

חישוב כמותי

פרק 13 - אלגברה ליניארית - פתרון מערכת משוואות

תוכן העניינים

1. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות.....1
2. מערכת משוואות הומוגנית.....6

פתרון וחקירת מערכות של משוואות ליניאריות

שאלות

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות :

$$\begin{array}{llll} 2x+y=4 & x-y=0 & x-4y=-7 & x+10y=11 \\ x+y=3 \quad \text{ד.} & 2x+y=3 \quad \text{ג.} & x-y=-1 \quad \text{ב.} & 2x-2y=0 \quad \text{א.} \end{array}$$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{llll} x=3 & 2x+y+z=3 & x-4y+z=-7 & x+10y=11 \\ 2x+y=4 \quad \text{ד.} & x-z=0 \quad \text{ג.} & x-y=-1 \quad \text{ב.} & 2x-2=0 \quad \text{א.} \\ z+t=8 & & x+y+z=5 & x+y=3 \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצע על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(5)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(4)} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{(3)} \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(6) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין :

$$\begin{array}{l} \text{א.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

בשאלות 7-15 הבא את המטריצות הבאות לצורה מדורגת
(בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה מדורגת קנונית):

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (14) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

* בשאלה 15, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה \mathbb{R} ופעם מעל השדה \mathbb{C} .

בשאלות 16-27 פתור את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה \mathbf{F} :

$$z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 = 1 + 4i$$

$$iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 = 2 + i$$

$$(-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 = 5 - i$$

א. $\mathbf{F} = \mathbb{R}$

ב. $\mathbf{F} = \mathbb{C}$

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{א.} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ד.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} (5) \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} (3)$$

6) א. $R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2$ ב. $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$ ג. $R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ב.} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ב.} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (10)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ב.} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R}$ $F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \quad (x, y) = (5 - 2t, t) \quad (17) \quad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \quad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \quad (x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \quad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \quad (x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t) \cdot \beta \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1) \cdot \alpha \quad (28)$$

מערכת משוואות הומוגנית

שאלות

(1) פתור את המערכת הבאה. על סמך הפתרון, קבע את הפתרון של המערכת

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{ההומוגנית המתאימה: } x + y + 2z = 6$$

(2) פתור את המערכת הבאה. על סמך הפתרון, קבע את הפתרון של המערכת

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{ההומוגנית המתאימה: } x + y + 2z = 6$$

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת: } -x + 2y - z = k$$

- א. מצא את ערכי m , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.
 ב. עבור ערך m שמצאת ב-א, מצא את ערכי k , עבורם למערכת פתרון.
 ג. עבור ערכי m, k שמצאת בסעיפים הקודמים, מצא את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבע את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(4) נתון שהחמישייה $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת

ליניארית נתונה. קבע אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

- א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.
 ב. החמישייה $(4, 0, 2, 0, 0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.
 ג. החמישייה $(4, 0, 2, 1, 1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.
 ד. לכל a ממשי, החמישייה $(4a, 0, 2a, 0, 0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.
 ה. החמישייה $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
 ו. החמישייה $(0, 1, 0, 1, 2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
 ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

תשובות סופיות

- (1) פתרון כללי של המערכת $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$.
פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$.
- (2) למערכת פתרון יחיד $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.
למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0, 0, 0)$.
- (3) א. $m = -3$ ב. $k = -2$ ג. פתרון כללי של המערכת $(x, y, z) = (t, t - 1, t)$.
פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא (t, t, t) .
- (4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.
ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.
ז. הטענה לא נכונה.