

מבוא להסתברות

פרק 47 - אי שוויונים בהסתברות

תוכן העניינים

1. אי שוויון צ'בישב.....1

אי-שוויון צ'בישב:

רקע:

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך a חיובי

$$P\{|X - E(X)| \geq a\} \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2} \quad \text{מתקיים:}$$

$$P\{|X - E(X)| < a\} \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{a^2} \quad \text{מכאן גם נובע שמתקיים:}$$

אי-שוויון צ'בישב נותן חסמים להסתברות סימטרית סביב התוחלת ללא צורך בידעת ההתפלגות של המשתנה המקרי X .

דוגמה:

נתון משתנה מקרי עם סטיית תקן של 3. האם יתכן שההסתברות שהסטייה של המשתנה המקרי מתוחלתו תהיה קטנה מ-5 היא 0.6?

$$\sigma(X) = 3$$

$$P\{|X - E(X)| < a\} \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{a^2} \quad \text{נציב:}$$

$$P\{|X - E(X)| < 5\} \geq 1 - \frac{3^2}{5^2} = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = 0.64$$

$$P\{|X - E(X)| < 5\} \neq 0.6 \quad \text{לכן לא יתכן.}$$

שאלות:

- (1) מצאו חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3 :
 - א. $p(2 < x < 14)$.
 - ב. $p(|x - 8| \geq 9)$.
- (2) האם קיים משתנה מקרי X בעל תוחלת μ וסטית תקן σ שעבורו מתקיים $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.7$? הסבירו.
- (3) מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב-20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100. היעזרו באי-שוויון צ'בישב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120.
- (4) מטילים מטבע 120 פעמים. מה ניתן להגיד על הסיכוי שהתוצאה עץ תתקבל בין 50 ל-70 פעמים לפי אי-שוויון צ'בישב?
- (5) מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונותם 3 סמ"ר יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?
- (6) אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40%. נלקח מדגם מקרי בגודל 200. תנו חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל-45%.
- (7) בוחרים קוד n ספרתי באופן מקרי.
 - א. עבור $n = 10$, העריכו את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.
 - ב. מה אורך הקוד המינימלי (n) שיבטיח שבהסתברות של לפחות 95%, ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75?

(8) בעיר מסוימת ל-5% מהמשפחות אין מכונית, ל-20% יש מכונית אחת, ל-35% יש שתי מכוניות, ל-30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות. נניח שמספר המשפחות בעיר גדול מאוד. העריכו את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות אקראיות יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27.

(9) $X_1, X_2, \dots, X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים גיאומטרית עם פרמטר p באופן

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \geq \frac{2}{p}\right) \leq \frac{1-p}{n} : \text{הוכיחו שמתקיים: } 0 < p < 1. \text{ בלתי תלוי זה בזה.}$$

(10) $X_1, X_2, \dots, X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים פואסונית עם פרמטר $\lambda_i = i$, באופן בלתי תלוי זה בזה. נסמן את:

$$T = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים: } P(|2T - n(n+1)| < 2n) \geq \frac{n-1}{2n}$$

תשובות סופיות:

(1) א. בין $\frac{3}{4}$ ל-1. ב. בין 0 ל- $\frac{1}{9}$.

(2) לא יתכן.

(3) 0.75.

(4) לפחות 0.7.

(5) לפחות 30.

(6) 0.52.

(7) א. לכל היותר 0.825. ב. 294.

(8) 0.7056.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.