

# שדות אלקטרומגנטיים

פרק 1 - אנליזה וקטורית

תוכן העניינים

1. הסבר ותרגילים.....1

## הסבר ותרגילים:

### שאלות:

#### (1) שטח דיסקה

חשב שטח דיסקה בעלת רדיוס  $R$  (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.

#### (2) חישוב נפח כדור

חשב נפח של כדור באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות כדוריות.

#### (3) דיסקה עם חור

מצא את צפיפות המטען של דיסקה בעלת רדיוס  $R$  הטעונה במטען כולל  $Q$  המתפלג בצורה אחידה. בדיסקה קדחו חור ברדיוס  $r$ , מצא את כמות המטען שהוצאה מהדיסקה.

#### (4) מטען כולל בכדור

מצא את המטען הכולל בכדור בעל רדיוס  $R$  וצפיפות מטען:  $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$ .

#### (5) פירוק וקטור לרכיבים גליליים

נתון השדה הוקטורי הבא:  $\vec{A} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}$  כאשר  $a, b, c$  קבועים נתונים. א. האם  $\vec{A}$  וקטור קבוע?

ב. מצא את הרכיבים של  $\vec{A}$  בקואורדינטות גליליות ובטא אותן בעזרת:  $r, \theta, z$ .

#### (6) פירוק וקטור לרכיבים בקואורדינטות כדוריות

נתון השדה הוקטורי הבא:  $\vec{A} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}$  כאשר  $a, b, c$  קבועים נתונים.

מצא את הרכיבים של  $\vec{A}$  בקואורדינטות כדוריות ובטא אותן בעזרת:  $r, \varphi, \theta$ .

#### (7) $\text{divr}$

חשב את  $\vec{V} \cdot \vec{r}$  כאשר  $\vec{r}$  הוא וקטור המיקום. בצע את החישוב בקואורדינטות קרטזיות גליליות וכדוריות.

**(8) הוכחה של דיברגנט של סקלרית כפול וקטורית**

הוכח את הזהות הבאה:  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{f} \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f$  כאשר  $\vec{A}$  היא פונקציה וקטורית כלשהיא ו- $f$  היא פונקציה סקלרית כלשהיא.

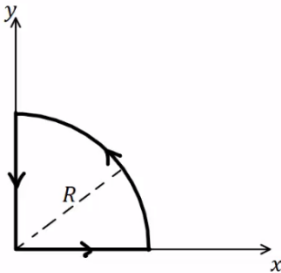
**(9) אינטגרל קווי על רבע מעגל**

נתונה הפונקציה הוקטורית הבאה:  $\vec{F} = 2\hat{r} + 3\hat{\phi} - 5\hat{\theta}$

בקואורדינטות כדוריות כאשר  $\phi$  היא הזווית עם ציר  $z$ .

א. חשב את:  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$  לאורך המסלול הרבע מעגלי באיור.

ב. חשב את:  $\int \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{s}$  על השטח שכלוא בתוך המסלול.



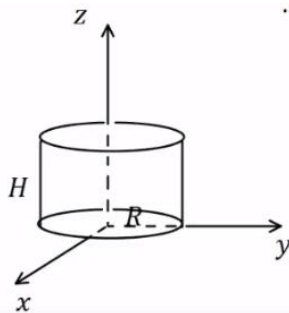
**(10) אינטגרל על מעטפת גלילית**

נתונה הפונקציה הוקטורית הבאה:  $\vec{F} = ar\hat{r} + b\hat{\theta} + czz$ , בקואורדינטות גליליות, כאשר  $a, b, c$  קבועים נתונים.

נתונה מעטפת גלילית ברדיוס  $R$  וגובה  $H$  הנמצאת כך שציר הסימטריה שלה הוא ציר ה- $z$  ובסיסה מונח על מישור  $xy$ .

א. חשב את:  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$  על כל שטח המעטפת הגלילית.

ב. חשב בצורה מפורשת את:  $\int \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{v}$  על הנפח הכלוא בתוך המעטפת.



