

# תורת ההסתברות

פרק 55 - אי שוויונים בהסתברות

תוכן העניינים

1. אי שוויון מרקוב..... 1
2. אי שוויון צ'בישב..... 5

## אי-שוויון מרקוב:

### רקע:

אי-שוויון מרקוב רלבנטי לשימוש עבור כל משתנה מקרי אי-שלילי.

הפרמטר  $a$  הינו ממשי וחיובי ואז חייב להתקיים ש:  $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$ ,

לכן מתקיים גם ש:  $P(X < a) \geq 1 - \frac{E[X]}{a}$ .

### דוגמה:

אורך חיים של מכשיר מתפלג עם תוחלת של 500 שעות. חשבו לפי אי-שוויון מרקוב את ההסתברות שאורך חיים של מכשיר יהיה לפחות 1500 שעות.

$X$  = אורך חיים של מכשיר (רציף).

$$X \geq 0, E[X] = 500$$

$$P(X \geq 1500) \leq \frac{E[X]}{a} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3}$$

לכן,  $0 \leq P(X \geq 1500) \leq \frac{1}{3}$ .

## שאלות:

- (1) ידוע מניסיון העבר כי ציון במבחן הגמר של סטודנט הוא משתנה מקרי שתוחלתו 65. מצאו חסם עליון להסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה לפחות 75.
- (2) התפלגות מספר הילדים למשפחה במדינה מסוימת היא עם תוחלת של 2 ילדים. נלקחו 5 משפחות אקראיות. העריכו את הסיכוי שבסה"כ בחמשת המשפחות יש יותר מ-15 ילדים.
- (3)  $X$  משתנה מקרי רציף אי-שלילי, שתוחלתו 15. האם ייתכן ש:  $P(X > 65) = 0.3$ ?
- (4)  $X$  משתנה מקרי בדיד, המקיים:  $X > -2$ , ותוחלתו 6. מצאו חסם תחתון ל-  $P(X < 10)$ .
- (5)  $X$  משתנה מקרי המקיים:  $P(X \geq 0) = 1$  ו-  $s > 0$  קבוע ממשי. הוכיחו כי:  $P(X < sE(X)) \geq \frac{s-1}{s}$ .
- (6) נתון ש-  $X_i \sim P(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  הם משתנים בלתי תלויים. מצאו חסמים להסתברות ש-  $\sum_{i=1}^n X_i \geq 3n\lambda$ .
- (7) הוכיחו את אי-שוויון מרקוב. רמז: היעזרו במשתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 כאשר  $X \geq a$ .

(8) בשכונה חדשה בונים  $n$  בתים חדשים הנבנים בחלקת אדמה עגולה. כל בית נצבע בלבן בסיכוי  $p$  ללא תלות בבתיים האחרים. בניין שלא נצבע בלבן נצבע באפור. בית לבן הוא בית בודד אם הוא נמצא בין שני בתים אפורים. נגדיר את  $X$  להיות מספר הבתים הלבנים הבודדים.

א. מצאו את התוחלת של  $X$ .

ב. כעת נניח ש- $p = \frac{1}{4}$ . הראו שהסיכוי שמספר הבתים הלבנים הבודדים

$$\text{יהיה קטן מ-} \frac{n}{4} \text{ הוא לפחות } \frac{7}{16}.$$

(9) הוכיחו את אי-שוויון צ'בישב: אם  $X$  הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונויותו הן סופיות, אז לכל ערך  $k$  חיובי מתקיים:  $P\{|X - E(X)| \geq k\} \leq \frac{\text{Var}(X)}{k^2}$ .

רמז: היעזרו באי-שוויון מרקוב.

## תשובות סופיות:

$$P(X \geq 75) \leq \frac{65}{75} = \frac{13}{15} \quad (1)$$

$$0 \leq P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3} \quad (2)$$

(3) לא יתכן.

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

(5) שאלת הוכחה.

$$0 \leq P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3} \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.

(8) א.  $n \cdot p(1-p)^2$ . ב. שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

## אי-שוויון צ'בישב:

**רקע:**

אם  $X$  הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך  $a$  חיובי

$$P\{|X - E(X)| \geq a\} \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2} \quad \text{מתקיים:}$$

$$P\{|X - E(X)| < a\} \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{a^2} \quad \text{מכאן גם נובע שמתקיים:}$$

אי-שוויון צ'בישב נותן חסמים להסתברות סימטרית סביב התוחלת ללא צורך בדיעת ההתפלגות של המשתנה המקרי  $X$ .

**דוגמה:**

נתון משתנה מקרי עם סטיית תקן של 3. האם יתכן שההסתברות שהסטייה של המשתנה המקרי מתוחלתו תהיה קטנה מ-5 היא 0.6?

$$\sigma(X) = 3$$

$$P\{|X - E(X)| < a\} \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{a^2} \quad \text{נציב:}$$

$$P\{|X - E(X)| < 5\} \geq 1 - \frac{3^2}{5^2} = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = 0.64$$

$$P\{|X - E(X)| < 5\} \neq 0.6 \quad \text{לכן לא יתכן.}$$

## שאלות:

- (1) מצאו חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3 :
  - א.  $p(2 < x < 14)$
  - ב.  $p(|x - 8| \geq 9)$
- (2) האם קיים משתנה מקרי  $X$  בעל תוחלת  $\mu$  וסטית תקן  $\sigma$  שעבורו מתקיים  $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.7$  ? הסבירו.
- (3) מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב-20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100. היעזרו באי-שוויון צ'בישב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120.
- (4) מטילים מטבע 120 פעמים. מה ניתן להגיד על הסיכוי שהתוצאה עץ תתקבל בין 50 ל-70 פעמים לפי אי-שוויון צ'בישב?
- (5) מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונותם 3 סמ"ר יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?
- (6) אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40%. נלקח מדגם מקרי בגודל 200. תנו חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל-45%.
- (7) בוחרים קוד  $n$  ספרתי באופן מקרי.
  - א. עבור  $n = 10$ , העריכו את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.
  - ב. מה אורך הקוד המינימלי ( $n$ ) שיבטיח שבהסתברות של לפחות 95%, ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75?

(8) בעיר מסוימת ל-5% מהמשפחות אין מכונית, ל-20% יש מכונית אחת, ל-35% יש שתי מכוניות, ל-30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות. נניח שמספר המשפחות בעיר גדול מאוד. העריכו את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות אקראיות יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27.

(9)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  הם משתנים מקיים המתפלגים גיאומטרית עם פרמטר  $p$  באופן

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \geq \frac{2}{p}\right) \leq \frac{1-p}{n} : \text{הוכיחו שמתקיים: } 0 < p < 1. \text{ בלתי תלוי זה בזה.}$$

(10)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  הם משתנים מקיים המתפלגים פואסונית עם פרמטר  $\lambda_i = i$ , באופן בלתי תלוי זה בזה. נסמן את:

$$T = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים: } P(|2T - n(n+1)| < 2n) \geq \frac{n-1}{2n}$$

### תשובות סופיות:

- (1) א. בין  $\frac{3}{4}$  ל-1. ב. בין 0 ל- $\frac{1}{9}$ .
- (2) לא יתכן.
- (3) 0.75.
- (4) לפחות 0.7.
- (5) לפחות 30.
- (6) 0.52.
- (7) א. לכל היותר 0.825. ב. 294.
- (8) 0.7056.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.