

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 10 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1. הסבר כללי על בעיות קיצון 1
2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים 2
3. בעיות קיצון בהנדסת המישור 3
4. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים 7
5. בעיות קיצון בהנדסת המרחב 11
6. בעיות קיצון עם תשובה נתונה 13

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

שאלות

- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (2) מצא את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו, הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
 - א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
 - ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
 - ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (4) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x + 6y = 60$.
 - א. הבע את y באמצעות x .
 - ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y ,
 - כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
 - ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות

- (1) 8,8,8
- (2) 1
- (3) א. 12,12,12 ב. 8,12,16 ג. מקרה א'.
- (4) א. $y = 10 - \frac{x}{6}$ ב. $x = 30, y = 5$ ג. $M = 22500$.

בעיות קיצון בהנדסת המישור

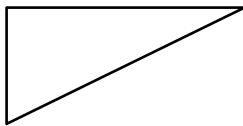
שאלות

(1) מבין כל המשולשים שווים השוקיים שהיקפם 24 ס"מ, מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

(2) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מבין כל המשולשים שווים השוקיים שהיקפם a , מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווים השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.



(3) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



(4) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC , כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן. נתון: $AB = 20$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ. מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



(5) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC , כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן. נתון: $AB = a$, $BC = b$. מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



(6) במשולש ישר הזווית ABC ($\angle B = 90^\circ$), AD הוא תיכון לניצב BC . ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצא מה צריכים להיות אורכי הניצבים, עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



- 7 נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור.
מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$ על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקוים. מצא את x , עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.



- 8 נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ. מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה, ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות, כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש המקווקו. מצא מה צריך להיות ערכו של x , עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.

- 9 הנקודות K, L, M ו-N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD, כך ש:



- א. $BK = BL = DM = DN = x$.
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.
הבע באמצעות x את סכום שטחי המשולשים: $\triangle AKN + \triangle KBL + \triangle CLM + \triangle DNM$.
ב. מצא מה צריך להיות x , כדי ששטח המרובע LKNM יהיה מקסימלי.
ג. מהו השטח של המרובע LKNM, במקרה זה?



- 10 המרובע ABCD הוא מקבילית.
מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF, הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD. ידוע כי מידות המקבילית הן: $AB = 8$ ס"מ, $AD = 2$ ס"מ.
מסמנים את אורך הצלע DE ב- x .
א. הבע באמצעות x את אורך הצלע DF.
ב. מצא את x , עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.
ג. מה הוא הסכום המינימלי?

11) חיים הוא אחד מעובדי חברת 'דפוס יהלום בע"מ'.

תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי, כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

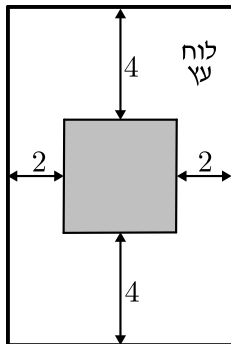


יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי, ששאל אותו את השאלה הבאה:
"יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות, אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.

מה הן המידות של גלויה, אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?"

א. עזור לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראה דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?



12) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה:

יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ,

ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר,

כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ,

ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס"מ (ראה איור).

כדי לבחור את מידות לוח העץ,

אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי

שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).

א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

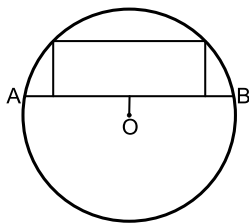
ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

13) במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ ס"מ העבירו

מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



14) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB

שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



15) שני רוכבים יוצאים בו זמנית לדרכם:

האחד מעיר A מערבה לעיר B, והשני מעיר B דרומה לעיר C.

המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.

מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש

ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש.

כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים, יהיה המרחק ביניהם מינימלי?

מצא גם את המרחק המינימלי.



- 16) אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה. האדם שוחה במהירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות, כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



- 17) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר, ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

תשובות סופיות

- 1) $4\sqrt{3}$ ס"מ.
- 2) א. 2.5 ס"מ.
- 3) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר. ג. $6\sqrt{2} \approx 8.48$ ס"מ.
- 4) 80 סמ"ר S .
- 5) $\frac{ab}{4}$ יחידות שטח.
- 6) 4 ס"מ, 16 ס"מ.
- 7) $x = 2.75$
- 8) $x = 6$
- 9) א. $2x^2 - 32x + 240$ ב. $x = 8$ ג. 128 סמ"ר S .
- 10) א. $DF = \frac{8x}{x-2}$ ב. $x = 6, L = \frac{x^2 + 6x}{x-2}$ ג. $L = 18$
- 11) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ. ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.
- 12) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ. ב. $S = 98$
- 13) 92 ס"מ.
- 14) $2\sqrt{5}R - 2a$ יחידות אורך.
- 15) 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק"מ.
- 16) $2\frac{1}{3}$ ק"מ.
- 17) 4.6

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

שאלות



- (1) נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



- (2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2$, כמתואר באיור. הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, בהתאמה, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



- (3) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y , כך שנוצר מלבן (מסומן באיור). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
א. הבע באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
ב. מצא את ערכו של t , עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?

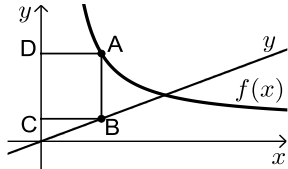


- (4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 36 - x^2$. על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- x , שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x , ו-O ראשית הצירים.
א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?



