

# מכינה במתמטיקה להנדסאי תוכנה

פרק 12 - אלגברה ליניארית - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטות..... 1
2. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות..... 9
3. שימושי הדטרמיננטה..... 10

## דטרמיננטות

### שאלות

בשאלות 1-5 חשב את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשב את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \text{ ב.} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \text{ א. (7)} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{array} \right| \text{ ג.} \end{array}$$

בשאלות 8-10 חשב את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{array} \right| \text{ (8)}$$

$$\left| \begin{array}{cccc} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{array} \right| \text{ (9)}$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{array} \right| \text{ (10)}$$

בשאלות 11-12 הראה, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{array} \right| \text{ ג.} \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{array} \right| \text{ ב.} \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{array} \right| \text{ א. (11)} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \cdot \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשב:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad \text{(13)}$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad \text{(14)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(15)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{(16) הוכח כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{(17) הוכח כי:}$$

$$\text{.det} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(18) חשב:}$$

בכל אחת מהשאלות 19-25, נתונה מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .  
חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad \text{(19)}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{(20)}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{(21)}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & \text{else} \end{cases} \quad \text{(22)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \quad \text{(23)}$$

$$(24) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 3(n-1) \end{pmatrix}$$

$$(25) a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

\* בשאלה 25:

1. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה.
2. הנח כי  $a=3$ ,  $b=1$ ,  $c=2$ , ומצא:
  - א. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
  - ב. את הדטרמיננטה, כאשר  $n=20$ .

$$(26) \text{חשב: } \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

בשאלות 27-28 נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות מסדר 3,  $|A|=4$ ,  $|B|=2$ .  
חשב:

$$(27) \text{א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(28) \text{א. } |-A^{-2}B^T A^3| \quad \text{ב. } |-2A^2 A^T \text{adj}B|$$

(29) נתון:  $(PQ)^{-1}APQ = B$ .

הוכח:  $|A|=|B|$ .

(30) נתון:  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש- $2AB+3I=0$ ,  $|A|=2$ .  
חשב את  $|B|$ .

**(31)** נתון:  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $B^2 - 2A^{-1} = 0$ ,  $A + 3B = 0$ .  
 חשב את  $|A|$ ,  $|B|$ .

**(32)** הוכח: 1.  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$  2.  $|adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$ .

**(33)** נתון כי  $A$  מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.  
 הוכח ש- $|A| = 0$ .

**(34)** נתון:  $A$  מטריצה מסדר  $n$ ,  $|A| = 128$ ,  $2AB = B^T A^2$ , ו- $B$  הפיכה.  
 מצא את  $n$ .

**(35)** נתון:  $\det(A_{n \times n}) = 2$ ,  $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$ .

חשב:  $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $ad - bc$     ב. 29    ג. -1
- (2) א. -1    ב. -3    ג. -14
- (3) א. 24    ב. 234    ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0    ב. 0    ג. 3
- (7) א. 24    ב. 44    ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) הוכחה.
- (17) הוכחה.
- (18)  $(k-1)^4(k+4)$
- (19)  $n!$
- (20)  $(-1)^{n-1}n!$
- (21)  $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$
- (22)  $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$
- (23) 1
- (24)  $2 \cdot 3^{n-2}$
- (25) 1.  $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$ ,  $D_2 = a^2 - bc$ ,  $D_3 = a^3 - 2abc$
- א.2.  $D_n = 2^{n+1} - 1$     ב.  $D_{20} = 2^{21} - 1$
- (26) 0
- (27) א. 4    ב.  $2^{13}$
- (28) א. -8    ב.  $-2^{11}$
- (29) הוכחה.

$$\frac{81}{32} \quad (30)$$

$$|A|=18, |B|=-2/3 \quad (31)$$

(32) הוכחה.

(33) הוכחה.

$$7 \quad (34)$$

$$4^n \quad (35)$$

## כלל קרמר

### שאלות

בשאלות 1-3 פתור את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{l}
 x + 2z + 5t = 8 \\
 -2x - 6y = -8 \\
 5x + 3y - 7z + 4t = 5 \\
 2x + 5y + 44z = 51
 \end{array}
 \quad (3)
 \quad
 \begin{array}{l}
 x + z = 3 \\
 4x + y + 8z = 21 \\
 2x + 3z = 8
 \end{array}
 \quad (2)
 \quad
 \begin{array}{l}
 x + 2y = 5 \\
 3x + 4y = 11
 \end{array}
 \quad (1)$$

$$kx + y + z + t + r = 1$$

$$x + ky + z + t + r = 1$$

(4) נתונה מערכת המשוואות:  $x + y + kz + t + r = 1$ .

$$x + y + z + kt + r = 1$$

$$, x + y + z + t + kr = 1$$

א. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{2}$ ?

ג. האם קיים  $k$  עבורו למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{5}$ ?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים  $x = y = z = t = r$ .

(5) יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ .

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$ .

ב. אם למערכת ההומוגנית  $(A^t A)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז  $|A| = 0$ .

ג. אם למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A| = 0$ .

### תשובות סופיות

$$x = 1, y = 2 \quad (1)$$

$$x = 1, y = 1, z = 2 \quad (2)$$

$$x = y = z = t = 1 \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{א. } k \neq 1, k \neq -4 \quad \text{ב. } k = -2 \quad \text{ג. לא} \quad \text{ד. הוכחה.}$$

$$(5) \quad \text{א. לא נכונה.} \quad \text{ב. לא נכונה.} \quad \text{ג. לא נכונה.}$$

## שימושי הדטרמיננטה

### שאלות

- 1) א. חשב את שטח המקבילית שקדקודיה :  
 1.  $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$   
 2.  $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$   
 ב. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו :  $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$   
 ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות :  $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$   
 ד. חשב את שטח המשולש שקדקודיו :  $(1,2), (3,4), (5,8)$ .
- הערה : בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

### תשובות סופיות

- 1) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג.  $3x - y + 4z + 2 = 0$ . ד. 2