}k\pi^2$
- (9)  $\frac{1}{3}$
- (10)  $\frac{4}{3}$
- (11) א.  $\frac{28}{3}$  ב.  $\frac{32}{3}$
- (12) א.  $\frac{34}{3}$  ב. 11 ג. 14 ד.  $\frac{32}{3}$
- (13)  $\frac{1}{2}$
- (14)  $\frac{4}{5}$
- (15) א. 2 ב. -3 ג.  $\frac{6}{5}$
- (16)  $-\frac{59}{105}$
- (17)  $\frac{6}{5} - \sin 1 - \cos 1$
- (18) א. 3 ב. -3
- (19) 1

## הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

דוגמה	הצגה פרמטרית	עקום
$y = x^2 (1 \leq x \leq 2)$ $\Downarrow$ $x = t, y = t^2 (1 \leq t \leq 2)$	$x = t, y = f(t) (a \leq t \leq b)$	$y = f(x) (a \leq x \leq b)$
$x = y^2 (1 \leq y \leq 2)$ $\Downarrow$ $y = t, x = t^2 (1 \leq t \leq 2)$	$y = t, x = f(t) (a \leq t \leq b)$	$x = f(y) (a \leq y \leq b)$
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = r \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">נגד כיוון השעון</p>	$x^2 + y^2 = r^2$ <p style="text-align: center;">מעגל</p>
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = -2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = -r \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">עם כיוון השעון</p>	$x^2 + y^2 = r^2$ <p style="text-align: center;">מעגל</p>
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">נגד כיוון השעון</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p style="text-align: center;">אליפסה</p>
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = -5 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = -b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">עם כיוון השעון</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p style="text-align: center;">אליפסה</p>
ישר פרמטרי מהנק' (1, 2) לנק' (3, 4) $x = 1 + 2t$ $y = 2 + 2t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במישור מהנק' $(x_0, y_0)$ לנק' $(x_1, y_1)$
ישר פרמטרי מ- (1, 2, 3) ל- (4, 7, 9) $x = 1 + 3t$ $y = 2 + 5t$ $z = 3 + 6t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $z = z_0 + t(z_1 - z_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במרחב מהנק' $(x_0, y_0, z_0)$ לנק' $(x_1, y_1, z_1)$