(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x}$, ונתון הישר: $y = -x - 3$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$
והנקודה B נמצאת על גרף הישר, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



(6) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה: $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y = \frac{9x}{25}$.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y , כך שנוצר המלבן ABCD.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

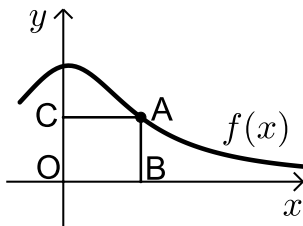
א. הבע באמצעות t את היקף המלבן ABCD.

ב. מצא את t , עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

(7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ונתון הישר $y = 2x$.

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן. מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.



(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום: $x \geq 0$.

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



(9) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$. מעבירים

משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

א. מצא את משוואת המשיק.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$

ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק,

כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

ב. מצא את שיעורי הנקודה A, עבורן אורך

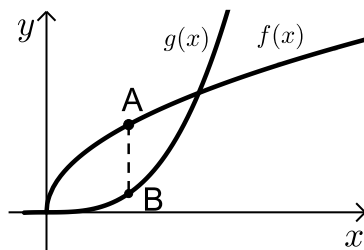
הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

(10) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק

בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.



(11) נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

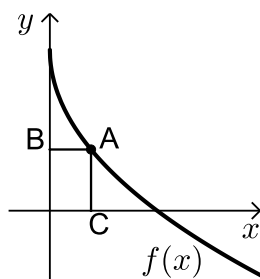
את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה

B, שנמצאת מתחתיה, על $g(x)$, כך שהקטע

AB מקביל לציר ה- y .

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A,

כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



(12) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה

$$f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$$

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון.

מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים

אותם בנקודות B ו-C, כמתואר באיור.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את סכום הקטעים AC+AB.

ב. מצא את ערכו של t , עבורו סכום הקטעים

הנ"ל יהיה מינימלי.

(13) נתונות הפונקציות $f(x) = 1 - x^2$ ו- $g(x) = bx^2$ ($b > 0$).

הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B.

מצא את ערכו של b , שבעבורו הקטע AO מינימלי (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות

(1) $A(4,8)$

(2) $A(0.5,12.25)$

(3) $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$ א. $t = 1$ ב. $S = 8$ ג.

(4) $A(2,32)$ א. $S = 128$ ב.

(5) $A(2,2)$

(6) $P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t - 1}$ א. $t = 4\frac{3}{4}$ ב. $P = 12.88$ ס"מ ג.

(7) $1 \cdot 2$

(8) $A(2,2)$ א. $A(0,4)$ ב.

(9) $y = -3x - 5$ א. $A(4,7)$ ב. $AB = 24$ ג.

(10) $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

(11) $A(1,2)$

(12) $l = t + 6 - 3\sqrt{t}$ א. $t = 2.25$ ב.

(13) $b = 1$

בעיות קיצון בהנדסת המרחב

שאלות

- (1) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.



- (2) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן, שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה, כמתואר באיור. ידוע כי גובה התיבה h וצלע המלבן הקטנה x מקיימים: $x + h = 9$. מצא מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.



- (3) נתונה תיבה שגובהה הוא h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא x . נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים $4x + h = 63$.
א. הבע את h באמצעות x .
ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .
ג. מה צריך להיות ערכו של x , כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?



- (4) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק. יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5 מרוחבו, כמתואר באיור הסמוך. כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת, ולכן הוא רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח שעליו להשתמש, כדי להשיג את מבוקשו. מצאו את כמות הפח המינימלית.

- (5) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה, דרושים שני חומרים, ולהם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

- (6) מכל הגלילים הישרים, שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k , מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



7) באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע, וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- x וגובהו ב- h .

ידוע כי הסכום של x ו- h הוא 12 ס"מ.

א. הבע באמצעות x את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. הבע באמצעות x

1. את נפח הגליל.

2. את נפח התיבה.

ג. מצא את x , עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.

אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא k ושטח המעטפת שלה הוא S .

הוכח: $S < 2k^2$.

תשובות סופיות

1) 4·4·4 ס"מ.

2) בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

3) א. $h = 63 - 4x$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $x = 9$

4) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו-5 ס"מ.

5) 8·6·3 ס"מ.

6) $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח V .

7) א. $2x$ ב. 1. $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$ 2. $V = 48x^2 - 4x^3$ ג. $x = 8$

8) שאלת הוכחה.

בעיות קיצון עם תשובה נתונה

בעיות קיצון בהנדסת המרחב

(1) נתונים שני מספרים חיוביים, p ו- q , שסכומם a .
הראה, שכאשר מתקיים $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$, ערך הביטוי $p^n q^m$ מקסימלי (כאשר n ו- m טבעיים).

(2) הוכח שמכל החרוטים הישרים שנפחם πk סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.
(שטח מעטפת של חרוט הוא πRl , כאשר l הוא הקו היוצר של החרוט)

בעיית קיצון עם תנועה

(3) מהירותו של רכב היא v קמ"ש ועליו לנסוע דרך של S ק"מ.
לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v}{400}$ ₪ לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200} + 48$ ₪ לכל שעת נסיעה.
הראה שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות, על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il