**(11) מצא וקטור יחידה מאונך לפונקציה**

מצא וקטור יחידה המאונך לפונקציה:  $f = ax^2 + by^2 + cz^2$ .  
הוקטור צריך להיות פונקציה של:  $x, y, z$ .

**(12) מציאת רכיב בכיוון הגרדיאנט**

נתונה הפונקציה הסקלרית:  $f(x, y, z) = 2xy$

והפונקציה הוקטורית:  $\vec{A} = 2\hat{x} + 5\hat{y} - 4\hat{z}$

א. חשב את:  $\vec{\nabla} f$ .

ב. מצא את הרכיב של  $\vec{A}$  בכיוון של  $\vec{\nabla} f$  בנקודה המתאימה ל- $x=2, f=12$ .

**(13) הוכחה של דיב-רוט שווה לאפס**

הוכח כי:  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ .

**14) חוק סטוקס על מסלול של קווים ישרים**

נתון השדה הוקטורי:  $\vec{A} = y\hat{x} - x\hat{y}$ .

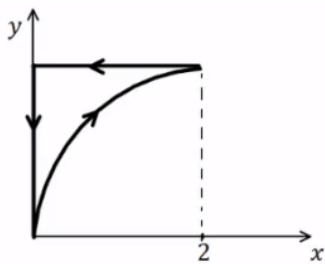
א. חשב את האינטגרל הקווי:  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$  לאורך המסלול המתואר ע"י הקווים

הישרים המחברים בין הנקודות הבאות במישור  $xy$ :

$$(0,0) \rightarrow (2,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (0,0)$$

ב. חשב את האינטגרל המשטחי:  $\int \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{s}$  על השטח הסגור בתוך

המסלול של סעיף א'.

**15) חוק סטוקס על מסלול פרבולי**

נתון שדה וקטורי:  $\vec{A} = x^2 y \hat{x} + y^2 x \hat{y} + C \cos(\beta y) \hat{z}$

כאשר  $\beta$  ו- $C$  קבועים נתונים.

א. חשב את האינטגרל:  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$  על המסלול

המתואר באיור.

משוואת העקום היא:  $y^2 = bx$  כאשר  $b$  קבוע נתון.

ב. חשב את האינטגרל:  $\int \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{s}$  על השטח התחום ע"י המסלול.

### תשובות סופיות:

$$. S = \pi R^2 \quad (1)$$

$$. V = \frac{4\pi R^3}{3} \quad (2)$$

$$. \sigma = \frac{Q}{\pi R^2}, q = Q \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (3)$$

$$. Q = \rho_0 \pi R^3 \quad (4)$$

$$. A_r = a \cos \theta + b \sin \theta, A_\theta = -a \sin \theta + b \cos \theta, A_z = C \quad \text{ב. א. כן.} \quad (5)$$

$$, A_r = a \sin \varphi \cos \theta + b \sin \varphi \sin \theta + C \cos \varphi, A_\varphi = a \cos \varphi \cos \theta + b \cos \varphi \sin \theta - C \sin \varphi \quad (6)$$

$$. A_\theta = -a \sin \theta r b \cos \theta$$

$$. \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \quad (7)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (8)$$

$$. \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = -5R \frac{\pi}{2} \quad \text{א. ב.} \quad \int \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{s} = -5R \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

$$. \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = (2a + C) \pi R^2 H \quad \text{א. ב.} \quad \int \vec{\nabla} \times \vec{F} dv = (2a + C) \pi R^2 H \quad (10)$$

$$. \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{(ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2}} (ax, by, cz) \quad (11)$$

$$. \vec{\nabla} f = 2y\hat{x} + 2x\hat{y} + 0 \cdot \hat{z} \quad \text{א. ב.} \quad \frac{16}{13}(3, 2) \quad (12)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (13)$$

$$. \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = -2 \quad \text{א. ב.} \quad \int \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = -2 \quad (14)$$

$$. \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{21} 2^{\frac{7}{2}} b^{\frac{1}{2}} + \frac{2^{\frac{5}{2}}}{5} b^{\frac{3}{2}} \quad \text{א. ב.} \quad \int \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{5} b^{\frac{3}{2}} - \frac{2^{\frac{7}{2}}}{21} b^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$